



HAL
open science

Le Tangram, un jeu pour l'apprentissage des fractions au cycle 3

Chloé Rivard

► **To cite this version:**

Chloé Rivard. Le Tangram, un jeu pour l'apprentissage des fractions au cycle 3. Education. 2020. dumas-03129371

HAL Id: dumas-03129371

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-03129371v1>

Submitted on 2 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année universitaire 2019-2020

**Diplôme universitaire *Métiers de l'enseignement, de l'éducation
et de la formation***

Mention *Premier degré*

**Le Tangram : un jeu pour
l'apprentissage des fractions au
cycle 3**

Présenté par Chloé RIVARD

Écrit scientifique réflexif encadré par Sophie Terouanne

Sommaire

1	Partie théorique : introduction, état de l'art et problématique.....	1
1.1	Introduction.....	1
1.2	La manipulation en mathématique.....	2
1.2.1	La manipulation, pourquoi ?.....	2
1.2.2	La manipulation, comment ?	3
1.2.2.1	Le rôle des confrontations verbales.....	3
1.2.2.2	Le choix des activités.....	3
1.2.2.3	Le rôle de l'enseignant.....	4
1.2.3	De la manipulation à l'abstraction.....	4
1.2.4	Les limites de la manipulation.....	5
1.3	Les fractions à enseigner.....	6
1.3.1	Les attentes institutionnelles au cycle 3.....	6
1.3.2	Difficultés rencontrées par les élèves.....	6
1.4	L'enseignement des fractions par la manipulation.....	7
1.4.1	Activités de référence sur les fractions.....	7
1.4.2	Quel matériel de manipulation ?.....	8
1.4.3	Le Tangram, un outil à manipuler.....	9
1.5	Formulation de la problématique.....	10
2	Méthode.....	11
2.1	Participants.....	11
2.2	Mise en œuvre matérielle et déroulement.....	11
2.3	Évaluation du dispositif.....	12
3	Résultats.....	14
3.1	Résultats du test de reconnaissance des fractions.....	14
3.2	Résultats du test sur les équivalences et additions de fractions.....	15
3.3	Vocabulaire utilisé par les élèves.....	17
3.4	Détermination des aires : nature et efficacité des procédures	17
3.5	Déterminer une aire de figures composées avec les pièces du Tangram	19
3.6	Créer sa propre figure avec une aire imposée.....	20
4	Discussion.....	23
4.1	Le Tangram, un matériel motivant pour l'apprentissage des fractions.....	23
4.2	De la manipulation vers l'abstraction.....	23
4.3	Choix des activités.....	23
4.4	Limites de l'expérimentation.....	24
5	Conclusion.....	26
6	Bibliographie.....	27

1 Partie théorique : introduction, état de l'art et problématique

1.1 Introduction

Les résultats des élèves français se dégradent depuis une douzaine d'années, selon l'enquête internationale PISA (programme international pour le suivi des acquis des élèves). En 2018, le score de la France en mathématique était légèrement au-dessus de la moyenne de l'OCDE. L'enquête précise que les pays qui ont progressé le plus sont ceux qui ont agi sur leur organisation du système scolaire et leurs méthodes pédagogiques. Nous allons nous intéresser dans cette étude à ces pratiques pédagogiques innovantes, et plus spécifiquement aux activités de manipulations.

La manipulation est au cœur des apprentissages à l'école, et elle tient une place primordiale dans plusieurs pédagogies actives (en France principalement les écoles Montessori et Freinet). Elle est souvent présentée comme une stratégie d'enseignement efficace et est préconisée dans la mesure 4 du rapport Villani-Torossian (*Villani C. & Torossian C. 2018*) « équiper et proposer à toutes les écoles un équipement de base, accompagné de tutoriels, favorisant les manipulations d'objets réels ou virtuels » et dans la mesure 5 qui propose de « mettre en œuvre un apprentissage des mathématiques fondé sur – la manipulation et l'expérimentation – la verbalisation – l'abstraction ».

L'apprentissage des fractions constitue un apprentissage majeur au cycle 3 mais pose problème à de nombreux élèves au cours de leurs scolarités. Les élèves sont souvent perdus, découragés, les menant même à un dégoût des mathématiques (*De Tewangne M. 2007*). Ils exécutent des calculs sans objectif, et les fractions sont perçues comme une notion difficile et abstraite.

Cette étude propose la mise en place d'une séquence d'activités par une approche active et progressive des fractions dans un contexte ludique. Les élèves devront réfléchir et agir en ayant recours à un puzzle appelé Tangram pour travailler concrètement sur les fractions équivalentes et les additions de fractions. Il s'agira d'un travail de détermination d'aires, en utilisant la composition et la décomposition du Tangram.

La première partie de cette étude précise quelques théories concernant la manipulation en mathématiques, elle définit les apprentissages et les préconisations des programmes sur les fractions et présente les activités de manipulation de référence pour travailler cette notion. La seconde partie détaille le dispositif utilisé et le déroulement des activités proposées aux élèves. Elle expose les résultats qui seront discutés à la lumière des théories présentées précédemment.

1.2 La manipulation en mathématique

Pourquoi manipuler ? Comment manipuler ? À quel moment ? Avec quel matériel ? Autant de questions que l'on se pose lorsque l'on réfléchit à la mise en pratique d'une activité.

1.2.1 La manipulation, pourquoi ?

Jérôme Bruner, psychologue spécialisé dans le domaine de la psychologie cognitive considère que l'enfant est acteur de la construction de ses connaissances. Il participe activement à la construction de son savoir, en essayant de comprendre comment une notion est construite et comment elle est en relation avec d'autres.

Les enfants ont une grande dépendance à l'interaction physique avec leur environnement pour construire un sens aux apprentissages. « C'est à l'école-et donc à la pédagogie- de convertir le savoir dans une forme transmissible à l'enfant, à partir de ce qu'il est : chercheur de structures » (*Barth B.-M., 1985*). Pour apprendre des notions abstraites, les élèves ont besoin d'en réaliser l'existence dans leur « vie réelle » (*Barth B.-M., 2001*). Le recours aux objets concrets proches des objets du quotidien des élèves devraient les aider à créer des liens entre les notions mathématiques abstraites et la réalité (*Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. 2013*).

La manipulation a des avantages multiples pour l'élève (d'après *Berdonneau C. 2006*) :

- propose un apprentissage multi-sensoriel.
- canalise l'attention, implique l'élève.
- libère des autres tâches (l'acte graphique par exemple) qui peuvent être une contrainte pour certains élèves.
- permet la répétition (par une manipulation régulière), l'élève peut essayer quelque chose sans risque.
- favorise l'autonomie et la recherche.

- favorise la coopération, les échanges (le travail se fait souvent en petits groupes), la communication.
- donne plus de sens aux écritures mathématiques et les rend plus accessibles (l'élève peut mieux se représenter la tâche).

On peut également relever des intérêts pour l'enseignant :

- rend visible et observable l'activité de l'élève (observation de la manipulation, du raisonnement mis en œuvre), permet de vérifier le degré d'acquisition de la notion (évaluation formative).
- c'est un outil de mise au travail de l'élève (situations motivantes qui éveillent l'intérêt, avec un matériel attractif et ludique ou par l'expérience de jeu).
- possibilité de mettre en place de la différenciation au sein de la classe (ateliers différents ou plusieurs niveaux de jeu par exemple).

1.2.2 La manipulation, comment ?

Nous avons vu que la manipulation présentait de multiples avantages tant du côté de l'élève que du côté de l'enseignant. Comment la mettre en place en tenant compte des autres variables pédagogiques ?

1.2.2.1 Le rôle des confrontations verbales

Le rôle du langage et des relations sociales sont, pour Bruner, plus importants que les relations avec l'objet. Le langage joue un rôle important comme un instrument pour s'approprier le savoir. Il est un moyen d'échange pour l'élève, il a une double fonction : pour représenter le savoir d'une part et pour le communiquer d'autre part. Quand un élève est encouragé à expliquer ce qu'il fait ou ce qu'il voit, il est obligé de quitter l'action qui est une représentation limitée. Sa compréhension va alors s'approfondir.

Britt-Marie Barth (*Barth, 2001*) définit les interactions verbales entre élèves (le « conflit cognitif ») comme un véritable instrument permettant d'approfondir la compréhension en confrontant et argumentant les idées de chacun. Ce « conflit cognitif », aussi appelé « échange mathématique » (*Ministère de l'éducation de l'Ontario, 2008*) est « un temps d'objectivation au cours duquel les élèves expliquent et défendent leur raisonnement et analysent celui des autres ».

Ces confrontations verbales doivent être favorisées et guidées par l'enseignant pour que les élèves précisent leurs raisonnements et leurs stratégies.

1.2.2.2 Le choix des activités

Les activités proposées aux élèves doivent être structurées, avoir un début et une fin bien définis, et qu'il soit possible de mesurer le progrès. La difficulté de la tâche doit être bien dosée. Elle doit demander un effort de l'apprenant qui ne doit pas ressentir un sentiment d'impuissance face à la tâche et elle doit donner un sentiment de satisfaction à l'élève, le plaisir d'« avoir trouvé ».

Les élèves doivent utiliser des objets de manipulation variés lorsqu'ils apprennent un concept mathématique important pour éviter qu'ils n'aient une vision trop étroite du concept. Le guide d'enseignement efficace des mathématiques (*Ministère de l'éducation de l'Ontario, 2008*) recommande ainsi à l'enseignant de varier les activités de manipulation, de représentation, de visualisation, de communication et de résolution de problèmes pour l'enseignement des mathématiques.

1.2.2.3 Le rôle de l'enseignant

Barth B.-M. (2001) définit le rôle de l'enseignant comme d'« assister l'élève dans la construction de son savoir, tâche que personne ne peut exécuter à sa place ». L'enseignant doit aider l'élève à structurer les éléments pour qu'ils prennent sens. Il a un rôle de médiateur entre les apprenants et le savoir. Il les accompagne dans l'oralisation des concepts manipulés et mène des entretiens d'explicitations. Il met en place une succession d'étayages pour amener l'élève à se passer progressivement du matériel pour construire les notions. Il doit clarifier les concepts mathématiques lorsque les élèves présentent leurs stratégies et leurs solutions lors de l'échange mathématique.

1.2.3 De la manipulation à l'abstraction

L'accès à l'abstraction (objectif final de tout enseignement) ne peut se réaliser que si l'enseignant tient compte du degré de développement cognitif de l'élève. C'est pourquoi nous allons décrire ici les étapes d'apprentissages selon la psychologie cognitiviste.

La formation d'un concept est une construction progressive. Bruner (*Barth B.-M, 1985*) décrit cet apprentissage par trois modes :

- le mode enactif : c'est l'apprentissage par l'action, la manipulation. L'élève a besoin de manipuler les données.
- le mode iconique : l'élève peut se représenter quelque chose sans l'avoir devant ses yeux. Il crée une image mentale de l'action.
- le mode symbolique : c'est la représentation abstraite, par des symboles déconnectés et arbitraires. L'élève est désormais capable de communiquer sa pensée à lui-même et aux autres.

Selon les étapes d'apprentissage auxquelles les élèves font face, ils peuvent avoir besoin de revenir à une étape précédente pour consolider leurs acquis. Il y a une zone d'intersection entre deux modes dans laquelle les élèves peuvent se situer. Ce ne sont pas des ensembles disjoints.

Marie-Britt Barth (*Barth, 2001*) propose en parallèle trois paliers successifs d'acquisition :

- la reproduction : savoir reconnaître un concept et le nommer.
- l'abstraction : savoir justifier cette reconnaissance en nommant les attributs essentiels
- la généralisation : savoir générer ses propres exemples du concept en les justifiant.

L'élève aura compris un concept lorsqu'il « aura réalisé pourquoi un élément est un exemple d'un cas plus général et il pourra alors confier à sa mémoire la règle générale sous forme d'une formule, d'un mot ou d'une image qui porteront le sens » (*Barth B.-M, 1985*).

1.2.4 Les limites de la manipulation

Il convient de se questionner sur ce qu'apporte réellement la manipulation dans l'apprentissage d'une notion. Certaines études (*Carbonneau K. J., Marley S. C., & Selig J. P., 2013*) montrent qu'un enseignement axé sur la manipulation a un effet faible à modéré par rapport à un enseignement symbolique abstrait.

Nous avons vu que l'effet du matériel de manipulation dépendait d'autres variables (rôle de l'enseignant, confrontations verbales entre élèves, choix de l'activité, statut de développement de l'apprenant.). Il ne suffit pas d'incorporer du matériel de manipulation dans l'enseignement des mathématiques pour accroître le rendement des élèves en mathématique (*Carbonneau et al., 2013*). De même, il ne faut pas se laisser enfermer dans le milieu matériel en laissant les

élèves au stade de la manipulation. Il ne peut y avoir d'activité matérielle sans apprentissage. (*Ministère de l'éducation nationale. Le nombre au cycle 3. Apprentissages numériques. CNDP-CRDP*). Une manipulation mal organisée peut même être un obstacle à l'acquisition de savoirs mathématiques.

Les supports de manipulation doivent donc être utilisés à bon escient et doivent s'accompagner d'une médiation par l'enseignant car la manipulation en elle-même ne contient pas le savoir. La manipulation doit être intégrée dans un processus d'apprentissage. L'enseignant doit rendre le savoir transmissible.

L'enjeu est de poser des contraintes pour sortir de la manipulation, en bloquant l'accès au matériel pour passer à la représentation (au nombre). Le matériel peut alors être utilisé pour valider les solutions trouvées. (*Ministère de l'éducation nationale de l'enseignement supérieur et de la recherche. Le nombre au cycle 3. Apprentissages numériques*).

1.3 Les fractions à enseigner

1.3.1 Les attentes institutionnelles au cycle 3

Au cycle 3, les fractions et les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduées (*Eduscol, 2016. Fractions et nombres décimaux au cycle 3*). Au fur et à mesure du cycle, on aborde différentes conceptions possibles de la fraction, du partage de grandeurs jusqu'au quotient de deux nombres entiers.

Dans les programmes de 2016 (*Ministère de l'éducation nationale de l'enseignement supérieur et de la recherche. Programme du cycle 3*) on retrouve deux items concernant les fractions.

- comprendre et utiliser la notion de fractions simples (écritures fractionnaires ; diverses désignations des fractions : orales, écrites et décompositions).
- repérer et placer des fractions sur une demi-droite graduée adaptée.

Les savoirs et savoir-faire associés à l'apprentissage des fractions sont répertoriés dans le tableau ci-dessous (les apprentissages de la numération décimale ne sont pas précisés ici):

Savoirs	Savoir-faire
<ul style="list-style-type: none"> - Notion d'unité - Fractions élémentaires - Formulation orale des fractions - Écriture symbolique des fractions - Fonctions du dénominateur / numérateur 	<ul style="list-style-type: none"> - Savoir désigner oralement des fractions - Utiliser des fractions dans des situations de partage et de mesure - Faire le lien entre désignation orale et écriture mathématique - Placer une fraction sur une demi-droite graduée - Décomposer et recomposer une fraction (décomposition additive et multiplicative) - Comparer des fractions de même dénominateur - Encadrer une fraction entre 2 entiers consécutifs

1.3.2 Difficultés rencontrées par les élèves

Plusieurs difficultés peuvent apparaître dans l'apprentissage des fractions, nous répertorions les principales ci-dessous.

- Le concept d'unité n'est pas encore stabilisé pour beaucoup d'élèves. Certains ont besoin que l'unité soit matérialisée ou puisse être manipulée (bande, disque, segment...). Il faut qu'ils intègrent que pour obtenir une fraction, soit une partie d'un tout, il faut d'abord diviser ce tout en parties équivalentes.
- L'élève a du mal à se détacher de la représentation, il ne sait pas lire ou écrire une fraction. L'enseignement des fractions se fait souvent à l'aide d'un seul modèle (disque par exemple) et les élèves ont du mal à s'en détacher.
- Il faut tenir compte de deux éléments : le numérateur et le dénominateur. L'élève passe d'un système de numération positionnelle (de gauche à droite) au système fractionnaire, avec un nombre de part et d'autre du trait de fraction ayant chacun une signification différente. Il peut percevoir le trait de fraction comme un séparateur de deux entiers, ce qui entraîne des erreurs de comparaison ou d'opérations sur les fractions.
- Le modèle des nombres entiers naturels n'est pas toujours transférable aux nombres

décimaux, il faut comprendre ces nouveaux nombres. Les règles de comparaison ne sont pas les mêmes que pour les entiers. L'élève a du mal à classer les fractions par ordre croissant ou décroissant en raison de la densité de la droite numérique. Entre deux décimaux on peut en intercaler autant qu'on veut, les notions de prédécesseurs et de successeurs n'ont pas de sens.

- Les fractions équivalentes : il est difficile pour l'élève de comprendre qu'une quantité peut porter plusieurs noms et être représentée par plusieurs nombres.

1.4 L'enseignement des fractions par la manipulation

1.4.1 Activités de référence sur les fractions

Les situations d'apprentissage qui permettent d'introduire et de donner du sens aux fractions sont variées. Les guides et manuels accordent une place importante à la manipulation dans l'apprentissage des fractions. Nous présentons ici quelques activités de référence :

- La bande unité (*Charnay R., Douaire J. Valentin D., Guillaume J.-C., 2005*) : pliages successifs et reports d'une bande unité pour mesurer des segments ou pour construire des segments de longueur donnée. Cette activité met en évidence la nécessité d'introduire de nouveaux nombres lorsque la longueur de ces bandes n'est pas un multiple entier de la longueur du segment unité.
- La droite graduée : placer des points correspondants à des nombres donnés. Trouver la distance séparant certains points de la graduation. Cette activité donne à la fraction son statut de nombre et permet de visualiser le rangement et la comparaison des fractions usuelles. Elle permet de graduer plus finement la droite numérique.
- Partages sur des collections, en parties égales ou inégales avec des objets divers.
- Pliages, découpages et mesures d'aire. Cette activité permet de montrer l'intérêt des fractions pour exprimer le résultat d'un mesurage.
- Le guide âne : c'est une feuille de papier lignée (réseau de droites parallèles équidistantes) qui permet de partager un segment en nombres de parts égales sans mesure, permettant de reporter une fraction sur une droite.
- Les réglettes Cuisenaire : ce sont des bâtonnets de 10 longueurs différentes permettant de manipuler des fractions simples et de consolider la notion d'unité. En fonction de la longueur de l'unité, les élèves doivent associer des bâtonnets de différentes longueurs. Cette activité permet aussi de mettre en évidence les équivalences fractionnaires, de

décomposer des fractions.

1.4.2 Quel matériel de manipulation ?

Il est recommandé d'exposer les élèves à des représentations fractionnaires variées (*Ministère de l'éducation de l'Ontario, 2008*) pour établir des liens entre elles, et conforter l'apprentissage de la notion d'unité. Il est recommandé de côtoyer dès le début du cycle 3 des fractions supérieures à 1 (*Eduscol, 2016. Fractions et nombres décimaux au cycle 3*).

Nous listons ci-dessous quelques exemples d'activités de manipulation sur les fractions en expliquant leurs intérêts :

- La course aux dixièmes : jeu de dé évolutif où on « avance » en additionnant des scores de dixièmes ou de centièmes. Cette activité progressive permet d'accéder progressivement à des représentations du nombre, à partir de bandes-unités manipulables et d'une demi-droite graduée. L'objectif final est de manipuler les écritures chiffrées dans un calcul en ligne.
- L'atelier des potions : les élèves réalisent des potions en sélectionnant la bonne fraction d'ingrédient parmi ceux proposés. Cette activité permet de travailler les fractions inférieures, égales et supérieures à 1, les équivalences, les sommes et décompositions de fractions.
- Les tours de fractions : il s'agit de représenter des fractions avec des cubes empilables en construisant une tour unité composée de plusieurs fractions de couleurs différentes (correspondant à une fraction différente). Cette activité permet d'illustrer la relation entre les fractions, avec une représentation visuelle des équivalences, des opérations, et de travailler sur la décomposition de l'unité.
- Les hexagones : ce sont des blocs en forme d'hexagones que l'on peut recouvrir de plusieurs manières différentes, par superposition, remplacement, assemblage. Cette activité permet de travailler les additions de fraction et les équivalences de fraction.

1.4.3 Le Tangram, un outil à manipuler

Le Tangram est un puzzle chinois constitué de sept éléments. La légende raconte qu'il y a 1000 ans, en Chine, un homme nommé « Tan » fit tomber un carreau qui se cassa en 7 morceaux parfaitement géométriques (un parallélogramme, un carré et cinq triangles de 3 tailles différentes). Alors qu'il essayait de le recomposer, il découvrit qu'une multitude de

combinaisons utilisant les 7 pièces était possible. Plus de 3600 figures sont réalisables. Les élèves le connaissent généralement sous forme de jeu, dans lequel ils reconstituent des modèles.

Le Tangram est un outil attractif et ludique pour les élèves et permet de multiples applications mathématiques : reconnaissance de formes au cycle 1, représentation sur papier quadrillé d'assemblages et symétrie au cycle 2, aires, agrandissements ou réductions au cycle 3.

Dans le cadre d'un travail sur les fractions, le Tangram complet (le carré formé des sept pièces) est utilisé comme l'unité de référence pour la mesure d'aire des différentes pièces. L'addition des mesures obtenues permet de travailler sur les fractions équivalentes.

Les compétences travaillées avec ce matériel sur cette notion sont :

AIRES	FRACTIONS
Comparer des surfaces selon leur aire, par estimation visuelle et superposition	Connaître les fractions élémentaires
Déterminer des aires en faisant appel à une aire de référence	Construire et utiliser des fractions équivalentes
Fractionner, comparer des grandeurs	Utiliser des fractions simples dans le cadre de mesure de grandeurs
Construire des démarches pour déterminer l'étendue de surfaces	Connaître diverses désignations des fractions : orales, écrites, décompositions additives et multiplicatives
Interagir et communiquer dans un langage adapté avec les autres élèves et l'enseignant.	

1.5 Formulation de la problématique

Le travail sur la mesure d'aire n'est pas systématiquement proposé dans les activités de référence sur les fractions alors qu'il est idéal pour l'étude des fractions (*Ministère de l'éducation de l'Ontario, 2008*). Il permet à l'élève de faire le lien entre l'action de partage, l'unité et les parties de l'unité.

La manipulation sous forme de jeu peut rendre les apprentissages plus ludiques et plus marquants pour les élèves. L'élève, en s'engageant dans une démarche de résolution de problème, développe des méthodes et des outils pour apprendre.

La problématique de cette étude est la suivante :

Dans quelle mesure la composition et décomposition d'un jeu de Tangram participe à l'apprentissage des égalités et décompositions additives de fractions ?

Les élèves seront placés en situation de résolution de problème dès le début de la séquence. Avec ce jeu de Tangram, ils vont revoir les fractions simples, apprendre à utiliser des équivalences de fractions et à décomposer une fraction sous forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à un.

Nous pouvons penser que ce dispositif va permettre d'améliorer la compréhension du concept de fraction en provoquant la création de nouvelles images mentales. La progression du jeu devrait permettre d'emmener les élèves progressivement vers la construction des concepts et de leur représentation mathématique.

La manipulation devrait permettre de nombreux échanges entre élèves et avec l'enseignant. Le fait d'encourager les élèves à verbaliser et commenter leurs actions, leurs erreurs et leurs réussites devraient permettre aux élèves d'intégrer les notions mises en jeu.

2 Méthode

2.1 Participants

L'expérimentation a été mise en œuvre dans une école élémentaire (école du Tartaix, commune de Montbonnot-Saint-Martin). La classe compte vingt-six élèves de CE2-CM1, tous issus d'un milieu social favorisé. L'étude a ciblé un groupe de 13 élèves de CM1, comprenant quatre garçons et neuf filles de 8 à 9 ans. La majorité a un bon niveau scolaire. Parmi ces élèves, on notera la présence d'une élève en difficulté, notamment en numération, qui a tendance à se désinvestir facilement ainsi qu'un élève très à l'aise en numération et particulièrement sur les fractions, capable de réaliser des additions fractionnaires et de comparer des fractions simples avant l'apprentissage en classe.

Cette expérimentation a été réalisée en période 4 dans un contexte très particulier puisque les élèves n'étaient pas présents en classe, en raison de la crise sanitaire liée au COVID-19. Les activités ont donc été réalisées en distanciel, sans observation directe de l'enseignant. L'expérimentation prévue au départ a donc été modifiée pour s'adapter au mieux à ce contexte.

2.2 Mise en œuvre matérielle et déroulement

Dans cette expérimentation, le choix du matériel a été une étape importante puisqu'il est au centre de l'activité de manipulation. Le Tangram est utilisé pour faire découvrir par la manipulation, la décomposition et composition de figures en exprimant les aires sous forme fractionnaire. Chaque pièce ayant pour aire un multiple de l'aire du plus petit triangle, il est possible de travailler sur les égalités fractionnaires :

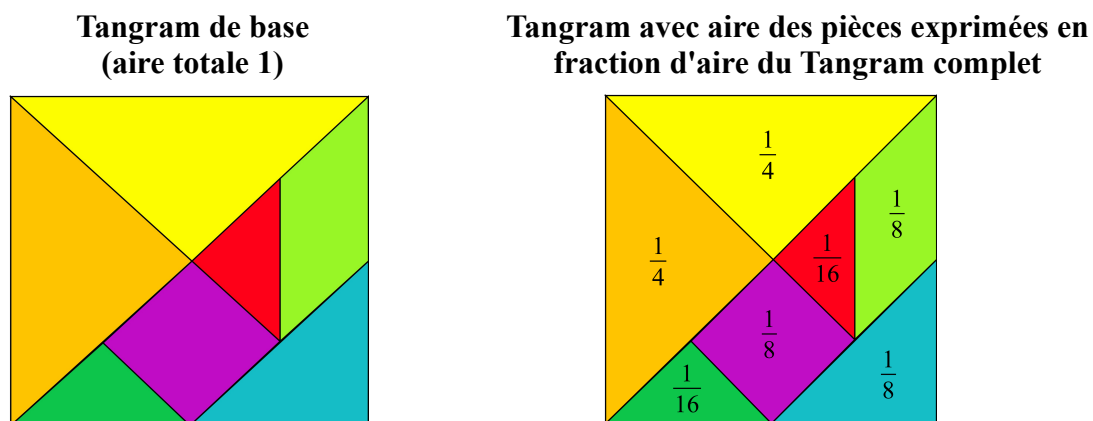


Illustration 1: Présentation du Tangram

Il a été proposé aux élèves de construire leur propre Tangram par reproduction sur quadrillage. Cela a permis qu'ils aient leur propre matériel à la maison, peu coûteux (une feuille cartonnée) et qu'ils se l'approprient plus facilement. Un Tangram « de secours » imprimable était proposé à chaque nouvelle activité si les élèves en avaient besoin.

Une séquence préalable de 3 séances a été réalisée pour permettre la découverte des fractions et la reconnaissance de fractions simples. Les aires ont déjà été étudiées.

La première séance permet la construction et la prise en main du matériel principal, le Tangram. La deuxième séance réactive les connaissances sur les aires en les comparant par superposition ou assemblage. Ensuite une phase de recherche est proposée afin de déterminer les aires des différentes pièces sous forme fractionnaire. La troisième séance est une séance d'application, permettant d'utiliser les résultats obtenus pour déterminer de nouvelles aires. Les deux dernières séances sont un réinvestissement sous la forme de jeu dans lequel les élèves créent une figure avec des contraintes d'aires imposées et doivent analyser les figures des autres élèves et identifier leur aire.

2.3 Évaluation du dispositif

J'ai établi une liste de critères d'évaluation de l'expérimentation. Ces critères, organisés selon trois axes, nous serviront de support pour l'analyse :

- la posture élèves
 - implication de l'élève : participe-t-il aux activités proposées ? Le travail est-il effectué convenablement ou est-il « bâclé » par manque d'intérêt ?
 - la manipulation du Tangram : est-il manipulé, et comment (superposition, pliage, composition...) ?
 - le vocabulaire utilisé : s'il est « non fractionnaire » (« deux fois plus grand » ; « deux fois plus petit », « le triangle jaune ») ou « fractionnaire » (désignation orale ou écrites des fractions et des égalités de fractions).
 - les consignes sont-elles respectées ?
- la posture enseignant (peu étudiée en raison du travail distanciel) : besoin d'étayage ou non, pour quelle activité ?
- les productions des élèves
 - réussite dans les activités de manipulation, de réinvestissement
 - réussite dans les tests

- recours à la schématisation (et laquelle) ou non, utilisation de l'écriture mathématique, et à quel moment ?
- la nature et l'efficacité des procédures.
- les types d'erreurs. Est-ce que ce sont des erreurs dues à un manque de vocabulaire associé à la notion, les connaissances de l'élève sont-elles erronées, confond-il plusieurs notions ? Les erreurs commises sont-elles répétées au fil des séances ?

Dans un contexte présentiel en classe, nous aurions ajouté les critères suivants :

- oralisation : types de formulations utilisées par les élèves.
- besoin d'étayage ou non. Interventions de l'enseignant pour soutenir l'apprentissage, pour revenir sur les consignes ou les erreurs observées.
- interactions entre les élèves (participation, organisation hiérarchisée au sein d'un groupe, échange mathématique...).

En l'absence de données « observables directement », on analysera finement les brouillons de recherche des élèves et les justifications proposées. Cela leur permettra de « verbaliser » leurs procédures et raisonnements.

Deux tests permettront d'évaluer les élèves au cours de la séquence. Un premier test utilisant des flashcards sera proposé pour évaluer la reconnaissance des fractions (voir annexe 1). Les flashcards proposeront différentes représentations de fractions ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$) que les élèves devront reconnaître et désigner. Une fiche de résultats (score sur 10) sera complétée. Ce test sera proposé au début et à la fin de la séquence.

Un deuxième test sera réalisé pour observer l'évolution des compétences des élèves concernant les égalités et les additions de fraction (voir annexe 2). Ce test sera effectué avant la première séance, à la fin de la deuxième, et à l'issue de la séquence. Au test intermédiaire les élèves pourront utiliser le Tangram. On calculera la moyenne (score sur 8) et on comparera l'évolution de chaque élève. On pourra ainsi observer l'effet du matériel de manipulation sur l'apprentissage et s'il y a réussite ou décrochage lorsque l'on bloque l'accès à ce matériel.

Le déroulé général de la séquence est présentée dans le tableau ci-dessous (séquence détaillée en annexe 3):

Séance	Activités	Attendus
N°0 Pré-tests	1. Pré-test égalités et décompositions additives. 2. Pré-test reconnaissance de fractions.	Les scores des élèves seront faibles. Les fractionnements simples seront généralement identifiés, les fractionnement plus compliqués seront difficilement reconnus.
N°1 Découverte Conception du Tangram et prise en main	1. Fabrication du Tangram par reproduction sur quadrillage. 2. Manipulation du Tangram (jeu classique).	Pas de difficulté majeure.
N°2 Recherche Déterminer les aires des pièces du Tangram sous forme fractionnaire	1. Identification des différentes pièces. 2. Déterminer les fractions d'aires de chaque pièce du Tangram. 3. mise en évidence de décompositions additives (correction et leçon). 4. Décrire l'aire d'une figure en fonction d'une autre. 5. Test intermédiaire égalités et décompositions additives (avec utilisation possible du Tangram).	Les élèves trouveront aisément les pièces qui ont la même aire par superposition. Certains élèves identifieront les figures ayant les mêmes aires en combinant plusieurs pièces. À ce stade l'élève manipulera beaucoup. Il schématisera ses résultats. Deux stratégies possibles pour déterminer les aires : - géométrique : par décomposition de l'unité (découpage) - numérique : par écriture fractionnaire La plupart des élèves auront recours à la manipulation du Tangram pour répondre au test.
N°3 Application Exprimer des aires sous forme d'écriture additive	1. Deviner des aires de figures composées à partir de différentes pièces du Tangram (aires supérieures, égales ou inférieures à 1). 2. Vérification à l'aide du fichier correctif.	Les additions de fractions devraient être correctes. Difficulté pour exprimer les aires supérieures à 1 (concept d'unité par encore bien stabilisé). Peu d'élèves réussiront à simplifier les fractions
N°4 Réinvestissement	Inventer une figure avec contrainte (aire imposée pour chaque élève ($1+1/2$; 1 ; ou $3/4$))	Certains élèves auront du mal à respecter l'aire imposée (notamment ceux qui ne disposent pas de suffisamment de pièces).
N°5 Réinvestissement	1. Deviner les aires des figures réalisées par les autres élèves. 2. Post-test égalités et décompositions additives (sans utilisation possible du Tangram). 3. Post-test reconnaissance de fractions.	Les aires devraient être identifiées sans difficulté. La majorité des élèves devraient réussir à compléter les équivalences et égalités. Certains utiliseront encore la schématisation de Tangram (ou autre représentation), d'autres n'en n'auront plus besoin. Enfin, certains risquent d'être bloqués par l'impossibilité de manipuler.

3 Résultats

3.1 Résultats du test de reconnaissance des fractions.

Ce test est noté sur 10 points. Les scores sont moyens au premier test : sur 11 tests effectués, les résultats vont de 2 à 10 et la moyenne est de 7,2., les fractions « simples » sont reconnues mais pas les fractions composées. Les élèves comptent les « parts » et non pas les « parts identiques ».

Les scores sont plus élevés au dernier test. Sur 6 tests, un élève obtient 6 et les autres 10. La moyenne est de 9,33. Cependant certaines fractions ne sont pas simplifiées.

Un élève a encore du mal à compter le nombre de parts identiques. Il compte les parts sans tenir compte de leur aire. Il ne parvient donc pas à reconnaître les fractionnements composés, car il ne « redécoupe » pas les parts pour qu'elle soient toutes de même aire :

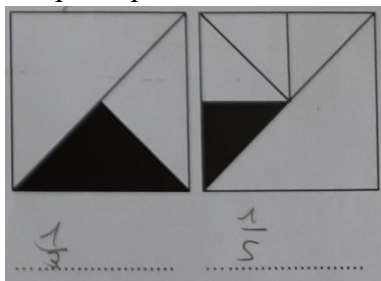


Illustration 2: Erreur de comptage de parts

Plusieurs élèves « tracent » ces parts pour s'aider et certains écrivent les fractions équivalentes intermédiaires :

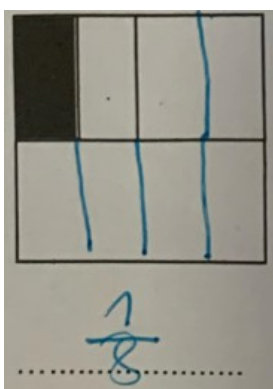


Illustration 3: Stratégie du tracé des parts

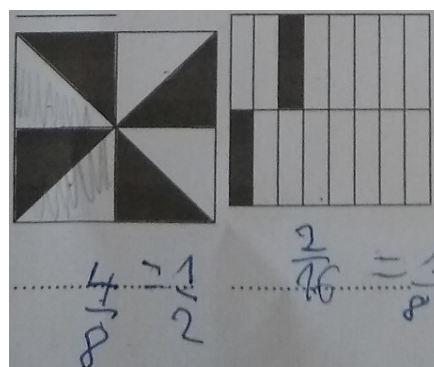


Illustration 4: Ecriture des fractions équivalentes intermédiaires

3.2 Résultats du test sur les équivalences et additions de fractions.

Ce test est noté sur 8 points. Le graphique ci-dessous montre l'évolution entre les trois tests

proposés.

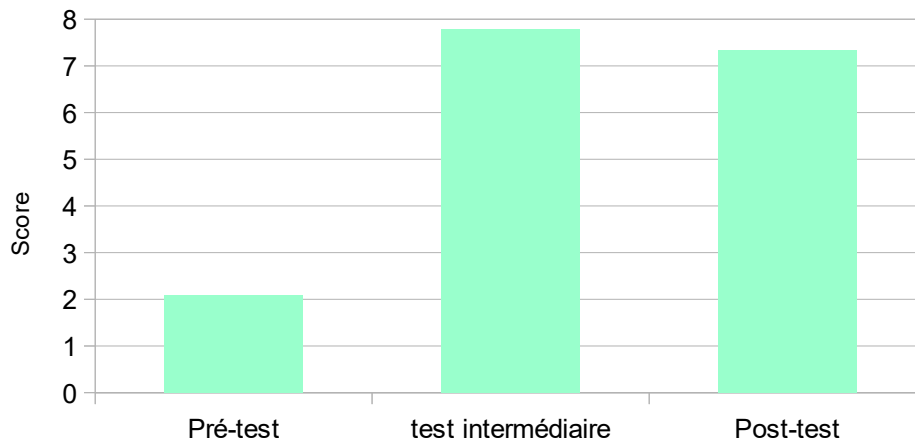


Illustration 5: Evolution des résultats du test sur les équivalences et additions de fractions

Comme cela était envisagé, les scores sont très faibles sur le pré-test : les notes vont de 0 à 7 sur 8 et la moyenne est de 2,1. Ces notions n'ont pas encore été vues en classe. Mise à part quelques équivalences évidentes pour certains (deux quarts égale un demi en faisant le lien avec les demis heures et quarts d'heures), peu d'élèves trouvent les solutions. Les additions ne sont pas comprises.

Le score augmente considérablement sur le test intermédiaire, pour lequel les élèves peuvent utiliser leur Tangram. Ils font le lien avec les assemblages effectués pour déterminer l'aire des pièces du Tangram. Sur 9 tests rendus, les scores sont de 7 ou 8 sur 10 (moyenne de 7,78 sur 10). Les élèves utilisent le Tangram pour s'aider ou le schématisent dans l'espace brouillon.

Les scores sont élevés mais les fractions sont peu simplifiées :

exemple : $\frac{1}{8} = \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$

Quelques élèves parviennent tout de même à simplifier les fractions.

L'écriture fractionnaire n'est pas encore maîtrisée pour tous : on peut lire par exemple « dans

un demi il y a $\frac{2}{4}$ quarts ».

Sur le dernier test, les scores restent élevés, mais un peu plus faible. Sur 6 tests, un élève a 4, et les autres 8, la moyenne est de 7,34. Celui-ci est réalisé sans outil de manipulation. Certains élèves ont recours à la schématisation (sous forme de disque) d'autres n'en n'ont plus besoin. Un élève se retrouve « perdu » face aux additions sans manipulation possible, alors qu'il avait

trouvé les résultats exacts au second test (avec possibilité de manipulation). Il écrit par

exemple $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$ en additionnant numérateur et dénominateur.

On observe donc un net progrès avec l'introduction de l'outil de manipulation et un léger recul lorsqu'on bloque l'accès à ce matériel. En fin de séquence, la plupart des élèves n'a plus besoin de manipuler pour comprendre le concept mathématique, seul un élève en a encore besoin.

3.3 Vocabulaire utilisé par les élèves

Les pièces du Tangram sont désignées de plusieurs manières par les élèves :

- par leur forme géométrique : « le grand triangle, le petit triangle ».
- par leur couleur : « la jaune, la orange, la rouge et la verte »
- par leur désignation fractionnaire : « deux un quart et deux un huitième sont identiques »

Lors des premières séances, c'est la désignation géométrique qui prédomine. La désignation fractionnaire prend de plus en plus de place dans le vocabulaire des élèves. Ils n'utilisent plus que cette désignation sur les deux dernières séances. Le vocabulaire a donc été assimilé.

3.4 Détermination des aires : nature et efficacité des procédures

Lors de l'activité de recherche de la séance 2, la quasi totalité des élèves identifient le nombre de pièces différentes composant le Tangram. Ceux qui se sont trompés ont tenu compte uniquement de la forme (triangle) et pas de l'aire des pièces.

Certains élèves assemblent spontanément les deux petits triangles pour former le carré, le parallélogramme ou le moyen triangle.

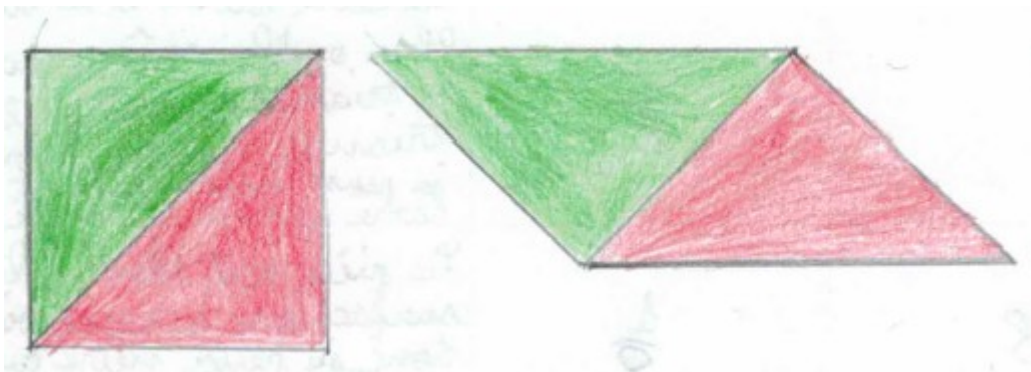


Illustration 6: Composition de deux figures pour en obtenir une troisième

Ils utilisent des schémas d'assemblage ou des phrases du type « le carré c'est deux petits triangles ».

Les élèves ont tous été en réussite pour l'ensemble des aires des pièces à déterminer. Une minorité d'élèves a eu recours aux aides proposées, mais pour les pièces les plus complexes (carré, parallélogramme).

Les élèves, ont tous eu recours à la manipulation, par composition essentiellement. Il n'y a pas eu de procédures de découpage ou de superposition..

Les élèves justifient leurs réponses :

- par verbalisation : « on a partagé le Tangram en parts égales ». « Le bleu fait la moitié du jaune ». « Deux triangles bleus = un triangle jaune »
- par schématisation

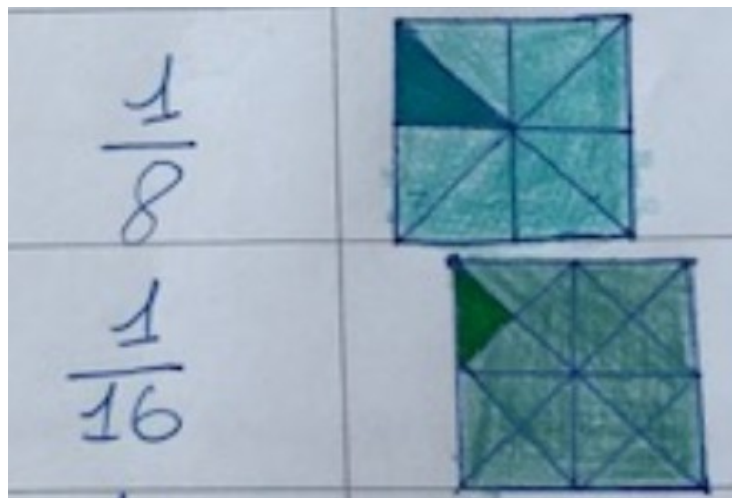


Illustration 7: Justification par schématisation

On retrouve deux stratégies utilisées par les élèves :

- la stratégie géométrique : l'unité est partagée en parts égales. Une pièce s'appelle un huitième parce qu'en la reportant 8 fois, elle reconstitue l'unité. Cette stratégie est utilisée pour la plupart des pièces. « Je peux placer 4 triangles dans le Tangram », « J'ai coupé le Tangram en 16 parties égales ».
- la stratégie numérique : on assemble plusieurs pièces dont on connaît déjà l'aire pour déterminer l'aire d'une autre figure. Cette stratégie est utilisée par les élèves pour le carré, le parallélogramme et parfois pour le moyen triangle : « le carré violet et le triangle bleu ont la même surface : le triangle vert et le triangle rouge ». La plupart des élèves proposent des schémas d'assemblages réalisés avec leur Tangram pour justifier leur réponse :

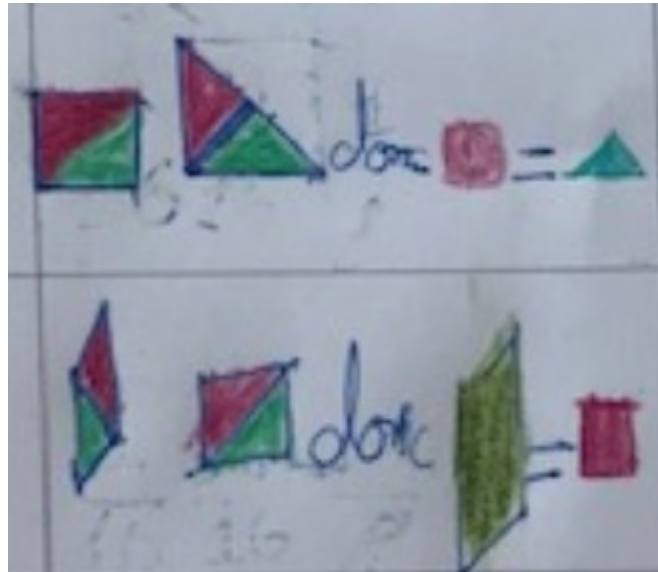


Illustration 8: Exemple de justification pour la stratégie géométrique

- une stratégie composite : « Le triangle bleu est deux fois plus petit que le triangle jaune donc je peux en mettre deux fois plus ».

3.5 Déterminer une aire de figures composées avec les pièces du Tangram

Dans la séance 3, le Tangram reprend sa fonction de jeu, pour reconstruire une figure donnée. Les élèves manipulent leur Tangram en permanence pour identifier les aires proposées.

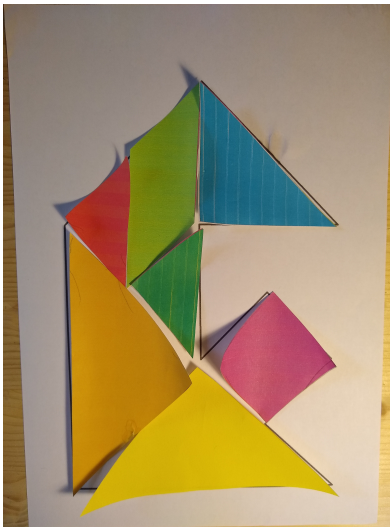


Illustration 9: Positionnement du Tangram sur les figures

Certains élèves notent l'aire sous forme fractionnaire sur les pièces pour s'aider.

Ils représentent les pièces utilisées sur le schéma proposé et indiquent la somme de fractions

correspondantes.

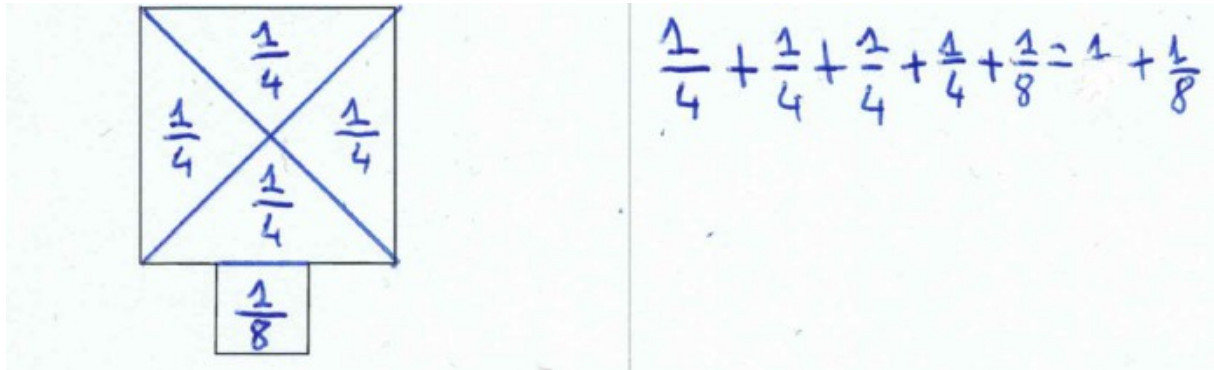


Illustration 10: schéma de positionnement des pièces et addition de fractions correspondantes

A ce stade, la désignation fractionnaire des pièces est majoritairement utilisée. Quelques désignations de formes et couleurs apparaissent encore dans les justifications (« j'ai ajouté un triangle jaune en plus des pièces du Tangram », « j'ai mis trois quarts car c'est le Tangram moins un triangle orange »). En revanche on note que l'unité est rarement désignée, les élèves utilisent plutôt le mot Tangram.

La moitié des élèves parvient à simplifier l'aire à déterminer sous forme réduite, il arrivent notamment à extraire la partie entière de fraction (exemple $1 = \frac{1}{8}$). Pour certaines aires cela

leur pose plus de problèmes ($\frac{1}{2} + \frac{5}{8} + \frac{3}{16}$).

La stratégie la plus efficace utilisée systématiquement par une élève consiste à écrire l'addition des fractions d'aires en commençant par les aires les plus grandes. Cela simplifie le regroupement des termes de même dénominateur et l'utilisation des équivalences. Certains élèves utilisent beaucoup de « petites pièces » ce qui complexifie l'exercice. Un élève parvient à simplifier en remettant les fractions au même dénominateur.

Exemple : $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{2}{4} = \frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5}{8}$

Les erreurs relevées proviennent d'étourderies (oubli de reporter une fraction...). La simplification par le recours aux fractions équivalentes est réussie pour la moitié des élèves. Les élèves n'ont pas de difficulté pour exprimer des aires supérieures à 1.

3.6 Créer sa propre figure avec une aire imposée

Cette activité proposée en séance 4 est une réussite par sa forte participation (11 élèves sur 13), montrant l'engouement des élèves pour l'aspect « jeu » de cette séance.

Trois aires étaient imposées selon les élèves : $\frac{3}{4}$, 1 et $1 + \frac{1}{2}$.

Pour les élèves ayant trois quarts, la plupart « enlèvent » un grand triangle (valant un quart) des pièces du Tangram pour réaliser leur figure. D'autres enlèvent d'autres pièces (un carré et un parallélogramme par exemple) mais ils utilisent uniquement les pièces de base du Tangram (aucun n'utilise trois grands triangles par exemple).



Illustration 11: Exemples de figure d'une aire de trois quarts

Pour les élèves ayant un aire de 1, ils utilisent tous les pièces de base du Tangram.

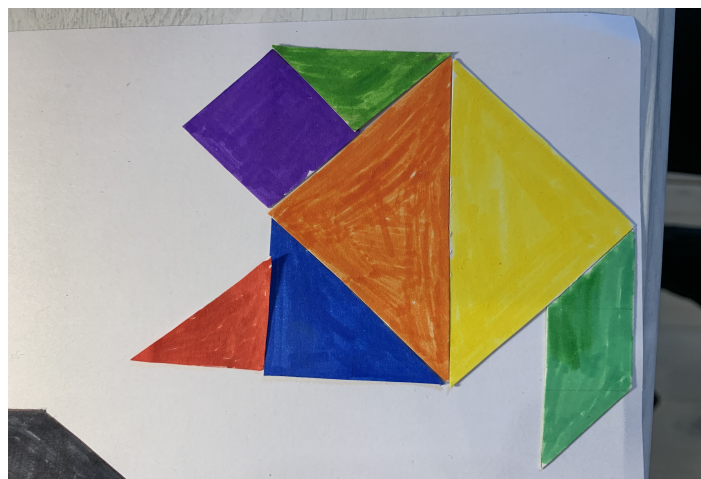


Illustration 12: Exemple de figure d'une aire de 1

Pour les élèves ayant $1 + \frac{1}{2}$, ils ajoutent souvent 2 grands triangles ou proposent un assemblage. Cette aire ayant été donnée aux élèves les plus à l'aise, cela n'est pas étonnant.



Illustration 13: Exemples de figures d'une aire de un et demi

La consigne est bien respectée, seule une élève n'a pas compris et a inventé de nouvelles pièces. Après explicitation une seconde fois de la consigne, elle réussit l'exercice.

4 Discussion

4.1 Le Tangram, un matériel motivant pour l'apprentissage des fractions.

Le Tangram était déjà connu des élèves comme un jeu, ce qui les a motivé. Sa conception par les élèves (quasiment tous utilisent le Tangram qu'ils ont fabriqué eux-mêmes) et la pratique du jeu classique en séance de découverte a permis de mettre en place une dévolution vers les activités proposées. Celle-ci a facilité la familiarisation et l'appropriation du matériel. La participation a été très forte sur les deux dernière séances, axées sur le jeu, où il fallait inventer sa figure et deviner celles des autres.

Cela leur a permis de travailler autrement sur la notion d'aire et de fraction. Le jeu a tenu une place importante tout au long de cette séquence, avec une grande place pour la manipulation, rendant les élèves acteurs de leurs apprentissages.

Les élèves se sont engagés avec enthousiasme dans les activités malgré le contexte distanciel, y compris pour certains élèves en difficulté qui sont souvent démotivés par le travail de recherche et se désengagent rapidement sur certaines tâches. Par exemple, l'élève la plus en difficulté en mathématiques, qui se désengage rapidement des tâches, a participé à toutes les activités et était souvent la première à renvoyer le travail demandé. Un autre élève dyspraxique a même colorié ses pièces avec application, alors qu'il ne colorie jamais habituellement. Le Tangram semble donc être un outil facilitant la mise au travail de l'élève.

Cet outil est également motivant pour l'enseignant, car malgré le temps de préparation (tutoriel de fabrication du matériel, création et numérisation des figures, préparation des corrections annotées...), ces activités permettent d'avoir accès aux représentations et raisonnements des élèves et sont sources de motivation.

4.2 De la manipulation vers l'abstraction

Les progrès des élèves durant cette séquence sur le Tangram montrent que la manipulation donne plus de sens au concept de fraction. Les élèves se représentent mieux la tâche qui leur est demandée. Dans les activités proposées, on a surtout insisté sur le mode enactif, l'apprentissage par l'action, la manipulation : le jeu (séance 1 et 5), la superposition, la composition (séance 2 et 3). On a progressivement travaillé le mode symbolique (détermination des aires d'autres figures séance 2 et 5) et iconique (tests en séance 0, 2 et 5).

4.3 Choix des activités

Cette séquence avait une structure progressive. La difficulté a été dosée pour n'être ni trop facile (provoquer le plaisir d'avoir trouvé), ni trop difficile (ne pas se retrouver bloqué face à la tâche). Elle a été davantage guidée que prévue et simplifiée en raison du contexte d'enseignement distanciel. L'effort demandé s'en est peut être du coup retrouvé trop limité sur certaines activités (dernière séance où il fallait déterminer l'aire des figures inventées par les autres élèves notamment. Certains élèves ont répondu « à l'œil » plutôt qu'en calculant les aires car le questionnaire était à choix multiple).

Pour les élèves en difficulté, le besoin de manipuler est réel. Certains n'arrivent pas encore à se passer du matériel en fin de séquence, notamment un élève en échec sur le dernier test alors qu'il trouvait toutes les réponses exactes sur le test précédent avec utilisation possible du Tangram. Les autres élèves ont pu poursuivre les dernières activités en s'affranchissant du matériel.

4.4 Limites de l'expérimentation

Cette expérimentation a été réalisée dans un contexte très particulier (enseignement à distance dans le cadre de la situation sanitaire d'épidémie de Covid-19). Il faut donc nuancer les résultats obtenus.

- le nombre de participants a été limité. Le nombre de départ était faible (13 élèves de CM1) et le nombre de participants ayant réellement réalisé les activités est encore plus faible (6 à 11 élèves selon les séances).
- certaines activités ont été simplifiées et davantage guidées pour ne pas mettre en difficulté les élèves (et leurs parents).
- les participants ont pu être « influencé » par leurs parents qui les encadraient au moment des activités. Il est possible que certains parents aient beaucoup « aidé » leur enfant pour qu'il parvienne à trouver toutes les réponses justes. Les résultats de certains tests auraient peut-être été moins élevés s'ils avaient été réalisés seul en classe par l'élève.
- les activités n'ayant pas été réalisées en classe, il n'a pu être possible d'observer les échanges et interactions entre élèves et avec l'enseignant. Les activités auraient dû être réalisées en petit groupe, notamment pour le travail de recherche sur la détermination des aires. De même il n'a pas été possible d'observer et de questionner le raisonnement

des élèves. Ce problème a été partiellement pallié par l'incitation aux justifications et schématisations sur les rendus des élèves.

- certaines activités n'ont pas été mises en place pour alléger la charge de travail des élèves (détermination des aires en fonction d'une autre unité, par exemple le petit carré).
- le rôle de l'enseignant a été très limité. Il n'a pas eu le rôle de médiateur dans les apprentissages.

Il faudrait reproduire cette expérimentation en classe et avec un nombre de participants plus élevé pour confirmer ou non ces résultats. Les activités devront être réalisées en groupe pour déclencher le dialogue et des observations devront être réalisées.

L'analyse d'une séance filmée pourrait permettre d'observer les comportements des élèves, d'observer leurs formulations et de voir les notions qui leurs posent problème.

5 Conclusion

L'apprentissage des fractions est un enjeu majeur au cycle 3. Le recours à une variété de représentations (bandes, segments, disques....) s'appuyant sur des grandeurs différentes (longueurs, aires...) est une des clé pour construire progressivement le concept avec les élèves. La manipulation du Tangram apporte aux élèves des observations et des constatations à partir desquelles les concepts mathématiques vont se construire. Le vocabulaire, les représentations évoluent au fil des activités proposées. Le passage au-delà de l'unité se fait sans difficulté. Les élèves utilisent de plus en plus les équivalences fractionnaires et parviennent pour la plupart à se détacher du matériel de manipulation. Il reste à vérifier si les élèves arrivent à se détacher du contexte étudié tout en continuant de s'y reporter pour aborder d'autres opérations. La manipulation en mathématique fait partie intégrante de l'apprentissage. C'est une source de motivation pour les élèves, ce qui a été observée au cours de cette séquence sur le jeu du Tangram. Ils deviennent autonomes et acteurs de leurs apprentissages, s'approprient les connaissances mathématiques.

Ces outils de manipulation sont essentiels, tant pour le élèves que pour l'enseignant. Ils permettent d'aider l'élève à construire une représentation mentale du concept et provoquent des situations de communication, de verbalisation des élèves. Ces phases de communication entre élèves et avec l'enseignant sont primordiales pour progresser dans les apprentissages.

Ces activités de manipulation doivent être contraintes et accompagnées d'un étayage pour être efficace, afin de faire progresser les élèves vers la représentation mentale, pour réussir à se passer progressivement du matériel de manipulation.

Cette séquence a permis de consolider les pré-requis nécessaires à une bonne compréhension et utilisation des nombres décimaux. L'étude de la grandeur aire permet de proposer une transition vers les fractions décimales, par le quadrillage de l'unité qui présente l'intérêt d'illustrer les centièmes.

6 Bibliographie

Barth B.-M. (1985). *Jérôme Bruner et l'innovation pédagogique*. Communication et langages, n°66, 4ème trimestre 1985. pp. 46-58.

Barth B.-M. (2001). *L'apprentissage de l'abstraction*. Editions Retz

Berdonneau, C. (2006). De l'importance des gestes pour l'apprentissage des concepts mathématiques. CRDP Rouen conférence pédagogique.

Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). *A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives*. Journal of Educational Psychology, 105(2), 380.

Charnay R., Douaire J. VALENTIN D., GUILLAUME J.-C. (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CMI*. Edition Hatier collection ERMEL. 504 pages.

De Tewangne, M (2007). *Oser les fractions dans tous les sens, 5-12 ans*. Editions De Boeck education.

Eduscol (2016). *Fractions et nombres décimaux au cycle 3*.

Ministère de l'éducation de l'Ontario, Québec (2008). *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4ème à la 6ème année*. Numération et sens du nombre. Fascicule 2. Fractions.

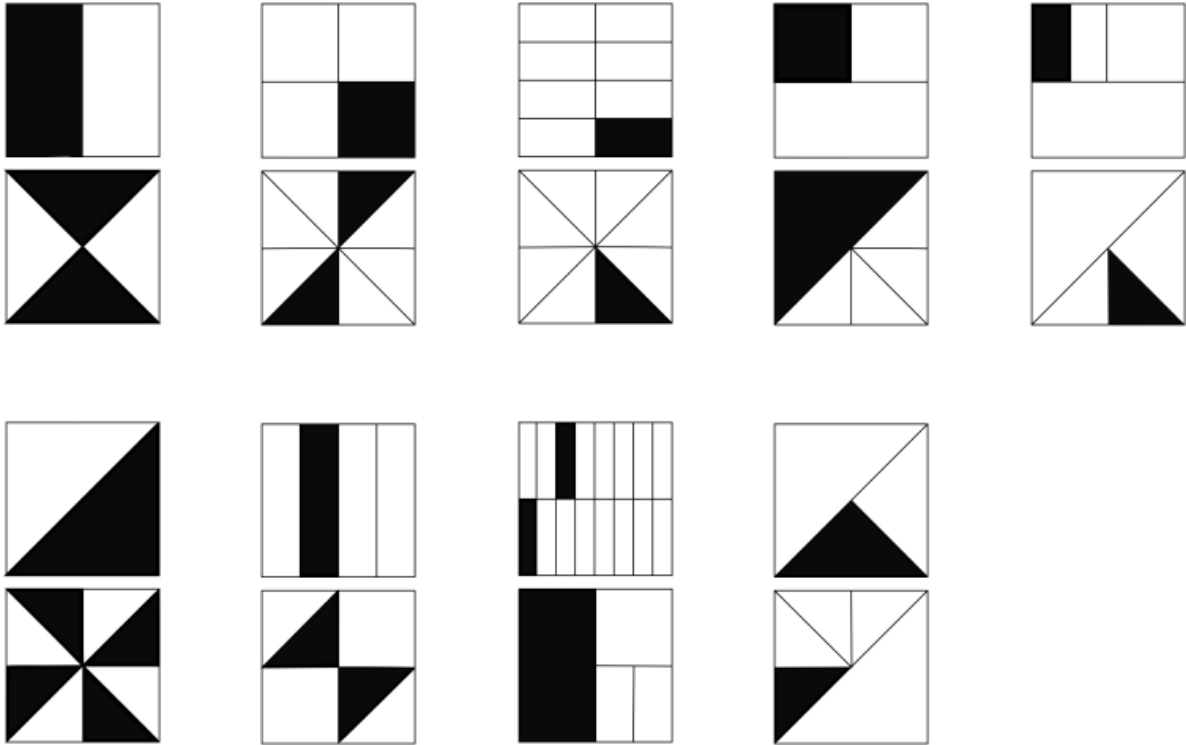
Ministère de l'éducation nationale. *Le nombre au cycle 3. Apprentissages numériques*. CNDP-CRDP. Chap les nombres décimaux et les fractions pp.75 – 95

Ministère de l'éducation nationale de l'enseignement supérieur et de la recherche (MENESR), 2016. *Programme du cycle 3*. Chapitre Mathématiques, pages 102-103

Villani C., Torossian C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques* p. 9 Ministère de l'éducation Nationale.

Annexes

Annexe 1 : test de reconnaissance de fractions



Annexe 2 : tests sur les égalités et additions de fractions

Pré-test		Test intermédiaire		Post-test	
Trouve la réponse au calcul.	Brouillon	Trouve la réponse au calcul.	Brouillon	Trouve la réponse au calcul.	Brouillon
Combien y-a-t-il de quarts dans 1 ?		Combien y-a-t-il de quarts dans 1/2 ?		Combien y-a-t-il de demis dans 1 ?	
$1 = \frac{1}{2}$		$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$		$1 = \frac{1}{2}$	
$\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$		$1 = \frac{1}{4}$		$\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$	
$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$		$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$		$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$	
$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} =$		$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} =$		$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$		$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$		$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$	
$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} =$		$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} =$		$\frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$	
$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$		$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$		$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} =$	

Annexe 3 : séquence d'activité détaillée

Séquence : fractions et Tangram		
Discipline	Maths et numération	
Niveau	CM1	
Séance	Activités	Consignes
N°0 Pré-tests	<ol style="list-style-type: none"> 1. Pré-test égalités et décompositions additives. 2. Pré-test reconnaissance de fractions. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Résous les calculs. 2. Trouve la fraction qui est représentée.
N°1 Découverte Conception du Tangram et prise en main	<ol style="list-style-type: none"> 1. Fabrication du Tangram par reproduction sur quadrillage. 2. Manipulation du Tangram (jeu classique). 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Quadrille le carré en 16 petits carrés de 4 cm de côté. Trace les lignes du Tangram en suivant le modèle. Efface les lignes de construction. Colorie chaque pièce suivant le modèle. Découpe les pièces. 2. Essaie de reconstituer les silhouettes proposées en utilisant ton Tangram.
N°2 Recherche Déterminer les aires des pièces du Tangram sous forme fractionnaire	<ol style="list-style-type: none"> 1. Identification des différentes pièces. 2. Déterminer les fractions d'aires de chaque pièce du Tangram. 3. mise en évidence de décompositions additives (correction et leçon). 4. Décrire l'aire d'une figure en fonction d'une autre. 5. Test intermédiaire égalités et décompositions additives (avec utilisation possible du Tangram). 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Combien y-a-t-il de pièces ? Quelles pièces sont identiques ? Combien y-a-t'il de pièces différentes ? Lesquelles ont la même aire ? 2. Déterminons les aires de chaque pièce du Tangram. En combien de parts égales peut-on couper le Tangram pour obtenir cette pièce ? Quelle fraction du Tangram représente la pièce ? 3. Vérifie avec la correction, lis et recopie la leçon. 4. Essaie d'écrire l'aire du triangle jaune en fonction de l'aire du triangle bleu clair. Essaie d'écrire l'aire du carré en fonction de l'aire du triangle rouge. 5. Résous les calculs. Tu peux utiliser ton Tangram pour t'aider.
N°3 Application Exprimer des aires sous forme d'écriture additive	<ol style="list-style-type: none"> 1. Deviner des aires de figures composées à partir de différentes pièces du Tangram (aires supérieures, égales ou inférieures à 1). 2. Vérification à l'aide du fichier correctif. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Dessine les pièces utilisées et indique la fraction d'aire de chaque pièce. Ecris l'addition des fractions des pièces utilisées pour obtenir l'aire de la figure. Tu peux essayer de simplifier le calcul. 2. Vérifie avec la correction.
N°4	<ol style="list-style-type: none"> 1. Inventer une figure avec 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Tu dois représenter une aire de $1+1/2$ ou 1 ou

Réinvestis- sement	contrainte (aire imposée pour chaque élève ($1+1/2$; 1 ; ou $3/4$))	$3/4$. Sélectionne les pièces dont tu as besoin. Sur une feuille, place les pièces comme tu as envie et prend une photo.
N°5 Réinvestis- sement	<ol style="list-style-type: none"> 1. Deviner les aires des figures réalisées par les autres élèves. 2. Post-test égalités et décompositions additives (sans utilisation possible du Tangram). 3. Post-test reconnaissance de fractions. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Devine le plus possible d'aires de Tangram réalisés par les autres élèves. Mets une croix dans la bonne case et explique comme tu as trouvé. 2. Résous les calculs sans utiliser ton Tangram. 3. Trouve la fraction qui est représentée.

Année universitaire 2019-2020

Diplôme universitaire *Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation*

Mention Premier degré

Titre de l'écrit scientifique réflexif : Le Tangram, un jeu pour l'apprentissage des fractions au cycle 3

Auteur : Chloé Rivard

Résumé :

L'enseignement des mathématiques par la manipulation prend de plus en plus d'ampleur à l'école. Cette étude présente les intérêts, contraintes et limites de la manipulation en mathématique.

Elle présente une séquence d'apprentissage sur les fractions (notion de fractions équivalentes et d'additions de fractions) au cycle 3 en s'appuyant sur un jeu, le Tangram, permettant une approche active des fractions dans un contexte ludique. Par un travail de composition et décomposition de Tangram, les élèves renforcent leur connaissances sur les fractions élémentaires et développent leurs capacités sur les équivalences fractionnaires.

Les élèves progressent au fil des activités proposées, leur vocabulaire et leurs représentations évoluent. Les élèves utilisent de plus en plus les équivalences fractionnaires et parviennent pour la majorité, à réaliser des exercices sans avoir recours au matériel de manipulation.

Mots clés : Enseignement des mathématiques, cycle 3, CM1, manipulation, fractions équivalentes

Summary :

Teaching of mathematics by manipulation is becoming more and more widespread in school. This study presents the interests, constraints and limits of manipulation in mathematics.

It presents a learning sequence on fractions (notion of equivalent fractions and addition of fractions) in cycle 3 based on a game, the Tangram, allowing an active approach of fractions in a playful context. Through composition and decomposition of Tangram, school kids improve their knowledge of elementary fractions and develop their skills on equivalent fractions.

They progress through the activities, their vocabulary and their representations evolve. They use equivalent fractions more often and the majority of them are able to perform exercises without using manipulation tools.

Key words : Teaching of mathematics, cycle 3, CM1, manipulation, equivalent fractions