



HAL
open science

Le matériel de numération au service de la compréhension d'un algorithme opératoire

Servane Bardet

► **To cite this version:**

Servane Bardet. Le matériel de numération au service de la compréhension d'un algorithme opératoire. Education. 2020. dumas-03040064

HAL Id: dumas-03040064

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-03040064>

Submitted on 4 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année universitaire 2019-2020

Master *Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation*

Mention *Premier degré*

Le matériel de numération au service de la compréhension d'un algorithme opérateur

Présenté par Mme Servane BARDET

Mémoire de M2 encadré par Mme Sophie SOURY-LAVERGNE

Sommaire

1 Etat de l'art.....	4
1.1 La numération au cycle 2.....	4
1.1.1.Ce qui est travaillé avant le cycle 2.....	4
1.1.2.Le principe de la numération décimale de position.....	4
1.1.3.Les difficultés rencontrées par les élèves.....	5
1.1.4.Les programmes officiels et le rapport Villani-Torossian.....	7
1.2 La manipulation.....	8
1.2.1.Son importance, déjà pressentie par Maria Montessori au 20ème siècle.....	8
1.2.2.La manipulation au 21e siècle.....	9
1.2.3.Avantages et limites de la manipulation.....	9
1.3 Le matériel de manipulation relatif à la numération.....	11
1.3.1.Les perles du système décimal	11
1.3.2.Les chiffres du système décimal	12
1.3.3.L'association matériel-chiffres.....	13
1.3.4.Les unités et dizaines du matériel Picbille.....	14
1.4 Intérêts et limites du matériel retenu.....	16
1.4.1.Intérêts.....	16
1.4.2.Limites.....	17
1.5 Manipulation et démarche d'apprentissage.....	17
1.5.1.De quelle manière manipuler ?.....	18
1.5.2.Manipulation et démarche expérimentale.....	18
1.5.3.La verbalisation.....	19
1.5.4.Le passage à l'abstraction.....	20
1.5.5.Bienveillance et plaisir d'apprendre.....	20
1.6 Problématique.....	21
2 Méthode	22
2.1 Présentation de la méthodologie.....	22
2.1.1.Participants.....	22
2.1.2.Déroulement.....	24
2.1.2.1.Précisions sur les phases 1 et 5	24
2.1.2.2.Précisions sur la phase 2	25
2.1.2.3.Précisions sur la phase 3	25
2.1.2.4.Précisions sur la phase 4	25
2.2 Procédures visées.....	26
2.2.1.Première procédure possible.....	26
2.2.2.Deuxième procédure possible.....	26
2.2.3.Troisième procédure possible.....	26
2.2.4.Quatrième procédure possible	27
2.3 Résultats.....	27
2.4 Discussion	30
2.4.1.Recontextualisation.....	30
2.4.2.Mise en lien avec les recherches antérieures.....	30
2.4.3.Limites et perspectives.....	33
3 Conclusion.....	34

Introduction

Les événements actuels montrent pourquoi les mathématiques sont indispensables à la formation du citoyen : les données chiffrées sont extrêmement présentes, il en arrive tous les jours, de tous les pays. Un citoyen éclairé se doit d'être capable de les comprendre, pour raisonner sur les problèmes de sa vie quotidienne.

En 2015, les évaluations des compétences mathématiques réalisées par l'Éducation nationale montrent des résultats moyens : « *seuls 58 % des élèves maîtrisent les compétences attendues en fin de CM2. Plus de 40 % des élèves n'ont pas acquis les connaissances de base relatives au calcul mental et aux opérations sur les grands nombres et les décimaux* ». (conférence de consensus du CNESCO 2015, p.5)

Passionnée par les mathématiques, initiée à la pédagogie de Maria Montessori, je me suis demandée comment, dans ma classe, je pouvais aider mes élèves à comprendre les principes qui sous-tendent notre système de numération : le système décimal et la numération de position. L'algorithme opératoire de la division posée reposant sur ces principes, j'ai pensé qu'aborder cette notion avec du matériel aiderait mes élèves à s'imprégner des principes de notre système de numération.

La première partie de ce mémoire présente la numération au cycle 2 et les dernières recommandations pour l'enseignement des mathématiques à l'école : « manipuler, verbaliser, abstraire ». Aussi y sont exposés l'intérêt de la manipulation et le matériel de numération utilisé dans ma classe tout au long de l'année scolaire.

La deuxième partie témoigne de l'étude réalisée, de ses résultats, pour mener à une analyse et des perspectives.

1 Etat de l'art

1.1 La numération au cycle 2

1.1.1. Ce qui est travaillé avant le cycle 2

Avant de travailler la numération au cycle 2, il faut construire le nombre, enseignement relevant de l'école maternelle.

Le concept de nombre recouvre deux aspects : l'aspect cardinal, lorsque le nombre est utilisé pour désigner une quantité, et l'aspect ordinal lorsqu'il s'agit d'une position.

En maternelle, avant d'introduire le nombre, une autre notion est primordiale : l'élève doit prendre conscience de la quantité. Amené à dire s'il y en a beaucoup ou peu, l'élève doit ensuite comprendre et savoir dire s'il y en a trop ou s'il en manque.

Une fois la notion de quantité acquise, l'enseignant propose des situations qui créent le besoin du nombre. Ce besoin du nombre est d'ailleurs ce qui explique l'invention des nombres, vers -4 000 ans en Mésopotamie.

Les programmes officiels donnent comme objectifs de « *faire construire le nombre pour exprimer les quantités, de stabiliser la connaissance des petits nombres et d'utiliser le nombre pour exprimer les quantités* ». Il est aussi ajouté que « *cette construction ne saurait se confondre avec celle de la numération et des opérations qui relèvent des apprentissages de l'école élémentaire.* » (B.O. spécial n°2 du 26 mars 2015, p.16)

1.1.2. Le principe de la numération décimale de position

À l'école élémentaire, les programmes de mathématiques sont séparés en trois grands domaines : nombres et calculs, grandeurs et mesures, et espace et géométrie.

Notre système de numération est régi par deux règles primordiales. La première, la règle du système décimal, définit que 10 unités d'un ordre deviennent une unité de l'ordre supérieur. La deuxième, celle de la numération de position, spécifie qu'un chiffre prend une valeur différente selon la place qu'il occupe dans l'écriture du nombre.

C'est pour cette raison que les enseignants font travailler les élèves en leur faisant réaliser des groupements par 10, suivis d'échanges (10 contre 1). Ces activités servent à ancrer la règle du système décimal qui correspond à la conversion $10u = 1d$.

Si nous décidions de changer notre système de numération en groupant par 3 (des « troisaines »), alors nous écririons le nombre qui désigne 5 unités sous la forme « 12 ». Ce nombre ne se dirait pas « douze » ; il faudrait inventer un nouveau mot, ou cela pourrait être « une troisaine, deux unités ».

En effet, les 3 premières unités permettent de former une unité de la hiérarchie supérieure, et il reste 2 unités isolées.

La numération relève principalement du domaine « nombres et calculs ». Cependant, le domaine « grandeurs et mesures » peut être abordé de manière à renforcer la compréhension du principe de la numération de position. Un des points importants sont les conversions, et non l'application d'une règle. Dans le fichier « j'apprends les maths, CE2 » de Rémi Brissiaud (2016), le contexte des mesures de longueur est utilisé pour travailler la numération des nombres à 3 chiffres (particulièrement dans la séquence 25). Un personnage est introduit : monsieur Millimètre. Pour tracer des longueurs données en mm, il utilise les groupements de 100 mm (1 dm) et de 10 mm (1 cm). « *Tracer une longueur de 327 mm comme lui revient à chercher la décomposition en centaines (dm), dizaines (cm) et unités (mm)* » (2016, p.86). Dans cette séquence, ce trait de 327 mm doit être représenté par les élèves par 3 traits de 100 mm (1 dm), 2 traits de 10 mm (1 cm) et un trait de 7 mm. Ainsi les élèves sont amenés à se représenter mentalement le rapport entre les différentes unités, et ne remplissent pas les cases d'un tableau en appliquant une règle pas forcément comprise. L'exemple de cette séquence illustre comment le domaine « grandeur et mesures » contribue à renforcer les connaissances en lien avec le domaine « nombres et calculs ». Préconisation du rapport Villani-Torossian, d'ailleurs stipulée dans la 11ème mesure : « *l'enseignement effectif des grandeurs et mesures à l'école primaire vient soutenir le sens des nombres* ».

Pas forcément conscients des principes de la numération décimale de position, même certains adultes ne saisissent pas le sens des nombres. Il est donc normal que les élèves rencontrent des difficultés.

1.1.3. Les difficultés rencontrées par les élèves

Un nombre n'est pas simplement une suite de chiffres. Y mettre du sens est un long travail. Il faut d'abord que les élèves comprennent la différence, au niveau du vocabulaire, entre « chiffre » et « nombre ». On peut la comparer à celle existant entre les lettres et les mots : pour écrire les mots, nous utilisons des lettres. De même pour écrire les nombres, nous utilisons les chiffres.

Mettre du sens sur un nombre signifie en comprendre son écriture. Brissiaud dit que « *l'absence de compréhension de l'écriture des nombres est certainement une des principales causes de l'échec en mathématiques* » (2016, p.19). On peut parfois avoir l'impression qu'un élève comprend l'écriture d'un nombre lorsqu'il est capable de dire que dans 468, 4 désigne le chiffre des centaines, 6 celui des dizaines, et 8 est le chiffre des unités. Cependant, comme dit Rémi Brissiaud, « *lorsqu'un enseignant entraîne ses élèves à répondre aux questions portant sur ce que désignent les différents chiffres, certains enfants fournissent les réponses attendues sans réellement comprendre les*

écritures correspondantes » (2016, p.18). Les « bonnes réponses » sont alors reliées à une capacité verbale, mais pas à un savoir-faire. Pour Rémi Brissiaud, « *il vaut mieux définir la compréhension de l'écriture des nombres à partir de savoir-faire qu'à partir de réponses verbales* » (2016, p.18).

Brissiaud propose une première définition de la compréhension de l'écriture des nombres. Comprendre l'écriture de 358, c'est « *s'être forgé la conviction que la procédure consistant à compter un à un les 358 objets et celle consistant à compter d'abord 3 cents, puis 5 dix et enfin 8 uns conduisent à des collections qui ont la même taille, et qu'on peut donc à loisir remplacer une façon de faire par l'autre* » (2016, p.19).

Néanmoins, Brissiaud ajoute que cette première définition ne suffit pas. Une autre connaissance est fondamentale : « *savoir que 35 dizaines c'est 350, et que 358 c'est 35 dizaines et 8* » (2016, p.19). Cette connaissance signifie que les nombres sont groupés uniquement par 10, et non plus par 100 et 10. Son intérêt est multiple.

L'élève ayant compris que 24 dizaines c'est 240 peut s'être appuyé sur le calcul 24×10 , en cherchant le nombre total correspondant à 24 dizaines ; il trouve ainsi facilement 240.

La division par 10 est aussi bien mieux comprise. Pour reprendre l'exemple donné par Brissiaud, diviser 639 par 10 revient à chercher combien il y a de dizaines dans 639. Il y a 63 dizaines dans 639, et il reste 9 unités.

Aussi, lorsqu'une retenue apparaît dans une addition posée, dans la colonne des dizaines, il est nécessaire d'avoir compris que 15 dizaines est égal à 1 centaine et 5 dizaines. Sans cette compréhension, la technique est utilisée de manière automatique, sans y mettre du sens.

C'est ce que nous constatons parfois dans les classes, avec la multiplication par 10. Même si l'enseignant prend soin d'éviter de dire aux élèves que pour calculer 25×10 , il faut « ajouter » un zéro à droite, nous entendons parfois les élèves le dire. Nous préfererions les entendre dire : « c'est 25 dizaines, car les dizaines c'est dix fois plus que les unités, donc c'est 250 ».

De plus, la numération est fondamentale pour les algorithmes opératoires. Ce sont ses propriétés qui font que l'on peut calculer sur les chiffres pour obtenir des résultats sur les nombres. Les chiffres des nombres sur lesquels portent le calcul doivent être disposés d'une manière précise, un enchaînement d'actions portant sur les chiffres est à suivre selon un déroulement rigoureux (différent selon l'opération), tout cela amenant à un résultat sur les nombres. Cela permet d'effectuer des calculs avec de grands nombres, sans avoir besoin de connaissances en calcul mental portant sur les grands nombres. La mémorisation des tables d'addition, de soustraction et de multiplication est normalement suffisante. Par exemple, pour réaliser la division « 1250 divisé par 5 », la mémorisation de la table de 5 suffit, si la division est posée. Une autre procédure possible est l'appui sur les multiples : une bonne connaissance des multiples de 25 permet d'établir que $5 \times 25 = 125$,

ainsi $5 \times 250 = 1250$, donc 1250 divisé par 5 est égal à 250.

1.1.4. Les programmes officiels et le rapport Villani-Torossian

Seuls les nombres entiers sont abordés au cycle 2. Les objectifs concernant les nombres et les calculs sont les suivants :

- Comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer.
- Nommer, lire, écrire, représenter des nombres entiers.
- Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul.
- Calculer avec des nombres entiers.

Pour répondre au premier objectif, les élèves doivent, entre autre, « *dénombrer, constituer et comparer des collections en les organisant, notamment par des groupements par dizaines, centaines et milliers.* » (B.O. n°30 du 26-7-2018, p.24)

Parmi les activités permettant d'atteindre le deuxième objectif, est citée celle d' « *utiliser des écritures en unités de numération (5d 6u, mais aussi 4d 16u ou 6u 5d pour 56)* ». Cela renvoie à la compréhension des deux règles de notre système de numération : le principe décimal de la numération en chiffres, et le principe de position.

Les mathématiques sont indispensables à la formation du citoyen, dans un monde où les données chiffrées sont extrêmement présentes. Dans le rapport Villani-Torossian, il est fait mention d'auditions de Pôle Emploi et de responsables des ressources humaines de grandes entreprises faisant « *ressortir la grande souffrance d'adultes en difficulté avec les nombres et les calculs de « base » comme une simple multiplication par 10* » (2018, p.28). Devant ce constat édifiant, les auteurs poursuivent : « *il est essentiel de faire évoluer nos représentations : l'école doit à tout citoyen un savoir minimum sur les bases du calcul.* » (2018, p.28).

Pour donner corps à ces idées, le rapport Villani-Torossian insiste sur le fait de donner du sens aux nombres et aux opérations. Pour cela, les capacités calculatoires doivent être travaillées de manière plus approfondie. Concernant le travail sur les algorithmes de calcul dit « posé », le temps passé est souvent trop important et doit donc être réduit : ces activités ne favorisent pas l'accès au sens. Citons la 17ème recommandation de la conférence de consensus du CNETCO de 2015 : « *le calcul mental et le calcul en ligne doivent être privilégiés par rapport au calcul posé* ».

De plus, pour un apprentissage efficace des mathématiques, dans le plaisir et avec d'ambitieux objectifs pour tous, ce rapport préconise, en s'appuyant sur les travaux de Bruner, une méthode fondée sur la manipulation et l'expérimentation, la verbalisation, et l'abstraction. La partie suivante va permettre de développer l'intérêt de la manipulation pour l'apprentissage des mathématiques.

1.2 La manipulation

D'après le dictionnaire Larousse, la manipulation est définie de plusieurs manières :

- « *Action de manipuler quelque chose, un objet, un appareil.* »
- « *Action de soumettre quelque chose à des opérations diverses, en particulier dans un but de recherche ou d'apprentissage.* »
- « *Exercice au cours duquel des élèves, des étudiants ou des chercheurs réalisent une expérience ; l'expérience elle-même.* »

1.2.1. Son importance, déjà pressentie par Maria Montessori au 20ème siècle

Pédagogue du début du 20ème siècle, née en 1870 en Italie, Maria Montessori devient la première femme médecin d'Italie en 1896. Se spécialisant en psychiatrie, son expérience au poste de directrice d'une école orthophrénique (l'orthophrénie est l'éducation et la rééducation de jeunes sujets atteints de troubles mentaux partiellement améliorables), entre 1899 et 1901, nourrie chez elle l'envie d'étudier la pédagogie. Sa première école maternelle (Casa dei bambini) ouvre en 1907, dans un quartier populaire de Rome. Les élèves apprennent grâce à un matériel particulier, inventé par deux hommes français : Jean Itard et Edouard Seguin. Tous deux médecins et pédagogues, ils ont joué un rôle important dans l'éducation spécialisée, des personnes sourdes pour le premier et des personnes handicapées mentales pour le deuxième. La particularité de Montessori a été de mettre à disposition d'enfants « normaux » des outils pensés pour des enfants « particuliers ».

En 1936, Montessori explique dans son livre « L'enfant » le rôle extrêmement important de la main : « *L'organe moteur qui caractérise l'homme, c'est la main, au service de l'intelligence, pour la réalisation du travail.* » (1936, p.75). Elle ajoute que : « *La main est cet organe dont la structure fine et compliquée permet à l'intelligence de se manifester.* » (1936, p.76).

Une vingtaine d'années plus tard, lorsqu'elle rédige « L'esprit absorbant », elle va plus loin en affirmant que : « *le développement de l'habileté de la main va par conséquent de pair avec le développement de l'intelligence.* » (1959, p.122).

Ces hypothèses affirmées par Montessori sont toujours considérées comme valides et font l'objet de nombreux travaux internationaux dans le domaine de l'éducation autour de la notion de cognition incarnée (embodied cognition).

Deux chercheuses actuelles de Lyon, M.-L. Gardes et P. Courtier, ont perçu le rôle central de la manipulation dans la pédagogie Montessori : « *tout apprentissage débute par la manipulation d'un matériel didactique spécifique, conçu pour travailler; selon Maria Montessori, un concept particulier.* » (2018, p.84)

Cette femme du 20ème siècle est convaincue que l'intelligence humaine se développe lorsque la

main est exercée. Intéressons-nous maintenant aux idées de pédagogues et chercheurs du 21^{ème} siècle.

1.2.2. La manipulation au 21^e siècle

Plusieurs chercheurs français se sont intéressés à l'importance du travail de la main dans les apprentissages.

En 2008, Gentaz et Pinet réalisent une étude sur la contribution du système haptique manuel. Le système haptique recouvre l'aspect tactile et kinesthésique. Évaluer la contribution du système haptique manuel signifie donc faire toucher aux apprenants des objets avec leurs mains et leur faire mettre en mouvement ces objets. En plus de la composante sensorielle, une composante motrice est présente dans la modalité haptique.

Leur étude de 2008 porte sur la reconnaissance de figures géométriques planes chez des enfants de cinq ans. « *Les résultats montrent que le nombre moyen de figures cibles correctement reconnues progresse significativement après l'entraînement visuo-haptique.* » (2008, p.36). Ces résultats s'expliquent parce que « *l'exploration haptique des figures implique un codage multimodal en mémoire à la fois visuel, haptique et moteur. Ce codage multimodal permettrait alors une meilleure activation des représentations des figures qui se sont développées à l'aide de multiples sources d'information.* » (2008, p.37)

Les effets bénéfiques de l'exploration visuo-haptique manuelle avaient déjà été révélés par des études de 2003 (Gentaz, Colé et Bara), avec l'utilisation de lettres en relief, en préparation à la lecture.

Berdonneau rejoint Gentaz et Pinet sur l'importance de la manipulation. Elle ajoute le fait que la manipulation répond à un besoin fondamental de l'enfant qui est de mobiliser les sens (2006, p.1).

1.2.3. Avantages et limites de la manipulation

Nous venons de voir que plusieurs études du 21^{ème} siècle prouvent les bénéfices de la manipulation. Détaillons maintenant ses avantages, sans oublier de citer ses limites.

Berdonneau (2006, op. Cit), qui considère plutôt le cycle 1 dans ce texte, perçoit dans ce type d'activité des avantages pour l'élève, et aussi pour l'enseignant.

Du côté de l'élève, elle décrit cet « *apprentissage multi-sensoriel* » comme un moyen de toucher le « *canal sensoriel privilégié par chaque élève* ». De plus, en libérant l'élève de l'acte d'écriture parfois très coûteux pour lui, son attention est canalisée et centrée sur les actions essentielles de l'apprentissage. Enfin, de nombreuses expériences sont possibles, car les actions de manipulation peuvent être rapides (Berdonneau, 2006).

Berdonneau repère énormément d'avantages à la manipulation pour l'enseignant également.

Tout d'abord, comme il est très difficile à un élève de « *faire semblant* » dans une situation de

manipulation, ce type d'activité constitue pour l'enseignant un « *indicateur de la vigilance* » de son élève. C'est aussi un « *outil de mise au travail effective de l'élève* ». Enfin, lorsque l'enseignant a la possibilité d'observer le déroulement de la manipulation, cela crée un « *support fiable pour reconstituer le raisonnement suivi par l'élève* ». Pouvant aussi être un « *outil d'aide à l'élaboration des représentations mentales* », il s'agit d'un « *dispositif fournissant une évaluation sûre et généralement aisée* » en fin de séquence. Cette évaluation peut être faite par l'élève, qui prend plus facilement conscience du travail qu'il a effectué lorsqu'il a agit sur des objets, plutôt que lorsque son activité se réduit au support papier-crayon (Berdonneau, 2006).

La réalité d'une classe suffit à faire percevoir certaines limites de la manipulation. En effet, l'installation peut être chronophage. De plus, les budgets disponibles ne permettent pas forcément l'achat de ce matériel coûteux. Aussi, une formation est parfois nécessaire : le matériel Montessori présente des spécificités nombreuses, qu'il est préférable de maîtriser soi-même pour en faire profiter les élèves.

Des limites existent aussi du côté de l'élève. S'il est vrai que les objets aident à introduire une idée abstraite en matérialisant les concepts, l'élève doit aussi se détacher progressivement de ces objets pour arriver à l'abstraction. Comment l'enseignant peut-il aider son élève à s'approprier les concepts mathématiques ? L'abstraction est-elle un processus individuel, résultant d'un temps conséquent de manipulation appropriée, suivi d'une verbalisation adéquate ? Montessori compare le lien entre le matériel et l'abstraction à celui existant entre un terrain d'aviation et un avion (« *aéroplane* », à son époque) : le terrain constitue la terre ferme, la zone permettant l'envol de l'avion, et sur laquelle il peut constamment revenir. « *Ainsi, dans la formation psychique, il y a une partie matérielle nécessaire d'où l'esprit s'élève et où il trouve son refuge, son repos, son point d'appui, sans lequel il ne peut croître et s'élever « librement »* ». (2010, p.78) Toujours selon Montessori, le passage à l'abstraction serait comme un envol pris par l'enfant lorsqu'il se sent prêt : « *Il est intéressant de voir le détachement de l'enfant pour les secours qui lui sont offerts dans les calculs arithmétiques. À un certain degré de maturité, il veut « raisonner sur l'abstrait » et faire des calculs abstraits sur les nombres, comme obéissant à une poussée intérieure qui aspire en même temps à libérer l'âme de tous ses liens et à réaliser une économie de temps.* » (2010, p.79-80)

Montessori a cherché à matérialiser les idées abstraites, dans le domaine des mathématiques comme dans le domaine des sens. Elle s'est demandé si en matérialisant l'idée abstraite, « *en la présentant sous la forme d'objets adaptés à l'enfant, c'est-à-dire d'objets palpables, son esprit [serait] capable de l'apprécier, de s'y intéresser profondément* » (1958, p.142).

C'est certainement parce que la capacité d'abstraction en mathématiques est un processus complexe que Montessori a développé un matériel aussi riche et précis : à un concept correspond un matériel.

1.3 Le matériel de manipulation relatif à la numération

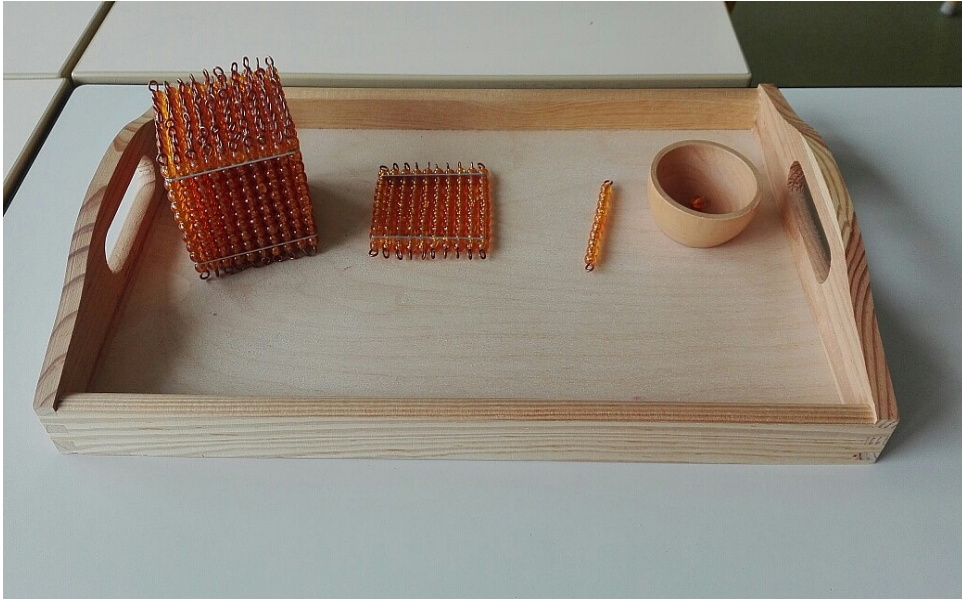
Les mathématiques occupent une place centrale dans l'oeuvre de cette pédagogue du 20ème siècle ; son matériel de numération est conséquent. Une partie de ce matériel a retenu mon attention pour l'enseignement de la numération dans ma classe de CE2. Néanmoins, il a aussi été complété par du matériel autre, présenté aussi dans cette partie. Les intérêts et limites seront abordés dans la partie suivante.

1.3.1. Les perles du système décimal

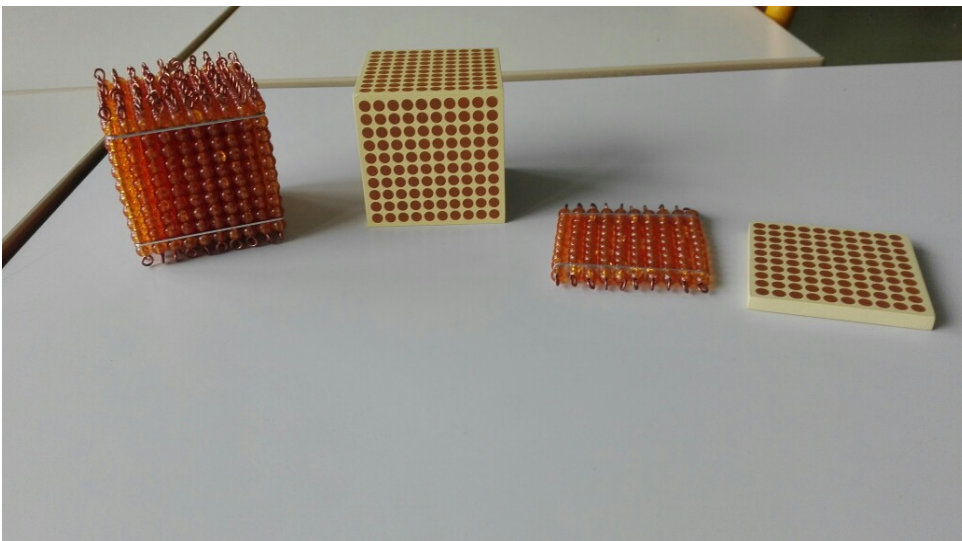
Ce matériel permet d'introduire la clef du fonctionnement du système décimal. L'enfant voit et sent en touchant les perles que dix unités d'un ordre sont égales à une unité de l'ordre supérieur. Lors de la première présentation à l'élève, ces quantités sont posées sur un plateau, dans l'ordre de la lecture du nombre. De gauche à droite, on y trouve un cube de mille perles, une plaque de cent perles, une barrette de dix perles, et une perle isolée posée dans une coupelle. Cela représente le millier, la centaine, la dizaine et l'unité (photographie n°1).

L'élève est invité à compter le nombre de perles présentes dans une dizaine, puis le nombre de dizaines dans une centaine. Après cela, l'élève superpose des centaines (plaques de cent perles) pour constater que le cube du millier est composé de dix centaines.

Avec ce matériel, chaque unité est visible. Les centaines et milliers constitués uniquement de perles sont ensuite remplacés par des plaques et cubes en bois, sur lesquelles sont dessinés des petits ronds pour figurer les unités (photographie n°2). Ce remplacement des perles par le bois est justifié par l'aspect financier. La correspondance entre la quantité composée uniquement en perles et celle en bois est rappelée autant de fois que nécessaire à l'élève, si cela cause des problèmes de compréhension.



Photographie n°1 : Les perles du système décimal : le millier, la centaine, la dizaine et l'unité

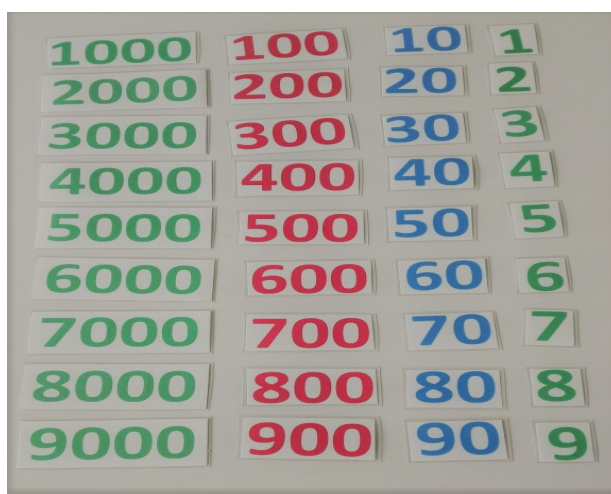


Photographie n°2 : Les deux représentations du millier et de la centaine : avec les perles et en bois

1.3.2. Les chiffres du système décimal

Les chiffres du système décimal permettent la compréhension du principe de la numération de position. Il s'agit d'étiquettes de longueurs différentes, selon l'unité de numération, sur lesquelles sont inscrits les symboles. En vert, nous avons les unités simples et les unités de mille, en bleu ce sont les dizaines, et en rouge les centaines. Il y a donc neuf petites étiquettes vertes, neuf étiquettes bleues, neuf étiquettes rouges, et neuf longues étiquettes vertes. La longueur d'une étiquette est en

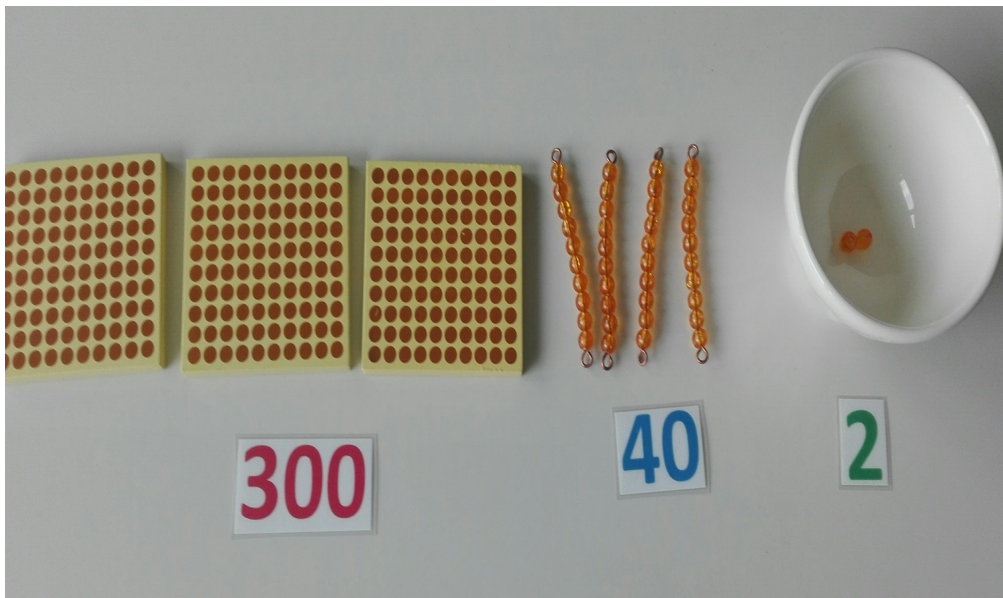
lien avec l'unité de numération. Lors du « jeu de la magie », on montre à l'élève qu'on aligne toutes les étiquettes le long du bord situé à droite : la longueur d'une étiquette permet que, lorsque les étiquettes sont alignées à droite, le chiffre écrit sur l'étiquette à gauche se positionne au bon endroit, dans la bonne unité de numération. Par exemple, un 4 des milliers est sur une étiquette d'une longueur telle qu'il ne peut pas se positionner ailleurs qu'au niveau des milliers (à condition de respecter les règles d'alignement à droite). C'est un contrôle matériel de l'aspect positionnel de la numération. Par conséquent, les étiquettes de Montessori traitent du principe de position avec leur longueur.



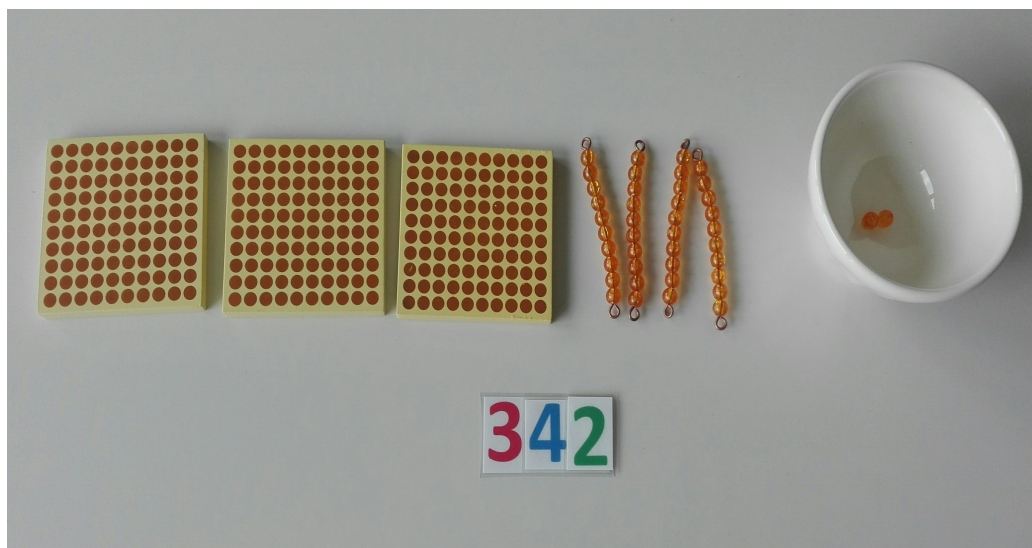
Photographie n°3 : Les symboles du système décimal

1.3.3. L'association matériel-chiffres

L'intérêt avec ces perles et ces symboles est de les associer, pour contribuer au cheminement vers l'abstraction. Les deux photographies suivantes montrent comment cette association est présentée aux élèves : d'abord en plaçant chaque étiquette d'une hiérarchie (unité, dizaine, centaine) sous le matériel de cette hiérarchie (photographie n°4), puis en superposant les étiquettes pour voir apparaître l'écriture du nombre représenté par l'ensemble du matériel (photographie n°5).



Photographie n°4 : Le matériel et les chiffres pour représenter le nombre 342

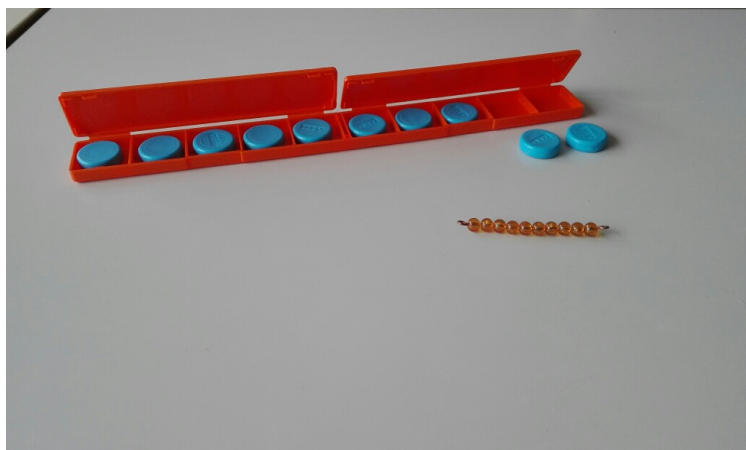


Photographie n°5 : Ecriture du nombre 342 après le « jeu de la magie »

1.3.4. Les unités et dizaines du matériel Picbille

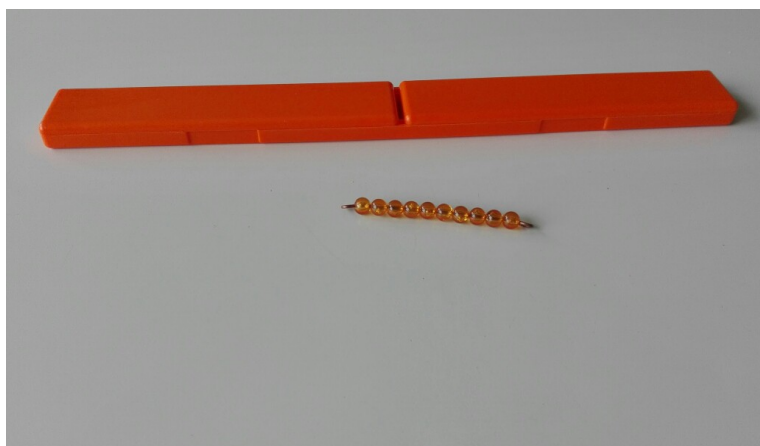
Même si le matériel créé par Montessori a particulièrement retenu mon attention, la réalité de la classe a montré un inconvénient : les perles des unités roulent facilement. Tenant difficilement sur une table de classe, le comptage des unités est malaisé. C'est pour cette raison que j'ai utilisé les jetons et boîtes de Picbille pour les quantités allant jusqu'à 10. Ces jetons tiennent bien sur une table d'écolier. L'enseignant ou l'élève peut les disposer comme les constellations du dé, ou en colonnes,

ou bien les ranger dans la boîte de Picbille. La règle d'utilisation de cette boîte est de fermer le couvercle lorsqu'un compartiment de cinq cases est plein. Les quantités inférieures à 10 peuvent ainsi être comptées plus rapidement et facilement.



Photographie n°6: Les unités du matériel de Picbille, visibles lorsqu'on ouvre la boîte

Pour respecter la cohérence pensée par Maria Montessori dans son matériel, les élèves ont besoin d'aller-retours réguliers entre les unités des quantités du système décimal Montessori et les jetons de Picbille. Aussi, l'égalité de valeur entre une boîte de Picbille pleine (donc ayant les deux couvercles fermés) et une dizaine Montessori est à rappeler autant de fois que nécessaire (photographie n°7).



Photographie n°7 : La dizaine du matériel Picbille et la dizaine du matériel Montessori

1.4 Intérêts et limites du matériel retenu

1.4.1. Intérêts

Le matériel des perles et des symboles du système décimal, décrit ci-dessus, est utilisé dans les classes maternelles des écoles appliquant la pédagogie Montessori, hors contrat avec l'Education Nationale, donc non soumises à l'obligation de suivre les instructions officielles du Ministère. On peut remarquer que ce matériel de mathématiques présente le fonctionnement du système décimal, ce qui n'est pas inscrit dans les programmes de maternelle. Néanmoins, plusieurs enseignants reprennent ce matériel dans des classes élémentaires, pour ancrer les notions fondamentales de numération, comme Stéphanie Marchand qui déclare que « *cette abstraction matérialisée est une belle illustration du génie de la pédagogue* » (p.157). D'ailleurs, la lecture précise de l'oeuvre de Montessori révèle que le matériel des perles et symboles du système décimal avait été initialement conçu pour « *les plus grands de la classe élémentaire* ». C'est l'enthousiasme des enfants de quatre ans, « *attirés par ces objets brillants et facilement maniables* », qui a amené ce matériel dans les classes pré-élémentaires de la pédagogue italienne (1958, p.214).

Même si le beau est subjectif, les caractéristiques de « *ce magnifique matériel* » (Montessori, 1958, p.214) font écho à l'idée de Nicolas Pinel qui considère que le matériel utilisé doit être « *attrayant, mais non distrayant* ». Il ajoute qu'il faut « *être vigilant à ce que le matériel n'attire pas l'attention ailleurs par le biais d'une caractéristique non pertinente* » (p.93).

Lors d'une table ronde de chercheurs et enseignants organisée à la suite des résultats d'une étude sur l'impact de la pédagogie Montessori en maternelle, la chercheuse M.-C. Croset se demande s'il ne serait pas souhaitable d'utiliser du matériel épuré et dédié uniquement aux mathématiques, pour recentrer les apprentissages, éviter les phénomènes de perte d'attention, et rendre plus explicite l'apprentissage réalisé (conférence, entre 11 min et 12 min 30s).

En plus du caractère épuré du matériel Montessori, les perles du système décimal donnent à voir à l'enfant trois niveaux de représentation du nombre de 1 à 1000 : numérique (le nombre de perles), algébrique (10^2 , 10^3) et géométrique (le carré de 10, le cube de 10).

Aussi, chaque unité appartenant à une dizaine ou une centaine est constamment visible. À aucun moment il n'y a une boîte fermée qui cacherait les unités ou les dizaines. L'élève qui a devant lui une centaine en perles et qui tient dans sa main une dizaine peut aisément placer sa dizaine devant la centaine ; en déplaçant sa dizaine au fur et à mesure, il dénombre les dizaines comprises dans la centaine. De plus, lorsque le nombre 342 formé avec le matériel est présenté devant nous (photographie n°4), il y a réellement 342 perles visibles à l'oeil nu.

Autre caractéristique intéressante du matériel Montessori : les unités constitutives d'une dizaine sont

insécables, et les dizaines contenues dans la centaine sont aussi inséparables (de même pour le millier). De fait, la transformation d'une centaine en dix dizaines nécessite un « passage à la banque » : les conversions sont ainsi mises en évidence.

Pour conclure sur les intérêts du matériel Montessori retenu pour mon expérimentation, en plus de son caractère épuré et attrayant, il est porteur des caractéristiques de la numération décimale de position.

Néanmoins, comme expliqué ci-dessus, le matériel Montessori présentait un inconvénient qui m'a conduit à utiliser du matériel de la méthode Picbille: les unités à ranger dans une boîte représentant la dizaine. Contrairement aux unités Montessori sous forme de perles qui roulent sur les tables, les jetons bleus de Picbille sont aisés à prendre dans les mains, tiennent sur une table, et peuvent être disposés comme les constellations du dés. Cela facilite le dénombrement efficace.

1.4.2. Limites

Cependant, lorsqu'une boîte de Picbille est pleine (remplie par 10 jetons bleus, soit 10 unités), elle doit être fermée. Ainsi, les unités constitutives de la dizaine ne sont plus visibles. Il s'agit là d'une différence majeure entre le matériel Montessori et celui de la méthode Picbille. Avec mes élèves, lorsqu'une boîte de 10 unités Picbille était pleine, nous remplaçons tout de suite la dizaine Picbille par une dizaine Montessori, faisant de fait réapparaître les unités constitutives de la dizaine.

Si le matériel issu de la méthode Picbille n'a pas été utilisé au-delà de la dizaine, c'est aussi en raison de l'espace qu'occupe une dizaine sur une table d'écolier. Dans cette méthode, 10 dizaines sont ensuite rangées dans une valise verte, correspondant à une centaine. D'une dimension d'environ 34 cm x 31 cm, placer plusieurs de ces valises sur une table d'écolier ne me semble pas pratique.

Même si le matériel Montessori retenu ici semble porteur de plusieurs caractéristiques intéressantes pour l'enseignement des mathématiques à l'école, on peut dire qu'à lui seul, il n'est rien. Autrement dit, les abstractions qu'il matérialise doivent être enseignées à l'élève.

1.5 Manipulation et démarche d'apprentissage

Quelle démarche utiliser pour aider les élèves à s'appropriier le savoir ? Voici une des préoccupations centrales de tout enseignant, à laquelle tentent de répondre les chercheurs depuis longtemps. Le rapport Villani-Torossian mentionne la « méthode de Singapour » qui est une synthèse de pratiques didactiques et pédagogiques efficaces, reposant sur les travaux de nombreux chercheurs, dont Jérôme Bruner, grand psychologue dans le domaine de la pédagogie. Le triptyque « manipulation, verbalisation, abstraction » y est préconisé.

1.5.1. De quelle manière manipuler ?

Avoir entre les mains des objets complète les informations visuelles par d'autres types d'informations : tactiles, bariques et kinesthésiques. Cependant, il ne doit s'agir en aucun cas de « tripotage ». Pour reprendre les idées de Berdonneau, on peut dire que les gestes réalisés par l'enfant doivent avoir une finalité : les mains de l'élève doivent être guidées par sa pensée. (Berdonneau, 2008). Dias partage cette idée en affirmant l'exigence de dépasser le hasard du tâtonnement au profit d'actions orientées vers un but. Finalement, les situations d'apprentissage doivent présenter une problématique (Dias, 2012).

Berdonneau donne comme autre caractéristique à la manipulation qu'elle s'exerce « *sur des objets relativement petits par rapport à la taille de l'enfant (...)* ; *il peut les prendre dans ses mains pour en modifier la position, l'orientation, parfois aussi l'apparence.* » (2006, p.1).

L'étape de manipulation, via du matériel, est nécessaire mais pas suffisante. Elle doit permettre aux élèves de conceptualiser, ce qui requiert certaines conditions. Selon la démarche d'apprentissage choisie par l'enseignant, ces conditions pourront être réunies.

1.5.2. Manipulation et démarche expérimentale

Dias définit les mathématiques comme « *une science expérimentale* » (2012, p.9). Dans son ouvrage intitulé « Manipuler et expérimenter en mathématiques », il poursuit cette idée : des expériences et remises en question sont possibles avec les mathématiques. Par exemple, si nous décidons de compter en base 3, $2+2$ devient 11 (exemple utilisé en partie 1-2).

Cette situation est inattendue, étonnante pour l'enfant apprenant, que Jérôme Bruner considère comme un chercheur, qui « *cherche à établir une structure, à reconnaître les constantes dans ce qu'il perçoit pour comprendre les relations entre les choses.* » (Barth, 1985, p.49)

Cependant, il ne suffit pas de mettre du matériel entre les mains d'un élève pour le placer dans une démarche expérimentale. M-L Gardes et P.Courtier, deux chercheuses ayant eu l'occasion d'observer des élèves dans une école pratiquant la pédagogie Montessori, ont interrogé l'activité des élèves dans ses ateliers Montessori. Elles ont pu voir des élèves en action, déplaçant, touchant, palpant des objets porteurs de concepts, mais cette phase d'action leur a semblé souvent « *réduite à une reproduction des gestes proposés par l'enseignant* ». Selon elles, « *les enfants, dans la pédagogie Montessori, manipulent, expérimentent parfois mais ne sont pas dans une démarche d'investigation de type expérimental. Le but et l'utilisation de l'atelier sont connus, mais les enfants ne sont pas amenés à formuler de conjectures et sont très rarement engagés dans un processus de preuve. Les présentations des ateliers semblent trop guidées pour pouvoir engager les élèves dans une réelle démarche d'investigation.* » (Gardes et Courtier, 2018, p.97)

Nous mettons peut-être ici le doigt sur un des écueils de cette pédagogie datant du début du 20^{ème} siècle. L'approche bien plus récente de Thierry Dias préconise d'organiser des temps d'expérimentation et de manipulation à ritualiser, et à adapter aux savoirs et savoir-faires à acquérir (Dias, 2012).

Finalement, les situations proposées aux élèves ne doivent être ni trop guidées (risque d'absence de démarche d'investigation), ni trop libres (risque de tatônement).

Mais Dias va plus loin dans sa manière de définir l'expérimentation : il précise qu'elle « *n'a de sens que par ses articulations avec la formulation (dimension langagière) et la validation (par la preuve)* » (Dias, 2008, p.27). Suivons-le en abordant maintenant les phases de verbalisation, apparemment nécessaires à l'apprentissage des mathématiques.

1.5.3. La verbalisation

Le rôle du langage n'est pas le même chez Bruner que chez Piaget. Pour Piaget, le langage est considéré comme « *le symptôme d'une capacité d'abstraction* » (Barth, 1985, p.57), alors que pour Bruner il constitue « *un instrument, un médiateur, pour atteindre l'abstraction* » (Barth, 1985, p.57). Selon la théorie de Bruner, il existe trois modes de représentation du savoir, qui sont trois systèmes parallèles pour apprendre. Le premier mode est celui de la manipulation, la deuxième permet de se représenter quelque chose sans l'avoir devant les yeux, et le troisième mode représente les choses par des symboles (représentation abstraite). Britt-Mari Barth, qui a écrit sur l'oeuvre de Bruner, expose que « *c'est le conflit entre deux modes qui stimule la croissance cognitive. Quand l'enfant est encouragé à expliquer ce qu'il fait ou ce qu'il voit, il est obligé de quitter l'action ou l'image qui sont souvent des représentations limitées de la chose, dominées par les éléments extérieurs, observables. Sa compréhension va alors s'approfondir.* » (1985, p.53).

Le rapport Villani-Torossian précise la place de l'enseignant dans cette phase de verbalisation : un rôle majeur. « *Dès la maternelle, le professeur encourage l'élève à raisonner à voix haute et à échanger avec les autres en « mettant un haut-parleur sur sa pensée »* » (page 19). Aussi, l'enseignant doit guider les élèves de manière explicite (donc en verbalisant les objectifs, les attendus, les apprentissages réalisés), sans être trop dirigiste. La position que doit prendre le professeur au cours des séances d'apprentissage de ses élèves se situe d'un côté et de l'autre d'une mince frontière. Néanmoins, le rapport Villani-Torossian est clair concernant l'importance de redonner de la valeur au cours du professeur : « *Le professeur doit retrouver toute sa place dans les moments de « présentation et commentaire des savoirs »(le cours). Qui mieux que le professeur peut exposer pas à pas un texte de définition, de théorème, de propriété, en exposant les tenants et les aboutissants, le pourquoi de tel élément de quantification, son importance, la nécessité de la*

précision de tel terme ? Le professeur doit ainsi retrouver la fierté de son savoir et de son aptitude à l'exposer et l'expliquer. » (page 25). Brousseau (2005) partage aussi cette idée en reconnaissant que l'institutionnalisation des connaissances enseignées est indispensable.

Pour conclure, lorsqu'on parle de verbalisation, il s'agit à la fois de l'explicitation par l'enfant de sa réflexion ou de sa démarche, de la médiation de l'enseignant, et de l'institutionnalisation du savoir guidée par l'enseignant. Cette étape de verbalisation est importante pour aider le passage à l'abstraction.

1.5.4. Le passage à l'abstraction

Le dictionnaire Larousse définit l'abstraction comme « *une opération intellectuelle qui consiste à isoler par la pensée l'un des caractères de quelque chose et à le considérer indépendamment des autres caractères de l'objet.* »

Plus simplement, l'abstraction est le but ultime de l'apprentissage en mathématiques. Comme dit Berdonneau, « *apprendre les mathématiques, ce n'est pas mémoriser des règles ou des informations, mais s'entraîner à raisonner sur des objets abstraits, pour établir des propriétés sans avoir recours à l'expérience pour valider ses conclusions* » (2006, p.1).

L'être humain a eu besoin des mathématiques pour représenter le nombre d'animaux de son troupeau en l'absence de celui-ci : pour modéliser le monde réel et résoudre des problèmes rencontrés dans ce monde.

L'abstraction est une activité cognitive de haut niveau, aussi le troisième mode de représentation du savoir décrit par Bruner. Appelé le « mode symbolique », Bruner dit que c'est à ce niveau que l'apprentissage est le plus complet.

« Manipuler, verbaliser, abstraire », voilà la démarche d'apprentissage à suivre pour aider les élèves à s'approprier les savoirs mathématiques. N'oublions pas que ces conditions ne sont pas les seules à réunir pour aider les élèves à apprendre.

1.5.5. Bienveillance et plaisir d'apprendre

Le rapport Villani-Torossian fait état d'élèves « *en souffrance* » (p.14), stressés par les cours de mathématiques, ayant accumulé des lacunes, se sentant trop éloignés du but à atteindre et ayant perdu le plaisir d'apprendre. Des recommandations y sont données, prenant appui en outre sur les travaux de Thierry Dias. Par exemple, l'enseignant ne doit pas hésiter à faire des aller-retours entre le concret et l'abstrait, et même parfois à simplifier l'abstrait ; tout cela, dans le but que la situation ait un sens pour l'élève, et pour lui offrir un cadre rassurant. L'élève, ainsi sécurisé par les va-et-vients réguliers, s'engage plus facilement avec plaisir dans des situations d'apprentissage qui font

sens pour lui. (p.15)

Le rapport Villani-Torossian pointe aussi du doigt les encouragements dont les élèves ont besoin, et dont les enseignants français peuvent être un peu avare. Michèle Artigue, citée dans le rapport Villani-Torossian, évoque un « *déficit de termes concernant ses dimensions dans le lexique professionnel des enseignants français, comparativement à d'autres* ». (p.14)

Le terme de bienveillance apparaît dans les programmes de l'école maternelle (B.O. de 2015), école qui souhaite donner envie aux enfants d'apprendre, en ayant recours au jeu ou à d'autres modalités. À la lecture des programmes officiels du cycle 2, ces notions de bienveillance et d'apprentissage par le jeu semblent moins importantes. Pourtant, le plaisir d'apprendre les mathématiques peut encore être stimulé au-delà du cycle 1 par des jeux, comme le concours Kangourou que nous connaissons en France. Il en existe d'autres, et la pratique du jeu est nettement plus exploitée dans d'autres pays, comme le Canada, Singapour, les Etats-Unis ou l'Europe du Nord. (p.15 du RVT)

Enfin, soulignons une recommandation du rapport Villani-Torossian : « *dédramatiser l'erreur, reconnaître qu'elle participe aux apprentissages.* » (page 16)

Encourager les élèves, les rassurer en revenant au concret dès que nécessaire, établir un cadre bienveillant, donner le plaisir d'apprendre par le jeu : voici donc plusieurs éléments à ajouter au tryptique « manipuler, verbaliser, abstraire ».

1.6 Problématique

La première partie de ce mémoire a permis de présenter la numération au cycle 2, les recommandations récentes concernant l'enseignement des mathématiques, ainsi que le matériel de manipulation retenu dans ma classe pour soutenir les apprentissages dans le domaine « nombres et calculs ».

Les principes de fonctionnement de la numération décimale de position sont abstraits. Fortement mis en jeu lors de l'algorithme opératoire de la division posée, une bonne compréhension de ces principes constitue une base solide pour de nombreux apprentissages en numération.

De fait, puisqu'il est recommandé d'utiliser la manipulation en classe, et comme il existe un matériel de numération porteur des caractéristiques de la numération décimale de position, je me suis demandée si je pouvais aider mes élèves à comprendre cet algorithme opératoire en prenant appui sur du matériel.

Je fais l'hypothèse que le recours au matériel et les étapes de mise en commun avec verbalisation vont rendre évident la nécessité de partager les plus gros paquets en premier. Aussi, je suppose que ces temps de manipulation et de verbalisation donneront du sens aux conversions à réaliser. L'appui

sur le matériel devrait aider les élèves à comprendre les étapes d'une division posée.

En reliant un algorithme opératoire à du matériel de numération, mon objectif est d'aider les élèves à accéder au sens de cette technique.

2 Méthode

2.1 Présentation de la méthodologie

Ainsi, pour étudier les effets de l'utilisation du matériel de numération comme aide à la compréhension de l'algorithme opératoire de la division, je vais proposer à mes élèves de résoudre deux problèmes de partage. J'analyserai les procédures utilisées par les élèves, et leur évolution suite à l'utilisation du matériel de numération avec verbalisation. J'examinerai combien d'élèves réalisent le partage en distribuant d'abord les centaines, ainsi que le nombre d'élèves procédant à des conversions. Pour les élèves utilisant d'autres méthodes, je tenterai de définir les connaissances qu'ils ont mobilisées.

2.1.1. Participants

Mon étude se déroule dans une classe de CE2, située dans une zone socialement favorisée, à une dizaine de kilomètres d'Annecy. 27 élèves composent la classe, dont 9 garçons et 18 filles. 5 élèves sont identifiés comme présentant des difficultés d'apprentissage, principalement en français et en compréhension globale. Le reste de la classe possède un bon voire très bon niveau scolaire, avec des parents très impliqués dans la scolarité de leur enfant.

Depuis le début de l'année scolaire, l'apprentissage des mathématiques est soutenu par l'utilisation d'un matériel de numération. Pendant la période 1 de l'année scolaire, les jetons et boîtes de Picbille ont été beaucoup utilisés en groupe-classe. Lorsque la numération au-delà de 99 a été abordée, l'utilisation du matériel Montessori présenté en partie 1 a commencé. En groupe-classe, l'unité, la dizaine et la centaine du matériel Montessori ont été présentés, ainsi que les chiffres associés, et par le « jeu de la magie » la formation des nombres. Ces outils, au fur et à mesure, se sont mis à faire partie de nos séances de mathématiques.

Lors de la période 3, l'accent a été mis sur l'utilisation de ces matériels. Sept séances d'activités pédagogiques complémentaires (APC) ont été réalisées avec six élèves (deux groupes de trois élèves), dédiées à l'utilisation privilégiée de ce matériel. Une séance avait lieu le lundi midi, une autre identique avait lieu le mardi midi avec le deuxième groupe de trois élèves. Un moment était prévu en début d'après-midi le mardi pour produire à toute la classe un retour des apprentissages

réalisés dans ces séances d'APC. Ainsi, le matériel de numération utilisé en classe était familier à tous les élèves.

Un tableau, présenté dans l'annexe 1, précise les notions travaillées lors de ces séances d'APC, avec l'objectif de chacune des séances.

Toujours au cours de la période 3 de l'année scolaire, divisions-partitions, divisions-quotitions et divisions élémentaires ont été abordées grâce au travail sur le fichier de mathématiques utilisé en classe (« J'apprends les maths », sous la direction de Rémi Brissiaud). La division par partage successif des centaines, dizaines et unités devait être abordée en début de période 4, en lien avec mon expérimentation, prévue en deuxième semaine de la quatrième période (le lundi 16 mars).

La fermeture des écoles annoncée par le Gouvernement le jeudi 13 mars au soir m'a amenée à modifier les modalités de cette expérimentation. Elle a par conséquent eu lieu à distance, facteur non négligeable dans l'organisation de sa mise en œuvre matérielle. De plus, le début de l'étude a été repoussé, en raison de la mise en place de la continuité pédagogique : enseignants et parents avaient besoin d'un temps d'adaptation à cette nouvelle manière de travailler. Des contacts réguliers avec les parents et les élèves ont permis d'adapter le travail envoyé quotidiennement, afin qu'il soit accessible à tous les élèves. Une fois la continuité pédagogique installée, l'étude a pu débuter.

2.1.2. Déroulement

Ce déroulement est celui adapté au confinement, et non celui qui aurait pu se faire en situation de classe normale. Cinq étapes sont identifiables, avec trois tâches données aux élèves.

<i>Différentes étapes</i>	<i>Modalités- consignes- tâches des élèves</i>
Phase 1	Problème 1 donné aux élèves : « 3 pirates ont récupéré un coffre contenant 458 pièces d'or. Explique comment tu fais pour partager ces pièces d'or en 3 parts égales. » Retour du travail demandé aux parents.
Phase 2	« En utilisant le site indiqué, forme la quantité 458 et partage-la en 3 parts égales. Trouves-tu le même résultat que hier ? » https://micetf.fr/numop/ Pas de retour du travail à l'enseignant.
Phase 3	Envoi par l'enseignant d'une correction du travail de la phase 2 : captures d'écran de 458 avec le matériel, et du résultat une fois le partage fait (pas d'explication des étapes intermédiaires).
Phase 4	Réalisation par l'enseignant d'une vidéo (liens donnés en annexe 4) présentant le partage de 458 en 3. Deux procédures sont présentées : commencer le partage par les unités, ou distribuer d'abord les centaines, puis les dizaines, puis les unités. Question posée aux élèves : quelle méthode choisis-tu pour répondre au 2ème problème qui va t'être proposé ?
Phase 5	Problème 2 proposé aux élèves : « Après avoir regardé la vidéo, partage équitablement 832 pièces d'or entre 6 pirates. » Retour du travail demandé aux parents.

2.1.2.1. Précisions sur les phases 1 et 5

Ces deux problèmes sont donnés à distance, dans le travail envoyé quotidiennement aux familles dans le cadre de la continuité pédagogique. Le nombre de pièces et de pirates évolue entre les deux situations proposées, avec un nombre de pièces à 3 chiffres et un nombre de pirates toujours inférieur à 10.

Aucun de mes élèves n'étant accueilli à l'école pendant cette période de confinement, je savais que tous mes élèves étaient potentiellement entourés de leur famille pour réaliser ce travail. C'est pourquoi la consigne donnée aux élèves a été complétée de recommandations pour les adultes : ne pas aider les enfants et ne pas poursuivre le travail au-delà de 20-25 minutes s'il est infructueux. Un retour de ce travail était demandé aux familles : la production de leur enfant photographiée et envoyée par mail.

2.1.2.2. Précisions sur la phase 2

L'outil numérique disponible sur le site : <https://micetf.fr/numop/> constitue un prolongement de la phase 1. Ce site permet de manipuler virtuellement du matériel de numération. Il offre la possibilité d'utiliser le matériel de numération Picbille, ou bien les « petits cubes », barres, plaques et « gros cubes » comparables au matériel Montessori. Dans une situation de classe « normale », j'avais prévu de proposer aux élèves la vérification de leur résultat au problème de partage par la manipulation du matériel de numération qui leur est familier. Cela n'étant pas possible, cette application est venue à mon secours pour offrir une possibilité de vérification par la manipulation. Aucun retour n'a été demandé aux parents sur ce travail. Quelques précisions étaient apportées en complément de la consigne : le matériel est celui que nous utilisons en classe ; il y a des dizaines, des centaines et des unités ; les gros cubes représentent les milliers mais il ne faut pas les utiliser ; penser qu'une centaine peut se « casser » en dix dizaines.

2.1.2.3. Précisions sur la phase 3

La correction envoyée était faite de deux captures d'écran : l'une montrant la quantité 458 formée par 4 centaines, 5 dizaines et 8 unités ; l'autre montrant le résultat du partage, avec les 3 parts de 152 et le reste égal à 2. Les étapes du partage n'ont pas été détaillées dans cette correction donnée aux élèves. Il aurait fallu réaliser un grand nombre de captures d'écran, que les familles n'auraient peut-être pas eu le temps de regarder avec attention.

2.1.2.4. Précisions sur la phase 4

Ces vidéos (liens en annexe 4) ont constitué une « mise en commun » des deux procédures principales proposées par les élèves en réponse à la première situation-problème. Cette mise en commun présente une étape de manipulation : le matériel de numération déjà présenté est utilisé pour matérialiser les procédures proposées par les élèves. L'objectif de cette vidéo est d'amener les élèves vers la procédure en lien avec le principe de l'algorithme opératoire de la division, ou du moins de rendre visible grâce à des objets les étapes à suivre lors du calcul posé d'une division.

La vidéo s'organise en trois parties. Le matériel de numération est tout d'abord rappelé et la quantité 458 est constituée. Ensuite, une première méthode de partage est expérimentée, en commençant par la distribution des unités, puis des dizaines, puis des centaines. Puis, dans la troisième partie, le partage est effectué en commençant par les centaines, puis les dizaines et enfin les unités. J'explique aux élèves que lors du travail qu'ils m'ont envoyé en phase 1, deux méthodes principales sont ressorties, et que grâce au matériel nous allons décider de celle que nous souhaitons conserver pour continuer à résoudre ce type de problème. Deux procédures sont confrontées, à la manière de ce

qu'une mise en commun collective en classe aurait permis. De plus, lors de cette étape, la verbalisation vient soutenir la manipulation.

Le visionnage par les élèves de cette vidéo a pour objectif de les aider à résoudre le problème 2, proposée en phase 5.

2.2 Procédures visées

Avant d'analyser les réponses des élèves aux deux problèmes, je vais expliciter les différentes procédures possibles pour résoudre ces problèmes de partage. Les exemples seront donnés à partir du problème donné en phase 1 : 458 pièces d'or à partager entre 3 pirates.

2.2.1. Première procédure possible

Elle consiste à partager les unités une à une. En effet, la quantité 458 peut être vue comme 458 unités. Après deux tours de distribution des 6 premières unités, une dizaine est convertie en 10 unités pour pouvoir continuer à distribuer des unités. Les centaines sont converties en 100 unités (ce qui n'est pas la même chose que la conversion d'une centaine en 10 dizaines) Cette technique est très longue.

2.2.2. Deuxième procédure possible

Cette procédure repose sur la réalisation d'additions ou de soustractions successives pour trouver comment se rapprocher du nombre total de pièces d'or. En additionnant 3, dix fois, on atteint 30 ; on continue ainsi en se disant qu'en additionnant 3 encore 10 fois, on atteint 60. Et ainsi de suite pour arriver au plus près de 458... Cette technique est aussi très longue, surtout dans un cas comme celui présenté ici, avec un petit diviseur. Si le diviseur était 122, cette technique serait intéressante ($122+122+122=366$; on voit qu'on ne peut pas ajouter encore une fois 122, sinon on dépasse 458). L'inconvénient de cette technique est qu'elle nécessite de garder le compte de combien sont distribués à chaque fois pour faire la somme finale.

2.2.3. Troisième procédure possible

L'appui sur les multiples constitue une troisième procédure. Dans la division posée ici, savoir que $50 \times 3 = 150$ (donc qu'en distribuant 50 pièces à chaque pirate, on a vidé le trésor de 150) et que $100 \times 3 = 300$ (idem pour 100 pièces) conduit à $150 \times 3 = 450$ (donc 150 pièces pour chaque pirate vide le trésor de 450 pièces). Pour atteindre 458, il reste 8. Comme $2 \times 3 = 6$, on conclut que 458 divisé par 3 est égal à 152 et il reste 2. Aussi, au lieu de s'appuyer sur les multiples de 50, les multiples de 15 sont une autre connaissance utilisable: $3 \times 15 = 45$, donc $3 \times 150 = 450$. Cette troisième procédure mobilise les propriétés des nombres, et non celles de la numération décimale de position.

2.2.4. Quatrième procédure possible

Enfin, la quatrième procédure identifiable repose sur l'algorithme opératoire de la division posée : les centaines sont partagées en premier de manière équitable ; dès que le partage des centaines ne peut plus se poursuivre de manière équitable, la conversion de chaque centaine restante en dix dizaines permet de poursuivre la distribution, qui se termine par les unités. C'est vers la compréhension de cette quatrième procédure que je souhaite amener mes élèves, par le recours au matériel de numération pour résoudre nos problèmes de partage. Deux concepts sont à appréhender : le partage des « plus gros paquets » en premier, et la conversion des centaines en dizaines (puis des dizaines en unités, si cela est nécessaire).

À la lumière de cet éventail de résultats possibles, je vais présenter les réponses proposées par mes élèves, selon différents critères.

2.3 Résultats

Maintenant que le déroulement de l'expérimentation a été présenté, et que les différentes procédures possibles ont été avancées, je vais exposer les résultats de mes élèves.

Avant cela, il faut savoir que ces résultats ont été dépendants du retour que les familles m'offraient. La situation du confinement et de l'école à distance ne m'ont pas permis de récolter les productions de tous les élèves. Certains n'ont rendu le travail qu'en phase 1, d'autres que en phase 5. Pour cette raison, l'analyse de l'évolution individuelle des productions des élèves n'a pas été possible. Cette évolution a été analysée de manière globale.

Si le confinement a modifié la récolte des productions des élèves, il a aussi influé sur le type de production. En situation habituelle de classe, les tâches proposées à nos élèves sont minutées. Ici, même si des indications de temps avaient été données aux parents pour diverses raisons (guidage, aide dans l'organisation de leur journée, éviter l'acharnement délétère), ce paramètre n'a pas pu être contrôlé par l'enseignant. Néanmoins, cette situation exceptionnelle de travail a révélé des propositions originales qui n'auraient vraisemblablement pas pu apparaître en classe. La présentation des résultats va permettre de les exposer.

Les tableaux 1 et 2 ci-dessous présentent les réponses des élèves, selon la ou les techniques qu'ils ont utilisées. Aucun élève n'a utilisé la deuxième procédure exposée ci-dessus. Aussi, dans la quatrième procédure expliquée ci-dessus, le recours à deux techniques est nécessaire : débiter par le partage des « plus gros paquets », et réaliser des conversions pour poursuivre le partage. Un élève peut ainsi débiter son travail en utilisant la quatrième procédure, c'est-à-dire en partageant les centaines en premier ; mais s'il ne réalise pas les conversions nécessaires pour poursuivre la

distribution, alors nous ne pouvons pas déclarer qu'il a utilisé la quatrième procédure. C'est pour cette raison que les réponses des élèves sont classées en fonction des « techniques » utilisées, qui d'ailleurs diffèrent légèrement entre les deux problèmes.

Tableau 1 : Techniques apparaissant dans les réponses des élèves au problème 1: comment partager équitablement 458 pièces d'or entre 3 pirates ?

	OUI	NON, ou pas évaluable
Partage les « plus gros paquets » en premier	15 / 24	9 / 24
Convertit la centaine en dix dizaines	9 / 24	15 / 24
Convertit la centaine en 2x50	3 / 24	21 / 24
Mobilise les propriétés des nombres : appui sur les multiples ou connaissances en calcul mental	4 / 24	20 / 24

Tableau 2 : Techniques apparaissant dans les réponses des élèves au problème 2: comment partager équitablement 832 pièces d'or entre 6 pirates ?

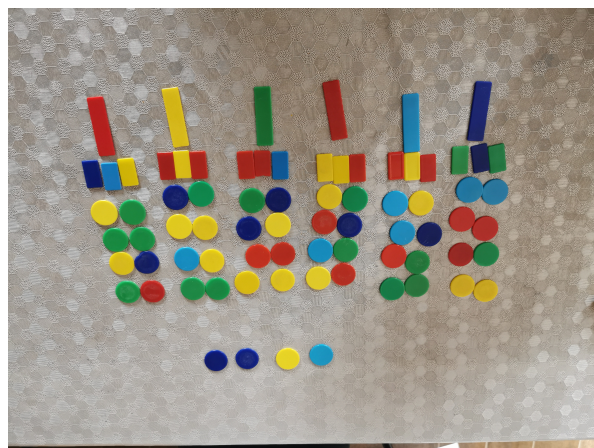
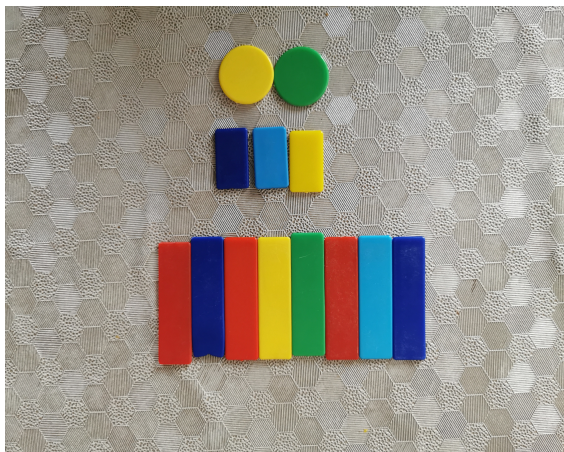
	OUI	NON, ou pas évaluable
Partage les « plus gros paquets » en premier	21 / 23	2 / 23
Convertit les centaines en dizaines et les dizaines en unités	20 / 23	3 / 23
A recours à du matériel symbolisant les unités, dizaines et centaines	5 / 23	18 / 23
Mobilise les propriétés des nombres	1 / 23	22 / 23

La manière d'analyser les deux situations-problèmes diffèrent légèrement, pour deux raisons. Tout d'abord, les deux problèmes proposées n'amènent pas à l'utilisation de techniques identiques. Par exemple, dans le premier problème, la centaine ne pouvant pas être partagée peut judicieusement être transformée en 2x50, ce qui fait qu'il y a 3x50 à partager en 3 pirates, assez aisé à calculer. Aussi, il n'y a pas de dizaines à convertir en unités. Cet exemple nous montre l'importance du choix des nombres que l'enseignant préparant la situation-problème doit anticiper.

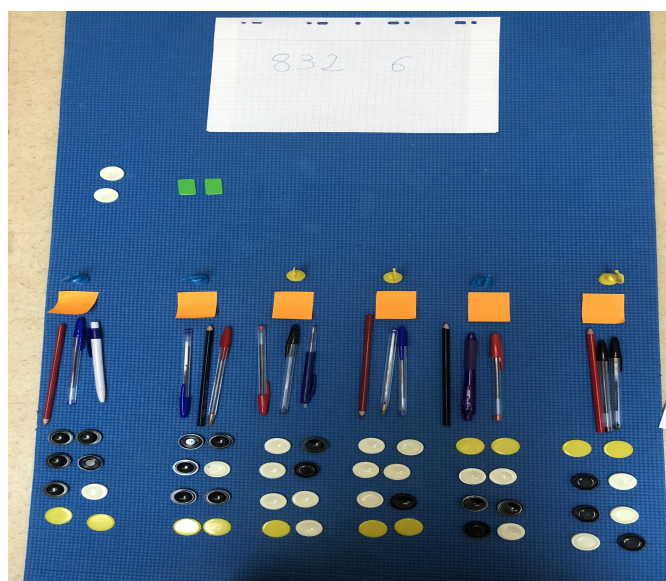
Deuxièmement, il convient de noter que les réponses de certains élèves au deuxième problème ont été « originales ». En effet, comme indiqué dans le deuxième tableau, cinq élèves ont utilisé des objets de chez eux (Lego, stylo, morceaux de papier, pièces de jeux de construction...) pour représenter les unités, les dizaines et les centaines ; ils ont constitué la quantité avec ce matériel et

l'ont partagée en six parts égales. Voici, ci-après, deux exemples de réponses envoyées par des élèves ayant utilisé du matériel. Deux autres productions d'élèves sont présentées en annexe : une production avec du matériel, l'autre avec un support papier-crayon (annexes 2 et 3).

Pour rappel, le problème 2 a été proposé accompagné de la consigne de visionner la vidéo expliquant deux manières différentes de partager 458 en 3, à l'aide du matériel de numération.



Photographie n°8: Réponse d'une élève au problème 2



Photographie n°9 : Réponse d'un autre élève au problème 2

Pour analyser l'impact du recours au matériel de numération sur l'évolution des procédures des élèves, les deux premiers techniques inscrites dans chaque tableau sont à étudier. La quatrième technique (qui équivaut aussi à la troisième procédure possible identifiée) est intéressante aussi, car mobiliser les propriétés des nombres est le contraire de l'utilisation des principes de la numération décimale de position.

Tableau 3 : évolution globale des techniques utilisées par les élèves, entre le problème 1 et le problème 2

	Évolution
Partage les « plus gros paquets » en premier	+ 28,8%
Réalise les conversions en s'appuyant sur le principe du système décimal	+ 49,5%
Mobilise les propriétés des nombres	- 12,3%

2.4 Discussion

2.4.1. Recontextualisation

Je souhaitais aider mes élèves à comprendre l'algorithme opératoire de la division écrite, notion abstraite qui prend appui sur les principes de la numération décimale de position. En fondant mon travail sur les recommandations pour l'enseignement des mathématiques qui énoncent le tryptique « manipuler, verbaliser, abstraire », ma méthode a consisté à analyser l'évolution des réponses des élèves entre deux situations-problèmes proposées. Entre ces deux situations, le visionnage d'une vidéo a exposé aux élèves deux possibilités de résolution du premier problème, avec manipulation d'un matériel de numération porteur des caractéristiques du système décimal.

Mon hypothèse était que la manipulation de ce matériel de numération, accompagnée d'une verbalisation adéquate, allait aider les élèves à comprendre les principes utilisés lors de l'algorithme opératoire de la division posée. La résolution d'un problème de partage amenant vers la technique écrite de la division posée permet de toucher du doigt ces principes. Néanmoins, ce type de problème peut aussi être résolu par l'utilisation de connaissances autres, comme le calcul mental ou les multiples.

2.4.2. Mise en lien avec les recherches antérieures

Au vue des résultats, mes hypothèses sont partiellement vérifiées.

En effet, après la résolution du deuxième problème, on observe que presque tous les élèves ont pensé à partager les « plus gros paquets » en premier. Ils étaient déjà plus de la moitié du groupe à y avoir pensé pour le premier problème ; une augmentation de plus d'un quart amène à 21 élèves sur 23. Une des deux élèves n'ayant pas choisi cette méthode a eu recours au calcul mental. L'autre élève a posé sa division en potence ; j'ai classé sa réponse parmi les « non évaluables », même si

cette technique consiste bien à partager les « plus gros paquets » en premier. Mais cette élève était passée par les multiples pour résoudre le premier problème. Ainsi, je ne considère pas pouvoir affirmer qu'elle a compris la nécessité de partager les centaines en premier, car la technique de la division écrite en potence a pu lui être enseignée par un adulte sans que cette élève y mette du sens. Le confinement a parfois fait avancer certains élèves dans le programme, indépendamment de l'enseignant.

L'évolution de l'utilisation de la deuxième technique (la capacité à convertir une centaine en dix dizaines lorsque c'est nécessaire) entre les deux productions des élèves est significative. Cette augmentation de presque la moitié du groupe révèle la progression du sens donné aux centaines et dizaines qu'il faut « casser ». Réaliser ces conversions représente déjà un niveau d'abstraction, vers lequel les élèves ont pu cheminer grâce à la vidéo, étape de manipulation et de verbalisation. Evidemment, le confinement a conduit à cette modalité de travail, alors que la manipulation aurait dû pouvoir être effectuée par les élèves eux-mêmes en classe, accompagnée de leur verbalisation. Mon travail d'enseignante aurait reposé sur la verbalisation et synthèse des actions des élèves, pour institutionnaliser le savoir construit.

Le confinement n'a pas modifié que mes modalités de travail, il a aussi influé sur les moyens utilisés par les élèves. Effectivement, comme le montre le tableau 2, plus de 20% des élèves du groupe ont eu recours à du matériel pour résoudre le problème. En utilisant des jouets et objets à disposition chez eux, ils ont reconstitué un matériel de numération décimale, avec un système d'échange par groupes de 10. Les photographies 8 et 9 en sont un exemple, une autre est présentée en annexe 2. Aussi, quelques élèves ont filmé la réalisation du partage, mettant ainsi en évidence les conversions à réaliser. Finalement, même si le travail de la main n'a pas pu se faire en raison du confinement, certains élèves ont trouvé un autre dispositif de manipulation. La mise au travail de ces élèves s'avère effective, leur raisonnement étant reconstitué par un support visible.

Que révèle la diminution du recours à la troisième technique mentionnée dans le tableau 3? Tout d'abord, il convient de rappeler ce que signifie « mobiliser les propriétés » des nombres : c'est utiliser des caractéristiques des nombres pas nécessairement reliées aux propriétés du système décimal. Par exemple, utiliser les multiples de 15 pour expliquer que dans 45 il y a 3 fois 15. Lors de la première situation-problème, quatre élèves (dont une que nous nommerons Marie) ont trouvé la réponse en utilisant leurs connaissances en calcul mental ; deux semaines plus tard, Marie est la seule à pratiquer encore cette technique. Cela peut venir du choix des nombres : les nombres choisis lors du deuxième problème amènent peut-être moins à exploiter des connaissances sur les multiples ou en calcul mental. Les élèves sont moins à l'aise avec la table de 6, puisque son apprentissage est

nettement plus récent. Mais Marie, elle, semble à l'aise avec la table de 6 : elle commence sa résolution du deuxième problème (832 pièces d'or partagées en 6 pirates) en cherchant combien de fois il y a 6 dans 32. Ensuite, Marie cherche combien de fois il y a 6 dans 600. Comme il reste 200, elle cherche ensuite combien de fois il y a 6 dans 200. Avec de bonnes connaissances en calcul mental, on peut savoir que dans 100 il y a 3 fois 33 et qu'il reste 1 ; ce qui conduit à dire que dans 200, il y a 6 fois 33 et qu'il reste 2. L'addition des quotients partiels et des restes partiels mène au résultat de la division « 832 divisé par 6 ». Cette analyse de la production de Marie laisse à penser que cette élève a de solides compétences en calcul mental. Marie décompose la quantité à partager d'une manière judicieuse, pour ensuite aller chercher des résultats intermédiaires dans ses connaissances mémorisées. Cette technique est sûrement plus efficace pour elle. Rien ne permet de supposer que l'apprentissage de la technique de la division écrite sera un apprentissage difficile pour cette élève.

Pour revenir sur la vérification des hypothèses de départ, je pense qu'on peut l'attribuer en partie au recours au matériel de numération, porteur des caractéristiques du système décimal. Néanmoins, il a tout de même fallu associer la verbalisation à la manipulation pour que les élèves en tirent bénéfice. Je me suis rendu compte de cela après avoir donné à mes élèves le lien vers l'application « <https://micetf.fr/numop/> ». Les échanges téléphoniques avec plusieurs familles m'ont soufflé que cet outil n'était pas suffisant. Certaines familles étaient bloquées par des difficultés de prise en main de l'outil, les éloignant complètement de l'objectif initial. Les laisser manipuler virtuellement quelque chose de nouveau, sans présentation préalable ni modèle donné, ne semblait pas approprié pour cette situation.

Il est possible que l'amélioration des résultats des élèves puisse être attribuée à la présence d'un problème dans la situation d'apprentissage proposée. En effet, en demandant aux élèves de dire s'il est préférable de partager d'abord ce qui est plus gros, ou d'abord ce qui est plus petit, les élèves sont engagés dans une démarche de réflexion. Ainsi placés en position de chercheurs, on peut en outre supposer que cela maintient leur engagement.

Une situation de classe habituelle permet à l'enseignant d'observer le niveau d'engagement dans la tâche de ces élèves, de le soutenir, et de susciter la motivation des élèves. Cette expérimentation ayant eu lieu dans des conditions extrêmement particulières, plusieurs limites sont apparues, mettant aussi en lumière des perspectives intéressantes.

2.4.3. Limites et perspectives

De par les modalités d'école à distance associées à mon expérimentation, des limites sont apparues. Certaines familles n'ont pas envoyé le travail réalisé par leur enfant. Elles étaient trois lors de la première situation-problème, et quatre pour le deuxième problème. L'absence de retour de ces familles ne vient pas de difficultés avec le numérique, car ces familles avaient déjà envoyé des photographies du travail de leur enfant. Il serait plutôt lié à la difficulté rencontrée par leur enfant : les parents ne sont pas à l'aise avec l'idée d'envoyer à la maîtresse la photographie d'un exercice que leur enfant « n'a pas réussi à faire ». Aussi, ces familles osent difficilement demander de l'aide. C'est en menant le stage de soutien des vacances d'avril que j'ai pris conscience de cela. Les familles de cinq élèves de ma classe ont accepté d'y participer, et les échanges téléphoniques avec elles ont été l'occasion de reparler des problèmes de mathématiques avec les pirates et les pièces d'or. Ce soutien individuel par téléphone ou visioconférence a permis une remédiation auprès des élèves en difficulté.

Cette observation révèle un biais important de mon étude : finalement, si je n'ai analysé que les réponses des élèves ayant réussi les problèmes proposés, c'est un peu trop facile ! Pour comparer cela au test d'un médicament sur des patients, c'est comme si je publiais les résultats de mon étude en excluant les patients décédés lors de l'étude. C'est pour cela que, en définitive, ce n'est pas le taux de réussite ou d'évolution qui compte, mais la possibilité attestée de passer d'une procédure à une autre et les raisons qui peuvent expliquer l'évolution. Etudier cela ne m'a pas été possible en raison du confinement.

En outre, les élèves n'ont pas tous été soutenus de la même manière par leur entourage familial. Les retours des élèves lors de la deuxième situation-problème ont démontré une remarquable implication de certaines familles. Par exemple, un élève qui n'avait « rien compris » au premier problème a été aidé par son père pour le deuxième problème : ils ont eu recours à des objets faisant office de matériel de numération et se sont filmés lors de la réalisation du partage. Le père m'a avoué beaucoup aimer les mathématiques, et avoir largement dépassé le temps que j'avais indiqué pour effectuer ce travail.

Cette expérimentation menée dans des situations incroyablement particulières m'a permis de découvrir la richesse des ressources mobilisables par les familles.

L'étude aurait dû se terminer par l'apprentissage en classe de la technique écrite de la division posée, en mettant en parallèle l'algorithme opératoire et l'efficacité du partage avec le matériel de numération. Le confinement n'a pas permis cette situation de classe, et je n'ai pas souhaité aborder ce point

important du programme en classe « à distance ». L'étape de « passage à l'abstraction », que je projetais de rendre plus fluide car précédée de manipulation et verbalisation, n'a par conséquent pas pu être testée.

Une perspective possible serait la réalisation d'une nouvelle vidéo pour aborder la technique écrite de la division posée, en établissant le lien avec le matériel de numération. Cette étude m'a certainement permis d'oser cette méthode d'enseignement, que je n'envisageais pas précédemment.

3 Conclusion

La compréhension de l'algorithme opératoire de la division posée nécessite des capacités d'abstraction, pouvant être soutenues par l'utilisation d'un matériel de numération. Cette étude ne permet pas de démontrer qu'un matériel de numération est plus bénéfique qu'un autre. Cependant, ce matériel doit être porteur des caractéristiques de la numération décimale de position, principe mis en jeu dans la division posée. Ainsi, la manipulation accompagnée de la verbalisation aide les élèves à cheminer vers l'abstraction.

Cette étude n'a pas pu être menée à son terme en raison de la crise sanitaire vécue actuellement en France. Néanmoins, il a permis un travail très enrichissant avec les élèves, et aussi avec leurs familles.

Personnellement, lorsque j'ai vu le nombre d'élèves proposant des réponses au problème 2 avec un support autre que le papier, le matériel m'est apparu comme relevant d'un besoin. Cela m'encourage à poursuivre l'apprentissage des mathématiques de cette manière dans mes futures classes. Une frustration est là, tout de même : j'aurais aimé accompagner mes élèves jusqu'au bout, et dans ma classe, au cours du passage de la manipulation du matériel à la compréhension de l'algorithme opératoire de la division posée. En associant travail de la main, attitude réflexive et échanges verbaux, j'ambitionnais de graver dans l'esprit de mes élèves le sens de cette technique opératoire, et d'éviter ainsi qu'elle soit effectuée de manière « mécanique ».

Bibliographie

Ouvrages

- Brissiaud, R. (2016). *J'apprends les maths CE2, livre du maître*. Paris : Retz.
- Brissiaud, R. (2016). *J'apprends les maths CE2, fichier de l'élève*. Paris : Retz.
- Dias, T. (2012). *Manipuler et expérimenter en mathématiques*. Paris : Editions Magnard.
- Dias, T. (2018). *Enseigner les mathématiques à l'école. Une démarche positive pour des apprentissages réussis*. Paris : Editions Magnard.
- Marchand, S. (2018). *Montessori à l'école élémentaire*. Paris : ESF Sciences humaines.
- Montessori, M. (1936). *L'enfant*. Paris : Desclée de Brouwer.
- Montessori, M. (1958). *Pédagogie scientifique ; tome 1 : La maison des enfants*. Paris : Desclée de Brouwer.
- Montessori, M. (1959). *L'esprit absorbant de l'enfant*. Paris : Desclée de Brouwer.
- Montessori, M (2010). *Pédagogie scientifique ; tome 2 : Education élémentaire*. Paris : Desclée de Brouwer.
- Pinel, N. (2019). *La méthode heuristique de mathématiques*. Paris : Nathan.

Articles

- Barth, B.-M. (1985). Jérôme Bruner et l'innovation pédagogique. *Communication et langages*, n°66, 46-58.
- Berdonneau, C. (2006). De l'importance des gestes pour l'apprentissage des concepts mathématiques (élémentaire). *Conférence pédagogique, C.R.D.P. De Rouen*.
- Brousseau, G. (2005). Recherches en éducation mathématique. *APMEP*, 457, 213-224.
- Gardes, M.-L. & Courtier P. (2018). Quelle manipulation, représentation et communication dans les ateliers Montessori de première numération ? *Grand N*, 101, 83-103.
- Pinet, L. & Gentaz, E. (2008). Evaluation d'entraînements multisensoriels de préparation à la reconnaissance de figures géométriques planes chez les enfants de cinq ans : étude de la contribution du système haptique manuel. *Revue française de pédagogie*, 162, 29-44.

Conférence

- Table ronde colloque Montessori, à l'INSPE de Lyon, en novembre 2019. Repéré à <https://mediacenter.univ-lyon1.fr/videos/?video=MEDIA200203124237909>, le 15/05/2020.

Autres documents

-Jérôme Bruner, repéré à https://fr.wikipedia.org/wiki/Jerome_Bruner#Publications , le 05/04/2020.

-Villani, C. & Torossian, C. (2018). 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques.

Repéré à <https://www.education.gouv.fr/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques-3242> , le 07/03/2020.

-Conférence de consensus. Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire.

Recommandations du jury (2015).

Repéré à http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/12/DP_num%C3%A9ration_site1.pdf , le 08/03/2020.

-Programmes officiels de la maternelle.

Repérés à http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_2/37/8/ensel4759_arrete-annexe_prog_ecole_maternelle_403378.pdf , le 08/03/2020.

-Programmes officiels du cycle 2.

Repérés à

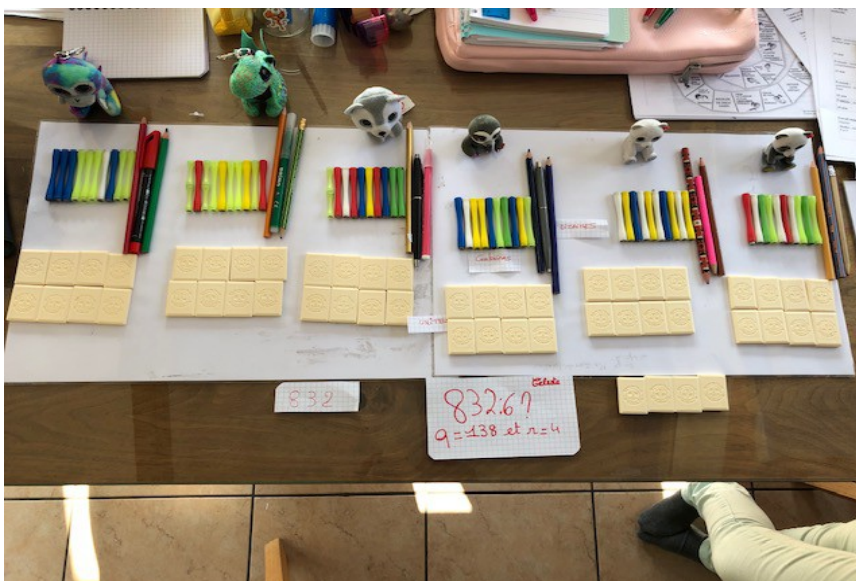
https://cache.media.eduscol.education.fr/file/programmes_2018/20/0/Cycle_2_programme_consolid_e_1038200.pdf , le 08/03/2020.

ANNEXES

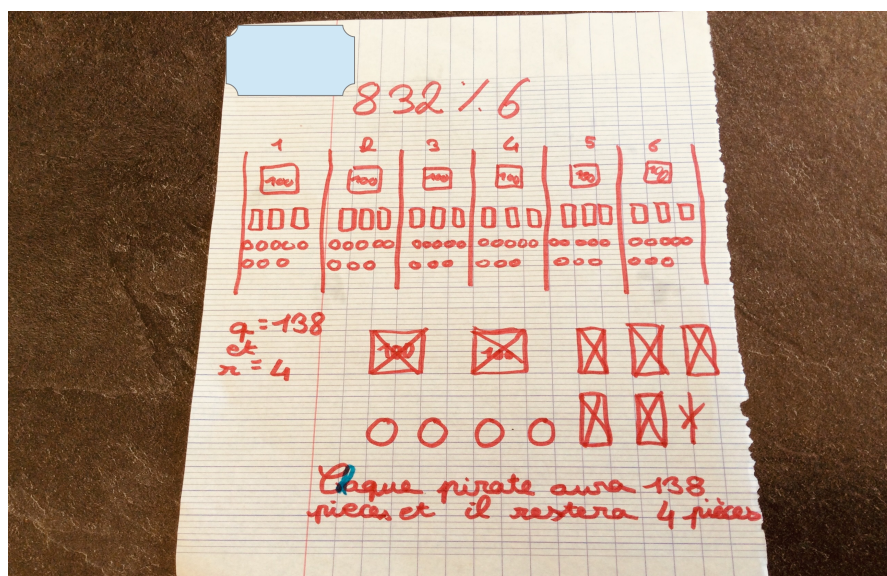
Annexe 1 : Déroulement des séances d'activité pédagogique complémentaire (APC) lors de la troisième période de l'année scolaire

	Tâche	Objectif/ Notion visée
Séance 1	Associer les symboles du système décimal à une quantité choisie par l'enseignant.	Revoir le principe de la numération de position avec des nombres à 4 chiffres. Ancrer la connaissance du matériel chez tous les élèves.
Séance 2	Composer une quantité et chercher les symboles du système décimal correspondants.	Réaliser que si on prend plus que neuf objets d'un même groupe, il faut échanger avec un objet du groupe supérieur. Mettre en évidence la notion de « changes ».
Séance 3	Mettre ensemble deux quantités différentes choisies par l'enseignant.	Additionner sans retenue.
Séance 4	Mettre ensemble deux quantités différentes (avec retenue).	Additionner avec retenue, donc mettre en évidence par l'échange effectué la notion de « retenue » dans l'algorithme de l'addition.
Séance 5	Calculer mentalement le double d'un nombre et vérifier son résultat à l'aide du matériel.	Continuer à construire une représentation mentale des nombres. Mettre en évidence les « changes » à réaliser.
Séance 6	Calculer mentalement la moitié d'un nombre et vérifier son résultat à l'aide du matériel.	Partager équitablement en deux un nombre pair.
Séance 7	Utiliser le matériel pour réaliser des divisions par 10, 50 et 100.	Division-quotition : en divisant par 10 on cherche combien de dizaines on « voit » ; en divisant par 100, on cherche combien de centaines on « voit ».

Annexe 2 : Réponse au problème 2 d'une élève ayant utilisé du matériel



Annexe 3 : Réponse au problème 2 d'une autre élève, n'ayant pas utilisé de matériel



Annexe 4 : liens les vidéos réalisées pour la phase 4 de l'expérimentation

https://www.youtube.com/watch?v=Sr_EigYxPTY

<https://youtu.be/zqbCUX9QHdc>

<https://youtu.be/W-0-HMtMoOM>

Année universitaire 2019-2020

**Master 2 *Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation*
Mention Premier degré**

Titre du mémoire : Le matériel de numération au service de la compréhension d'un algorithme opératoire

Auteur : Servane BARDET

Résumé :

L'enseignement de la numération au cycle 2 doit permettre aux élèves de comprendre les principes de notre système de numération, base fondamentale pour la réussite des apprentissages à suivre. Les dernières recommandations concernant l'enseignement des mathématiques à l'école énoncent ce triptyque : « manipuler, verbaliser, abstraire ». Au sujet de l'importance de la manipulation, les travaux de chercheurs récents rejoignent ceux de Maria Montessori. Cette pédagogue du 20^{ème} siècle a mis entre les mains de ces élèves du matériel porteur des caractéristiques de notre système de numération. L'expérimentation présentée dans ce mémoire étudie la compréhension de l'algorithme opératoire de la division posée, en lien avec la manipulation d'un matériel de numération, principalement de type « Montessori ». Le matériel associé à la verbalisation doit aider les élèves à accéder au sens de cet technique opératoire particulière, fondée sur les principes de la numération décimale de position.

Mots clés :

Numération au cycle 2, principes de la numération décimale de position, manipulation de matériel de numération, Montessori, algorithme opératoire de la division posée.

Summary:

The teaching of numeration in cycle 2 must allow students to understand the principles of our numeration system, fundamental basis for the success of the learning to follow. The latest recommendations concerning the teaching of mathematics at school state this triptych: "manipulate, verbalize, abstract". On the importance of manipulation, the work of recent researchers joins that of Maria Montessori. This pedagogue of the 20th century put in the hands of these students material carrying characteristics of our number system. The experiment presented in this thesis studies the understanding of the operating algorithm of the

posed division, in connection with the manipulation of a numbering material, mainly of the “Montessori” type. The material associated with verbalization must help students gain access to the meaning of this particular operating technique, based on the principles of decimal position counting.

Keywords:

Numeration in cycle 2, principles of decimal position numbers, manipulation of numeration material, Montessori, operative algorithm of the posed division.