



**HAL**  
open science

# L'apport d'une situation de jeu pour la construction du raisonnement

Myrtille Maillet Ponge

► **To cite this version:**

Myrtille Maillet Ponge. L'apport d'une situation de jeu pour la construction du raisonnement. Education. 2020. dumas-03033943

**HAL Id: dumas-03033943**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-03033943v1>**

Submitted on 1 Dec 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**Master MEEF**  
**"Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation  
et de la Formation"**  
**Mention second degré**  
**Mémoire**

**L'apport d'une situation de jeu pour la  
construction du raisonnement**

**Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
grade de master**

**soutenu par Myrtille Maillet  
le 18 juin 2020**

en présence de la commission de soutenance composée de :  
Claire Gaudel-Maeght, directrice de mémoire  
Marie-Christine Semenou, membre de la commission

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Cadre théorique et problématique</b>	<b>8</b>
<b>1</b>	<b>Cadre théorique</b>	<b>9</b>
1.1	Théorie des situations didactiques (TSD) de Guy Brousseau . . . . .	9
1.1.1	Situation . . . . .	9
1.1.2	Situation didactique . . . . .	9
1.1.3	Situation adidactique . . . . .	10
1.1.4	Type de situation adidactique . . . . .	11
1.1.5	Contrat didactique . . . . .	11
1.1.6	La dévolution . . . . .	12
1.1.7	Institutionnalisation . . . . .	12
1.1.8	L'utilisation de la TSD dans ce mémoire . . . . .	12
1.2	Le jeu . . . . .	12
1.2.1	Les critères de jeu de Brougère . . . . .	13
1.2.2	Les jeux sérieux . . . . .	13
1.3	Raisonner . . . . .	14
1.3.1	Définition . . . . .	14
1.3.2	Les attentes curriculaires . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Problématique</b>	<b>15</b>
<b>II</b>	<b>Corpus, méthodologie, analyse à priori et recueil de données</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>Le jeu utilisé : Match point</b>	<b>17</b>
3.1	Présentation du jeu . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Situation étudiée : comment atteindre un score maximal ?</b>	<b>21</b>
4.1	Description générale de la situation . . . . .	21
4.1.1	Situation avec 3 pièces . . . . .	22
4.1.2	Situation avec 5 pièces . . . . .	22
4.2	Ce que l'on cherche dans ces situations de jeu . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Analyse à priori de la situation</b>	<b>23</b>
5.1	La situation et le cadre didactique . . . . .	23
5.1.1	Situation d'inspiration adidactique . . . . .	23
5.1.2	Situation d'action et interaction avec le milieu . . . . .	24
5.1.3	Situation de formulation . . . . .	24
5.1.4	Situation de preuve . . . . .	24

5.1.5	Institutionnalisation . . . . .	24
5.1.6	Critère de jeu . . . . .	24
5.1.7	Les principales variables didactiques . . . . .	24
5.2	Résolution de l'activité avec 3 pièces . . . . .	25
5.2.1	Choix des pièces . . . . .	25
5.2.2	Calcul du score maximal . . . . .	25
5.2.3	Choix de la disposition . . . . .	25
5.3	Preuve de l'obtention du maximum avec 5 pièces . . . . .	27
5.3.1	Quelques principes généraux . . . . .	27
5.3.2	Pentaminos . . . . .	27
5.3.3	Disposition en "I" . . . . .	28
5.3.4	Disposition en "L" . . . . .	29
5.3.5	Disposition en "P" . . . . .	31
5.3.6	Disposition en "V" . . . . .	33
5.3.7	Disposition en "F", en "N", en "T", en "U", en "W", en "X", en "Y" et en "Z" . . . . .	33
5.3.8	Conclusion de la preuve . . . . .	41
5.4	Ce que l'on attend des élèves . . . . .	41
5.5	Difficultés envisagées . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Recueil de données</b>	<b>42</b>
6.1	Recueil écrit . . . . .	42
6.1.1	Questions posées sur la situation avec 3 pièces . . . . .	42
6.1.2	Questions posées sur la situation avec 5 pièces . . . . .	42
6.1.3	Questions posées à la fin de la séance . . . . .	43
<b>III</b>	<b>Résultats, analyse et perspectives</b>	<b>44</b>
<b>7</b>	<b>Données recueillies</b>	<b>46</b>
7.1	Recueil oral de données . . . . .	46
7.1.1	Retranscription de l'enregistrement audio d'un binôme et phase de jeu . . . . .	46
7.2	Questions posées à l'écrit . . . . .	47
7.2.1	Question sur le raisonnement . . . . .	47
7.2.2	Question sur le ressenti . . . . .	51
7.3	Recueil vidéo de données . . . . .	52
7.3.1	Retranscription de l'enregistrement vidéo de la conclusion en classe entière . . . . .	52
<b>8</b>	<b>Interprétation de la situation, des résultats et mise en perspective</b>	<b>54</b>
8.1	Interprétation . . . . .	54
8.1.1	La TSD . . . . .	54
8.1.2	Le jeu . . . . .	57
8.1.3	Le raisonnement . . . . .	58
8.2	Synthèse . . . . .	59
8.3	Ouverture sur le caractère "groupé" . . . . .	59
	<b>Bibliographie</b>	<b>61</b>
<b>A</b>	<b>Un exemple d'activité de la brochure de Match Point</b>	<b>63</b>

# Table des figures

1.1	Triangle didactique de Brousseau dans une situation didactique de base . . . . .	10
1.2	Triangle didactique de Brousseau dans une situation d'apprentissage spontané. . .	10
1.3	Interaction de l'élève avec le milieu . . . . .	11
3.1	Pièce "vide" . . . . .	17
3.2	Exemple d'une pièce . . . . .	18
3.3	Toutes les pièces du jeu (sans les jokers) . . . . .	19
3.4	Exemple d'un coup : les points comptabilisés correspondent à la pose de la pièce entourée de noir. . . . .	20
3.5	Coup non valable : les pièces ne sont pas alignées. . . . .	20
4.1	Exemple d'une situation avec 3 pièces . . . . .	21
5.1	Toutes les pièces ne comportant pas de 1. . . . .	25
5.2	Score atteint : $5 \times 2 + 4 \times 2 + 3 \times 2 + 2 \times 2 = 28$ . . . . .	25
5.3	Score atteint : $5 \times 3 + 4 \times 2 + 3 \times 2 = 29$ . . . . .	26
5.4	Réponse d'un deuxième binôme pour le score maximal avec 3 pièces . . . . .	27
5.5	Les douze formes de pentaminos. . . . .	28
5.6	Disposition en "I" . . . . .	28
5.7	Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "I" . . . . .	28
5.8	Exemple d'une disposition en "I" dont le score est 56. . . . .	29
5.9	Disposition en "L" . . . . .	29
5.10	Exemple d'une disposition en "L" dont le score est 57. . . . .	30
5.11	Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "L" . . . . .	30
5.12	Les doublés dans une disposition en "L" . . . . .	31
5.13	Disposition en "P" . . . . .	31
5.14	Exemple d'une disposition en "P" dont le score est 57. . . . .	32
5.15	Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "P" . . . . .	32
5.16	Disposition en "V" . . . . .	33
5.17	Exemple d'une disposition en "V" dont le score est 54. . . . .	33
5.18	Disposition en "F" . . . . .	33
5.19	Disposition en "N" . . . . .	34
5.20	Disposition en "T" . . . . .	34
5.21	Disposition en "U" . . . . .	34
5.22	Disposition en "W" . . . . .	34
5.23	Disposition en "X" . . . . .	34
5.24	Disposition en "Y" . . . . .	35
5.25	Disposition en "Z" . . . . .	35

5.26	Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "F" . . . . .	35
5.27	Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "N" . . . . .	36
5.28	Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "T" . . . . .	36
5.29	Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "U" . . . . .	36
5.30	Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "W" . . . . .	37
5.31	Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "X" . . . . .	37
5.32	Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "Y" . . . . .	37
5.33	Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "Z" . . . . .	38
5.34	Exemple d'une disposition en "N" dont le score est 53. . . . .	38
5.35	Exemple d'une disposition en "T" dont le score est 47. . . . .	39
5.36	Exemple d'une disposition en "U" dont le score est 55. . . . .	39
5.37	Exemple d'une disposition en "W" dont le score est 54. . . . .	39
5.38	Exemple d'une disposition en "X" dont le score est 42. . . . .	40
5.39	Exemple d'une disposition en "Y" dont le score est 54. . . . .	40
5.40	Exemple d'une disposition en "Z" dont le score est 54. . . . .	40
7.1	Réponse d'un binôme pour le score maximal avec 3 pièces . . . . .	47
7.2	Réponse d'un deuxième binôme pour le score maximal avec 3 pièces . . . . .	47
7.3	Exemple de dispositions trouvées par les élèves avec 3 pièces . . . . .	47
7.4	Réponse d'un binôme pour le score maximal avec 5 pièces . . . . .	48
7.5	Exemple de dispositions trouvées par les élèves avec 5 pièces dont le score est 46. . . . .	48
7.6	Exemple de dispositions trouvées par les élèves avec 5 pièces dont le score est 47. . . . .	49
7.7	Exemple de dispositions trouvées par les élèves avec 5 pièces dont le score est 52. . . . .	50
A.1	Exemple d'une activité de la brochure APMEP . . . . .	63

# Remerciements

Je tiens à remercier Claire Gaudeul-Maeght pour le temps qu'elle a su m'accorder au cours de cette année. La qualité de son suivi de mémoire et l'acuité de ses remarques m'ont permis d'avancer de manière structurée et par étapes.

Je remercie également chaleureusement mes amis et collègues de l'Institut National Supérieur du Professorat et de l'Education (INSPE) dont l'esprit à la fois collaboratif et bienveillant a été une source de motivation importante.

Je remercie tout particulièrement Stéphane Robert ainsi que le groupe "Jeux" de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP) pour leur enthousiasme et pour leurs précieux conseils relatifs au jeu Match Point.

J'adresse tous mes remerciements à ma famille pour son soutien et pour avoir consacré quelques soirées à jouer à Match Point.

Enfin je souhaite remercier mes trois enfants, Titouan, Albin et Adélie, qui ont regardé avec étonnement leur maman travailler sur ces "piscines de chiffres".

# Introduction

L'enquête PISA (*Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA)*, 2019) réalisée tous les quatre ans, montre que le niveau des élèves français en mathématiques a baissé entre 2003 et 2015. Concomitamment, la France se classe dernière au niveau européen dans l'enquête TIMSS (*Mathématiques : clefs de lecture des résultats TIMSS 2015*, 2017) qui évalue les acquis des élèves de 15 ans en mathématiques et plus généralement en sciences.

Ces résultats interpellent et ouvrent la réflexion sur nos méthodes d'enseignement. Stanislas Dehaene, chercheur en neurosciences cognitives, insiste sur la nécessité de rendre l'enfant "actif, curieux, engagé, autonome" (Dehaene, 2018). L'auteur montre, par ailleurs, que "le jeu peut augmenter la capacité d'apprentissage de l'enfant". Ces résultats issus de travaux scientifiques convergent avec les "21 mesures pour l'enseignement des mathématiques" proposées dans le rapport Villani-Torossian : "Afin de ne pas laisser s'installer l'anxiété face à la tâche scolaire en mathématiques, inspirons-nous du Canada, de Singapour, des États-Unis ou encore du Nord de l'Europe, où les activités scolaires en mathématiques sont la plupart du temps associées à la notion de plaisir. Jeux, énigmes, concours, défis et histoires sont au rendez-vous!" (Villani & Torossian, 2018) Ce rapport donne une place importante à la manipulation et à la verbalisation dans l'enseignement des mathématiques. Eric Trouillot met en avant "Ces étapes [qui] sont essentielles dans les mécanismes cognitifs d'acquisition des connaissances. Manipuler, verbaliser, jouer facilitent la mentalisation des concepts mathématiques en présence : c'est cette proximité à la fois mentale et affective qui fait parfois défaut à certains de nos élèves, particulièrement ceux de milieux défavorisés." (Trouillot, 2020)

Les travaux pilotés par le Ministère de l'Éducation Nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche via la plate-forme Eduscol soulignent l'importance du jeu dans l'enseignement : "La pratique du jeu permet de gagner du temps dans la compréhension des connaissances, rend plus pérennes les savoir-faire essentiels en mathématiques et permet de développer des compétences diverses" (Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2016b)

Tant les neurosciences que le Ministère de l'Éducation Nationale nous incitent à réfléchir sur nos méthodes d'enseignement face aux résultats inquiétants des enquêtes internationales. Le jeu semble apparaître comme une des solutions permettant de rendre l'élève acteur de son apprentissage et de stimuler son intelligence.

Au cours d'une séance avec une classe de sixième, en fin d'année scolaire 2018-2019, j'ai proposé un jeu ayant pour but de consolider les connaissances sur les périmètres et les aires. J'ai été très surprise de constater à quel point les élèves sont entrés avec plaisir dans l'activité. Ils n'ont pas vu l'heure passer : "C'est déjà fini madame?". Les séances suivantes ont été régulièrement ponctuées par des questions du type : "Est-ce qu'on joue aujourd'hui?". Nous étions début juin et je n'ai pas eu l'occasion de leur proposer un nouveau jeu avant la fin de l'année. Alors qu'il était



parfois difficile de les mettre au travail, j'ai été étonnée de leur concentration et de leur plaisir à jouer lors de cette séance. L'objectif de motivation a, semble-t-il, été atteint mais l'évaluation de l'apport du jeu sur le plan des connaissances mathématiques a été difficile à mesurer.

Au-delà du plaisir indéniable des élèves lors d'une séance de jeu, quels peuvent être les apports mathématiques ? Cette question représente le point de départ de mon mémoire. La motivation des élèves m'a semblé tellement importante lors de cette séance qu'il me paraît pertinent d'analyser plus en détail la place du jeu dans les apprentissages.

Nous allons commencer par développer la théorie des situations didactiques de Brousseau qui nous servira à créer et à analyser une situation de jeu. Nous présenterons ensuite la situation, le jeu utilisé, la méthodologie et l'analyse à priori de la situation. Enfin, nous analyserons les résultats de l'expérience avant d'aborder les perspectives.

Première partie

Cadre théorique et problématique

# Chapitre 1

## Cadre théorique

Afin de construire et d'analyser une situation de jeu adéquate, nous avons choisi d'utiliser comme cadre théorique la Théorie des situations didactiques (TSD) de Guy Brousseau. Cette théorie, développée dans la section suivante, semble pertinente pour concevoir et analyser des situations de jeu ((Pelay, 2011)).

### 1.1 Théorie des situations didactiques (TSD) de Guy Brousseau

La TSD repose sur deux types de situation : les situations didactiques et les situations non-didactiques. Les situations non-didactiques sont, par exemple, les situations de la vie quotidienne pour lesquelles il n'y a pas de volonté d'enseigner.

Parmi les situations didactiques, Brousseau s'est particulièrement intéressé aux situations adidactiques. Les situations didactiques et adidactiques sont organisées pour permettre un apprentissage. La différence principale entre les deux situations se situe au niveau de la position et du rôle des acteurs par rapport au savoir à enseigner.

#### 1.1.1 Situation

Brousseau détermine le terme "situation" comme "l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve, et des relations qui l'unissent à son milieu." (Kuzniak, 2005)

#### 1.1.2 Situation didactique

Tel que résumé par Kuzniak (2005), la situation didactique de Brousseau "est une situation où se manifeste directement ou indirectement une volonté d'enseigner"(Kuzniak, 2005). Cette situation fonctionne sur la base d'un triptyque faisant interagir le système éducatif, le savoir scolaire et l'étudiant :

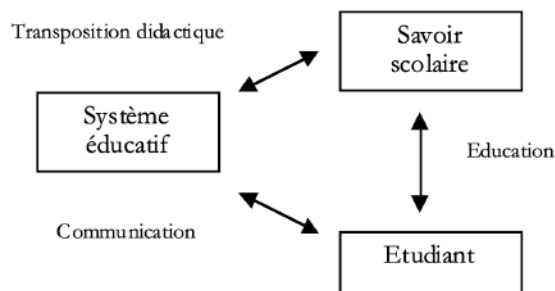


FIGURE 1.1 – Triangle didactique de Brousseau dans une situation didactique de base

### 1.1.3 Situation adidactique

Brousseau propose de mettre l'élève dans une situation d'apprentissage dans laquelle le professeur a "l'intention d'enseigner un contenu mathématique tout en laissant à l'élève la marge de manoeuvre et d'initiative la plus grande possible" (Kuzniak, 2005).

Dans cette situation adidactique, le professeur se met en retrait et doit se donner pour objectif principal d'établir les conditions "les plus favorables à la mise en action de l'élève" (Kuzniak, 2005). Dans cette situation, la situation d'enseignement disparaît du point de vue de l'élève.

De la même manière que pour la situation didactique, la situation adidactique repose sur un triptyque. Ce dernier fait interagir la connaissance, l'apprenti et le milieu :

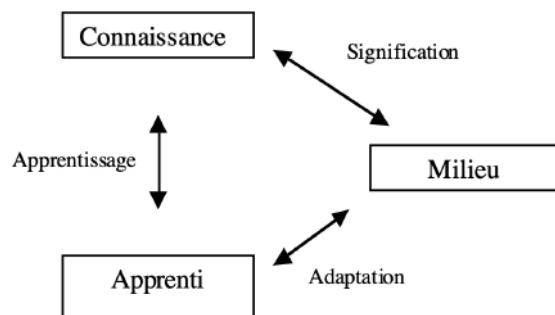


FIGURE 1.2 – Triangle didactique de Brousseau dans une situation d'apprentissage spontané.

#### Le milieu

Le milieu correspond à l'environnement préparé par l'enseignant et dans lequel l'élève évolue en situation d'apprentissage. Le milieu "doit réagir aux propositions de l'élève dans une perspective d'apprentissage."(Kuzniak, 2005) Dans une situation adidactique, le milieu sert pour la validation de la situation et permet des rétroactions.

D'après Chevallard (1986), "l'enseignant n'a pas pour mission d'obtenir des élèves qu'ils apprennent, mais bien de faire en sorte qu'ils puissent apprendre. Il a pour tâche, non la prise en charge de l'apprentissage, ce qui demeure par nature hors de son pouvoir, mais la prise en charge de la création de conditions de possibilité de l'apprentissage."(Chevallard, 1986) Le milieu est essentiel dans ce type de situation car il permet la validation ou l'invalidation de la réponse de l'élève.

### 1.1.4 Type de situation adidactique

Brousseau a introduit trois types de situations adidactiques qui "graduellement conduisent l'élève à préciser les connaissances utilisées pour résoudre un problème" (Kuzniak, 2005). Ces trois types de situations se nomment "situation d'action", "situation de formulation" et "situation de preuve" et se définissent comme suit :

#### Situation d'action

Dans ce type de situation, "le sujet est confronté à un milieu qui interagit avec lui. Agir consiste pour le sujet à choisir des états du milieu en fonction de ses propres motivations." (Kuzniak, 2005) Kuzniak propose la représentation suivante des liens et interactions entre le milieu et l'élève :

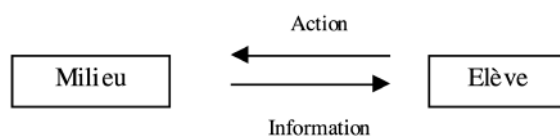


FIGURE 1.3 – Interaction de l'élève avec le milieu

#### Situation de formulation

Pour aller au-delà de la situation d'action, Brousseau propose des situations de formulation "souvent appuyées sur l'obligation faite à l'élève de communiquer avec un autre interlocuteur. La formulation des connaissances utiles pour maîtriser l'action met en oeuvre des répertoires linguistiques et facilite également leur acquisition." (Kuzniak, 2005)

La situation de formulation peut, par exemple, être mise en place avec deux élèves : un premier élève en guide un second qui agit sur le milieu selon les instructions du premier élève. Les retours du premier élève ou du milieu permettent une validation de la formulation.

#### Situation de preuve

Dans les situations d'action et de formulation se trouvent des corrections et des régulations empiriques du fait de l'interaction des élèves entre eux ou avec le milieu. Pour avancer dans la construction du savoir, Brousseau propose un nouveau type de formulation. Selon l'auteur, il ne s'agit plus simplement "d'échanger des informations mais de coopérer avec un partenaire pour rechercher la vérité" (Kuzniak, 2005). L'élève élabore des preuves de la validité et de la pertinence de son modèle d'action. Ses connaissances lui permettent de prouver et de convaincre un interlocuteur.

### 1.1.5 Contrat didactique

Brousseau nomme comme "contrat didactique" les accords implicites ou explicites passés entre l'enseignant et l'enseigné. Ce n'est pas réellement un contrat mais plutôt un accord tacite qui ressemble à un contrat : "Dans une situation d'enseignement, préparée et réalisée par un maître, l'élève a en général pour tâche de résoudre le problème (mathématique) qui lui est présenté, mais l'accès à cette tâche se fait à travers une interprétation des questions posées, des informations fournies, des contraintes imposées qui sont des constantes de la façon d'enseigner du maître. Ces habitudes (spécifiques) du maître attendues par l'élève et les comportements de l'élève attendus par le maître, c'est le contrat didactique." (Brousseau, 1998) Le contrat didactique porte donc

sur les habitudes d'enseignement mais ne précise pas la nature du savoir qui va être enseigné puisqu'au début de l'apprentissage, "l'élève ignore la nature réelle du savoir qu'on veut lui faire acquérir." (Kuzniak, 2005)

Le contrat est fortement didactique "lorsque l'enseignant se préoccupe de la bonne réception par l'élève de ce savoir" (Kuzniak, 2005). Le contrat didactique est indispensable dans l'équilibre de la situation adidactique. Dans ces situations, les interventions du professeur sont minimales. Le contrat entre le professeur et l'élève doit être défini avant pour que les attentes du professeur soient claires et pour que l'élève sache comment interagir avec le milieu et dans quel but. Au contraire, un contrat faiblement didactique peut être illustré par une conférence ou un cours magistral : le savoir est transmis du professeur vers l'élève sans que le professeur attende une posture particulière de l'élève autre que l'écoute.

### **1.1.6 La dévolution**

Le professeur a la responsabilité de construire la situation adidactique et de faire entrer l'élève dans cette situation. Il doit faire en sorte que la résolution du problème soit de la responsabilité de l'élève. La dévolution est "l'acte par lequel le professeur obtient que l'élève accepte, et peut accepter, d'agir dans une situation adidactique. Il accepte les conséquences de ce transfert, en prenant le risque et la responsabilité de ses actes dans des conditions incertaines." (Kuzniak, 2005) La dévolution implique une posture particulière du professeur qui "s'efforce d'exclure de ses interventions celles qui ont trait à la solution" (Kuzniak, 2005). Une situation est dévolue à l'élève seulement dans le cas d'une situation adidactique.

### **1.1.7 Institutionnalisation**

Le processus d'institutionnalisation est le processus qui va permettre à l'élève de transformer sa connaissance acquise en un savoir universel et réutilisable. Selon Brousseau, "l'institutionnalisation est le passage pour une connaissance de son rôle de moyen de résolution d'une situation d'action, de formulation ou de preuve, à un nouveau rôle : celui de référence pour des utilisations futures, collectives ou personnelles" (Brousseau, 2011).

### **1.1.8 L'utilisation de la TSD dans ce mémoire**

Dans le cas présent, nous allons essayer d'approcher d'une situation adidactique qui servira d'objet d'étude. Le but recherché est d'immerger les élèves 1/dans une situation d'action, 2/dans une situation de formulation et 3/dans une situation de preuve. Nous utiliserons le jeu comme milieu rétroactif.

De manière à étudier à posteriori le travail de l'élève et sa relation au savoir, nous donnons des supports de rédaction afin d'analyser les différentes situations décrites précédemment.

L'institutionnalisation sera étudiée également.

## **1.2 Le jeu**

Le jeu apparaît comme une solution pour créer une situation adidactique. De plus, le jeu possède des caractéristiques communes avec la dévolution (Pelay, 2011) (Brougère, 2005) :

- Lorsque l'on joue, on agit.
- Le jeu offre une certaine liberté et permet au joueur de s'impliquer, d'oser.
- Le jeu donne un pouvoir de décision au joueur et met, par conséquent, le joueur face à ses responsabilités.

- Le jeu permet d'apprendre. Le jeu a un rôle essentiel dans le développement psychologique, affectif et intellectuel de l'enfant.

D'après Brougère, "le jeu est un lieu où l'enfant décide; il permet l'implication du joueur, place l'enfant dans une situation où il peut essayer quelque chose sans risque, et favorise la communication"(Brougère, 2006).

### 1.2.1 Les critères de jeu de Brougère

Brougère, spécialiste français des activités ludiques, propose de délimiter les frontières du jeu à partir de cinq critères(Brougère, 2005) :

- **Le second degré** : le second degré est la caractéristique première du jeu. C'est le critère qui donne à l'activité son caractère ludique et fictif.
- **La décision** : ce critère désigne le choix de s'engager ou non dans le jeu mais également la succession de choix nécessaires lors d'un jeu ; décider quel coup jouer, où placer sa pièce etc.
- **La règle** : la règle permet d'organiser la décision dans le second degré.
- **La frivolité** : la frivolité correspond à l'idée de gratuité, à l'idée d'une activité sans conséquence au regard des conséquences de nos conduites dans la vie quotidienne. Le jeu donne l'occasion d'essayer des stratégies qui ne seraient pas tentées dans un cadre ordinaire.
- **L'incertitude** : le dénouement du jeu est toujours incertain.

### 1.2.2 Les jeux sérieux

Les jeux sérieux sont utilisés dans de nombreux domaines : en éducation mais aussi en entreprise, en politique, en communication etc. Les jeux sérieux peuvent avoir un support papier ou numérique. Les premiers jeux sérieux dans le secteur de l'éducation datent des années 1960-1970 et avaient "principalement la forme de jeu de cartes, de plateau, de rôle"(Alvarez, Djaouti, & Rampnoux, 2016). Aujourd'hui, les jeux sérieux s'exercent le plus fréquemment sous forme numérique. Chen et Michael (2005) définissent le jeu sérieux comme "tout jeu dont la finalité première est autre que le simple divertissement"(Michael, 2005).

Une définition plus complète est donnée par Alvarez, Djaouti et Rampnoux (2016) qui définissent le jeu sérieux comme "un dispositif numérique ou non, dont l'intention initiale est de combiner, avec cohérence, à la fois des aspects utilitaires tels, de manière non exhaustive et non exclusive, l'enseignement, l'apprentissage, la communication, ou encore l'information, avec des ressorts ludiques issus du jeu, vidéoludique ou non. Une telle association vise une activité ou un marché s'écartant du seul divertissement."(Alvarez et al., 2016)

Marchand (2016) a étudié les avantages pédagogiques des jeux sérieux(Marchand, 2016) et a fait apparaître cinq avantages principaux :

- La motivation des apprenants.
- L'apprentissage par essai erreur.
- La différenciation pédagogique.
- La stimulation des interactions pédagogiques entre élèves.
- L'offre de représentations concrètes.

Alvarez fait apparaître deux limites d'utilisation des jeux sérieux(Alvarez et al., 2016) :

- Les jeux sérieux non pertinents : la qualité des jeux est très variable selon les compétences et intentions des concepteurs.
- Les jeux sérieux qui ne sont pas intégrés à une démarche d'apprentissage.

## 1.3 Raisonner

Lors de la phase de jeu, nous allons nous intéresser particulièrement au raisonnement mené par les élèves. Qu'est-ce que "raisonner"? Quelles sont les attentes curriculaires?

### 1.3.1 Définition

Le Larousse nous donne la définition suivante du terme "raisonner" : *Faire usage de sa raison, de sa capacité de réflexion. Lier logiquement entre elles des propositions pour aboutir à une proposition nouvelle, à une conclusion : la philosophie, les mathématiques nous apprennent à raisonner.*

### 1.3.2 Les attentes curriculaires

Les attendus en terme de raisonnement au cycle 4 sont divers et interdisciplinaires : "Toutes les disciplines visent à étayer et élargir les modes de **raisonnement** et les démonstrations" (*Bulletin officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015*, 2015). Les sciences "contribuent à former le **raisonnement** logique" (*Bulletin officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015*, 2015). Le raisonnement est aussi travaillé dans les matières littéraires telles que le français et l'histoire des arts. En français, il est demandé de travailler "l'articulation d'activités de **raisonnements**" (*Bulletin officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015*, 2015). En fin de cycle en histoire des arts, les élèves doivent être capables de "comparer des oeuvres d'art entre elles, en dégagant, par un raisonnement fondé, des filiations entre deux oeuvres d'époques différentes ou des parentés entre deux oeuvres de différente nature, contemporaines l'une de l'autre". De plus, développer les dispositions morales et civiques est défini comme "développer une disposition à **raisonner**" (*Bulletin officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015*, 2015).

En mathématiques, "la mise en oeuvre du programme doit permettre de développer les six compétences majeures de l'activité mathématique : chercher, modéliser, représenter, **raisonner**, calculer, communiquer" (*Bulletin officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015*, 2015). La formation au raisonnement est un des objectifs essentiels du cycle 4 et doit être travaillé de manière variée : "Le raisonnement, au coeur de l'activité mathématique, doit prendre appui sur des situations variées" (*Bulletin officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015*, 2015) telles que par exemple la résolution de problèmes de nature arithmétique ou géométrique, la mise au point d'un programme devant fonctionner sur un ordinateur, ou encore la pratique de jeux nécessitant de développer une stratégie gagnante, individuelle ou collective, ou de maximisation de ses chances.

### La compétence "raisonner"

"Raisonner" est l'une des six compétences travaillées en mathématiques. Elle est définie par les items suivants (Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2016a) :

- Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs variées (géométriques, physiques, économiques) : mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions.
- Mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui.
- Démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion.
- Fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.



## Chapitre 2

# Problématique

Comme développé précédemment, les attentes curriculaires en terme de raisonnement sont fortes et transdisciplinaires. Le rapport Villani-Torossian nous incite à élargir nos méthodes d'enseignement et notamment à aller vers le jeu. La TSD, présentée ci-dessus, donne un cadre à la création de situations dans lesquelles l'élève est acteur et l'enseignant n'a pas ou a peu besoin d'intervenir. Ces situations utilisent, entres autres, un milieu rétroactif.

Dans quelle mesure le jeu, défini selon les critères de Brougère, est-il un moyen de créer une situation dans laquelle l'élève est actif et au coeur de son apprentissage ?

En quoi une situation de jeu, mise en place selon le cadre didactique de Brousseau, pourrait-elle permettre aux élèves de travailler la compétence "raisonner" en mathématiques ?

## Deuxième partie

# Corpus, méthodologie, analyse à priori et recueil de données

## Chapitre 3

# Le jeu utilisé : Match point

"Match Point" est à l'origine un jeu de société diffusé par un éditeur néerlandais. Ce jeu, qui met en oeuvre de multiples compétences, tant en calcul qu'en raisonnement, a été retravaillé en France par le groupe Jeux de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP) qui a proposé une brochure complète.

Les activités proposées sont abordables dès le cycle 2 mais permettent une réflexion intéressante au-delà du cycle 4. Dans le cadre familial ou de loisirs, ces activités sont aussi une source de défis à réaliser seul ou à plusieurs.

### 3.1 Présentation du jeu

Le jeu a été présenté par Stéphane Robert aux Journées Nationales de l'APMEP 2019 à Dijon de la manière suivante :

Pour construire une pièce du jeu, partons d'un carré et traçons ses médianes. Quatre carrés sont ainsi créés.

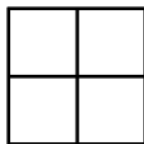


FIGURE 3.1 – Pièce "vide"

Chacune de ces zones va être mise en couleur, bleu, jaune, rouge, vert ou violet, et porter une valeur associée : 1, 2, 3, 4 ou 5. Sur un même carré, quatre des cinq couleurs doivent être présentes et différentes.

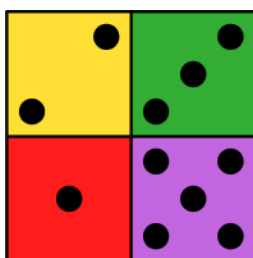


FIGURE 3.2 – Exemple d'une pièce

Un exercice de dénombrement permet de conclure que les contraintes décrites ci-dessus mènent à 30 pièces, toutes différentes.

Les pièces de jeu peuvent être réparties en 5 familles correspondant aux 5 colonnes : la première famille correspond aux cartes n'ayant pas de violet (et donc pas de 5), la deuxième famille correspond aux cartes n'ayant pas de bleu (et donc pas de 4) etc.

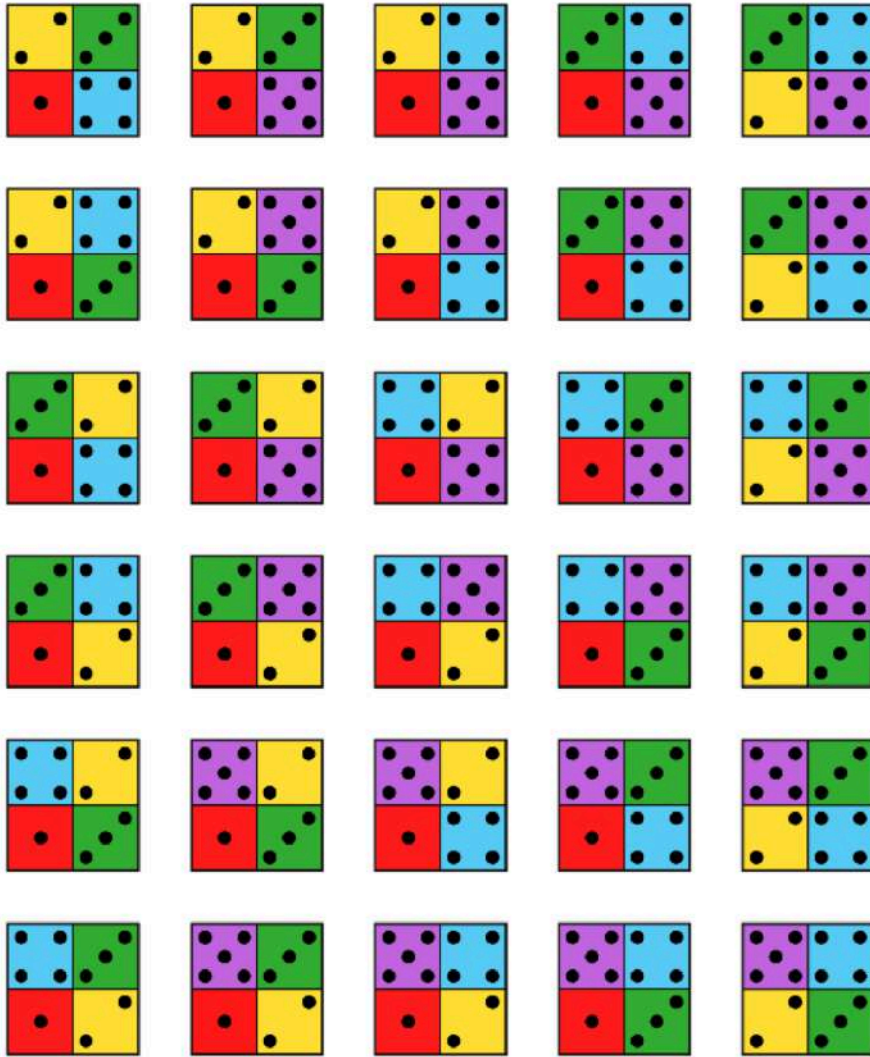


FIGURE 3.3 – Toutes les pièces du jeu (sans les jokers)

Le jeu possède des règles de base et de nombreuses variantes. Nous allons détailler le jeu, sans les variantes. Les joueurs cherchent à marquer des points en posant les pièces. Les points gagnés par un joueur correspondent à la somme des valeurs identiques qui se touchent. Une pièce doit être posée dans l'alignement des autres. Les joueurs posent une pièce chacun leur tour puis piochent une nouvelle pièce. Le jeu est terminé quand toutes les pièces ont été placées ou à la fin d'un temps déterminé. Le gagnant est le joueur ayant marqué le plus de points.

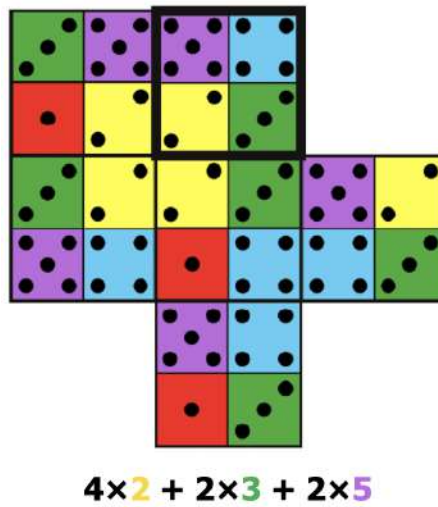


FIGURE 3.4 – Exemple d'un coup : les points comptabilisés correspondent à la pose de la pièce entourée de noir.

Les pièces doivent être alignées avec les pièces précédemment posées. Par exemple, la situation suivante n'est pas possible car la pièce du bas n'est pas alignée avec une des pièces du haut :



FIGURE 3.5 – Coup non valable : les pièces ne sont pas alignées.

Le jeu, tel qu'il vient d'être présenté a été utilisé plusieurs fois par les élèves avant de proposer la situation qui va être utilisée dans ce mémoire.

## Chapitre 4

# Situation étudiée : comment atteindre un score maximal ?

Le jeu Match Point permet-il d'offrir une situation adidactique ? Peut-on créer des situations analysables avec le cadre théorique de Brousseau présenté précédemment ? Nous allons commencer par décrire la situation de jeu proposée à des élèves de 5<sup>e</sup> puis nous ferons l'analyse à priori de l'activité.

### 4.1 Description générale de la situation

En binôme, il est demandé de trouver le score maximal faisable avec 3 pièces, puis avec 5 pièces. Pour ce faire, les élèves choisissent des pièces parmi les 30 pièces du jeu. Le score maximal est compté une fois toutes les pièces posées. Par exemple, sur la figure 4.1, le score est :  $5 \times 3 + 4 \times 2 + 2 \times 2 = 27$



FIGURE 4.1 – Exemple d'une situation avec 3 pièces

Les élèves ont déjà joué avec les règles classiques du jeu Match Point. En introduction, les 30 pièces leur sont de nouveau présentées : sur chaque pièce se trouvent quatre valeurs de 1 à 5, toutes les pièces sont différentes et les cartes peuvent être regroupées en 5 familles (décrites plus haut).

### 4.1.1 Situation avec 3 pièces

Les élèves ont 10 minutes de temps de recherche pour trouver le score maximal avec 3 pièces. Quand ils pensent avoir trouvé le score maximal, ils l'écrivent au tableau. En fonction du score obtenu, soit ils continuent de chercher soit ils estiment avoir trouvé le score maximal. Dans ce dernier cas, ils argumentent à l'écrit pour démontrer leur conviction.

Après ces 10 minutes de jeu en binôme et en interaction avec la classe, nous faisons un point en classe entière. Nous étudions les scores marqués au tableau et nous échangeons sur :

- Comment ces scores ont été trouvés ?
- Comment nous pouvons être sûrs que nous avons trouvé le maximum ?
- Les exemples sont-ils suffisants pour prouver une affirmation ?

### 4.1.2 Situation avec 5 pièces

Dans cette situation un rôle est défini pour chaque membre du binôme : l'un est placeur et l'autre guide.

Seul le placeur a le droit de manipuler les pièces. Le guide indique au placeur quelle pièce il veut prendre et comment la placer. Le placeur peut remettre en cause les choix du guide et lui demander de les justifier.

Nous cherchons à faire expliciter aux élèves leurs démarches et à leur faire formaliser leur pensée. L'organisation de cette situation est proche de l'organisation de la situation avec 3 pièces :

- 15 minutes de temps de recherche en binôme.
- Retour écrit du placeur et du guide ; les questions posées sont décrites plus bas ;
- Échange en classe entière sur le score obtenu et les possibilités de vérifier.

Lors des échanges en classe entière, nous nous intéressons aux mêmes questions que l'échange précédent (de la situation à 3 pièces).

## 4.2 Ce que l'on cherche dans ces situations de jeu

Dans ces situations, nous cherchons principalement à :

- obtenir l'adhésion des élèves ;
- les faire entrer dans une phase de recherche et tâtonnement ;
- leur faire formuler des arguments visant à justifier leur résultat ;
- leur faire comprendre que les exemples ne suffisent pas à prouver.

Nous n'attendons pas de preuve complète de la part des élèves.



# Chapitre 5

## Analyse à priori de la situation

### 5.1 La situation et le cadre didactique

#### 5.1.1 Situation d'inspiration adidactique

Comme décrit plus haut, dans une situation adidactique telle que Brousseau la décrit, l'élève est dans une situation d'apprentissage dans laquelle le professeur a "l'intention d'enseigner un contenu mathématique tout en laissant à l'élève la marge de manoeuvre et d'initiative la plus grande possible". L'objectif principal du professeur est d'établir les conditions "les plus favorables à la mise en action de l'élève" (Kuzniak, 2005). Nous cherchons à faire travailler les élèves sur le raisonnement. Certains apprentissages seront travaillés pendant la séance :

- L'apprentissage de la manipulation et du placement des pièces.
- L'apprentissage du calcul du maximum.
- L'apprentissage de recherche d'une stratégie, l'identification des différents éléments de la stratégie :
  - Le choix des pièces.
  - L'identification des valeurs non-marquées.
  - L'identification des dispositions qui permettent de marquer le plus de points.

Les trois apprentissages suivants peuvent être institutionnalisés :

1. Un ou des exemples ne suffisent pas à prouver.
2. Traiter tous les cas permet d'être certain d'obtenir le maximum (raisonnement par exhaustivité des cas).
3. Chercher une méthode permettant de traiter tous les cas (raisonnement heuristique).

Parmi ces trois éléments, il a été choisi d'institutionnaliser le premier : un ou des exemples ne suffisent pas à prouver. Nous cherchons à obtenir un bilan d'institutionnalisation relativement simple et marquant afin que les élèves puissent le retenir et le réutiliser facilement.

Notre objectif est de faire travailler les élèves sur la recherche, le raisonnement, le calcul et la communication. Les élèves mettent en avant les arguments qu'ils peuvent avancer pour démontrer leur résultat.

Nous plongeons l'élève dans une situation d'apprentissage où, dans la phase de recherche, le professeur n'intervient pas. Nous allons décrire ci-dessous les éléments qui nous rapprochent d'une situation adidactique.

### 5.1.2 Situation d'action et interaction avec le milieu

Chaque binôme dispose d'un jeu qu'il manipule avec lequel il cherche le meilleur score pour le nombre de cartes données.

Quand un binôme pense avoir trouvé le meilleur score, il vient noter son score au tableau en face des prénoms du binôme. Ainsi, les élèves ont accès aux scores trouvés par l'ensemble de la classe. En fonction des actions des élèves, le milieu renvoie aux élèves l'information du score qu'il est possible de trouver.

### 5.1.3 Situation de formulation

Dans la mise en place de la situation avec 5 pièces, les rôles donnés à chaque membre du binôme guident la communication. Le guide doit argumenter ses choix et le placeur doit prendre du recul sur les actions commandées par le guide. De par cette situation de formulation, nous cherchons à favoriser la verbalisation des décisions prises par le guide et la compréhension de ces décisions par le placeur.

### 5.1.4 Situation de preuve

Lors du retour écrit fait par les binômes, il leur est demandé des arguments visant à démontrer que le score trouvé est maximal. Cette étape peut-être considérée comme une situation de preuve au sens de Brousseau.

### 5.1.5 Institutionnalisation

Lors de la classe entière nous cherchons à tendre vers une institutionnalisation. Nous cherchons à formaliser "plusieurs exemples ne constituent pas une preuve".

Nous cherchons également à mettre en avant les arguments mathématiques avancés par les élèves.

### 5.1.6 Critère de jeu

Cette situation répond complètement à trois critères de jeu définis par Brougère qui sont : le second degré, la règle et la frivolité.

Le critère de la décision peut-être séparé en deux :

- liberté de s'engager ou non dans le jeu,
- décision sur les coups à jouer.

Lors d'une situation en classe, les élèves ne sont pas libres de s'engager dans le jeu puisque c'est ce qui est demandé. Par contre, le deuxième "sous-critère", concernant la décision sur les coups à jouer est applicable dans notre cas.

Le cinquième critère est l'incertitude. Dans notre cas, ce critère est discutable. Nous allons décrire par la suite l'analyse à priori de l'activité qui nous mène au résultat maximal.

### 5.1.7 Les principales variables didactiques

Les principales variables didactiques de la situation sont :

- le matériel à disposition : les pièces du jeu ;
- le nombre de pièces utilisables pour atteindre le score maximal ;
- la communication au sein du groupe et avec la classe (affichage des scores au tableau) ;
- la restitution écrite après la situation ;
- le temps laissé au groupe pour réaliser la tâche.

Ces variables didactiques sont légèrement modifiées entre les deux situations proposées aux élèves :

- Le nombre de pièces varie de 3 à 5 ;
- Le temps de recherche est augmenté de 5 minutes entre la première situation et la deuxième.
- La communication entre les élèves qui est libre à la première situation est guidée pour la deuxième situation avec les rôles de placeur et de guide.
- La restitution écrite est légèrement différente.

## 5.2 Résolution de l'activité avec 3 pièces

### 5.2.1 Choix des pièces

Dans un premier temps, pour avoir le score maximal, nous cherchons à assembler les pièces ayant les valeurs les plus grandes donc les pièces qui n'ont pas de 1.

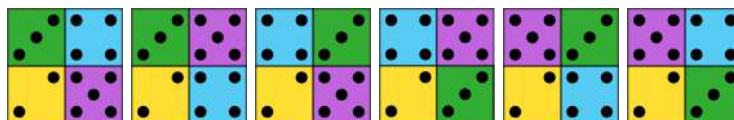


FIGURE 5.1 – Toutes les pièces ne comportant pas de 1.

### 5.2.2 Calcul du score maximal

Ensuite, nous pouvons compter tous les points présents sur 3 pièces :

$$5 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 3 + 2 \times 3 = 42$$

### 5.2.3 Choix de la disposition

Parmi tous ces points, quelle disposition va nous permettre d'en obtenir le maximum ? Nous rappelons que les pièces doivent être posées de manière à être alignées.

Nous commençons par disposer 2 pièces jointives. A partir de ces 2 pièces, nous avons 2 possibilités pour en ajouter une troisième :

- soit l'ajouter de manière à former un "I". Dans ce cas, nous obtenons au mieux le double de la carte du milieu.
- soit ajouter la troisième carte de manière à former un "L".

Détaillons ces deux dispositions.

Dans une disposition en "I", nous ne pouvons pas obtenir 3 fois la même valeur : trois valeurs identiques ne peuvent se toucher. Sur une pièce, la même valeur ne peut pas être présente deux fois.



FIGURE 5.2 – Score atteint :  $5 \times 2 + 4 \times 2 + 3 \times 2 + 2 \times 2 = 28$

Essayons une disposition en "L". Dans le "creux" du "L", nous pouvons avoir 3 valeurs identiques se touchant. Sur les côtés, deux fois deux valeurs qui se toucheront. Nous essayons donc d'avoir trois "5" qui se touchent deux à deux, deux "4" et deux "3". Voilà ce que l'on obtient :



FIGURE 5.3 – Score atteint :  $5 \times 3 + 4 \times 2 + 3 \times 2 = 29$

### Peut-on obtenir un meilleur score ?

Dans le cas présent, nous avons deux choix de disposition : en "I" et en "L". Dans chaque configuration, il y a des points "perdus" : nous ne pouvons pas obtenir tous les points présents sur les pièces. Au bout ou dans les coins, nous ne pouvons pas gagner ces points. C'est la configuration en "I" qui a le moins de points perdus : seuls les 4 points en bout de ligne sont perdus.

Dans la configuration en "L", les quatre valeurs du bout sont perdues ainsi que le coin extérieur. Si l'on revient à notre calcul du nombre de points présents sur 3 cartes :

$$5 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 3 + 2 \times 3 = 42$$

Dans la configuration du "L", cinq valeurs ne peuvent pas être comptées. Dans notre calcul, nous devons enlever 5 valeurs : les plus faibles et également tous les triplets sauf un puisque cette configuration nous permet d'obtenir un seul triplet. Nous passons donc du calcul de tous les points :

$$5 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 3 + 2 \times 3 = 42$$

Au calcul, uniquement des points, que l'on peut obtenir :

$$5 \times 3 + 4 \times 2 + 3 \times 2 + 2 \times 0 = 29$$

### Revenons sur le choix des pièces

A partir de la stratégie pour obtenir le meilleur score, nous pouvons obtenir ce score avec d'autres pièces :



FIGURE 5.4 – Réponse d'un deuxième binôme pour le score maximal avec 3 pièces

### 5.3 Preuve de l'obtention du maximum avec 5 pièces

Pour cette situation, nous avons décidé de rédiger une preuve mathématiquement recevable et complète. Cette preuve nous servira pour analyser les traces écrites des élèves. De plus, cette preuve combinée à l'analyse des traces écrites des élèves pourra nous ouvrir des portes sur "comment mener l'activité une nouvelle fois, avec une autre classe".

Nous allons commencer par compter le maximum théorique de points présents sur 5 pièces. Pour ce faire, nous choisissons 5 pièces parmi les 6 pièces ne portant pas de 1 (la famille de pièces rouges). Le nombre total de points présents sur ces 5 pièces est de :

$$5 \times 5 + 5 \times 4 + 5 \times 3 + 5 \times 2 = 70$$

Comme nous le verrons par la suite, il n'est pas possible d'atteindre ces 70 points : quelle que soit la disposition choisie, des valeurs seront forcément tournées vers l'extérieur et ne seront en contact avec aucune pièce. Ainsi elles seront inutiles et ne permettront pas de marquer des points. 70 est donc un majorant mais pas un maximum atteignable.

Nous allons passer en revue toutes les dispositions possibles afin de trouver le maximum atteignable.

Nous rappelons que, par construction, chaque pièce contient 4 valeurs différentes.

#### 5.3.1 Quelques principes généraux

##### Nombres de points marqués

Les points se marquent par doublé, par triplé, ou par quadruplé. Par définition du jeu, nous ne pouvons pas marquer de point avec une seule valeur : deux valeurs doivent se toucher nécessairement pour être marquées.

Dans les configurations suivantes, nous utiliserons deux doublés pour faire un quadruplé et un doublé et un triplé pour faire un quintuplé.

#### 5.3.2 Pentaminos

Un pentamino (ou pentomino) est une figure géométrique constituée de 5 carrés accolés. Il existe douze formes de pentamino. Chaque pentamino porte un nom de lettre qui lui ressemble approximativement (figure 5.5) :

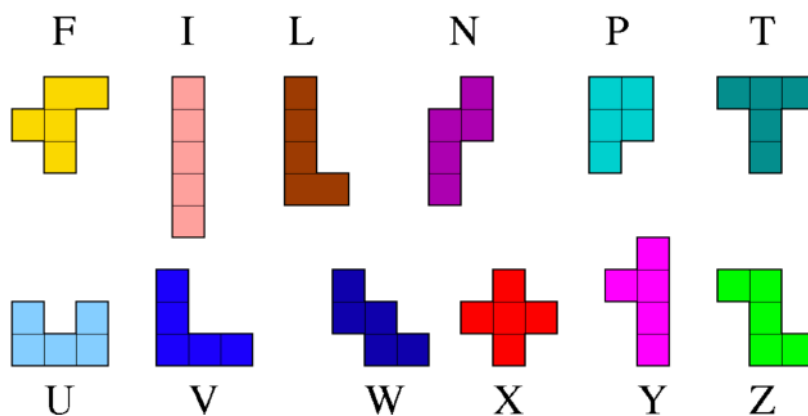


FIGURE 5.5 – Les douze formes de pentaminos.

Deux pièces qui se superposent par retournement, et rotation éventuelle, sont dites identiques. Sans cette convention, il y aurait 18 pentaminos.

Pour revenir au calcul du maximum avec 5 pièces, nous allons passer en revue ces 12 formes de pentaminos.

### 5.3.3 Disposition en "I"

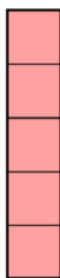


FIGURE 5.6 – Disposition en "I"

Dans cette disposition, les quatre valeurs des extrémités ne peuvent pas être marquées (encadrées en rouge sur la figure 5.7).



FIGURE 5.7 – Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "I"

Cette disposition ne permet pas d'avoir de triplé. Pour chaque valeur, il est possible de marquer au maximum 4 fois cette valeur : pas de triplé possible (et donc pas de quintuplé), donc nous obtenons forcément un multiple pair de chaque valeur.

Si l'on reprend les calculs du total des points présents sur 5 cartes, il faut enlever une occurrence de chaque valeur :

$$4 \times 5 + 4 \times 4 + 4 \times 3 + 4 \times 2 = 56$$

D'après notre raisonnement précédent, nous ne pouvons pas obtenir plus de 56. Or, en manipulant les pièces, nous avons obtenu 56 (figure 5.8). **56 est donc le maximum de cette disposition.**



FIGURE 5.8 – Exemple d'une disposition en "I" dont le score est 56.

### 5.3.4 Disposition en "L"

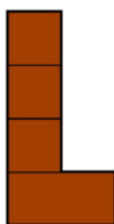


FIGURE 5.9 – Disposition en "L"

Dans une disposition en "L", il est possible de faire un seul triplé. Avec un triplé et un doublé, nous pouvons "marquer" 5 fois la même valeur. Nous gardons la valeur "5" avec 5 occurrences et nous enlevons une occurrence pour chacune des autres valeurs :

$$5 \times 5 + 4 \times 4 + 4 \times 3 + 4 \times 2 = 61$$



FIGURE 5.10 – Exemple d'une disposition en "L" dont le score est 57.

A ce stade, nous pouvons utiliser les valeurs non marquées (encadrées en rouge sur la figure 5.11) afin d'atteindre le résultat voulu.



FIGURE 5.11 – Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "L"

*Afin de varier les types de raisonnement, et dans un but futur d'analyser des productions d'élèves, nous proposons un raisonnement différent.*

Dans cette disposition, en plus du doublé et du triplé dont nous avons parlé précédemment, nous pouvons faire 5 doublés (encadrés en vert sur la figure 5.12).



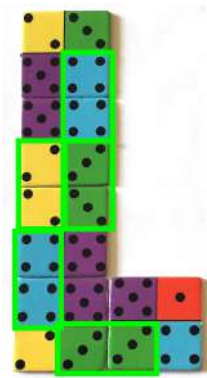


FIGURE 5.12 – Les doublés dans une disposition en "L"

Nous pouvons regrouper ces cinq doublés en : 2 quadruplés et un doublé. Nous aurons donc 2 valeurs avec 4 occurrences et une valeur avec 2 occurrences (en plus de la valeur à 5 occurrences). Nous adaptons le calcul, on choisissant la valeur 2 pour laquelle il n'y aura que 2 occurrences afin d'obtenir le maximum :

$$5 \times 5 + 4 \times 4 + 4 \times 3 + 2 \times 2 = 57$$

Un majorant de cette disposition est 57. Or, sur la figure 5.10 nous avons atteint ce maximum. **57 est donc le maximum de cette disposition.**

### 5.3.5 Disposition en "P"



FIGURE 5.13 – Disposition en "P"

Cette disposition est la plus compacte possible avec 5 pièces.

Dans cette disposition, si nous avons un quadruplé au milieu, nous pouvons avoir au maximum un triplé. Les autres triplés envisageables auraient nécessairement deux valeurs sur la même pièce, ce qui n'est pas possible (toutes les pièces ayant par construction 4 valeurs différentes).

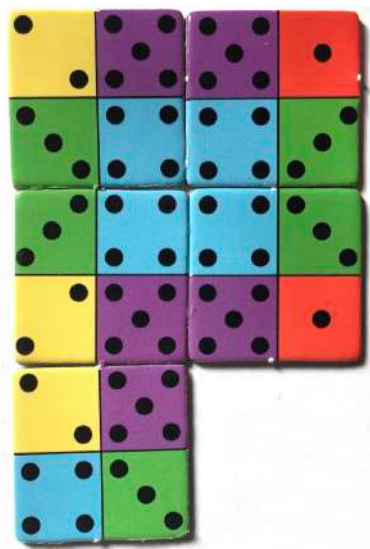


FIGURE 5.14 – Exemple d'une disposition en "P" dont le score est 57.

Dans cette configuration nous avons donc au maximum un quintuplé marqué par la somme d'un doublé et d'un triplé.

De plus, cinq valeurs ne peuvent être marquées : ce sont celles des sommets (encadrées en rouge sur la figure 5.15).

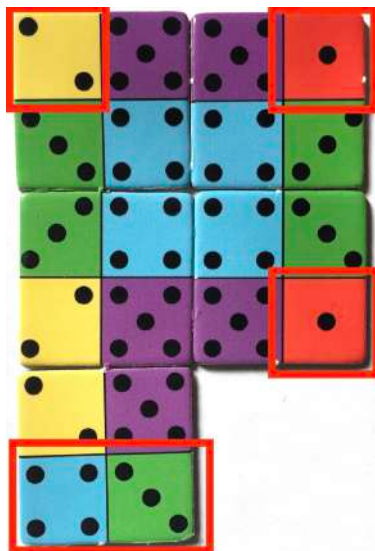


FIGURE 5.15 – Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "P"

Dans le calcul du maximum, nous enlevons donc 5 valeurs et nous ne gardons qu'un seul quintuplé. Nous enlevons donc une occurrence de la valeur "4", une occurrence de la valeur "3" et trois occurrences de la valeur "2" :

$$5 \times 5 + 4 \times 4 + 4 \times 3 + 2 \times 2 = 57$$

Au maximum, dans cette disposition nous obtenons 57. Or, en manipulant les pièces, nous avons obtenu 57 (figure 5.14). **57 est donc le maximum de cette disposition.**

### 5.3.6 Disposition en "V"

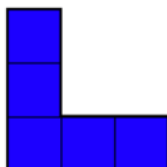


FIGURE 5.16 – Disposition en "V"

Dans une disposition en "V", nous pouvons faire un seul triplé. Les pièces contenant chacune 4 valeurs différentes, ce triplé ne peut pas être associé à un doublé. Nous ne pouvons donc pas marquer de quintuplé et pour une valeur, nous aurons seulement un triplé. Dans le calcul du maximum, nous choisissons la valeur "2" comme valeur qui aura simplement un triplé et nous enlevons une occurrence pour chacune des autres valeurs :

$$4 \times 5 + 4 \times 4 + 4 \times 3 + 3 \times 2 = 54$$

Un majorant de cette disposition est 54. **Nous ne pouvons donc pas obtenir plus qu'à la disposition en "P".**

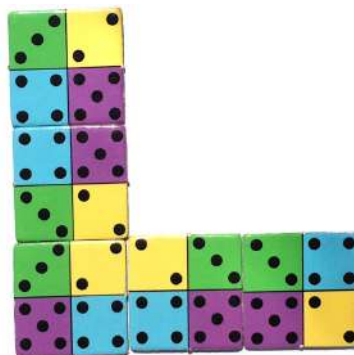


FIGURE 5.17 – Exemple d'une disposition en "V" dont le score est 54.

### 5.3.7 Disposition en "F", en "N", en "T", en "U", en "W", en "X", en "Y" et en "Z"

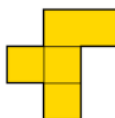


FIGURE 5.18 – Disposition en "F"

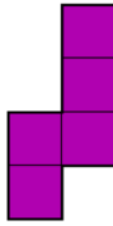


FIGURE 5.19 – Disposition en "N"

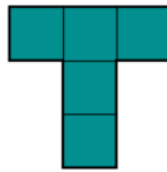


FIGURE 5.20 – Disposition en "T"

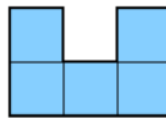


FIGURE 5.21 – Disposition en "U"

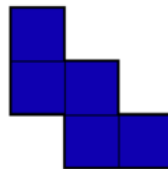


FIGURE 5.22 – Disposition en "W"

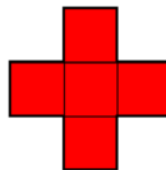


FIGURE 5.23 – Disposition en "X"

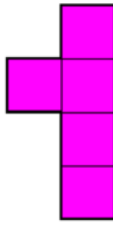


FIGURE 5.24 – Disposition en "Y"

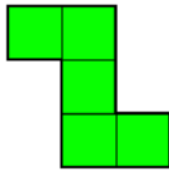


FIGURE 5.25 – Disposition en "Z"

Dans toutes ces dispositions au moins 6 valeurs ne peuvent pas être marquées (encadrées en rouge sur les figures 5.26, 5.27, 5.28, 5.29, 5.30, 5.31, 5.32, 5.33).

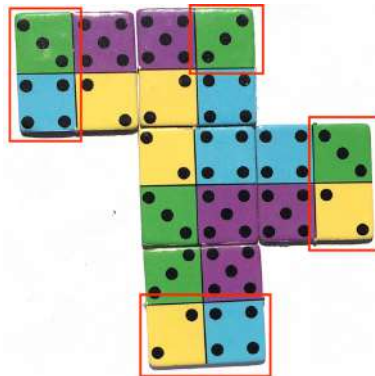


FIGURE 5.26 – Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "F"



FIGURE 5.27 – Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "N"

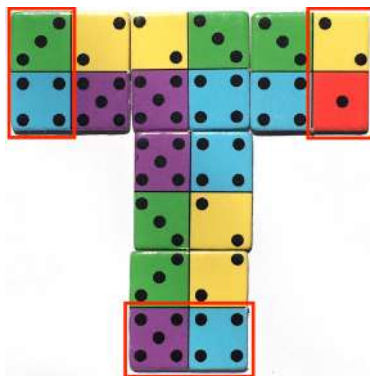


FIGURE 5.28 – Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "T"

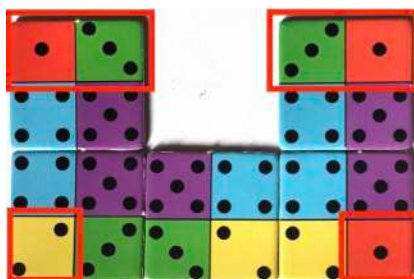


FIGURE 5.29 – Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "U".

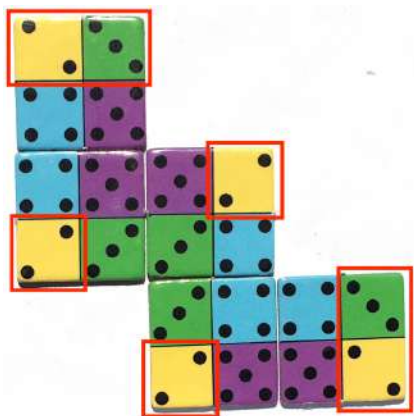


FIGURE 5.30 – Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "W"

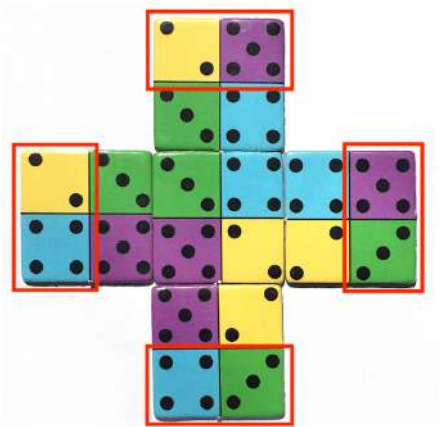


FIGURE 5.31 – Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "X"



FIGURE 5.32 – Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "Y"

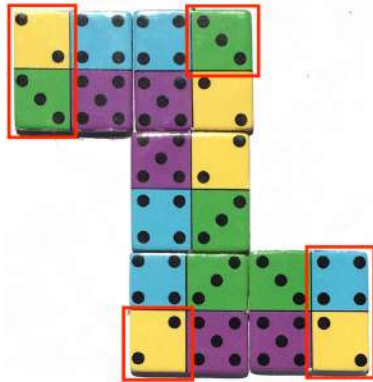


FIGURE 5.33 – Les valeurs qui ne peuvent pas être marquées dans une disposition en "Z"

Si l'on reprend les calculs du total des points présents sur 5 cartes, il faut au moins 6 valeurs. De manière à obtenir le maximum, nous supprimons les 6 valeurs les plus faibles. Nous supprimons cinq fois la valeur "2" et une fois la valeur "3" :

$$5 \times 5 + 5 \times 4 + 4 \times 3 + 0 \times 2 = 57$$

Un majorant de ces dispositions ayant au moins 6 valeurs perdues est 57. **Nous ne pouvons donc pas obtenir plus qu'à la disposition en "P"**.



FIGURE 5.34 – Exemple d'une disposition en "N" dont le score est 53.



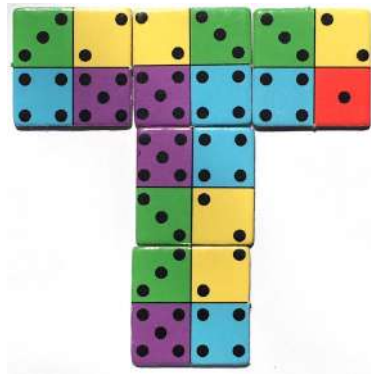


FIGURE 5.35 – Exemple d'une disposition en "T" dont le score est 47.

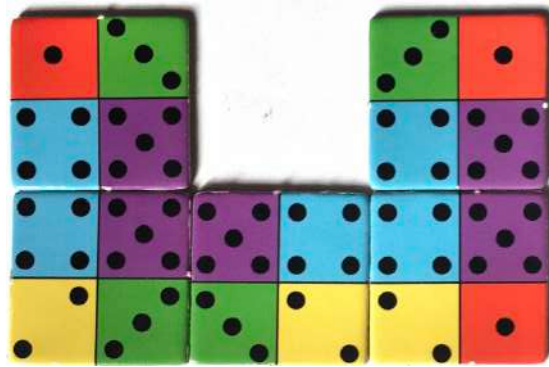


FIGURE 5.36 – Exemple d'une disposition en "U" dont le score est 55.

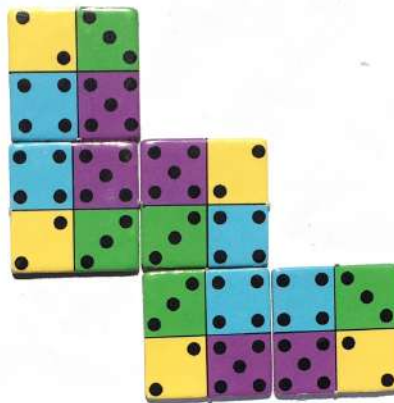


FIGURE 5.37 – Exemple d'une disposition en "W" dont le score est 54.

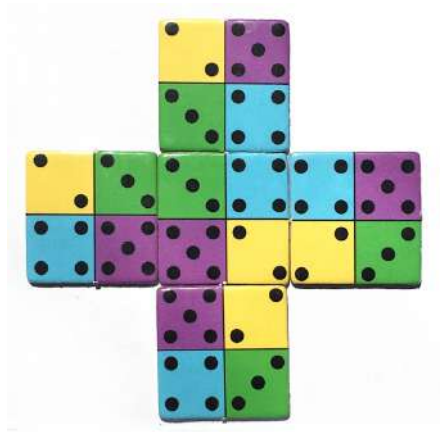


FIGURE 5.38 – Exemple d’une disposition en "X" dont le score est 42.



FIGURE 5.39 – Exemple d’une disposition en "Y" dont le score est 54.

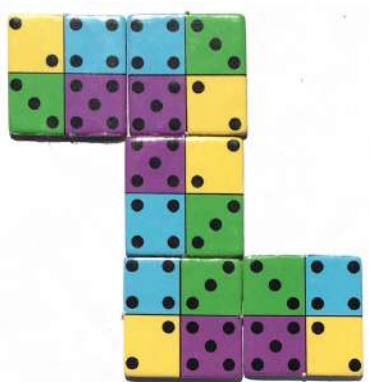


FIGURE 5.40 – Exemple d’une disposition en "Z" dont le score est 54.

### 5.3.8 Conclusion de la preuve

La présentation des 12 cas nous permet d'établir que le maximum atteignable avec 5 pièces est 57. Ce maximum a été obtenu avec la disposition en "P" et la disposition en "L". Pour certaines dispositions, nous avons calculé un majorant sans calculer le maximum. Il n'est pas exclu que ce maximum soit atteint avec une autre disposition.

Nous notons l'étonnante différence entre les configurations "V" et "L" : ces deux configurations semblent très proches et finalement l'une permet d'atteindre le maximum et pas l'autre.

## 5.4 Ce que l'on attend des élèves

Nous attendons de la part des élèves une première phase de recherche. Cette phase de recherche peut se faire soit par tâtonnement soit en faisant un premier état des lieux avant de chercher : choix des pièces ayant le plus de points.

L'attente à minima des élèves est de trouver le score maximal avec 3 pièces.

## 5.5 Difficultés envisagées

Les élèves peuvent être confrontés aux difficultés suivantes :

- comprendre le jeu ;
- savoir comment compter les points ;
- trouver la disposition adéquate.

# Chapitre 6

## Recueil de données

Pendant l'activité, les données sont recueillies sous forme écrite et sous forme d'enregistrement audio.

- Forme écrite : après chaque situation les binômes écrivent leurs arguments de raisonnement et leur ressenti.
- Forme d'enregistrement audio : un binôme est enregistré pendant la phase de jeu. Le nombre de dictaphones disponibles a été limitant pour enregistrer davantage de binômes.

A la fin de l'activité le bilan fait en classe entière est filmé.

De plus, après l'activité, un rendu écrit sur leur ressenti est demandé aux élèves.

### 6.1 Recueil écrit

Nous cherchons à avoir des informations sur le score obtenu par les élèves et les éléments de raisonnement qui les ont menés à ce score. Afin de ne pas interrompre le jeu, nous demandons une trace écrite après chaque phase de jeu.

#### 6.1.1 Questions posées sur la situation avec 3 pièces

1. Quel score maximal pouvez-vous obtenir avec 3 cartes ? Dessinez comment vous obtenez ce score.
2. Êtes-vous sûrs que c'est le maximum ? Pourquoi ?

Les élèves d'un binôme répondent ensemble aux questions.

La première question nous permet de cibler le résultat obtenu par le binôme. La deuxième question est plus ouverte et vise à obtenir des informations sur le raisonnement et les arguments qui sont avancés.

#### 6.1.2 Questions posées sur la situation avec 5 pièces

1. Quel score maximal pouvez-vous obtenir avec 5 cartes ? Dessinez comment vous obtenez ce score.
2. Question pour le placeur : aurais-tu fait différemment si tu avais été guide ? Si oui, qu'aurais-tu changé ?
3. Question pour le guide : quelle était ta stratégie ?

Les élèves d'un binôme répondent ensemble aux questions.

De par ces questions, nous cherchons à avoir des informations sur le raisonnement mené par les élèves et sur le rôle qu'ils avaient (placeur ou guide).

### 6.1.3 Questions posées à la fin de la séance

1. As-tu l'impression d'avoir cherché et réfléchi aujourd'hui en mathématiques ? Pourquoi ?
2. Qu'as-tu appris ?
3. Serais-tu capable d'expliquer à quelqu'un d'autre ce que l'on a fait ?
4. As-tu aimé la séance ? Pourquoi ?
5. As-tu quelque chose à ajouter ?

Ce questionnaire individuel est donné aux élèves de manière à avoir des informations sur le ressenti des élèves pendant la séance.

Ces questions visent à avoir un retour écrit sur leur implication pendant la séance et leur adhésion. Au-delà du jeu, nous cherchons à avoir des informations sur leurs activités.

## Troisième partie

# Résultats, analyse et perspectives

Dans un premier temps, nous présentons les résultats tels qu'ils ont été obtenus en classe puis, dans un deuxième temps nous analyserons ces résultats.

# Chapitre 7

## Données recueillies

Les données ont été recueillies auprès d'une classe de 5<sup>e</sup> de 28 élèves. Certaines réponses identiques ont été trouvées sur plusieurs copies. Après ces réponses, le signe multiplié est écrit avec le nombre  $n$  de fois où la réponse a été donnée :  $\times n$ .

### 7.1 Recueil oral de données

Pour les retranscriptions, l'initiale du prénom de l'élève est notée avant la retranscription de son intervention.

#### 7.1.1 Retranscription de l'enregistrement audio d'un binôme et phase de jeu

G : Vas-y on essaye déjà de faire avec 4.

G : ... (*recherche*)

V : Là, non là.

V : Il faudrait qu'il y ait un 4 là.

G : Très intéressant

V : 8 et 4, non ça marche pas. Attends attends. Voilà, voilà stop là c'est bien.

G : Non, essaye de trouver son symétrique. En fait, il faudrait le 3 là et le 1 là.

V : Oui, c'est ça.

(*silence, ils manipulent*)

V : Non, non, il faut que les cartes soient là. Ah oui, je sais. Ah voilà.

G : Là un 3 et là un 4. Mais non, on l'a déjà, on ne pourra pas retrouver.

V : Mais si.

G : Mais non, si tu prends 2 cartes violettes. Non. Sinon, on reste sur notre idée de base.

G : Attends, on a fait combien ? Ah galère

V : En fait, faudrait décharger là. La voilà.

G : Donc on peut la trouver.

V : Faudrait que ce soit ça mais avec un truc vert.

G : Déjà là, ça fait le plus de points. Non, non (il cherche une carte). Attends, on va prendre toutes celles avec des 5.

V : Ceux qu'ont pas de 5, on les met à part. Je m'occupe de mettre à part ceux qui n'ont pas de 5. Voilà. Maintenant, ceux qui n'ont pas de 4 et de 3 sur la même pièce.

G : Ah, alleluia ! Avec 4 pièces, on a explosé : 20, 36 + 12, 48, whaou !



## 7.2 Questions posées à l'écrit

### 7.2.1 Question sur le raisonnement

Quel score maximal pouvez-vous obtenir avec 3 cartes? Dessinez comment vous obtenez ce score.

Les figures 7.1 et 7.2 montrent des réponses de deux binômes. La figure 7.3 illustre une disposition faite pendant la séance.

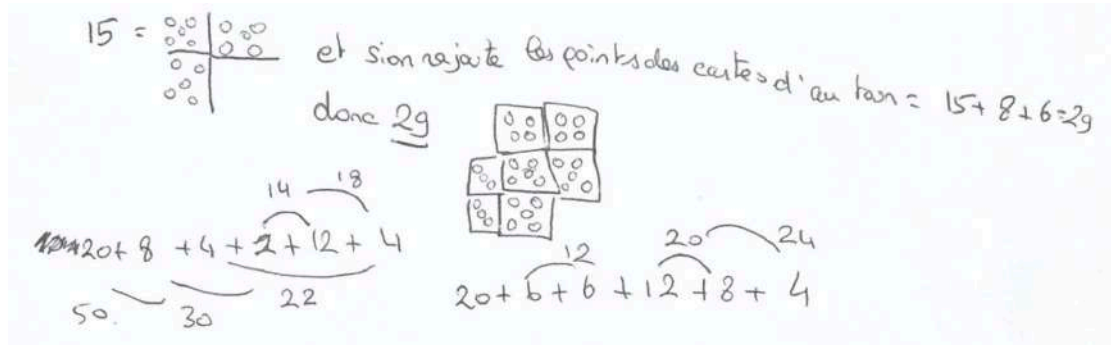


FIGURE 7.1 – Réponse d'un binôme pour le score maximal avec 3 pièces

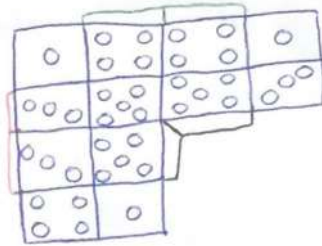


FIGURE 7.2 – Réponse d'un deuxième binôme pour le score maximal avec 3 pièces



FIGURE 7.3 – Exemple de dispositions trouvées par les élèves avec 3 pièces

### Êtes-vous sûrs que c'est le maximum ? Pourquoi ?

26 "oui" et 2 "sans réponse".

Voici les principales réponses données par les élèves :

- Oui, car on a mis à côté le plus de 5, le plus de 4 et le plus de 3 possible.
- Oui parce qu'on ne peut pas faire plus grand.
- Oui, nous sommes sûrs que c'est le maximum car nous pouvons avec trois dominos mettre seulement trois fois le même chiffre à côté (qui est le chiffre 5).
- C'est le maximum car le plus grand nombre est 5 et que l'on a multiplié  $5 \times 3$  puis  $4 \times 2$  et  $3 \times 2$  (les plus grands nombres).
- Oui car on a utilisé les trois plus grands nombre :  $3 \times 5 + 2 \times 4 + 2 \times 3$ .
- Oui car avec trois cartes on ne peut faire toucher que trois fois le 5 ; 2 fois le trois et deux fois le quatre. Ce sont les plus grandes cartes du jeu. Avec trois pièces, il n'y a qu'un seul et unique centre, on ne peut donc pas faire toucher trois fois le quatre (par exemple).

### Quel score maximal pouvez-vous obtenir avec 5 cartes ?

**Dessinez comment vous obtenez ce score :** La figure 7.4 montre la réponse d'un binôme. Les figures 7.5, 7.6 et 7.7 illustrent une disposition faite pendant la séance.

$$20 + 12 + 12 + 8 + 4$$
$$56$$
$$20 + 6 + 12 + 8 + 4$$

FIGURE 7.4 – Réponse d'un binôme pour le score maximal avec 5 pièces



FIGURE 7.5 – Exemple de dispositions trouvées par les élèves avec 5 pièces dont le score est 46.

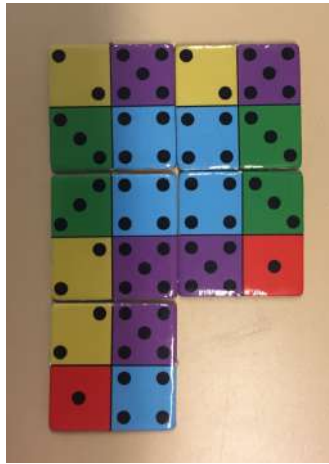


FIGURE 7.6 – Exemple de dispositions trouvées par les élèves avec 5 pièces dont le score est 47.

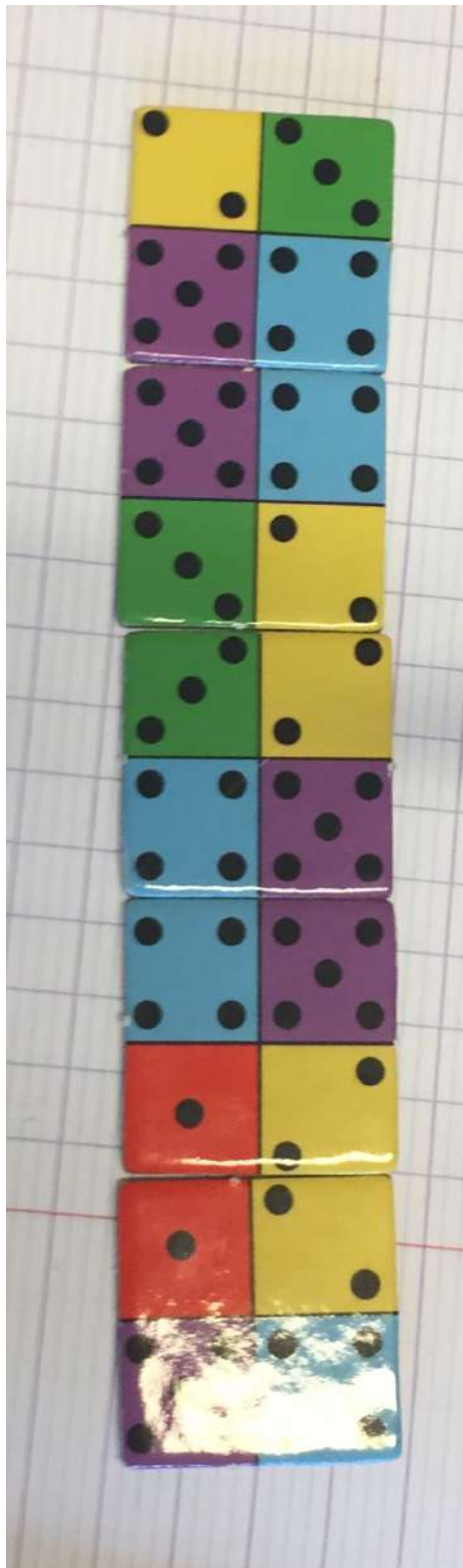


FIGURE 7.7 – Exemple de dispositions trouvées par les élèves avec 5 pièces dont le score est 52.

**Question pour le placeur : aurais-tu fait différemment si tu avais été guide ? Si oui, qu'aurais-tu changé ?**

Non pour les 14 placeurs.

**Question pour le guide : quelle était ta stratégie ?**

- D'additionner les plus grand chiffres pour avoir un grand nombre et marquer le plus de points possible pour avoir un grand score.
- Il faut essayer d'avoir le plus de carrés possible pour trouver le meilleur score.
- La stratégie est de multiplier le plus grand nombre ( $5 \times 4$ ) le maximum et de multiplier les autres nombres (les plus grands) par deux  $4 \times 2$  et  $3 \times 2$ .
- Ma stratégie était de tout tester.
- J'ai fait en sorte de mettre tous les grands nombres ensemble.

### 7.2.2 Question sur le ressenti

**As-tu l'impression d'avoir cherché et réfléchi aujourd'hui en mathématiques ? Pourquoi ?**

25 "oui", 1 "non" et 2 "sans réponse".

- Oui car il fallait additionner les plus grands chiffres
- Oui car j'ai cherché à avoir le score maximal.
- Oui car j'ai cherché.
- Oui, j'ai cherché pas mal de solutions pour le jeu et j'ai aussi réfléchi.
- Oui car nous avons tâtonné.
- Oui car j'ai travaillé mes tables de multiplication.
- Oui j'ai réfléchi car c'était dur.
- Oui car il faut faire plein de calculs.
- Oui parce que mon coéquipier avait du mal à comprendre certaines choses.
- Oui, pour avoir le meilleur score de la classe.
- Oui car j'ai calculé et schématisé.
- Oui j'ai beaucoup réfléchi pour trouver un résultat.
- Oui car j'ai calculé et travaillé.
- Oui car il faut de la réflexion pour bien positionner les dominos.
- Oui car j'ai essayé de trouver une stratégie.
- Oui car j'ai réussi à faire l'exercice que je ne comprenais pas au début.
- Oui car il fallait être stratégique et calculer au fur et à mesure.
- Oui parce que je n'ai pas bavardé et j'ai écouté.
- Non, c'était trop facile.

**Qu'as-tu appris ?**

- Que l'on peut apprendre des choses en s'amusant.
- J'ai appris à chercher et raisonner.
- Rien.
- A faire le plus grand score avec des dominos mais je ne sais pas à quoi cela va me servir.
- A travailler en groupe.
- J'ai mieux compris les tables de multiplication.
- Le travail en équipe et le but du jeu.

- Je n'ai rien appris mais j'ai approfondi mes recherches.

### **Serais-tu capable d'expliquer à quelqu'un d'autre ce que l'on a fait ?**

- 17 "oui".
- Je ne suis pas sûre, je suis une très mauvaise prof.
- En partie, je ne sais pas vraiment expliquer mon raisonnement.
- Je ne sais pas car c'était technique.

### **As-tu aimé la séance ? Pourquoi ?**

27 "oui" et 1 "non".

- Oui car jouer c'est amusant.
- C'est bien de faire quelque chose de manuel.
- Non car c'était trop facile.
- Pas trop car je n'aime pas les jeux.
- Oui car j'ai appris des choses.
- Oui car j'aime bien les activités.
- Oui car c'était en groupe.
- Oui car j'aime bien les travaux de groupe.×3
- Oui car ça te force à travailler et c'est plus ludique.
- Oui car on a fait une activité avec les dominos.
- Oui car c'est fun et ludique et ça améliore l'entraide.
- Oui car je préfère cette façon d'apprendre.
- Oui car je me suis creusé la tête.
- Oui car c'était intéressant.
- Oui j'aime bien le jeu.
- Oui c'est amusant et ça fait réfléchir.
- Oui car on a travaillé en groupe et si on ne comprenait pas quelque chose, on pouvait se faire aider par notre voisin.
- Oui car c'était drôle et amusant.
- Oui car j'aime bien les activités en binôme et c'est amusant tout en faisant réfléchir.
- Oui, je me concentre bien quand on joue.
- J'ai aimé la séance car c'était ludique.

### **As-tu quelque chose à ajouter ?**

- C'était quand même compliqué.
- De faire plus ce petit jeu.
- A refaire.×3
- J'aimerais le faire plus souvent.

## **7.3 Recueil vidéo de données**

### **7.3.1 Retranscription de l'enregistrement vidéo de la conclusion en classe entière**

Pour les retranscriptions, l'initiale du prénom de l'élève est notée avant la retranscription de son intervention. Les interventions du professeur sont précédées de "professeur".

### Situation à 3 dominos

Professeur : tout le monde a trouvé 29. Est-ce qu'on peut être sûr que 29 c'est le maximum ?

E : Non, car on n'a pas tout essayé.

M : Si on multiplie par 3 les plus grands nombres, ça fait 29.

Professeur : Et comment vous avez fait pour choisir vos cartes ?

V : On a fait en sorte qu'il y ait trois "5" qui se touchent, puis deux "4" qui se touchent puis deux "3" qui se touchent.

Professeur : Est-ce qu'on peut avoir trois "4" qui se touchent et trois "3" qui se touchent ?

Q : Ce n'est pas possible car aucun domino n'est pareil.

A : Les dominos n'ont pas plusieurs fois le même chiffre.

### Situation à 5 dominos

Professeur : Les placeurs auriez vous fait différemment des guides ?

Plusieurs voix : Non

Professeur : N., comment as-tu choisi tes cartes ?

N : J'ai d'abord pris des 5, des 4 et des 3.

Professeur : Au niveau des formes, vous avez essayé de vous rapprocher du carré. Est-ce que certains ont essayé une ligne droite ?

S : Non, c'est pas stratégique.

Professeur : Pourquoi ?

S : On peut gagner des points que deux par deux, on ne peut pas faire des groupes de 3 et de 4.

A : Y'a plus de surface disponible, y'a plus de pièces qui se touchent.

Professeur : Est-ce que vous êtes sûrs qu'on a le maximum ? Tout le monde a trouvé 55.

A2 : Moi j'ai trouvé 62.

Professeur : (*Le professeur va voir sa disposition*). Peux-tu recompter ?

A2 : En fait, j'ai 50.

Professeur : Est-ce que le fait que vous soyez 13 groupes à avoir trouvé 55, ça suffit pour dire que c'est le maximum ?

Plusieurs voix : Non.

E : Pour trouver le maximum, il faudrait tout tester.

G : On n'a pas besoin de tout tester. Ce n'est pas la peine de tester les cartes qui n'ont pas de 5.

L : Oui. Et on peut compter combien de points au maximum on a sur 5 cartes.

Professeur : on imagine que l'on peut obtenir tous les points présents sur 5 cartes (*le professeur fait le calcul au tableau*), on obtiendrait 70 points.

R : Mais, c'est pas possible Madame.

Professeur : Pourquoi c'est pas possible ?

R : Bah, dans les coins, on ne peut pas les faire se toucher.

L : Oui, 70 c'est pas possible. Ça doit être 55 le max.

Professeur : En fait le maximum c'est 57, vous étiez très proches. Ce que l'on retiendra aujourd'hui c'est que tous nos exemples atteignant 55 ne sont pas suffisants pour prouver que c'est 55 est le maximum.

## Chapitre 8

# Interprétation de la situation, des résultats et mise en perspective

Dans cette section, nous allons détailler l'analyse des résultats au travers de :

- la TSD,
- les critères de jeu,
- la preuve du maximum obtenu avec 5 pièces.

En italique, se trouvent des extraits du cadre didactique décrit en première partie de ce document.

### 8.1 Interprétation

#### 8.1.1 La TSD

##### Dévolution et situation adidactique

*L'enseignant doit faire en sorte que la résolution du problème soit de la responsabilité de l'élève.*

L'enseignante n'est pas intervenue dans cette phase de jeu. Comme le montre l'enregistrement audio, les élèves se sentent responsables de trouver le résultat, ils sont engagés dans leur tâche. Les réponses d'actions données par les élèves montrent qu'ils ont réfléchi seul ou en binôme. Dans l'enregistrement vidéo, les élèves parlent de leurs nombreux essais autant au niveau de la disposition qu'au niveau du score.

*Brousseau propose de mettre l'élève dans une situation d'apprentissage dans laquelle le professeur a "l'intention d'enseigner un contenu mathématique tout en laissant à l'élève la marge de manoeuvre et d'initiative la plus grande possible" (Kuzniak, 2005).*

La réponse "Oui j'ai beaucoup réfléchi pour trouver un résultat" à la question "As-tu l'impression d'avoir cherché et réfléchi aujourd'hui en mathématiques? Pourquoi?" montre que l'élève a disposé d'une certaine marge de manoeuvre pour résoudre le problème.

Dans l'enregistrement audio, nous constatons que les élèves sont entrés dans l'activité et semblent déterminés à résoudre le problème.

*Dans cette situation adidactique, le professeur se met en retrait et doit se donner pour objectif principal d'établir les conditions "les plus favorables à la mise en action de l'élève" (Kuzniak, 2005).*



L'enregistrement audio montre que les conditions semblent favorables car les élèves sont en action et autonomes. Ils ne sollicitent pas d'aide extérieure.

La forte adhésion des élèves traduite par vingt-sept "oui" et un "non" en réponse à la question "As-tu aimé la séance?" sous-entend que les conditions étaient favorables à la mise en action.

La mise en action des élèves apparaît également dans la réponse à la question "Pourquoi as-tu aimé la séance" : "J'ai aimé car ça te force à travailler et c'est plus ludique."

*La situation adidactique repose sur un triptyque qui fait interagir la connaissance, l'apprenti et le milieu.*

L'enregistrement audio montre que les "apprentis" et le milieu (principalement les pièces) interagissent.

### **Le milieu**

*Le milieu doit réagir aux propositions d'élèves dans une perspective d'apprentissage.*

Quelques extraits de conversations entre élèves nous permettent de voir que le milieu réagit à leur interrogation : "8 et 4, non ça marche pas"; "oui c'est ça".

### **La situation d'action**

*Agir consiste pour le sujet à choisir des états du milieu en fonction de ses propres motivations.*

Les élèves ont choisi différentes dispositions et différentes cartes.

*L'élève peut avoir des actions sur le milieu et le milieu renvoie des informations à l'élève.*

Les réponses à la question "quelle était ta stratégie?" laissent entrevoir l'action derrière ces formulations : "[Ma stratégie était] d'additionner les plus grands chiffres pour avoir un grand nombre et marquer le plus de points possible pour avoir un grand score."; "Ma stratégie était de tout tester."; "J'ai fait en sorte de mettre tous les grands nombres ensemble".

### **Situation de formulation**

*Les situations de formulation sont "souvent appuyées sur l'obligation faite à l'élève de communiquer avec un autre interlocuteur. La formulation des connaissances utiles pour maîtriser l'action met en oeuvre des répertoires linguistiques et facilite également leur acquisition." (Kuzniak, 2005)*

L'enregistrement audio permet de nous rendre compte de la communication entre élèves. Il reste néanmoins difficile d'interpréter le non-verbal sans support vidéo. Dans les échanges, nous observons quelques traces de formulation du type "Essaye de trouver son symétrique".

Pour illustrer le score maximal trouvé avec 3 cartes, les élèves ont fait appel à des formulations diverses : schéma, calculs et phrases.

La question "êtes-vous sûrs que c'est le maximum? Pourquoi?" fait communiquer les binômes sur leur stratégie de jeu : "Oui car avec trois cartes on ne peut faire toucher que trois fois le cinq, deux fois le trois et deux fois le quatre. Ce sont les plus grandes cartes du jeu. Avec trois pièces, il n'y a qu'un seul et unique centre, on ne peut donc pas faire toucher trois fois le quatre (par exemple)".

La production d'élèves répondant à la question "quel score maximal pouvez-vous obtenir avec 5 cartes?" montre une difficulté à communiquer sur ce qui a été fait. Nous pouvons émettre des suppositions sur cette difficulté : manque de temps, peur de "mal répondre" à la question, formalisation compliquée...

Les réponses à la question pour le guide " quelle était ta stratégie?" montrent une tentative d'explication de la démarche globale sans entrer dans le détail du placement pièce par pièce : "La stratégie est de multiplier le plus grand nombre ( $5 \times 4$ ) le maximum et de multiplier les autres nombres (les plus grands) par deux  $4 \times 2$  et  $3 \times 2$ ."

A la question "qu'as-tu appris", certains élèves ont répondu "à travailler en groupe". Dans le travail de groupe, la communication étant essentielle, nous pouvons imaginer que cet aspect a été travaillé.

Enfin, une remarque d'un élève montre la réflexion nécessaire pour expliquer la situation à quelqu'un qui ne la comprend pas : "[J'ai cherché et réfléchi aujourd'hui] parce que mon coéquipier avait du mal à comprendre certaines choses". D'après Sylvain Connac(Connac, s. d.), dans la description de la coopération à l'école, la réflexion du tuteur est particulièrement élevée quand la personne qu'il aide ne comprend pas l'explication. Il qualifie la recherche d'autres stratégies d'explication par le tuteur "d'activité à haute intensité intellectuelle".

### Situation de preuve et institutionnalisation

*L'élève élabore des preuves de la validité et de la pertinence de son modèle d'action.*

Dans différentes réponses d'élèves, nous pouvons sentir une volonté de prouver :

- "[On a trouvé le maximum] car on a mis à côté le plus de 5, le plus de 4 et le plus de 3 possible".
- "Nous sommes sûrs que c'est le maximum car nous pouvons avec trois dominos mettre seulement trois fois le même chiffre à côté (qui est le chiffre cinq)."
- "[Ma stratégie] était d'additionner les plus grands chiffres pour avoir un grand nombre et marquer le plus de points possible pour avoir un grand score."
- "[On ne peut pas prouver que c'est le maximum] car on n'a pas tout essayé."

*Les connaissances de l'élève lui permettent de prouver et de convaincre un interlocuteur.*

17 élèves sur 28 ont répondu "oui" à la question "serais-tu capable d'expliquer à quelqu'un d'autre ce que l'on a fait?". Ils semblent avoir suffisamment compris la situation pour l'expliquer et la refaire.

Les réflexions des élèves sur des éléments de preuve lors de leur retour écrit sont un premier pas vers l'institutionnalisation. Lors du bilan en classe entière, nous continuons à exploiter ces premières réflexions qui ont été faites lors de la phase de jeu. Plusieurs éléments de preuve se dégagent de cet échange :

- La disposition est importante pour avoir le score maximal.
- L'identification des valeurs les plus élevées présentes sur les pièces est primordiale.
- Le test de toutes les dispositions permet d'être sûr d'avoir trouvé le maximum.

*"L'institutionnalisation est le passage pour une connaissance de son rôle de moyen de résolution d'une situation d'action, de formulation ou de preuve, à un nouveau rôle : celui de référence pour des utilisations futures, collectives ou personnelles"(Brousseau, 2011).*

A la fin de la séance, l'échange en classe entière montre que les élèves ont l'intuition que les exemples trouvés ne sont pas suffisants pour prouver que l'on a obtenu le maximum. La conclusion de l'institutionnalisation est amenée par le professeur par manque de temps : "Ce que l'on retiendra aujourd'hui, c'est que tous nos exemples atteignant 55 ne sont pas suffisants pour prouver que 55 est le maximum".

Dans l'idéal, il aurait été intéressant de faire formuler ce bilan par les élèves. Les questions suivantes auraient pu être posées au groupe classe : "êtes-vous sûrs que c'est le maximum ? Nous avons fait beaucoup d'essais : est-ce suffisant ? Pourquoi en êtes-vous sûrs ? Pourquoi n'en n'êtes-vous pas sûrs ?". Enfin, pour aider les élèves à conclure, la disposition atteignant 57 aurait pu être montrée.

## Contrat didactique

*Accords implicites ou explicites passés entre l'enseignant et l'enseigné.*

L'habitude de jeu a été créée dans l'année. Les élèves sont à l'aise avec la manipulation de ce jeu.

### 8.1.2 Le jeu

#### Les critères de jeu de Brougère

Les remarques des élèves mettent en évidence la frivolité du jeu "c'est fun et ludique" et l'incertitude, tant sur les dispositions des pièces que sur le résultat.

#### Jeu sérieux

Nous allons identifier les réponses des élèves se rapportant aux avantages du jeu sérieux.

**La motivation des apprenants** Certains élèves sont motivés par l'esprit de compétition : "[J'ai cherché] pour avoir le meilleur score de la classe. "

Plusieurs élèves sont directement motivés par la situation ludique "l'on peut apprendre des choses en s'amusant".

Beaucoup d'élèves ont apprécié la séance, ce qui montre une motivation importante de leur part.

**L'apprentissage par essai/erreur** Les élèves étaient libres d'essayer autant de situations qu'ils le souhaitent, certains ont décidé de "tout tester" pour "voir" ce qui fonctionnait et ce qui ne fonctionnait pas. Certaines réponses sont assez claires sur les hésitations "[nous avons cherché et réfléchi] car nous avons tâtonné".

Enfin, nous disposons d'informations sur "l'offre" d'une situation essai/erreur et sur la frivolité qui permet à certains de se lancer : "J'ai réussi à faire l'exercice que je ne comprenais pas au début."

**La différenciation pédagogique** Les réponses à la question "quelle était ta stratégie?" montrent principalement deux stratégies différentes :

- Certains ont tâtonné et testé de nombreuses situations.
- Certains avaient une idée de la stratégie qu'ils voulaient mettre en place : "mettre le plus de pièces possible qui se touchent".

**La stimulation des interactions pédagogiques entre élèves** Dans l'enregistrement audio, les élèves échangent sur leur stratégie et l'évolution du jeu.

Comme évoqué précédemment, les échanges au sein des binômes ont été des stimuli de l'interaction pédagogique : "[J'ai réfléchi] parce que mon coéquipier avait du mal à comprendre certaines choses" ou encore : "[J'ai aimé la séance] car on a travaillé en groupe et si on ne comprenait pas quelque chose, on pouvait se faire aider par notre voisin."

### 8.1.3 Le raisonnement

Parmi les réponses des élèves nous allons identifier les éléments de raisonnement que l'on peut identifier.

Les principales informations que l'on possède dans le recueil de données concernent :

- Le choix des pièces,
- Le placement des pièces,
- Des éléments de preuves.

Nous allons détailler ces trois types d'informations.

#### Choix des pièces

Les traces écrites des élèves montrent qu'ils s'orientent rapidement vers des cartes ayant au moins la valeur "4" et la valeur "5" : "j'ai d'abord pris des 5, des 4 et des 3".

Parfois les élèves semblent confrontés au fait que chaque carte soit unique : "[il nous faut] là un 3 et là un 4. Mais non, on l'a déjà, on ne pourra pas retrouver". Pour palier ce problème, ils cherchent les cartes dans des familles différentes : "il nous faut là un 3 et là un 4, prends 2 cartes violettes".

Les élèves semblent faire correspondre les valeurs les plus élevées, les "4" et les "5", et prêtent moins attention aux valeurs extérieures.

#### Placement des pièces

Les élèves cherchent l'effet miroir de la symétrie pour faire correspondre le plus de valeurs possible "essaye de trouver son symétrique".

Les binômes cherchent rapidement à regrouper les valeurs les plus élevées "on colle le plus de 5 puis le plus de 4 etc". Lors des échanges en classe entière l'un d'eux évoque l'intuition d'aller vers une disposition compacte "y'a plus de surface disponible, y'a plus de pièces qui se touchent" ou encore "la ligne droite c'est pas stratégique : On peut gagner des points que deux par deux, on ne peut pas faire des groupes de 3 et de 4".

#### Éléments de preuve

Quelques arguments montrent la volonté de prouver de la part des élèves "nous sommes sûrs que c'est le maximum car nous pouvons avec trois dominos mettre seulement trois fois le même chiffre à côté (qui est le chiffre 5)".

Certains évoquent le besoin de faire une preuve exhaustive "ma stratégie était de tout tester". Cette stratégie est ajustée à juste titre par un autre élève : "On n'a pas besoin de tout tester. Ce n'est pas la peine de tester les cartes qui n'ont pas de 5."

Ce sont quelques éléments "théoriques" que ressortent de l'enregistrement vidéo. Lorsque l'enseignante expose le calcul de la somme de tous les points présents sur cinq pièces, un élève met l'accent sur les valeurs que l'on ne peut pas marquer : "ce n'est pas possible d'obtenir 70 car dans les coins, on ne peut pas les faire se toucher".

## 8.2 Synthèse

L'analyse des résultats nous montre que les élèves sont dans l'action et le raisonnement. Ils cherchent, manipulent et évoquent facilement des éléments de preuve pour justifier leurs choix.

La TDS nous a permis de mesurer que les conditions de mise en action des élèves étaient réunies dans la situation de jeu proposée. Cela nous a également aidé à mesurer le lien créé entre les élèves et le raisonnement. De plus, cette théorie nous a permis d'identifier et de distinguer les éléments de formulation des éléments de preuve avancés par les élèves. La conclusion qui a été mise en valeur à la suite à l'institutionnalisation ("plusieurs exemples ne suffisent pas à prouver") aurait mérité d'être exploitée lors des séances suivantes afin que les élèves se l'approprient. En raison de la fermeture des collèges après cette expérience, la situation n'a pas pu être de nouveau exploitée.

L'analyse des résultats au travers des critères de jeu a mis en valeur la source de motivation des élèves qui vient principalement du caractère ludique de la situation, même si certains soulignent l'envie de gagner. La manipulation et la possibilité de faire des essais/erreurs à volonté a aidé les élèves à entrer rapidement dans l'activité.

La rédaction de la preuve a contribué à mener une analyse fine du raisonnement des élèves et à se rendre compte qu'ils se montrent capables d'aller vers une preuve complète.

Certains élèves ont résolu rapidement l'activité et se sont ennuyés. La preuve qui a été faite donne des pistes pour orienter les élèves les plus rapides. Il peut notamment leur être demandé de trouver l'exhaustivité des dispositions possibles avec cinq pièces.

Enfin, quelques remarques pratiques concernant le déroulé de la séance :

- L'affichage au tableau des scores semble mettre une pression temporelle aux élèves les moins rapides et peut induire en erreur.
- Le rôle du placeur et du guide dans la situation à 5 pièces semble peu apporter sur le plan de la communication entre élèves. En effet, les élèves échangent spontanément et ces rôles imposés ne paraissent pas les avoir incités à formaliser davantage leur pensée.

## 8.3 Ouverture sur le caractère "groupé"

L'intuition nous incite à penser que la figure la plus compacte rapporte le plus de points. Nous pouvons imaginer avoir un indicateur sur le caractère groupé d'une disposition et faire le lien entre les dispositions groupées et le score. Cet indicateur serait lié aux nombres de contact de chaque pièce avec d'autres pièces. La somme des indicateurs de chaque pièce pourrait donner un indicateur concernant l'ensemble de la configuration.

Cet indicateur mériterait une définition rigoureuse. En effet, le nombre d'arêtes en contact n'est pas assez précis car il ne fait pas ressortir quels éléments sont en contact. De plus, il faudrait ajouter à cet indicateur le nombre de points non marqués (valeurs dans les coins par exemple). Ce dernier argument a été décisif dans la preuve que nous avons rédigée.

Cet indicateur serait probablement une piste d'exploration possible pour des recherches de maximum avec plus de 5 pièces : à un nombre de pièces donné, la solution maximale serait à chercher parmi les configurations les plus groupées.

# Conclusion

Après une année de stage et de travail auprès des élèves et au contact de l'université, ce mémoire m'a permis d'étudier en détail la théorie des situations didactiques de Brousseau. Le travail sur ce cadre théorique m'a aidé à prendre du recul sur les situations de jeux proposées en classe. Parallèlement, le travail sur les critères de jeu de Brougère et l'analyse des jeux sérieux de Chen et Michael (2005) met en valeur les avantages recherchés du jeu par rapport à un apprentissage classique. Ces critères combinés à la TDS, et notamment à la recherche d'une situation adidactique, ont permis de créer une expérience à mener en classe mettant l'accent sur le raisonnement et la manipulation.

Les conditions d'enseignement particulières de cette année, liées à l'épidémie du covid-19, ont freiné les expériences menées en classe. Une seule expérience a pu être réalisée. Après avoir conduit cette expérience, j'ai mesuré que la situation pouvait être bien plus riche que ce que j'avais imaginé dans un premier temps. Si la situation devait être reconduite il semble essentiel de s'orienter avec les élèves vers une preuve complète.

Match Point offre de multiples possibilités de jeu dont seulement deux ont été exploitées ici : la recherche du maximum avec 3 pièces et avec 5 pièces. Cette recherche de maximum ouvre de nombreuses portes, tant sur la façon de mener en classe la situation qui a été présentée dans ce mémoire en pouvant aller jusqu'à une preuve complète, que pour la recherche de maximum avec un nombre plus important de pièces. Dans la situation à 5 pièces, pour laquelle une preuve complète a pu être rédigée, nous avons pu passer en revue l'intégralité des cas. Pour un nombre plus important de pièces, passer tous les cas en revue devient vite fastidieux, voire impossible. Il faut alors exploiter de nouvelles pistes pour pouvoir prouver l'obtention d'un maximum. Dans ce mémoire, un "indicateur de disposition groupée" a été évoqué. Il s'agit d'une piste parmi d'autres qui mériterait d'être exploitée dans le cadre d'un développement futur et proposée à des élèves plus âgés, de niveau lycée par exemple.

# Bibliographie

- Alvarez, J., Djaouti, D., & Rampnoux, O. (2016). *Apprendre avec les serious games ?* Futuroscope : Canopé - CNDP.
- Brougère, G. (2005). *Jouer/Apprendre*. Paris : Economica.
- Brougère, G. (2006). *Jeu et éducation*. Paris : Editions L'Harmattan.
- Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques : Didactiques des mathématiques, 1970-1990*. Grenoble : Pensée sauvage.
- Brousseau, G. (2011, mai). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *educationdidactique*, 5(1), 101–104. Consulté le 2019-11-21, sur <http://journals.openedition.org/educationdidactique/1005> doi : 10.4000/educationdidactique.1005
- Bulletin officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015*. (2015). Consulté le 2020-01-04, sur [http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN\\_SPE\\_11/35/1/BO\\_SPE\\_11\\_26-11-2015\\_04351.pdf](http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/35/1/BO_SPE_11_26-11-2015_04351.pdf)
- Chevallard, Y. (1986). Les programmes et la transposition didactique. , 15.
- Connac, S. (s. d.). *Mise en œuvre de la coopération à l'école*. Consulté sur <https://www.reseau-canope.fr/climatscolaire/agir/ressource/ressourceId/mise-en-oeuvre-de-la-cooperation-a-lecole.html>
- Dehaene, S. (2018). *Apprendre !: Les talents du cerveau, le défi des machines*. Paris : Odile Jacob.
- Kuzniak, A. (2005). La théorie des situations didactiques de brousseau. , 17.
- Marchand, V. (2016). *Quel apport pédagogique des jeux sérieux ?* Consulté le 2020-01-03, sur <https://www.reseau-canope.fr/agence-des-usages/quel-apport-pedagogique-des-jeux-serieux.html>
- Mathématiques : clefs de lecture des résultats TIMSS 2015* (N° no 94 (sept. 2017)). (2017). Paris : Ministère de l'Éducation Nationale.
- Michael, D. (2005). *(Serious Games : Games That Educate, Train, and Inform) By Michael, David*. Course Technology Inc.
- Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. (2016a, mars). *Compétences travaillées en mathématiques - Raisonner*. Consulté le 2020-04-12, sur [https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences\\_travaillées/83/6/RA16C4\\_MATH\\_raisonner](https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillées/83/6/RA16C4_MATH_raisonner)
- Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. (2016b). *Les mathématiques par le jeu*. Consulté le 2019-11-21, sur [https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Maths\\_par\\_le\\_jeu/92/4/01-RA16C3C4\\_MATH\\_math\\_jeu\\_641924.pdf](https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Maths_par_le_jeu/92/4/01-RA16C3C4_MATH_math_jeu_641924.pdf)
- Pelay, N. (2011). Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique. , 359.

- Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA)*. (2019). Consulté le 2020-01-01, sur [http://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018\\_CNFRARE.pdf](http://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CNFRARE.pdf)
- Trouillot, E. (2020, mars). Jeux et maths, où en est-on ? *Au fil des maths*(535).
- Villani, C., & Torossian, C. (2018, février). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques* (Rapport technique).

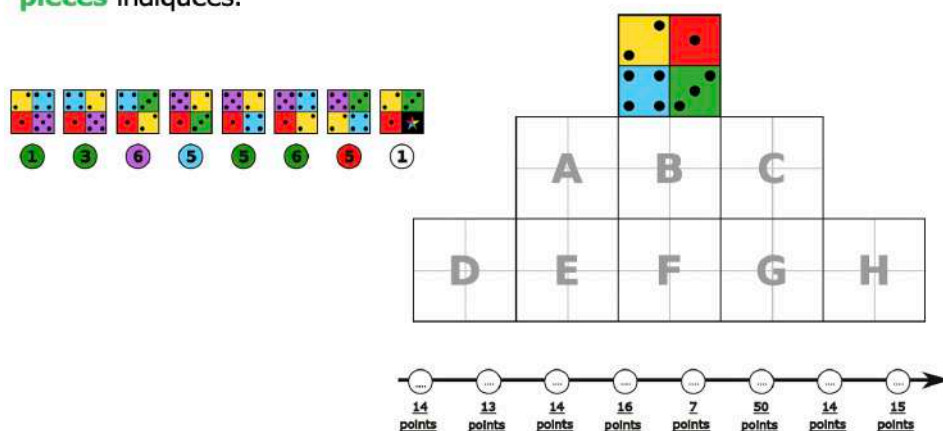


## Annexe A

# Un exemple d'activité de la brochure de Match Point

En s'appuyant sur les règles du jeu de Match Point, la brochure de l'APMEP offre un nombre important de possibilités d'activités à partir de ces pièces et ouvre la porte à l'imagination des joueurs et des enseignants pour offrir de nouvelles possibilités de jeu.

En connaissant l'ordre de pose de chaque pièce et le score obtenu après le placement, il faut **retrouver la localisation et la position des pièces** indiquées.



**Match Point** – ÉVOLUTION / Narrer

FIGURE A.1 – Exemple d'une activité de la brochure APMEP

## Mots clés

Jeu, raisonnement, preuve, manipulation, théorie des situations didactiques.

## Résumé

Ce travail conçoit et analyse une situation de jeu proposée en classe en mettant l'accent sur le raisonnement des élèves. Le cadre théorique s'appuie sur la théorie des situations didactiques de Brousseau. Les critères de jeu de Brougère et l'analyse des jeux sérieux de Chen et Michael (2005) ont été utilisés. Le jeu société "Match Point", diffusé par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), a été utilisé comme support de ce mémoire. L'activité proposée aux élèves a été choisie de manière à ce qu'ils manipulent les pièces pour trouver des pistes théoriques permettant d'expliquer leurs stratégies de jeu et d'émettre des arguments de preuve. Les résultats montrent que les élèves s'emparent facilement de l'activité et formulent des arguments constituant une preuve partielle. Dans le cadre d'un développement futur, l'expérience pourrait être reconduite en ayant pour objectif d'aboutir à une preuve complète.

## Abstract

This work devises and analyzes a game situation given in class highlighting the reasoning of students. The theoretical framework is based on Brousseau's theory of didactic situations. Brougère's game criteria and the analysis of serious games by Chen and Michael (2005) were also used. The board game "Match Point", distributed by the Association of Public Education Mathematics Teachers (APMEP), was used as a support for this thesis. The activity offered to the students was chosen to let them manipulate the pieces so as to find theoretical tracks allowing them to explain their game strategies and put forward proof arguments. The results show that the pupils easily take up the activity and set out arguments constituting partial proof. In the context of a future development, the experience could be repeated to reach a formal proof.