



HAL
open science

Du calcul réfléchi à la multiplication posée

Fanny Besson, Morgane Grosdidier

► **To cite this version:**

Fanny Besson, Morgane Grosdidier. Du calcul réfléchi à la multiplication posée. Education. 2018. dumas-03169746

HAL Id: dumas-03169746

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-03169746>

Submitted on 15 Mar 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License



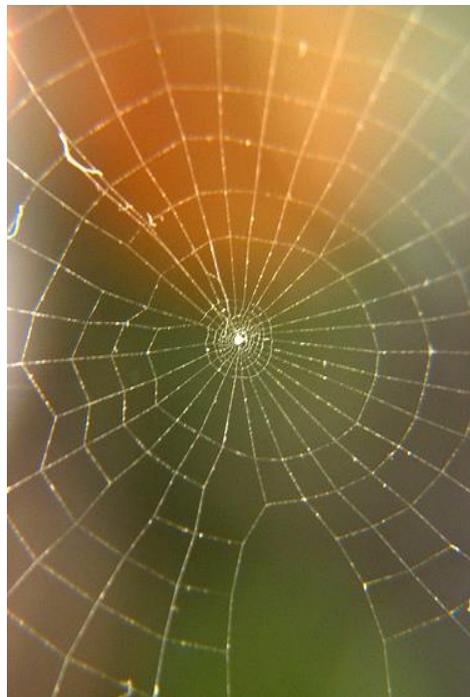
École supérieure
du professorat
et de l'éducation
Clermont-Auvergne



Master Métiers de l'enseignement et de l'éducation et de la formation

Mention 1 – MASTER 2

Du calcul réfléchi à la multiplication posée



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Grade de Master soutenu par

Fanny BESSON

Morgane GROSDIDIER

Directeur de mémoire : Claire MARGOLINAS

Année universitaire 2017-2018

Table des matières

I. Introduction	6
II. Précisions terminologiques, historiques et scientifiques	7
II.1 Calcul automatisé ou réfléchi, calcul mental, calcul posé : quelques définitions et quelques interactions	7
II.2 Histoire et cultures des techniques de la multiplication.....	9
Les bouliers.....	9
Per Gelosia.....	10
Les bâtons de Napier	10
Les réglettes de Genaille – Lucas	11
La méthode usuelle actuelle en France.....	11
II.3 Un changement de paradigme corrélé à l'avènement de la calculatrice.....	12
Une exigence initiale d'efficacité dans le calcul	12
La délégation du calcul automatique aux machines	12
L'efficacité évincée par le sens	14
Un changement de paradigme entériné par l'institution	15
III. Observations et évolution de la problématique	21
III.1 Une rupture générationnelle	21
III.2 Des élèves de cycle 3 aujourd'hui.....	21
IV. Description du protocole.....	27
IV.1 Description du protocole en situation	27
IV.2 Analyse a priori	27
IV.3 Restitution de l'activité des élèves	28
Phase 1	28
Phase 2.....	32

Phase 3: débriefing	35
V. Analyse des résultats	36
V.1 Phase 1	36
V.2 Phase 2	36
VI. Discussion, limites du dispositif et prolongements	37
VII. Conclusion	38
VIII. Références.....	41
IX. Résumé	42
X. Mots-clés.....	42

I. Introduction

Durant la formation de professeur des écoles ainsi que dans de nombreux ouvrages de pédagogie, il est préconisé d'observer les élèves. Cela peut paraître évident en théorie mais cela s'avère parfois compliqué lorsqu'on se trouve emporté par les contraintes du terrain: gestion de classe, de double niveau, temps... Mais c'est essentiel, alors que peut-on observer et dans quels buts ? La réponse évidente semble être que l'observation permet l'évaluation des élèves ainsi que l'évaluation de sa propre pratique d'enseignement. Mais pas seulement; l'enseignant se rend compte de ce que sait l'élève, son degré d'autonomie, ce qu'il comprend de la tâche à accomplir, sa gestion du temps et des outils, ses interactions avec les autres enfants... Dans quel objectif ? Cela permet de connaître les élèves pour remédier efficacement à leurs difficultés. Comment aider au mieux les élèves si l'on n'observe pas réellement leurs obstacles ?

Observer est donc un geste professionnel primordial pour toutes les raisons évoquées précédemment. Les interrogations soulevées dans ce mémoire ont donc pour point de départ l'observation de difficultés d'élèves de cycle 3 au sujet de la multiplication posée. Ces questionnements nous ont conduites à nous interroger sur le continuum existant ou pouvant exister entre le calcul réfléchi et la multiplication posée.

Cela a abouti à une question en particulier : dans quelle mesure les élèves de cycle 3 font-ils appel au calcul réfléchi dans l'application de l'algorithme de la multiplication posée en colonnes ?

Suite aux observations faites dans la classe et afin de répondre au mieux à nos interrogations, nous avons mis en place un dispositif se déclinant en deux phases.

Dans un premier temps, il a été demandé à deux élèves de cycle 3 de réaliser une multiplication posée donnée, librement, c'est-à-dire en appliquant la technique apprise à l'école. Dans un deuxième temps, les deux élèves devaient réaliser le même calcul en utilisant une liste des produits correspondant aux trois calculs intermédiaires nécessaires à la résolution du produit.

Parallèlement à ce travail, nous avons construit notre réflexion dans les sillages de trois auteurs. Stéphane Clivaz, Michel Deruaz et Guy Brousseau ont accompagné nos réflexions.

Ils interrogent les apports de la multiplication posée, l'apprentissage de l'algorithme et celui du sens ainsi que les difficultés rencontrées par les élèves et par les enseignants.

Afin de répondre à notre problématique, nous verrons dans une première partie théorique comment calcul automatisé ou réfléchi, calcul mental et calcul posé sont entrelacés. Nous étudierons l'aspect historique et culturel de la technique de la multiplication. Par la suite, nous nous intéresserons à l'apparition de la calculatrice et son influence sur l'enseignement des algorithmes de calculs. Nous examinerons la manière dont les programmes se sont emparés de la question de l'apprentissage des nombres et du calcul au cycle 3. Cela mettra en lumière toute la difficulté éprouvée par les élèves à apprendre l'algorithme de la multiplication.

Enfin, nous conclurons en resituant, dans un contexte plus large, les enjeux liés à cet apprentissage : la recherche d'une compréhension profonde des notions abordées en classe et de compétences transversales.

II. Précisions terminologiques, historiques et scientifiques

II.1 Calcul automatisé ou réfléchi, calcul mental, calcul posé : quelques définitions et quelques interactions

Le calcul automatisé et le calcul réfléchi concernent aussi bien le calcul mental que le calcul écrit. « Le propre du calcul automatisé, qu'il s'agisse de l'emploi de la calculatrice ou d'un algorithme appliqué avec papier ou crayon, est de délaissier l'intuition des nombres, l'ordre de grandeur. Le calcul mental, calcul réfléchi ou raisonné, nécessite au contraire une intuition sur les nombres ainsi qu'une part d'initiative et de choix. » (documents d'accompagnement des programmes de 2002, cités par Pascal NOURRISSON¹) Si ces deux manières d'envisager le calcul impliquent des procédures qui s'opposent, elles sont toutefois complémentaires.

D'après Charnay (1993-1994)², le calcul mental réfléchi permet de faire réellement des mathématiques, c'est-à-dire de trouver des solutions, des stratégies variées et originales en faisant fonctionner les propriétés des nombres et des opérations. Il permet, par sa pratique régulière, de développer une connaissance intime et profonde des nombres et des opérations.

¹ Présentation de Pascal NOURRISSON, conseiller pédagogique spécialisé en EPS, académie de Blois 2

² Roland CHARNAY. (1993-1994). Une calculatrice pour tous dès l'école primaire... ou quelles compétences en calcul aujourd'hui ? *Grand N* n° 53 p. 59 à 61

Cependant, le calcul réfléchi ne se réduit pas au calcul mental réfléchi. Le calcul réfléchi peut être écrit. Un calcul est qualifié de réfléchi dès lors qu'il implique de la part de l'élève la mise en œuvre d'une stratégie personnelle. Pour effectuer un produit, l'élève pourra par exemple avoir recours à la décomposition additive de l'un des termes et appliquer la propriété de distributivité.

Le calcul mental présente deux intérêts principaux. Il est tout d'abord socialement utile. En effet, le calcul mental automatisé est un moyen efficace et rapide pour calculer en l'absence de support ou de calculatrice. Sa maîtrise est utile au quotidien (lors des courses, dans une conversation avec un banquier, pour évaluer rapidement une aire...). De plus, les résultats automatisés servent de matériaux pour permettre de développer des techniques de calcul réfléchi (connaissances de tables, par exemple).

Le calcul mental, dans son versant réfléchi, est donc aussi pédagogiquement efficient en participant à la construction des premières connaissances relatives aux entiers naturels. Il motive une réflexion sur le calcul, il révèle les multiples possibilités d'aborder généralement un calcul lorsqu'on compare leur coût et les connaissances mises en jeu. Aussi, il permet l'utilisation implicite des propriétés des opérations (commutativité, associativité, distributivité). Enfin, cela permet de développer les capacités de raisonnement et l'esprit de recherche, en encourageant l'emploi de procédures personnelles et originales.

Quant au calcul posé, dit aussi *technique opératoire*, il consiste à trouver le résultat d'une opération en utilisant un algorithme unique. L'algorithme est unique dans le sens où l'on applique une méthode enseignée, contrairement au calcul réfléchi qui permet des procédures individuelles. Dans les programmes mais aussi aux yeux de la société, la maîtrise d'une technique opératoire pour chacune des opérations est indispensable. Ainsi que le prescrivait le ministre de l'Éducation nationale Gilles de Robien, il s'agit d'un apprentissage qui « doit être conduit avec le souci qu'en soit assurée la compréhension. »³ Quant aux programmes 2015, ils font de l'apprentissage des opérations posées l'occasion de travailler les principes de numération. Le rapport du 12 février 2018, par Cédric Villani et Charles Torossian, préconise

³ BO n°10 du 08 mars 2007 : *Mise en œuvre du socle commun de connaissances et de compétences : l'enseignement du calcul*

l'exploration de « situations qui donnent du sens aux actions liées aux quatre opérations, de les mettre en action, puis d'évoluer progressivement vers les écritures mathématiques. »⁴

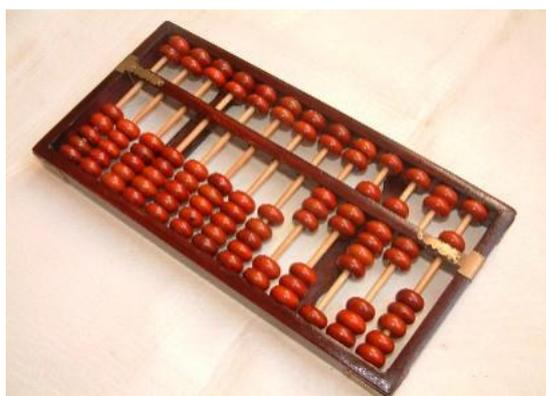
II.2 Histoire et cultures des techniques de la multiplication

De nombreuses techniques et outils ont vu le jour afin de résoudre le plus simplement possible cette opération complexe. Leur diversité s'épanouit dans le temps et également dans l'espace, puisque aujourd'hui encore, les techniques ne sont pas géographiquement uniformisées. Les documents d'accompagnement des programmes de 2015 précisent que « l'étude de certaines d'entre elles peut être conduite avec une visée culturelle et comme support à un travail sur les propriétés de la multiplication. Mais, seule la technique usuelle française doit être maîtrisée (et bien entendu comprise) par les élèves. »⁵

Ces techniques de multiplication développées au cours des siècles utilisent le système décimal ou binaire et nécessitent de connaître la table de multiplication des nombres de 1 à 9. Le boulier est l'une des techniques les plus anciennes.

Les bouliers

Le boulier est un outil de calcul inventé par les chinois en 600 avant J-C environ. Il existe 3 types de bouliers: le chinois, le japonais et le russe. De manière générale, c'est un cadre en bois avec des perles glissant sur des tiges parallèles. C'est ensuite le nombre de tiges qui varie entre le chinois et le japonais. Le russe comporte 10 boules enfilées sur des tiges, sans barre transversale contrairement au chinois et au japonais.



Boulier chinois avec représentation du nombre 37 925. Photo : domaine public.

⁴ Rapport Villani-Torossian, *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*, 12 février 2018 ; 3.2. Le calcul et les automatismes – 3.2.1. Calcul : une place centrale – un calcul intelligent – page 28

⁵ Eduscol, document d'accompagnement des nouveaux programmes de l'école primaire : *le calcul posé à l'école élémentaire*, page 5

Le boulier à 10 boules a été utilisé dans les écoles communales françaises au XIX^{ème} siècle pour apprendre à calculer. Il suffit de connaître par cœur les tables d'addition et de multiplication des nombres de 1 à 9. Cette méthode est très efficace mais elle a disparu des pratiques courantes. D'autres techniques tout aussi efficaces sont tombées en désuétude, malgré le fait qu'elles se rapprochent de notre technique traditionnelle, posée en colonnes. Tel est le cas de la technique Per Gelosia.

Per Gelosia

Cette technique de multiplication (appelée aussi italienne, ou grecque) vient d'Orient. Elle a été très utilisée aux XIV^{ème} et XV^{ème} siècles. Bien que désuète, certains enseignants considèrent que son apprentissage permettrait de compléter celui de la technique usuelle : la comparaison des techniques permettrait d'éclairer mutuellement leur sens. Selon Thérèse Éveilleau⁶, professeur, en IUFM de Caen, elle présente les avantages suivants :

- Elle constitue une autre approche de la multiplication.
- Elle permet d'éclairer la technique classique, elle est simple à mettre en œuvre.
- Les erreurs sont faciles à détecter.
- Il n'y a pas de gestion des retenues de multiplication, seulement d'addition.
- On peut s'arrêter et reprendre quand on veut.
- Il n'y a pas de décalage de ligne à gérer et pas de difficulté pour les zéros intercalés comme dans 205.

Son seul inconvénient est une certaine lourdeur de mise en œuvre car il faut dessiner un tableau.

Les bâtons de Napier

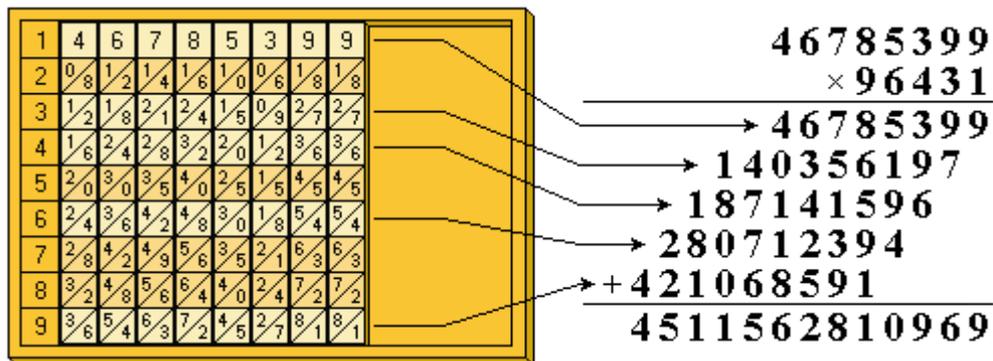
Le mathématicien écossais John Napier inventa en 1617 un outil facilitant le calcul des produits, quotients, puissances et racines, connu en français sous le nom de bâtons de Napier, ou réglottes de Napier. Ce système est une transformation de la technique Per Gelosia.

L'abaque est constitué d'un plateau à rebord sur lequel peuvent être placées des réglottes gravées. Le bord gauche du plateau est gravé lui aussi, divisé en neuf cases numérotées de 1 à

⁶ http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/mult_grecque.htm

9. Les dix types de réglettes, qui ont donné leur nom à l'ensemble du dispositif, étaient originellement en os, d'où le nom anglais de *Napier's bones*. Elles sont divisées en neuf cases. La case supérieure porte un nombre de 0 à 9. Les huit autres cases sont divisées en deux par un trait diagonal.

Le dispositif fût amélioré au cours du 19^{ème} siècle avec l'invention de bâtons inclinés par exemple. Une autre transformation a eu lieu grâce à Lucas et Genaille.



On multiplie cette fois 46 785 399 par 96 431. Licence : creative commons

Les réglettes de Genaille – Lucas

Fin 19^{ème} siècle, le mathématicien Edouard Lucas veut améliorer les bâtons de Napier et rendre automatique certains calculs. C'est l'ingénieur Henri Genaille qui trouvera la solution en 1885. Son procédé supprime les additions intermédiaires. Le progrès de ces bâtons est qu'ils gèrent la retenue lorsque l'on multiplie un nombre par un chiffre. Par rapport à Napier, on n'a plus l'addition en diagonale à effectuer.

La méthode usuelle actuelle en France

Comme pour toutes les opérations hormis la division, on aligne verticalement des chiffres de même valeur: les unités s'écrivent au premier rang (à partir de la droite), les dizaines au deuxième rang, etc. C'est alors l'aspect positionnel qui est en jeu. On applique ensuite la propriété de distributivité. On peut définir ainsi cette propriété: « La multiplication est distributive sur l'addition et la soustraction ; c'est-à-dire que, pour tous nombres a , b et k , on a : $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$; $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$. On a distribué le facteur k sur les termes a et b de la somme et de la différence. »⁷ Cette propriété est utilisée pour développer et distribuer. Ainsi, dans l'algorithme usuel, les deux termes sont décomposés d'une manière

⁷ https://www.assistancescolaire.com/eleve/5e/maths/lexique/D-distributivite-mc_d20

additive pour pouvoir effectuer des produits intermédiaires. Ces résultats intermédiaires sont enfin additionnés pour obtenir le résultat de la multiplication.

Toutes ces méthodes et ces outils ont permis d'alléger le calcul de la multiplication, car certaines tâches sont en quelque sorte prises en charge automatiquement du fait de l'ergonomie ou du matériel. On observe alors déjà un certain niveau de délégation, qui permet d'améliorer l'efficacité de ce calcul. Un pas supplémentaire est franchi avec l'invention des machines à calculer, des premiers ordinateurs, de la calculatrice.

II.3 Un changement de paradigme corrélé à l'avènement de la calculatrice

Une exigence initiale d'efficacité dans le calcul

En 1973, Guy Brousseau analyse une enquête menée en 1969 sur 600 enfants. Il s'agit de comparer l'efficacité de la méthode à l'italienne (qui correspond à notre algorithme usuel) et de la méthode per gelosias. La «boucle» de la méthode à l'italienne est beaucoup plus complexe que celle de la méthode per gelosia. L'expérience montre que cette complexité influe sur le temps d'exécution et la fiabilité. Pour les élèves en difficulté sur le calcul de produits, l'apprentissage rapide de la méthode per gelosia augmente considérablement leur efficacité en calcul de produits.

Il ressort que l'algorithme doit être appris précocement pour pouvoir être utilisé sans faute plus tard. Brousseau insiste sur la distinction entre l'apprentissage de l'algorithme et l'apprentissage du sens de la multiplication. Ces deux objets d'apprentissage n'auraient pas à être travaillés en même temps : il s'agirait d'objectifs disjoints. Le sens de l'opération ne renforce pas l'algorithme ; seul l'entraînement le renforce. Cependant, si travailler le mécanisme et rechercher son efficacité est nécessaire, cela n'est pas suffisant : le sens doit bel et bien être travaillé pour lui-même, selon l'auteur.

Or, aujourd'hui, la recherche d'efficacité dans l'application de l'algorithme a perdu de sa pertinence. Le travail sur le sens de l'opération (reconnaissance des situations multiplicatives) et sur la compréhension de ses propriétés va primer. Cela s'explique par la prise en charge du calcul automatique par les machines.

⁸ Guy BROUSSEAU. (1973). Peut-on, améliorer le calcul des produits de nombres naturels ? EPI pp. 361-378

La délégation du calcul automatique aux machines

En 1639, Blaise Pascal invente la toute première "machine à calculer" : la Pascaline. Munie d'un système d'engrenage apte à soustraire et additionner grâce à la manipulation de six roues nichées au creux d'une petite boîte, elle pouvait additionner, soustraire, mais aussi convertir les monnaies d'usage.

Quelques années plus tard, Gottfried Wilhelm Leibniz (mathématicien et scientifique) reprend l'idée de la Pascaline et cherche un moyen de pouvoir faire des multiplications et des divisions. En 1694, le premier modèle voit le jour. Le principe de Leibniz influencera par la suite la réalisation des machines à compter jusqu'au début du XXe siècle. En 1822, le mathématicien Charles Babbage élabore un modèle capable d'effectuer des opérations tout en suivant un programme. Babbage ne parviendra jamais à achever sa machine.

Le créateur d'automobiles Léon Bollé, invente en 1888 une machine à calculer capable de multiplier, diviser, additionner et soustraire de manière ultrarapide.

La Curta est créée en 1948, permettant de faire une multitude de calculs mathématiques rapidement. Elle sera utilisée jusqu'en 1970, année de mise en marché de la calculatrice dite conventionnelle que l'on connaît aujourd'hui. La miniaturisation de l'électronique permit de nombreuses évolutions. Ainsi, la société Texas Instrument commercialise sa première calculatrice électronique en 1972. En 1976, Hewlett-Packard met sur le marché le premier modèle capable d'être programmé.

Dès lors que les machines à calculer font partie du quotidien, la maîtrise parfaite des techniques opératoires n'est plus un impératif. Cela interroge la place que la calculatrice devrait avoir à l'école, ainsi que l'intérêt de continuer à enseigner des techniques qui, autrefois, servaient une priorité qui n'est plus de rigueur : l'exactitude des résultats. Dans un article de 1993⁹, R. Charnay expose trois raisons pour lesquelles il faut, selon lui, continuer à enseigner les techniques opératoires usuelles : une première raison d'ordre culturelle (transmettre une "coutume" mathématique), une deuxième d'ordre intellectuel (avoir conscience que ce qui est délégué aux machines, l'être humain est toujours capable de le faire) mais surtout, une troisième raison d'ordre pédagogique et didactique : ces techniques usuelles offrent l'occasion de travailler le sens des opérations et la compréhension de leurs propriétés. De plus, les documents d'accompagnement des programmes de 2015 insistent sur

⁹ Roland CHARNAY. (1993-1994) Une calculatrice pour tous dès l'école primaire... ou quelles compétences en calcul aujourd'hui ? *Grand N* n° 53 p. 59 à 61

une utilisation intelligente des machines, qui n'est possible que si l'utilisateur comprend le principe des opérations qu'il fait effectuer. L'élève doit pouvoir apprécier la cohérence des résultats qu'il obtient.

L'efficacité évincée par le sens

Une étude de 2013, de S. Clivaz et M. Deruaz, met en lumière les connaissances en jeu dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algorithme de la multiplication posée¹⁰. Les auteurs se demandent ce que cet enseignement peut apporter, au-delà de la seule maîtrise de cette technique opératoire. Pourquoi devrait-on continuer à enseigner cet algorithme coûteux en temps et peu efficace, ainsi que le montraient déjà les travaux menés dans les années 60 par Brousseau ?

Les auteurs distinguent quatre connaissances mathématiques spécifiques, que les enseignants ne maîtrisent souvent pas eux-mêmes, mais sur lesquelles s'appuie pourtant la technique usuelle de la multiplication posée.

1 : La distributivité, avec la séparation en deux lignes et l'addition des résultats intermédiaires

2 : L'associativité et la numération décimale, avec le zéro ou le point pour «décaler» (notons qu'en France, la coutume a été plutôt favorable au point; cependant, il semblerait que les manuels destinés à l'élémentaire, tels que Cap Maths, favorisent de plus en plus le zéro, en vue de donner du sens à ce «décalage»)

3 : Numération décimale de position, avec l'alignement sur l'unité et retenues

4 : Définition de la multiplication comme produit cartésien

Les difficultés rencontrées par les enseignants et les élèves à verbaliser le bien-fondé des éléments de cette technique proviendraient de difficultés à cerner la définition de l'opération en jeu. En effet, les auteurs ont observé que la représentation de la multiplication comme addition itérée est largement prédominante chez les étudiants futurs enseignants (ce qui a déjà été montré par David & Simmt, 2006, Canada, ou encore par Amato, 2004, Brésil).

En conclusion, les auteurs présentent les principales raisons d'enseigner l'algorithme de la multiplication posée. Rapproché du calcul réfléchi, l'apprentissage de la multiplication posée offre l'occasion de travailler les propriétés et la définition de la multiplication comme produit cartésien. Cette consolidation prendra toute son importance lorsque les élèves seront

¹⁰ S. CLIVAZ et M. DERUAZ. (2013). Des mathématiques à leur enseignement : l'algorithme de la multiplication. *Grand N* n° 92 p. 15 à 33

confrontés à l'extension de cette opération aux nombres réels, aux identités remarquables ou encore aux produits vectoriels.

L'institution s'est emparée de cet enjeu : soucieuse de fournir aux écoliers les outils qui leur permettront de devenir des collégiens, des lycéens voire des étudiants «accrocheurs» et non «décrocheurs», il est apparu nécessaire de construire une compréhension profonde des principes de notre système de numération, un sens exhaustif du nombre, une connaissance solide du sens des opérations et de leurs propriétés. Les besoins de la société évoluent, les programmes scolaires tentent donc de s'y adapter pour y répondre.

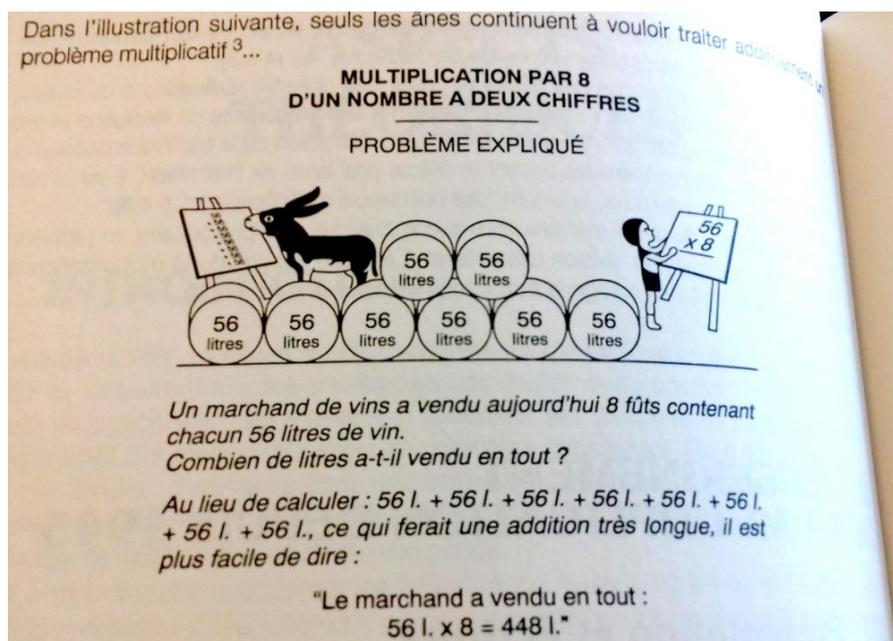
Un changement de paradigme entériné par l'institution

L'enseignement de la multiplication a connu un bouleversement important entre les années 1970 et 1978 : d'abord déconnectés, le sens et la technique ont ensuite été mis en interaction pour se servir mutuellement. Finalement, les programmes entérinent la primauté du sens et de la compréhension des propriétés des opérations, en mettant la technique à leur service.

L'enseignement de la multiplication, entre sens et technique

Jusqu'en 1970, la multiplication est enseignée d'une manière assez cloisonnée, sous l'angle de son sens d'une part (reconnaître une situation multiplicative) et sous l'angle technique d'autre part (nécessité de bien savoir calculer, avant l'omniprésence des moyens de calcul).

L'enseignement du sens de la multiplication s'appuie sur des situations amenant à des additions itérées du même terme ($2F + 2F + 2F$ soit 3 fois 2 francs). Une convention impose de placer l'opérateur (le nombre de fois) à droite du signe \times soit $2F \times 3$. Savoir distinguer la «valeur répétée» du «nombre de répétitions» semble crucial dans l'acquisition du sens de la multiplication. La reformulation des énoncés à l'aide du mot fois joue vraisemblablement un rôle très important dans la reconnaissance de l'opération. Un principe est de ne jamais écrire d'additions itérées, au moins sous la forme posée qui pourrait amener un calcul. Pour utiliser la multiplication, l'élève doit être détourné de tout calcul additif.



Dans l'illustration ci-dessus, seuls les ânes continuent à vouloir traiter additivement un problème multiplicatif (extrait de l'édition Ermel de 2001, illustration de 1949)

Quant à la technique opératoire, on ne cherche pas à la faire construire, mais à la justifier. On fait appel au bon sens des élèves pour comprendre les décompositions en jeu. L'élève n'a pas d'initiatives dans la résolution de problèmes. En classe, le maître présente des exemples concrets pour expliquer et illustrer la décomposition.

À la fin des années 70, la calculatrice commence à se démocratiser. L'accent est alors mis sur le sens.

L'introduction du signe x se fait en liaison avec le dénombrement de configurations rectangulaires d'objets (jetons, points, carreaux). Les instructions officielles de 1970 amènent indifféremment aux codages 5 x 8 ou 8 x 5, ce qui amène à la définition de la multiplication comme produit cartésien.

Les configurations rectangulaires sont utilisées pour mettre en évidence la commutativité, l'associativité et la distributivité. Chaque propriété est nommée et fait l'objet d'un travail spécifique puis est utilisée de manière systématique dans des exercices. Parfois, pour la technique, on commence par multiplier dans des bases autres que la base 10. Les configurations rectangulaires ne sont pas mises à profit par tous les auteurs de manuels. Les concepteurs du manuel Ermel (2001) estiment qu'aborder ces représentations est trop coûteux en temps.

Les instructions officielles de 1978 entérinent la position des instructions de 1970. Les écritures multiplicatives interviennent dans le cas de collections d'objets rangés en lignes et colonnes, dans des situations de dénombrements.

À partir de 1978, la réflexion didactique s'approfondit : il ne s'agit plus seulement d'illustrer, de justifier, ni même de simplement faire comprendre, mais bien de faire en sorte que les élèves construisent la technique opératoire. Dans ce contexte, les grilles rectangulaires vont jouer un nouveau rôle: elles deviennent des situations clefs dans les progressions proposées. Les propriétés formelles ne sont plus explicitées mais utilisées implicitement dans le cadre géométrique. Par découpage successifs, ils construisent la technique opératoire.

Cependant, l'édition du manuel Ermel de 2001 a abandonné la présentation à partir des grilles rectangulaires, préconisée depuis 1970, bien que cette présentation « possédât des qualités : écriture $a \times b$ désignant un nombre et non pas un calcul à effectuer, mise en évidence « géométrique » de la commutativité, gestion aisée des décompositions de produits. »¹¹ En effet, en dépit de ces qualités, cette démarche est qualifiée par les auteurs de lourde et coûteuse en temps au CE1. Pour introduire la multiplication en lui donnant du sens, les auteurs privilégient des « situations de type proportionnalité dans lesquelles l'élève va pouvoir mobiliser des procédures connues, les adapter à de nouvelles contraintes et les faire évoluer. » Notons qu'aujourd'hui, comme le prescrivent les programmes de 2015, ce travail sur la proportionnalité n'est explicitement introduit qu'au cycle 3, bien que certaines situations multiplicatives proposées au cycle 2 puissent s'apparenter à des problèmes de proportionnalité.

Les documents d'accompagnement des programmes en vigueur actuellement insistent sur ce lien entre sens et technique. Les techniques posées ne se justifieraient plus par leur utilisation sociale effective dans la société, mais bien par le rôle qu'elles jouent dans la consolidation des principes du système de numération, dans la compréhension des nombres et des propriétés des opérations. La relation entre sens et technique se construit dans les deux sens : les propriétés de l'opération et des nombres permettent de justifier l'algorithme, et

¹¹ Manuel Ermel CE1, *Apprentissage numérique et résolution de problèmes*. (2001) Hatier. pages 243 et 244

l'utilisation « réfléchi » de l'algorithme permet de renforcer la maîtrise des propriétés en jeu.

12

Le calcul mental et le calcul posé au service du sens et de la compréhension

Autrefois, la maîtrise du calcul mental servait le même but que celle du calcul posé : obtenir efficacement des résultats corrects. Dans les programmes de 1909, il était précisé que « les exercices de calcul mental figureront à l'emploi du temps et ne devront pas être sacrifiés à des occupations considérées comme plus importantes ». Or, malgré la prise en charge du calcul par les machines, le calcul mental conserve une place importante dans les programmes, mais pour des raisons différentes : il ne s'agit plus d'être capable de fournir automatiquement un résultat exact, mais d'être capable de « jouer » avec les propriétés des opérations et des nombres (calcul réfléchi).

Les programmes de 2002 pour le cycle 2 font du calcul mental, sous toutes ses formes (résultats mémorisés, calcul réfléchi exact ou approché), une priorité. Pour cela, connaître les tables est primordial, afin de fournir un résultat direct (somme de 1 à 9 ou produit de 2 à 9) ou un résultat dérivé (complément et différence, facteur d'un produit ou quotient).

Le calcul réfléchi implique la mise en œuvre de procédures personnelles, adaptées à chaque calcul particulier : elles peuvent être uniquement mentales ou s'appuyer sur un écrit. L'explicitation et l'analyse, par les élèves, des raisonnements utilisés constituent un moment important de cet apprentissage.

Le travail sur le calcul approché commence au cycle 3 et doit être utilisé dans des situations où les élèves peuvent lui donner du sens.

Le calcul mental peut ensuite être vérifié par le calcul instrumenté. On insiste sur l'usage intelligent d'une calculatrice ordinaire. En effet, la généralisation de la calculatrice rend moins nécessaire la virtuosité des élèves dans les techniques opératoires (calcul posé), dont on attend seulement qu'elles permettent de renforcer la compréhension des opérations.

Les techniques opératoires usuelles sont mises en place sur des nombres d'usage courant, en s'attachant à assurer une bonne compréhension des étapes du calcul. Elles ne doivent pas faire l'objet d'une recherche de virtuosité excessive. L'apprentissage des calculs posés donne

¹² Eduscol, document d'accompagnement des nouveaux programmes de l'école primaire: *le calcul posé à l'école élémentaire*

l'opportunité de renforcer la compréhension de certaines propriétés des nombres et des opérations. Ce qu'on appelle traditionnellement le « sens des opérations » doit être au centre des préoccupations.

Les programmes soulignent notamment le lien évident avec le langage. Un lexique spécifique des mathématiques doit être employé dans les différentes situations didactiques mises en jeu. Il faut formuler oralement un raisonnement rigoureux, lire correctement une consigne d'exercice, un énoncé de problème et traiter les informations d'un document.

L'élève aura recours à des procédures expertes ou élaborera des procédures personnelles de résolution selon ses connaissances. Il doit savoir multiplier ou diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000, calculer le produit de deux entiers ou le produit d'un décimal par un entier (3 chiffres par 2 chiffres), par un calcul posé.

En juin 2006, un rapport de l'IGEN (Inspection Générale de l'Éducation Nationale) au sujet de l'enseignement des mathématiques au cycle 3 révèle que « le temps consacré au calcul mental est massivement estimé inférieur à une heure par semaine »¹³, alors que les programmes continueront d'en faire une priorité. Ils préconisent une pratique quotidienne d'au moins 15 minutes. Par ailleurs, les programmes de 2008 pour le cycle 3 (CE2, CM1 et CM2) évoquent les qualités et compétences transversales que la pratique des mathématiques permet de développer : le goût de la recherche et du raisonnement, l'imagination et les capacités d'abstraction, la rigueur et la précision.

Du CE2 au CM2, dans les quatre domaines de ces programmes de 2008, l'élève enrichit ses connaissances, acquiert de nouveaux outils, et continue d'apprendre à résoudre des problèmes. Il renforce ses compétences en calcul mental. Il acquiert de nouveaux automatismes. L'acquisition des mécanismes en mathématiques est toujours associée à une intelligence de leur signification. Les programmes mettent l'accent sur le sens. Ils insistent également sur l'idée de continuité avec la vie quotidienne et le futur scolaire de l'élève.

Dans le chapitre « Nombres et calcul », pour les nombres entiers naturels, on précise que l'élève doit connaître les relations arithmétiques entre les nombres d'usage courant : double, moitié, quadruple, quart, triple, tiers..., la notion de multiple.

¹³ Présentation de Pascal NOURRISSON, conseiller pédagogique spécialisé en EPS, académie de Blois 2, sur www.ac-orleans-tours.fr/fileadmin/user_upload/blois2/.../Calcul_mental_C3.ppt

Au sujet du calcul mental, les programmes soulignent l'importance de connaître les tables d'addition et de multiplication ainsi que l'entraînement quotidien qui doit porter sur les quatre opérations. Ceci favorise une appropriation des nombres et de leurs propriétés.

Concernant le calcul posé, la maîtrise d'une technique opératoire pour chacune des quatre opérations est indispensable.

La calculatrice fait l'objet d'une utilisation raisonnée en fonction de la complexité des calculs auxquels sont confrontés les élèves.

Quant aux programmes de 2015, ils assignent au cycle 3 (désormais CM1, CM2 et 6e) le but d'approfondir les notions mathématiques abordées au cycle 2, d'une manière générale : à en étendre le domaine d'étude, à consolider l'automatisation des techniques écrites de calcul introduites précédemment (addition, soustraction et multiplication) ainsi que les résultats et procédures de calcul mental du cycle 2, mais aussi à construire de nouvelles techniques de calcul écrites (division) et mentales, enfin à introduire des notions nouvelles comme les nombres décimaux, la proportionnalité ou l'étude de nouvelles grandeurs (aire, volume, angle notamment).

Ces programmes continuent d'insister sur l'utilisation des mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne.

Ils s'intéressent aux outils utilisés en classe, notamment grâce à l'arrivée du numérique. En complément de l'usage du papier, du crayon et de la manipulation d'objets concrets, les outils numériques sont progressivement introduits. Ainsi, les programmes évoquent l'usage de logiciels de calcul et de numération comme permettant d'approfondir les connaissances des propriétés des nombres et des opérations et comme permettant d'accroître la maîtrise de certaines techniques de calculs.

Le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté sont à construire en interaction. Ainsi, le calcul mental est mobilisé dans le calcul posé et il peut être utilisé pour fournir un ordre de grandeur avant un calcul instrumenté. Réciproquement, le calcul instrumenté peut permettre de vérifier un résultat obtenu par le calcul mental ou par le calcul posé.

Le calcul, dans toutes ses modalités, contribue à la connaissance des nombres. Ainsi, même si le calcul mental permet de produire des résultats utiles dans différents contextes de la vie quotidienne, son enseignement vise néanmoins prioritairement l'exploration des nombres et des propriétés des opérations. Il s'agit d'amener les élèves à s'adapter en adoptant la procédure la plus efficace en fonction de leurs connaissances mais aussi et surtout en fonction

des nombres et des opérations mis en jeu dans les calculs. Pour cela, il est indispensable que les élèves puissent s'appuyer sur suffisamment de faits numériques mémorisés et de modules de calcul élémentaires automatisés, ce qui va permettre aux élèves de développer des techniques de calcul réfléchi. De même, si la maîtrise des techniques opératoires écrites permet à l'élève d'obtenir un résultat de calcul, la construction de ces techniques est l'occasion de retravailler les propriétés de la numération et de rencontrer des exemples d'algorithmes complexes.

Les élèves devront connaître les multiples et diviseurs des nombres d'usage courant, les critères de divisibilité (2, 3, 4, 5, 9, 10), multiplier ou diviser par 10, par 100, par 1000 un nombre décimal, rechercher le complément à l'unité, à la dizaine, à la centaine supérieure, multiplier par 5, par 25, par 50, par 100, par 0,1, par 0,5 ... Utiliser différentes présentations pour communiquer les calculs (formulations orales, calcul posé, en ligne, en colonne, etc.) ; en lien avec la calculatrice, introduire et travailler la priorité de la multiplication sur l'addition et la soustraction ainsi que l'usage des parenthèses.

III. Observations et évolution de la problématique

III.1 Une rupture générationnelle

Une observation réalisée sur un petit échantillon de personnes d'âges et de milieux différents a permis de constater les effets de ce changement de paradigme. Les observations de difficultés d'élèves de CM2 ont constitué le point de départ de nos interrogations. Il nous a semblé intéressant d'observer, chez des personnes d'âges différents, quelles pouvaient être les constantes et les variations dans ces difficultés, et de mettre en relation ces variations avec l'évolution de l'enseignement.

Des personnes âgées aujourd'hui de 50 à 90 ans, efficaces durant leurs scolarités et leurs études, semblent avoir conservé un souvenir exact de l'algorithme appris à l'école. De plus, elles parviennent sans peine à expliquer pourquoi cet algorithme fonctionne (calculs intermédiaires, ajout d'un zéro ou d'un point au passage à l'unité de numération supérieure...). Le sens des calculs intermédiaires est explicité. Il en va autrement de collégiens actuels (en cycle 4, classe de 3e), pourtant scolairement efficaces. Ces élèves ne parviennent pas à remobiliser les automatismes qui étaient pourtant acquis en cycle 3. Ils oublient par exemple le zéro du passage à l'unité de numération supérieure et ne retrouvent pas le sens des calculs intermédiaires.

On constate cependant que quelle que soit la génération, la multiplication est conçue comme une addition itérée. Sur notre échantillon, les deux seules personnes ayant défini la multiplication comme le produit cartésien est un enseignant-chercheur en physique nucléaire féru de mathématiques et un technico-commercial, sans diplôme, de 57 ans qui a toujours été à l'aise avec les mathématiques.

III.2 Des élèves de cycle 3 aujourd'hui

Nous avons mis la focale sur le lien entre calcul réfléchi et multiplication posée suite à l'observation d'une élève de CM2 présentant de grandes difficultés en mathématiques d'une manière générale. Lorsque l'on demandait à cette élève de poser le produit d'un nombre à deux chiffres ou plus par un autre nombre à deux chiffres ou plus, elle effectuait bien le premier calcul intermédiaire mais ne comprenait pas la nécessité de passer à la dizaine et à la centaine. Ces questions se sont alors posées : comment aider un élève «en panne» sur l'algorithme ? Est-ce que mettre du sens sur le mécanisme peut constituer une aide ?

Dans le cas de cette élève, comment faire comprendre que, par exemple, calculer 345×3 ne revient pas à calculer 345×433 ? S'ensuit une réflexion sur le lien entre multiplication posée et calcul réfléchi, dans la mesure où l'algorithme de la multiplication posée peut être considéré comme une façon de présenter un calcul «réfléchi» qui fait intervenir notamment la propriété de distributivité.

Il a été observé dans le cadre de la pratique de classe, chez ces élèves de cycle 3 (une classe à double cours, d'un effectif de 8 CM1 et de 15 CM2), que la connaissance des propriétés de la multiplication est encore fragile. L'apprentissage du calcul réfléchi et les techniques de décomposition des nombres permettent de travailler ces propriétés, puis ensuite de les réinvestir sur d'autres nombres ou d'autres produits d'entiers naturels. Cependant, ne travaillant que sur des nombres définis (et pas de nombres abstraits, représentés par des symboles littéraux comme au cycle 4), et malgré la multiplication des exemples et des occasions de transférer les techniques d'un calcul à l'autre, nous remarquons une difficulté à abstraire ces propriétés, ou à associer ces techniques à des propriétés de l'opération. L'enseignante a ainsi été amenée à se demander si les propriétés de la multiplication employées en calcul réfléchi sont pas considérées par les élèves uniquement comme des propriétés des nombres, et pas comme des propriétés de l'opération.

Les observations suivantes ont été faites dans le cadre d'une séquence menée avec les huit élèves de CM1 de la classe mentionnée plus haut. Il s'agissait de leur première séquence de

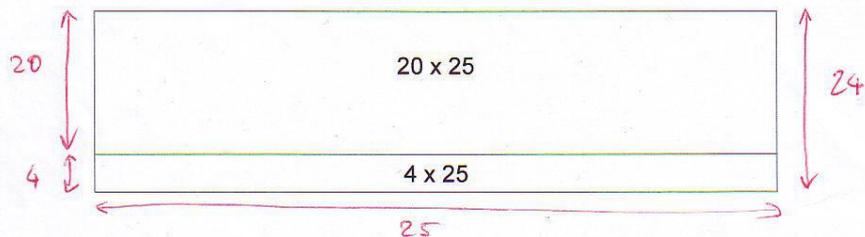
l'année portant sur la multiplication posée. Précédemment, la multiplication avait été travaillée avec eux sous l'angle de ses significations (reconnaissance de problèmes multiplicatifs), puis multiplication par 10, 100 ; objets disposés en rectangle ; calcul réfléchi (travail des propriétés) et notion de multiple, ainsi que le prévoit la programmation de Cap Maths CM1.

Exemple : **24 x 25**

→ **Tu peux décomposer 24 de deux manières.**

1 – En somme : $24 = 20 + 4$

Donc, $24 \times 25 = 20 \times 25 + 4 \times 25$



Tu connais 20×25 et 4×25 .

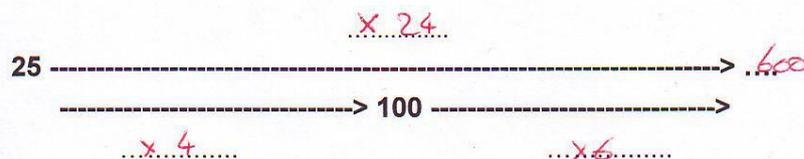
En effet, voici des résultats que tu dois connaître par cœur :

$25 \times 2 = 50$ **$25 \times 4 = 100$**

Ainsi, $24 \times 25 = 500 + 100 = 600$

2 – En produit : $24 = 4 \times 6$

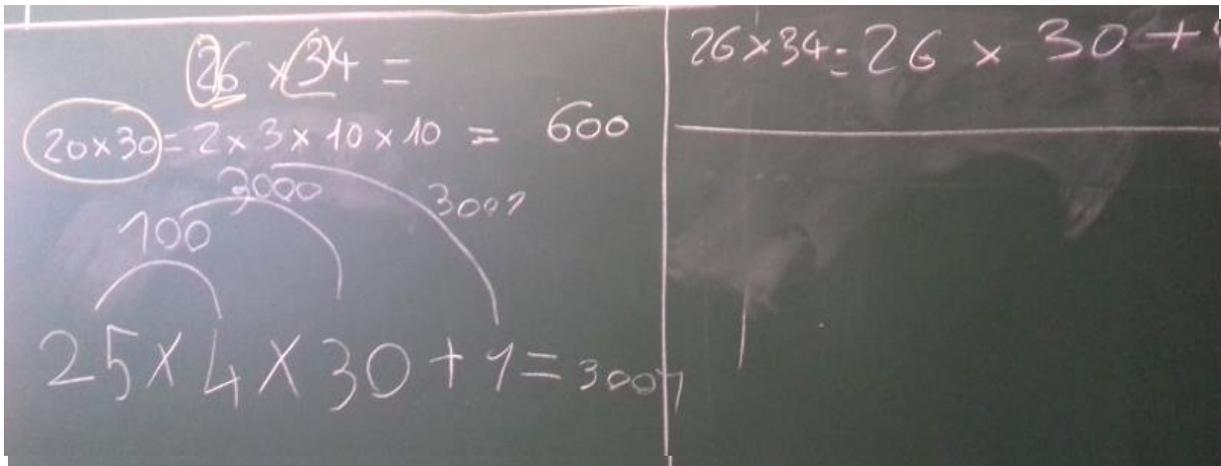
Donc, $24 \times 25 = 4 \times 6 \times 25$



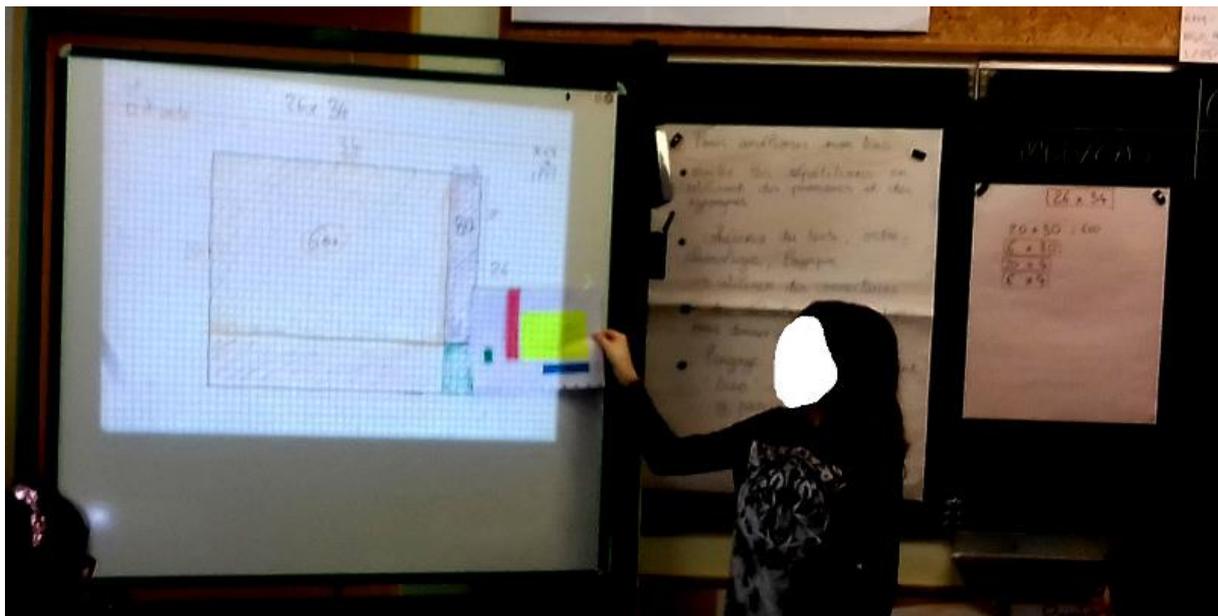
Extrait de la trace écrite de la première séquence sur le calcul réfléchi

La première séance a consisté en un rappel sur le calcul réfléchi afin de pouvoir aborder la multiplication posée sous un angle qui mette en lumière les propriétés de l'opération et qui donne du sens à l'algorithme. Ce rappel a fait intervenir la représentation rectangulaire d'un produit de deux nombres à deux chiffres : 26×34 . Ce produit a été décomposé en sous-produits, obtenus par décomposition additive des termes (20×30 , 3×30 , 20×4 et 6×4), puis utilisation de la propriété de distributivité. Les élèves ont donc tracé un rectangle subdivisé en petits rectangles correspondant à ces sous-produits.

Avant de passer à cette représentation rectangulaire, les élèves ont proposé, sans supports visuels, une méthode de calcul réfléchi pour ce produit. L'élève qui est passé au tableau a proposé une décomposition erronée de ces nombres.



Pour remédier à ces propositions erronées, l'enseignante a proposé aux élèves quatre produits intermédiaires, permettant de calculer 26×34 . Les élèves devaient trouver comment « combiner » ces produits pour obtenir le résultat du premier produit. On peut noter que ces représentations rectangulaires permettent de travailler autant le sens de la multiplication que ses propriétés. Cependant, malgré les situations de découverte faisant appel à des cas concrets induisant des représentations rectangulaires (rangées de fauteuils dans un autobus, rangées de choux dans un potager...), le passage d'une conception de la multiplication comme addition itérée au produit cartésien reste difficile.

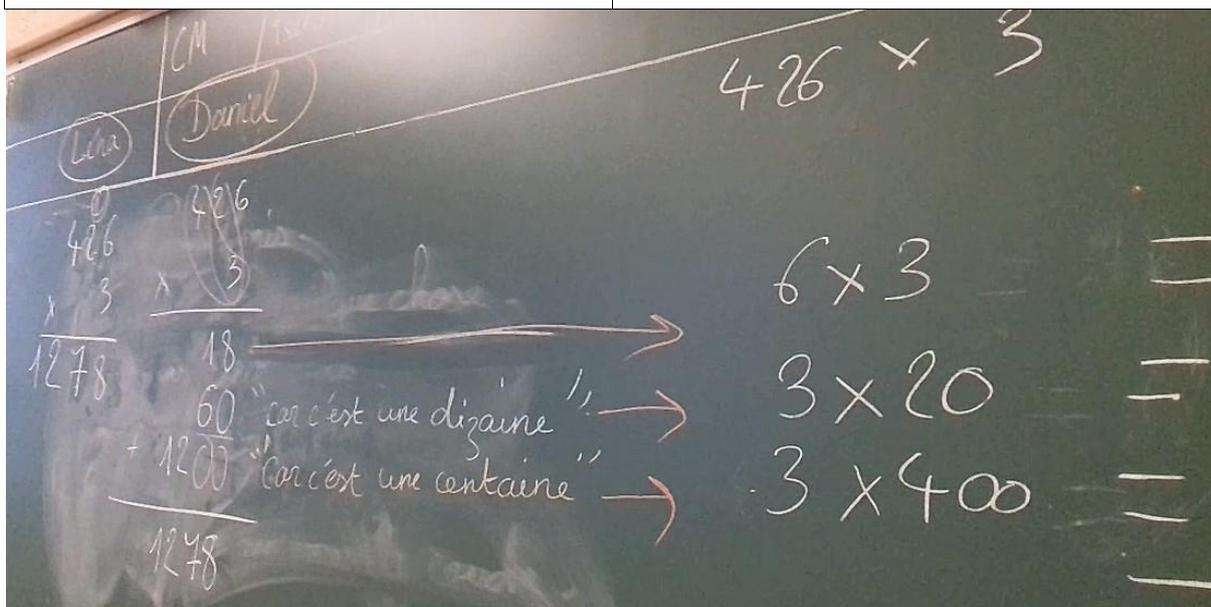


Sur le tableau blanc, quadrillage projeté et représentation des sous-produits et du produit total. À droite, sur le tableau noir, est aimantée la petite affiche où sont écrits les quatre sous-produits. Chaque sous-produit est encadré d'une couleur qui est utilisée pour colorier le rectangle correspondant. Le but de l'enseignante, pour la deuxième séance, est d'amener les élèves à transposer les compétences développées en calcul réfléchi à la multiplication posée, pour faire comprendre pourquoi cet algorithme usuel fonctionne.

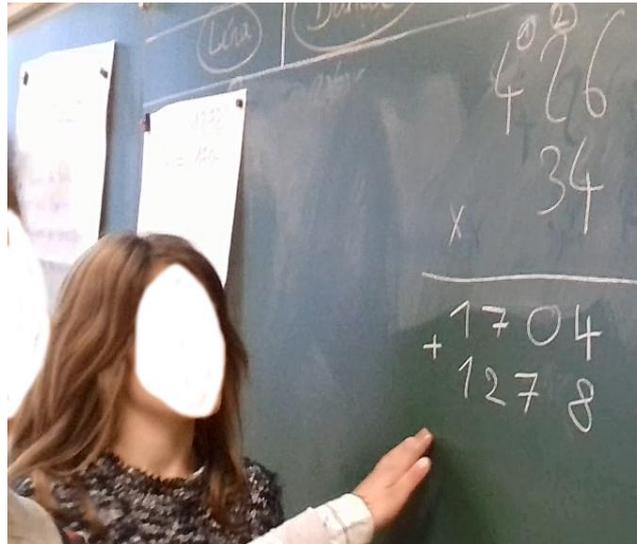
Il est proposé aux élèves de calculer d'abord 426×4 et 426×3 (phase 1). Ces résultats sont notés sur une affiche. Ensuite, ils doivent calculer 426×34 en utilisant les résultats précédents (phase 2). Enfin, ils doivent poser le produit 426×334 (phase 3).

Lors de la phase 1, deux méthodes principales sont observées : l'une consistant à poser l'opération mais à produire le résultat sans calcul intermédiaire, l'autre consistant à décomposer le premier terme pour obtenir trois résultats intermédiaires additionnés ensuite.

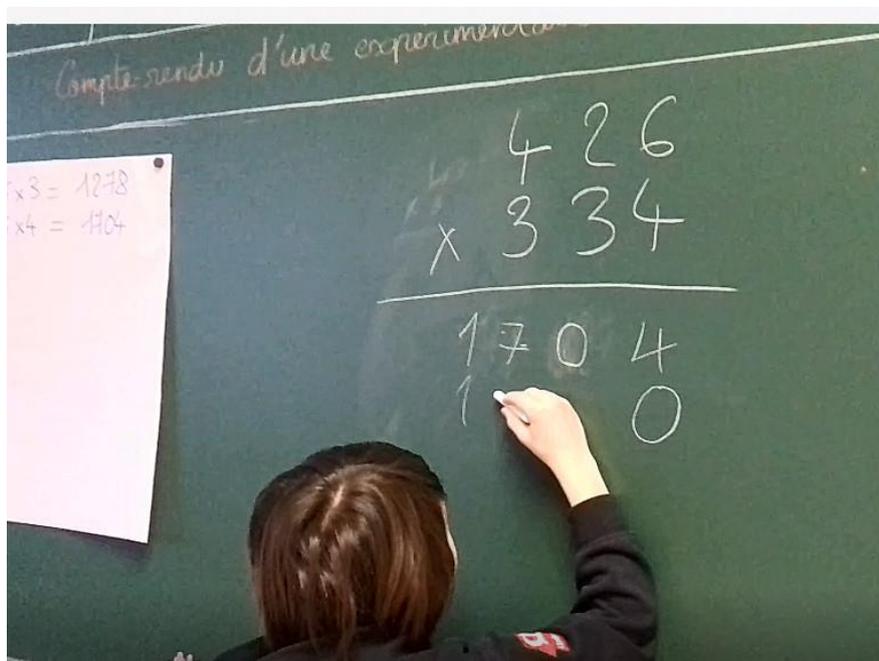
Méthode 1 (condensée)	Méthode 2 (développée)
$\begin{array}{r} 426 \\ \times 4 \\ \hline 1704 \end{array}$	$\begin{array}{r} 426 \\ \times 4 \\ \hline 24 \\ + 80 \\ + 1600 \\ \hline 1704 \end{array}$



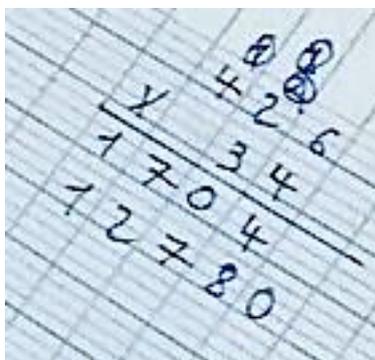
Confrontation des deux méthodes au tableau. Pour la méthode développée, les calculs correspondant aux résultats intermédiaires ont été notés. En phase 2, une élève passe au tableau pour effectuer le calcul. Lorsqu'elle passe à la dizaine, elle n'utilise pas le résultat affiché. Elle le recalcule. Mais surtout, elle oublie le 0 de la dizaine. Peut-être l'affiche l'a-t-elle induit en erreur, car elle pense effectivement calculer 3×426 et pas 30×426 .



L'élève qui passe au tableau pour calculer le produit total, 426×334 utilise les résultats de l'affiche et les reporte. Avant de reporter 3×334 , il écrit bien le zéro du passage à la dizaine mais lorsqu'il doit reporter le résultat, il aligne le premier chiffre du deuxième résultat intermédiaire avec le premier chiffre du premier résultat intermédiaire. Le fait même de devoir reporter un nombre induit cette erreur ergonomique puisque l'élève écrit le nombre comme il est d'usage de la faire : de gauche à droite. L'alignement des premiers chiffres se fait spontanément par l'élève. L'écriture correcte de gauche à droite serait facilitée par l'emploi d'un quadrillage, ou du moins de colonnes éventuellement notées comme unités, dizaines, centaines, etc.



Leur donner un résultat à reporter dans ce contexte les oblige, pour que l'alignement soit correct, soit à anticiper la place du premier chiffre, soit à écrire le nombre de droite à gauche. Notons que cette écriture de droite à gauche est induite directement par la réalisation de l'algorithme.



Lors de la phase de recherche individuelle, une élève avait commis une erreur similaire. Elle avait manifestement bien identifié les résultats à reporter. Elle avait d'abord écrit une partie du deuxième résultat intermédiaire, "780", mais décalé d'un cran vers la droite (le 0 des unités de retrouvant à droite de la colonne préétablie pour les unités). On peut supposer que cette élève avait commencé à reporter le résultat de 426×3 , en oubliant le 0 de

l'opération qui devait réellement être effectuée (426×30). Se rendant compte de son oubli, elle a certainement écrit le 0 à droite mais sans songer à la nécessité de réaligner les unités de numération ensemble. Ces observations nous ont conduites à élaborer un protocole en deux phases qui reprend les valeurs numériques de cette situation. Cependant, les résultats donnés préalablement, et à réutiliser ensuite, sont différents. En effet, nous voulions observer comment cela influencerait la démarche de l'élève.

IV. Description du protocole

IV.1 Description du protocole en situation

Le but de notre protocole est d'observer dans quelle mesure les élève de cycle 3 (CM1 en l'occurrence) comprennent le sens des calculs intermédiaires de l'algorithme et, ainsi, de comprendre dans quelle mesure l'automatisation de l'algorithme pourrait laisser la place à une approche plus réfléchie de la technique.

Nous avons demandé à deux élèves de CM1 (hors contexte scolaire) de réaliser le calcul posé du produit 436×334 , en colonnes. Dans un premier temps, sur une première feuille, les deux élèves devaient réaliser le calcul sans autre appui que le produit déjà présenté en colonnes. Dans un second temps, sur une autre feuille, elles devaient réaliser de nouveau ce calcul, mais en utilisant une liste de produits qui correspondaient aux trois calculs intermédiaires :

$$436 \times 4 = 1744$$

$$436 \times 30 = 13\ 080$$

$$436 \times 300 = 130\ 800$$

Les trois calculs ont été écrits au préalable sur la feuille, et dans cet ordre. Elles devaient barrer les calculs utilisés, au fur et à mesure. La feuille du premier calcul n'était alors plus visible.

Les enfants travaillaient à deux et pouvaient se parler, recommencer le calcul si besoin. Elles disposaient d'un seul stylo pour deux, non effaçable.

IV.2 Analyse a priori

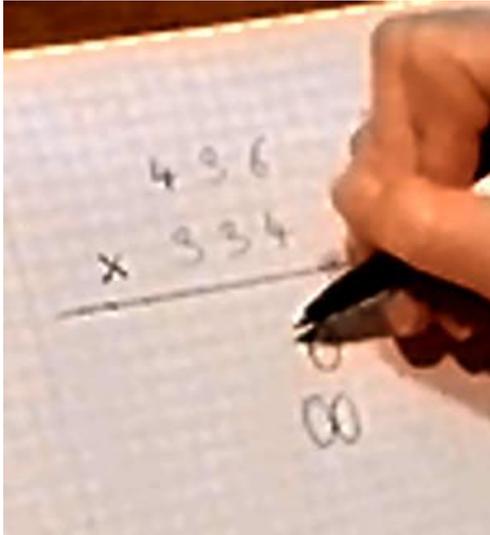
Au vu de ce qui a été observé en classe, nous imaginions que les calculs intermédiaires donnés faciliteraient grandement la tâche, dans la mesure où ces calculs correspondent exactement aux calculs intermédiaires et sont donnés dans l'ordre. Cependant, une automatisation vidée de son sens, couplée à une habitude de mettre des points au lieu des zéros, aurait pu engendrer une difficulté chez les élèves à reconnaître des calculs de cette liste. De plus, une mauvaise compréhension de ces calculs aurait pu conduire à une erreur encore non observée : des zéros surnuméraires. Par exemple, l'élève choisit le calcul $436 \times 30 = 13\ 080$ au passage à la dizaine, mais par automatisme il place tout de même le zéro, créant un décalage erroné.

IV.3 Restitution de l'activité des élèves

Phase 1

Les enfants ont pour seule consigne de calculer le produit déjà posé en colonne sur la feuille qui leur est donnée.

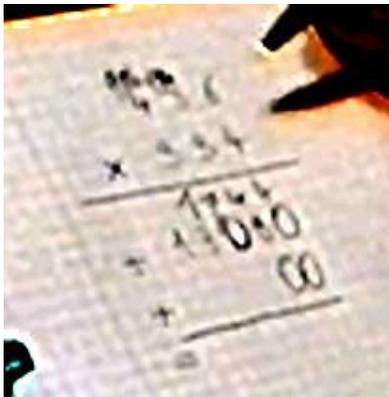
Photographies originales	Reconstitution
--------------------------	----------------



$$\begin{array}{r}
 436 \\
 \times 334 \\
 \hline
 0 \\
 00
 \end{array}$$

Description de l'activité des élèves illustrée ci-dessus :

Lila dicte les calculs à Fanny qui acquiesce. Elle écrit en même temps. Elle “pose” en premier les zéros des calculs intermédiaires correspondant au passage à la dizaine et à la centaine.



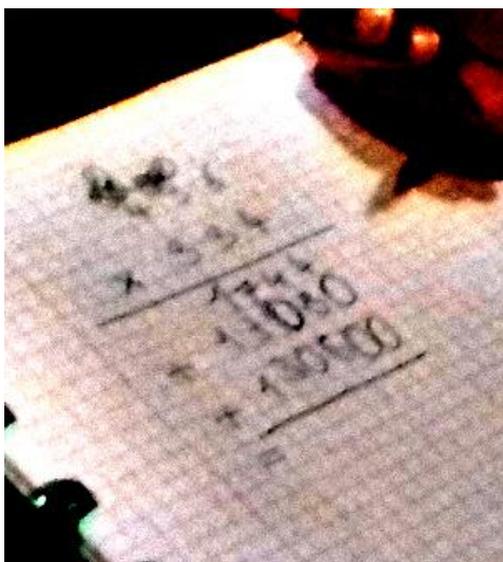
$$\begin{array}{r}
 436 \\
 \times 334 \\
 \hline
 1744 \\
 + 13080 \\
 + \quad 00 \\
 \hline
 =
 \end{array}$$

Elle effectue le premier calcul (4×436) et elle pose les retenues au-dessus et les entoure.

Hésitation sur la prise en compte de la retenue, concertation inaudible des 2 enfants, elles écrivent finalement le bon résultat.

On peut dire que le deuxième calcul intermédiaire ne pose pas de problème

Avant de passer au troisième calcul, elles écrivent les 2 signes +, et tracent la barre entre l'opération et le futur résultat, et lui surajoutent un signe =.



(retenues)

$$\begin{array}{r}
 436 \\
 \times 334 \\
 \hline
 1744 \\
 + 13080 \\
 + 130800 \\
 \hline
 =
 \end{array}$$

Lorsqu'elles passent au troisième calcul, les zéros étant mal alignés avec les dizaines et les unités (zéros trop rapprochés), elles se trompent dans l'alignement des unités de numération par un effet de cumul. Finalement, les deux premiers chiffres (1 et 3) des deux derniers résultats intermédiaires se retrouvent alignés.

$$\begin{array}{r}
 436 \\
 \times 334 \\
 \hline
 1744 \\
 + 13080 \\
 + 130800 \\
 \hline
 = 804
 \end{array}$$

Description de l'activité des élèves illustrée ci-dessus :

Lors de l'addition finale, elles ne savent pas quels chiffres prendre en compte en raison de leur mauvais alignement.

Elles barrent tout d'abord le 8 des centaines du troisième résultat. Mais elles transforment ensuite en zéro, certainement pour le faire correspondre au résultat au-dessus.

Elles transforment en huit le 0 des dizaines, toujours en se calquant sur le résultat précédent. Elles barrent une nouvelle fois le chiffre des centaines, pour indiquer finalement qu'il ne doit pas être pris en compte, puisqu'un autre le précède qui figure en trop par rapport au résultat du dessus.

Elles disent « On s'est complètement trompées » et elles suppriment un zéro qui se trouve entre 2 colonnes.

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{4} \\
 436 \\
 \times 334 \\
 \hline
 1744 \\
 + 13080 \\
 + 13080 \\
 \hline
 = 804
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{7} \\
 1744 \\
 + 13080 \\
 + 13080 \\
 \hline
 = 27904
 \end{array}$$

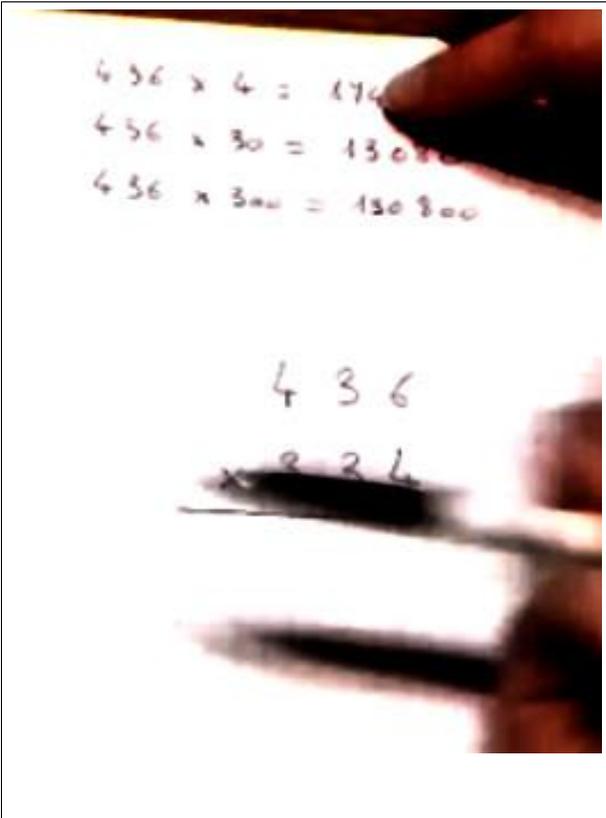
Description de l'activité des élèves illustrée ci-dessus :

Intervention de l'adulte qui suggère de réécrire l'addition à côté en supprimant les termes barrés.

Lorsqu'elles réécrivent l'addition, elles alignent parfaitement deux résultats identiques : ceux des produits 3×436 , ce qui corrobore l'idée qu'elle ont corrigé le troisième résultat en prenant modèle sur le deuxième.

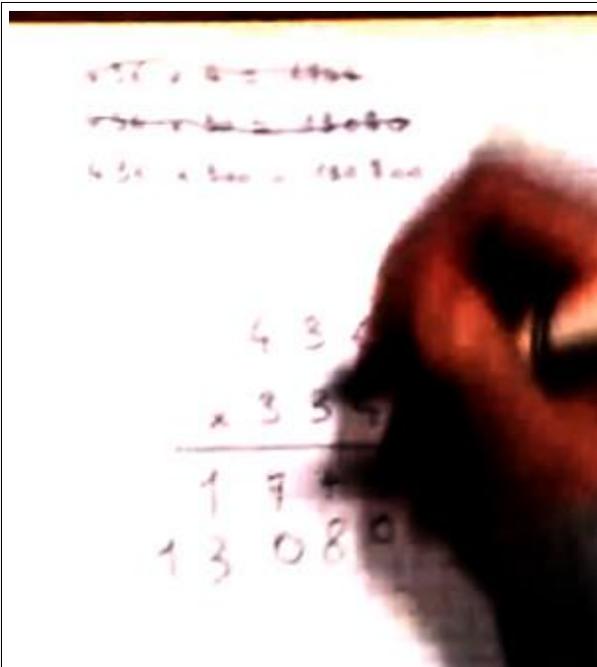
Phase 2

L'adulte écrit et énonce en même temps, devant les enfants, les trois calculs intermédiaires, dans l'ordre. Il est demandé aux enfants d'utiliser tous les calculs et de les barrer une fois utilisés, au fur et à mesure.

	$436 \times 4 = 1744$ $436 \times 30 = 13080$ $136 \times 300 = 130800$ $\begin{array}{r} 436 \\ \times 334 \\ \hline \end{array}$
--	---

Description de l'activité des élèves illustrée ci-dessus :

Fanny prend le stylo et Lila établit la correspondance entre le 4 du premier produit de la liste et le 4 de 334 dans l'opération posée. «T'as compris? Parce que ça, c'est le 4 d'ici [elle montre le 4 du premier donné et le 4 (unité) dans l'opération posée], t'es d'accord?»



$$436 \times 4 = 1744$$

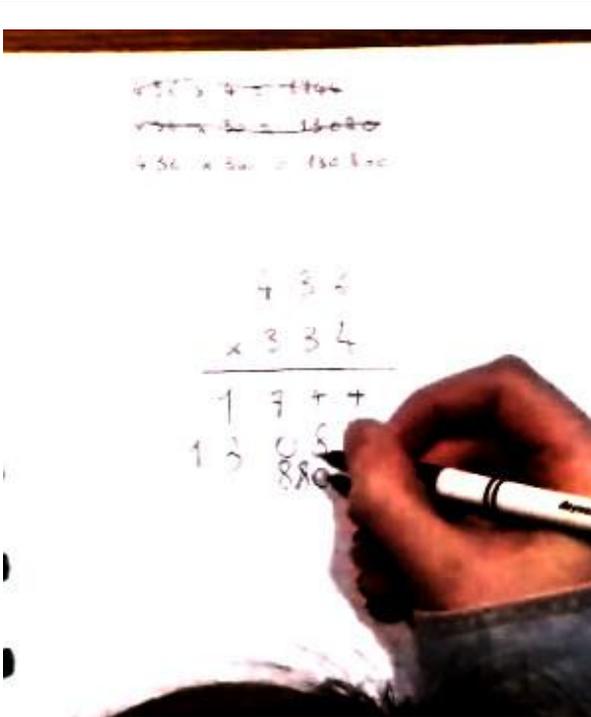
$$436 \times 30 = 13080$$

$$136 \times 300 = 130\ 800$$

$$\begin{array}{r}
 436 \\
 \times 334 \\
 \hline
 1744 \\
 + 13080 \\
 \hline
 \end{array}$$

Fanny utilise le premier résultat de la liste et le reporte correctement. Elle l'écrit de droite à gauche, et aligne correctement les unités de numération. Elle barre le résultat.

Lila intervient de nouveau: « Après, c'est celui-là [30 x 436], ça fait 30 parce que c'est 3 et on remplace le 4 parce qu'on a déjà calculé. » Fanny reporte de nouveau correctement le résultat de ce calcul intermédiaire, et l'écrit encore de droite à gauche. Elle barre le résultat.



$$436 \times 4 = 1744$$

$$436 \times 30 = 13080$$

$$136 \times 300 = 130\ 800$$

$$\begin{array}{r}
 436 \\
 \times 334 \\
 \hline
 1744 \\
 + 13080 \\
 + \quad 8800 \\
 \hline
 =
 \end{array}$$

Description de l'activité des élèves illustrée précédemment :

Lila justifie l'utilisation du dernier calcul : « Et après, c'est celle-là [montrant le troisième produit de la liste], parce que là, 300, [elle montre encore le calcul en ligne] c'est le 3 d'ici [chiffre des centaines de 334]; et puisque ça [le 3 des dizaines des unités sur le calcul en ligne de la liste], on a déjà calculé, c'est deux zéros. »

Lors du report du résultat, Fanny se trompe dans l'alignement en arrivant au 8 des centaines. L'erreur est toutefois corrigée immédiatement: le 8 est barré et réécrit sous les centaines.

$$\begin{aligned} \cancel{436} \times 4 &= \cancel{1744} \\ \cancel{436} \times 30 &= \cancel{13080} \\ 436 \times 300 &= 130800 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 436 \\ \times 334 \\ \hline \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \\ \cancel{1} \quad 7 \quad 4 \quad 4 \\ + 1 \quad 3 \quad 0 \quad 8 \quad 0 \\ + 1 \quad 3 \quad 0 \quad 8 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 1 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 2 \quad 4 \end{array}$$

$$436 \times 4 = 1744$$

$$436 \times 30 = 13080$$

$$136 \times 300 = 130800$$

$$\begin{array}{r} 436 \\ \times 334 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1744 \\ + 13080 \\ + 130800 \\ \hline \end{array}$$

$$= 145624$$

La fin de l'opération est effectuée sans difficulté.

Phase 3: débriefing

L'adulte montre aux deux enfants les deux feuilles, côte à côte. On constate que les résultats sont différents. Lila se rend compte de l'erreur commise lors de la phase 1 : « Ah oui, parce que là, on n'a pas mis les deux zéros, du coup. [en montrant le zéro « unique » du troisième résultat intermédiaire de la première phase] »

Lila et Fanny répondent affirmativement quand on leur demande si c'est leur maîtresse qui leur a appris à placer les zéros dès le début.

V. Analyse des résultats

V.1 Phase 1

Les zéros étant posés dès le début (le 0 du passage à la dizaine et les deux zéros du passage à la centaine), elles ne s'en préoccupent plus par la suite. Aussi lorsqu'il s'agit de réaligner les chiffres pour effectuer l'addition, ça ne leur pose pas de problème de remplacer un des deux zéros du troisième résultat par le même 8 que le résultat précédent. Les deux derniers résultats intermédiaires sont identiques : cela doit leur paraître juste, puisque dans les deux cas, elles ont calculé « 3×436 », et non « 30×436 » et « 300×436 ». En effet, les zéros ayant été évacués d'une manière décrochée de ces calculs intermédiaires, les enfants n'y reviennent plus.

On peut supposer que si les zéros n'avaient pas été posés avant, l'erreur aurait pu être évitée.

V.2 Phase 2

Aucune difficulté majeure n'est apparue : Lila, qui guidait sa camarade, a bien fait le lien entre les calculs de la liste et les calculs intermédiaires de l'opération posée.

La façon de Lila de mettre en relation le 3 des dizaines et ensuite des centaines entre 30 et 334, puis entre 300 et 334, indique qu'elle a décomposé mentalement 334 en $300 + 30 + 4$. Ainsi, le sens des calculs intermédiaires a été reconnu alors qu'il semblait qu'il avait été perdu de vue lors de la phase 1. On peut supposer que le fait de devoir sélectionner des résultats donnés préalablement oblige à se concentrer sur le sens des calculs.

Ainsi, d'une manière globale, il apparaît qu'au moins Lila, qui guidait beaucoup sa camarade, est bien passée d'une application mécanique et automatisée de l'algorithme à une vision plus réfléchie de la technique opératoire. En effet, si la pose préalable des zéros puis la réalisation des premiers calculs semblent indiquer une plutôt bonne automatisation de la technique, l'erreur commise ensuite semble traduire une perte de vue du sens. Cette perte de vue s'est avérée réversible, puisque Lila a ensuite parfaitement établi le lien entre les calculs de la liste et les résultats intermédiaires.

Un élément semble montrer toutefois une certaine fragilité dans la mémorisation de la technique, malgré sa réalisation finalement efficace : l'automatisation a pu être perturbée par les carreaux inhabituels, ou la façon dont l'adulte a placé les termes de la multiplication (c'est-à-dire sans prendre le soin de les placer dans des colonnes matérialisées par des lignes ; en

effet, les chiffres sont placés sur des lignes, et non pas entre les lignes. Cette présentation est probablement inhabituelle pour les élèves).

VI. Discussion, limites du dispositif et prolongements

Au préalable, nous nous étions demandé sous quelle forme fournir le produit. Fallait-il le dicter ? Ou le donner déjà écrit en ligne ? Cela aurait permis d'observer la manière dont les élèves posent l'opération. On peut supposer que compte tenu de leur compétence et du fait que les deux nombres contenaient trois chiffres, l'alignement n'aurait pas posé problème.

Une autre question s'est posée pour la deuxième phase : comment présenter les calculs intermédiaires, et lesquels fournir ? Fallait-il laisser trouver le produit par les multiples de 10 et 100 en ne donnant que 436×3 et 436×4 ? Si tel avait été le cas, les deux enfants auraient peut-être commis la même erreur que l'élève de CM1 observée en classe. Ainsi, la signification de ces calculs intermédiaires n'aurait peut-être pas été rétablie, et l'erreur de la phase 1 n'aurait pas été comprise et rectifiée en phase 2.

On aurait également pu fournir une liste désordonnée de ces calculs intermédiaires, afin de renforcer l'obligation de faire appel au sens, tout en déchargeant les enfants du travail de calcul des résultats.

Il aurait aussi été intéressant d'observer la différence de traitement entre les calculs intermédiaires donnés sous la forme « 436×30 » comme nous l'avons fait, ou sous la forme commutée « 30×436 ». En effet, la réalisation de l'algorithme implique de « lire » le produit intermédiaire comme étant « 30×436 », alors qu'une lecture dans le sens où sont écrits les termes du calcul posé « 436×334 » impliquerait plutôt de lire « 436×30 ».

Les enfants ont écrit au stylo non effaçable, ce qui a influencé l'exécution de l'algorithme de la phase 1. Proposer d'écrire au crayon effaçable aurait induit la possibilité de recommencer le calcul au moment où l'erreur a été repérée.

Nous avons noté qu'un enfant guidait l'autre. Compte tenu de la différence de niveau entre ces deux élèves, peut-être aurait-il été plus fructueux de faire comparer les calculs réalisés séparément, du moins pour la première phase.

De plus, il aurait été intéressant, lors du débriefing, de leur demander pourquoi la méthode qui consiste à poser un ou deux zéros sur les lignes intermédiaires avant d'effectuer les produits fonctionne.

Très justement, lors de la phase 2, les enfants n'ont pas posé les zéros. On peut faire l'hypothèse que Lila avait déjà compris que ces 0 étaient intégrés aux résultats déjà donnés dans la liste. Que ces zéros fussent posés ou non, les enfants auraient pu commettre la même erreur que l'élève de CM1 observé au tableau : aligner les premiers chiffres des résultats intermédiaires entre eux. Or, l'écueil a été évité car Fanny a reporté les nombres en les écrivant de droite à gauche, en alignant correctement chaque unité de numération. Cela peut probablement traduire la compréhension de la nécessité d'aligner les unités correspondantes afin d'effectuer l'addition.

VII. Conclusion

Cette expérimentation a permis de montrer, dans une certaine mesure, comment des élèves de cycle 3 pouvaient passer d'une réalisation automatique de l'algorithme appris en classe à une approche plus réfléchie, faisant appel au sens des calculs intermédiaires. Par là même, on peut entrevoir la façon dont calcul réfléchi et calcul posé entretiennent potentiellement une relation réciproque et spiralaire. En effet, la dynamique de l'enseignement « signifiant » de la multiplication posée, partant du calcul réfléchi (décomposition des termes représentée sous forme de rectangles découpés) pour aller vers l'algorithme usuel – mouvement préconisé par Ermel dans les années 70 et avec encore plus de force à partir de 1978 – est toujours d'usage aujourd'hui. Ce mouvement peut être effectué en sens inverse afin de creuser le sillon de la mémoire et de la compréhension, ou de restaurer un sens qui a pu être perdu : repartir de la multiplication posée, la décortiquer pour revenir au calcul réfléchi.

Parallèlement à cette expérimentation, l'observation et la pratique en classe ont permis de constater l'importance de nouer, d'une manière plus vaste, une interaction forte entre étude des multiples, décompositions des nombres, travail en grandeurs et mesures sur les aires égales, doubles, triples ou moitié de surfaces rectangulaires, etc. Les programmes prescrivent de telles interactions. L'importance de l'automatisation et des habitudes ne doit pas être niée, mais elles ne doivent pas faire perdre de vue le sens des opérations. Il s'agit en effet de notre prérogative humaine, celle que l'on ne peut déléguer aux machines : notre capacité à faire du lien, à contrôler la signification de nos calculs. La pratique du calcul réfléchi, tissée avec les autres types de calculs, permet de maintenir ce cap. Automatisation et réflexion peuvent se nourrir mutuellement au lieu de s'exclure, tout comme les résultats enregistrés et les procédures automatisées peuvent permettre de poursuivre plus avant la réflexion en calculs, en allégeant une partie de la tâche. Il est besoin de déléguer ou d'automatiser les tâches

simples pour permettre d'accéder aux tâches complexes, mais il semble que dans le champ des mathématiques, si le sens des tâches simples est perdu, alors l'édifice s'effondre et l'accès aux tâches complexes est compromis.

Ce travail sur le sens est primordial tant d'un point de vue disciplinaire que d'un point de vue transversal. Sur le plan disciplinaire, les élèves doivent conserver le sens des savoirs mathématiques acquis afin d'être en mesure de transférer leurs compétences en calculs à mesure que s'étend le champ des nombres sur lequel ils travaillent : nombres entiers, puis nombres décimaux au cycle 3, nombres rationnels au cycle 4, puis nombres réels et complexes quand ils poursuivront leurs études.

Le travail mené en numération, mêlant consolidation constante de la notion de quantité et des principes de notre système, est sans cesse réinvesti dans les autres domaines : calculs (calcul mental, écrit ou posé ; automatisé ou réfléchi), résolution de problèmes (en lien fort également avec les calculs, particulièrement pour le travail sur le sens des opérations et sur leurs propriétés), grandeurs et mesures (notion de quantité, conversion). Ce travail de mise en relation constante et de consolidation réciproque commence en maternelle et se poursuit au-delà de l'école élémentaire : les programmes actuels du cycle 4 stipulent que « l'extension des procédures de calcul (addition, soustraction, multiplication, division) aux nombres rationnels et l'introduction du calcul littéral doivent s'appuyer sur des situations permettant de construire le sens des nombres et des opérations. »

Cette quête de la compréhension concerne l'ensemble des disciplines et, surtout, au-delà des disciplines, elle poursuit le but de faire de l'élève un citoyen éclairé et intelligent. Les disciplines se mettent au service du socle commun, qui vise à donner à l'élève les outils pour devenir plus qu'un simple exécutant ou un simple agent : l'acteur de ses apprentissages, de sa propre construction, de sa propre vie. C'est pourquoi le développement de l'esprit de recherche est cher aux programmes de 2015. Dans un monde de surconsommation et de googlisation où tout est disponible tout de suite, il convient d'insister sur l'idée que le chemin parcouru et le raisonnement valent mieux qu'un résultat qui tombe directement du ciel, d'internet (notamment des fake news, des théories du complot ou rétrogrades), ou bien d'une idée qui vient automatiquement à l'esprit sans que l'on en comprenne le sens (et qui peut se révéler un préjugé délétère ou une représentation sans fondement rationnel). Les mathématiques contribuent ainsi à préserver et à cultiver ces qualités précieuses, primordiales dans la construction de l'intelligence des élèves, mais souvent malmenées par leur environnement immédiat : la ténacité, la persévérance. Il s'agit de qualités rendues indispensables dans un

monde en mutation rapide, dont les enjeux transitionnels actuels s'imposeront, demain, avec une force incoercible.

VIII. Références

Guy BROUSSEAU. (1973). Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels ?
EPI pp. 361-378

S. CLIVAZ & M. DERUAZ. (2013). « Des mathématiques à leur enseignement : l'algorithme de la multiplication », *Grand N* n° 92. p. 15 à 33

Roland CHARNAY. (1993-1994.) Une calculatrice pour tous dès l'école primaire... ou quelles compétences en calcul aujourd'hui ? *Grand N* n° 53. p. 59 à 61,

Manuel Ermel pour le niveau CE1, *Apprentissage numérique et résolution de problèmes*. (2001). Hatier.

Eduscol, document d'accompagnement des programmes de 2015 de l'école primaire : le calcul posé à l'école élémentaire

Rapport Villani-Torossian, *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*, 12 février 2018 ; 3.2. Le calcul et les automatismes

Présentation de Pascal NOURRISSON, conseiller pédagogique spécialisé en EPS, académie de Blois 2, sur www.ac-orleans-tours.fr/fileadmin/user_upload/blois2/.../Calcul_mental_C3.ppt

Le site internet de Thérèse EVEILLEAU, formatrice à l'IUFM de Caen :
http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/mult_grecque.htm

Sur la définition de la distributivité :
https://www.assistancescolaire.com/eleve/5e/maths/lexique/D-distributivite-mc_d20

IX.Résumé

L'observation de difficultés d'élèves de cycle 3 dans la réalisation de l'algorithme de la multiplication posée amène à se demander quel continuum existe entre calcul réfléchi et techniques opératoires. Dans quelle mesure les élèves de cycle 3 font-ils appel au calcul réfléchi dans la réalisation de la multiplication posée ?

Les programmes préconisent l'établissement d'un lien étroit entre apprentissage des techniques opératoires, propriétés et sens des opérations. Ce travail sur le sens et les propriétés passe par la pratique du calcul réfléchi. Instaurer des allers-retours entre technique automatisée et pratique réfléchie semble indispensable, or l'apprentissage de la multiplication posée emprunte une direction : du calcul réfléchi vers l'opération posée.

Notre protocole propose d'emprunter la direction inverse : partir d'une réalisation automatique, pour parvenir à une approche plus réfléchie en imposant de la nécessité de reconnaître les calculs intermédiaires.

L'expérimentation a permis de montrer comment des élèves de cycle 3 pouvaient passer d'une méthode automatique apprise en classe, dont le sens a été perdu de vue, à un travail faisant appel à une réflexion retrouvée sur le sens.

X.Mots-clés

Multiplication ; algorithmes ; techniques opératoires ; calcul réfléchi ; erreurs ; difficultés