



**HAL**  
open science

# Conversions de registre et apprentissage de la notion de fonction en seconde

Virginie Decraemer Lafontaine

► **To cite this version:**

Virginie Decraemer Lafontaine. Conversions de registre et apprentissage de la notion de fonction en seconde. Education. 2020. dumas-03172079

**HAL Id: dumas-03172079**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-03172079>**

Submitted on 17 Mar 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## **Année universitaire 2019-2020**

**Diplôme Universitaire**

*Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation*

*Mention Second degré*

*Parcours : Mathématiques*

# Conversions de registre et apprentissage de la notion de fonction en seconde

**Présenté par Virginie Decraemer Lafontaine**

**Écrit scientifique réflexif encadré par Marion Dieudonné**



## Table des matières

<b>Introduction</b> .....	1
<b>1 Champs théoriques</b> .....	2
<b>1.1 Les programmes</b> .....	2
<b>1.2 Les difficultés liées à la notion de fonction en seconde</b> .....	3
1.2.1 La transition troisième seconde .....	3
1.2.2 L'utilisation algébrique du signe égal .....	4
1.2.3 Le statut de la lettre .....	4
1.2.4 Obstacle épistémologique .....	5
1.2.5 Conceptualiser un objet abstrait .....	5
<b>1.3 Les registres de représentation sémiotique</b> .....	6
1.3.1 Les travaux de Raymond Duval .....	6
1.3.2 Les différents registres de représentation sémiotique d'une fonction .....	7
<b>1.4 Les conversions de registre de représentation sémiotique dans le cadre des fonctions</b> .....	8
<b>1.5. Analyse des programmes au vu des travaux de Raymond Duval</b> .....	10
<b>1.6 Formulation de la problématique</b> .....	11
<b>2 Expérimentation</b> .....	12
<b>2.1 Participants</b> .....	12
<b>2.2 Matériel et procédure</b> .....	12
2.2.1 Activité 1 .....	13
2.2.2 Activité 2 .....	15
2.2.3 Activité 3 .....	17
2.2.3.1 Exercice 1 .....	18
2.2.3.2 Exercice 2 .....	19
2.2.3.3 Exercice 3 .....	20
<b>2.3 Analyse à priori des procédures d'élèves</b> .....	21
2.3.1 Activité 1 .....	21
2.3.2 Activité 2 .....	21
2.3.3 Activité 3 .....	22
<b>3 Productions d'élèves et résultats</b> .....	23
<b>3.1 Activité 1</b> .....	23
<b>3.2 Activité 2</b> .....	25
<b>3.3 Activité 3</b> .....	28
<b>4 Discussion et conclusion</b> .....	33
<b>4.1 Interprétation des résultats</b> .....	33
<b>4.2 Pistes d'amélioration de l'expérimentation et prolongements</b> .....	37

4.3 Conclusion .....	38
<b>Bibliographie.....</b>	<b>40</b>
<b>Annexes .....</b>	<b>I</b>
<b>1 Annexe 1 : Quelques exemples de conversions de registre dans le cadre des fonctions .....</b>	<b>I</b>
<b>1.1 Passer du registre algébrique au tableau de valeurs .....</b>	<b>I</b>
<b>1.2 Passer du tableau de valeurs au registre algébrique .....</b>	<b>I</b>
<b>1.3 Passer du tableau de valeurs au registre graphique.....</b>	<b>I</b>
<b>1.4 Passer du registre graphique au tableau de valeurs.....</b>	<b>II</b>
<b>1.5 Passer du registre algébrique au registre graphique.....</b>	<b>II</b>
<b>1.6 Passer du registre graphique au registre algébrique.....</b>	<b>II</b>
<b>1.7 Passer du registre symbolique au registre algébrique.....</b>	<b>III</b>
<b>1.8 Passer du registre algorithmique au registre algébrique .....</b>	<b>III</b>
<b>2 Annexe 2 : Tracés de courbes attendus pour l'activité 1 .....</b>	<b>III</b>

## Introduction

Après avoir travaillé sur les fonctions avec mes élèves de seconde au premier trimestre, je me suis aperçue qu'il leur était difficile, voire impossible d'expliquer et donc de comprendre ce qu'était une fonction. En effet, voici les réponses que j'ai obtenues quand je leur ai demandé ce qu'était pour eux une fonction :

- C'est un calcul.
- C'est  $f(x) =$  quelque chose.
- Ce sont des droites ... non, des morceaux de droites.
- C'est une courbe.
- C'est une ligne, une courbe ou une droite, dans un repère.
- Ce sont des valeurs.
- C'est des images et des antécédents.
- C'est un graphique.
- C'est un tableau de signes.

Une élève seulement a parlé de variable.

Je me suis alors demandée comment aider les élèves à conceptualiser cette notion si importante dans l'enseignement des mathématiques au lycée. Effectivement, sa compréhension est essentielle à la poursuite d'études au lycée, aussi bien en voie générale qu'en voie technologique, car c'est une notion que les élèves rencontreront non seulement en mathématiques, mais aussi dans d'autres domaines (comme les sciences théoriques ou appliquées, ou l'économie) puisqu'ils seront amenés à étudier la dépendance entre deux grandeurs.

J'ai beaucoup échangé en début d'année avec ma collègue Dorine RENAUD dans le cadre de nos mémoires car nous nous posions cette même question de départ. Finalement, ces discussions ont nourri notre réflexion et nous avons évolué vers des problématiques différentes. En effet, suite à l'analyse des programmes au regard de mes lectures scientifiques, je me suis demandée le rôle que pouvait jouer le passage d'une représentation d'une fonction à une autre dans la conceptualisation de cette notion. Il est effectivement important, pour un enseignant de comprendre les mécanismes d'accès au concept pour ses élèves afin de les aider à y parvenir à l'aide d'un enseignement adapté. Je me suis beaucoup appuyée sur les travaux de Raymond DUVAL pour mes recherches et nous découvrirons que les documents d'accompagnement des programmes font de même. J'ai alors, comme nous le verrons, émis

une hypothèse que j'ai tenté de vérifier grâce à une expérimentation que j'ai menée au sein de ma classe.

Je vais présenter ici les points importants qui ressortent des différentes lectures scientifiques qui m'ont permis de développer une problématique. J'expliquerai ensuite comment j'ai créé mon expérimentation. Enfin, je donnerai ses résultats afin de les analyser pour valider mon hypothèse et surtout faire le point sur ce qu'elle nous apprend quant au rôle des conversions de registre dans l'accès au concept de fonction.

## 1 Champs théoriques

Dans cette première partie, nous allons présenter la place que tient l'étude des fonctions dans les programmes, les difficultés d'apprentissage qui sont liées à cette notion en classe de seconde, les différentes manières de représenter une fonction et l'importance du passage d'une représentation à une autre. Cela nous permettra ensuite d'analyser ces programmes, ainsi que leurs documents d'accompagnement, et de nous questionner sur le travail qui pourrait être mis en place auprès des élèves afin d'améliorer leur compréhension.

### 1.1 Les programmes

La découverte de la notion de fonction par les élèves s'inscrit dans un travail commencé dès l'école primaire concernant la proportionnalité. Au collège, ils traduisent cette dépendance de deux grandeurs proportionnelles par les tableaux de valeurs dès la classe de 5<sup>ème</sup> et par une formule ou un graphique dès la classe de 4<sup>ème</sup>. C'est en classe de 3<sup>ème</sup> que les termes de variable, fonction, antécédent et image sont formalisés et que les notations fonctionnelles sont utilisées :  $x \mapsto$  et  $f(x)$ . Les élèves utilisent différents modes de représentation : graphique, symbolique, tableau de valeurs et programmes de calculs et découvrent les expressions algébriques et les représentations graphiques des fonctions affines et linéaires.

La notion de fonction occupe une place importante dans le programme de mathématiques en seconde : elle constitue l'une des cinq grandes parties à étudier. Les programmes de 2019 demandent de « consolider la notion de fonction, comme exprimant la dépendance d'une variable par rapport à une autre ». Il est ainsi établi que les élèves comprennent encore très difficilement ce qu'est une fonction en début de seconde. Il est alors préconisé, pour les aider dans cette compréhension, de continuer à travailler sur les différents modes de représentation d'une fonction et notamment sur les représentations algébriques et graphiques ainsi que de faire le lien entre la courbe et le tableau de variation. Ce travail s'effectuera à travers l'étude

des propriétés des fonctions et en particulier des fonctions de référence : fonctions carré, cube, racine et inverse. L'objectif de ce programme de seconde est en effet de préparer les élèves pour leur poursuite d'étude en mathématiques au lycée général ou technologique en classe de première et de terminale et la notion de fonction y garde une place importante.

## **1.2 Les difficultés liées à la notion de fonction en seconde**

### **1.2.1 La transition troisième seconde**

*« Un manque fréquent de prise en compte de ce qui sera traité au niveau supérieur : [...] un travail plutôt technique sur les fonctions en 3<sup>ème</sup> (recherche d'image / d'antécédent) qui ne donne probablement pas à voir le caractère global de l'objet fonction ni son caractère outil, et n'assure pas aux élèves d'arriver en 2<sup>nde</sup> en ayant réellement abordé le concept de fonction, contrairement à ce que pourraient penser les enseignants de lycée. » (Chesnais,A., Grenier-Boley,N.,Horoks,J.,Robert,A.,2015)*

L'étude menée par Chesnais et al. (2015) nous montre que l'évolution des contenus à enseigner avant et après la transition troisième seconde est une source de difficultés pour les élèves, constat qui reste valable après la mise en place des nouveaux programmes de 2016 pour les collèges et 2019 pour les lycées. Pour eux, les enseignants, qui suivent les préconisations des programmes, ne préparent donc pas les élèves à de tels changements. D'une part, ces changements sont quantitatifs, avec une grande variété dans les tâches proposées qui sont moins répétitives et, on peut penser, moins automatisées qu'en troisième. D'autre part, ils sont aussi qualitatifs avec le début de la mise en place du formalisme, le passage du point de vue local à la vision globale de la fonction et de l'objet mathématique à l'outil.

La *Revue des Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques* a publié un article où Benzekry, B. et al. (2011) s'interrogent sur la possibilité pour les enseignants de seconde de s'appuyer sur les connaissances des élèves. Ils y expliquent que les élèves, arrivés en seconde, sont déstabilisés par certains outils mathématiques qu'ils pensaient maîtriser mais qui peuvent prendre des significations inhabituelles pour eux ou des significations différentes au cours d'un même exercice. De plus, cette recherche confirme qu'il est demandé alors aux élèves un haut degré de conceptualisation afin qu'une fonction ne soit pas seulement un objet mais aussi un outil de résolution de problèmes, tout cela en réutilisant toutes leurs connaissances en algèbre.



### 1.2.2 L'utilisation algébrique du signe égal

Benzekry, B. et al. (2011) précisent la difficulté liée au statut de l'égalité. Effectivement, les élèves ont l'habitude d'utiliser le signe égal en tant que déclencheur de calcul et uniquement de gauche à droite. Cependant, dans le cadre des fonctions, le signe égal peut aussi être utilisé en tant que relation d'équivalence, c'est-à-dire qu'il peut être utilisé aussi bien de gauche à droite que de droite à gauche. Prenons l'exercice suivant en exemple :

On considère la fonction  $f$  définie, pour tout réel  $x$  par :  $f(x) = 6x^2 - 2x - 4$ .

- 1) Calculer les images par  $f$  de  $1$ ,  $-\frac{3}{2}$  et  $\sqrt{2}$ .
- 2) Démontrer que, pour tout réel  $x$  on a :  $f(x) = 2(x - 1)(3x + 2)$ .
- 3) Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .

Dans la question 1, le signe égal est annonciateur d'un résultat et il est ainsi utilisé de gauche à droite :  $f(1) = 6 \times 1^2 - 2 \times 1 - 4 = 0$ . Les élèves ont l'habitude de l'utiliser de cette manière en arithmétique.

Dans la question 2, le signe égal est utilisé en tant que relation d'équivalence : les élèves lisent l'égalité de gauche à droite mais sont obligés de travailler de droite à gauche en développant l'expression donnée afin de retrouver l'expression de  $f$  donnée au départ.

### 1.2.3 Le statut de la lettre

Une autre difficulté pointée par Benzekry, B. et al. (2011) est celle du statut de la lettre. En effet, en mathématiques, une lettre peut représenter de nombreux objets : nombre, fonction, point, droite, unités... Lorsque la lettre représente un nombre, son statut n'est pas toujours le même et il peut même évoluer au sein d'un exercice. Elle peut être une indéterminée, par exemple lorsqu'on demande dans la question 2 de l'exercice précédent de montrer que  $f(x) = 2(x - 1)(3x + 2)$ . Elle peut aussi être une variable, sous-entendu réelle, lorsqu'on dit que  $f(x)$  est définie sur l'intervalle  $[-4 ; 5]$  : sa valeur varie alors continûment de -4 à 5. Elle peut être une inconnue si on demande, par exemple, de calculer le ou les antécédents de 10 par  $f$  ou de résoudre l'équation de la question 3 de l'exercice précédent. Enfin, elle peut être un paramètre lorsqu'on donne, par exemple la formule générale d'une fonction affine :  $f(x) = mx + p$ ,  $m$  et  $p$  sont des paramètres. Ces différents statuts de la lettre sont très difficiles à percevoir pour les élèves.

#### **1.2.4 Obstacle épistémologique**

Le graphique est introduit au collège en sciences physiques, sciences naturelles, histoire et géographie et la "courbe" est tracée à partir de relevés de points reliés par des segments et sert aussi à lire des informations. Mais elle ne représente pas une fonction puisqu'elle n'est qu'un moyen d'obtenir des résultats numériques (approchés) par des procédures locales. Lorsqu'on parle de fonction pour la première fois aux élèves, ils ont alors tendance à associer la courbe qui la représente à un graphe. L'usage des calculatrices et des tableaux de valeurs renforce également, chez les élèves, l'idée qu'une fonction n'est qu'une succession de points et les empêche d'avoir une vision plus globale d'une fonction.

D'après les conclusions des travaux de Vinner, S. et Sierpiska, A. relatées par Gaudin, N. (2002) cette confusion entre courbe et graphe est une difficulté persistante et représente un obstacle à surmonter, afin que les élèves puissent donner du sens à leurs nouvelles connaissances sur les fonctions. D'après eux, les faire travailler sur les liens qu'entretiennent les représentations graphiques et les expressions algébriques est un moyen de dépasser cette difficulté.

#### **1.2.5 Conceptualiser un objet abstrait**

Les documents d'accompagnement des programmes du site Eduscol (Représenter, 2016) précisent qu'une fonction est un objet abstrait. Les élèves n'en ont pas une définition formelle et ne peuvent qu'étudier un certain nombre de ses représentations. En effet, celle-ci peut être représentée par une expression algébrique, une courbe, un tableau de valeurs, de variations ou de signes : ce sont des registres de représentation. Il est important d'utiliser ces différents registres, mais passer de l'un à l'autre est une source de difficulté pour les élèves car ils ne perçoivent pas les particularités de chaque registre et les liens entre eux. C'est pourquoi, d'après ce document ressource, il faut préciser l'intérêt ainsi que les limites de chacun dans la situation présentée pour que les élèves puissent mieux appréhender la notion de fonction.

Au vu des difficultés citées et des préconisations des programmes, il me semble pertinent maintenant de nous intéresser plus particulièrement aux différents registres de représentation.

## 1.3 Les registres de représentation sémiotique

### 1.3.1 Les travaux de Raymond Duval

De nombreux scientifiques ont constaté les difficultés des élèves à s'approprier les concepts mathématiques et Duval, R. a analysé les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques.

Une de ses publications de recherche scientifique (1993) présente dès le début ce que Duval, R. appelle « le paradoxe cognitif de la pensée mathématique ». En effet, un objet mathématique est un concept abstrait auquel on ne peut accéder que par l'intermédiaire de ses représentations. Comment alors ne pas confondre l'objet mathématique avec ses représentations pour un élève ? Par ailleurs, comment peut-il maîtriser des mécanismes liés à une représentation s'il n'a pas déjà une appréhension conceptuelle de l'objet représenté ?

Une notion ne peut être conceptualisée sans en avoir de représentations mentales. D'après Duval, R. (1993), celles-ci ne peuvent se développer qu'en passant d'abord par des représentations sémiotiques qu'il définit comme étant « des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiante et de fonctionnement ». Elles ont donc leur propre système de symboles et de règles internes à un registre qu'il appelle registre de représentation sémiotique.

Un registre de représentation sémiotique doit permettre trois activités cognitives fondamentales :

- « La formation d'une représentation identifiable » par ses règles de fonctionnement.
- « Le traitement d'une représentation », c'est-à-dire sa transformation au sein même du registre où elle a été créée, les règles de traitement étant propres à chaque registre.
- « La conversion d'une représentation [...] en une représentation d'un autre registre », en ne conservant parfois que partiellement le contenu de départ.

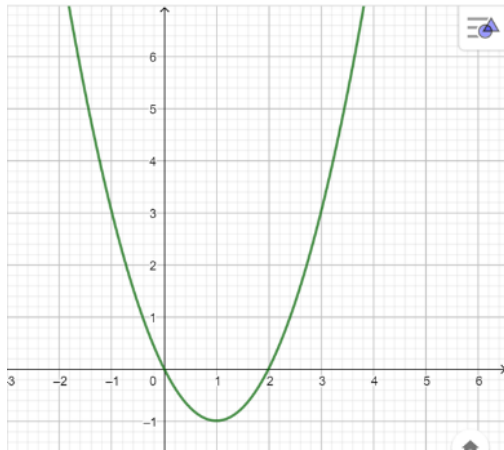
Selon Duval, R. (1993) la base de l'activité mathématique est de pouvoir mobiliser plusieurs registres au cours d'une même démarche ou d'être capable de choisir un registre plutôt qu'un autre. Il est alors pour lui essentiel de développer la coordination des différents registres afin de faire émerger la conceptualisation de l'objet. Or, c'est en travaillant sur les conversions de registre qu'il est possible d'établir des correspondances entre ces derniers. Cependant, c'est justement ce qui pose des problèmes aux élèves : il est difficile pour eux d'effectuer ces conversions car elles échappent à toute règle, ou plutôt, il y a autant de règles de conversion que de conversions possibles. Ces règles leur seront perceptibles lorsqu'ils auront compris que dans chaque représentation, il y a une réduction de l'information et donc un

contenu différent. D'après Duval, R. (1993), pour aider les élèves à accéder au concept de fonction, il faut donc leur faire travailler le passage d'un registre à un autre et leur faire prendre conscience des limites de chaque représentation.

### 1.3.2 Les différents registres de représentation sémiotique d'une fonction

Les différents registres de représentation sémiotique dans le domaine des fonctions ne sont pas clairement définis, mais nous pouvons en dégager quelques-uns qui répondent aux critères mentionnés plus haut :

- Le registre algébrique où la fonction est représentée par son expression algébrique :  
 $f(x) = 3x - 1$ .
- Le registre graphique où la fonction est représentée par sa courbe dans un repère :



- Le registre tableau de valeurs où la fonction est représentée par des correspondances entre nombres (antécédent, image) :

$x$	-0,5	0	1	1,3	2
$f(x)$	3	1,6	0	0,5	5

- Le registre tableau de signes qui représente le signe de la fonction sur son intervalle de définition :

$x$	$-\infty$	10	$+\infty$
Signe de $\frac{1}{2}x - 5$	-	0	+

- Le registre tableau de variation qui représente les variations d'une fonction sur son ensemble de définition :

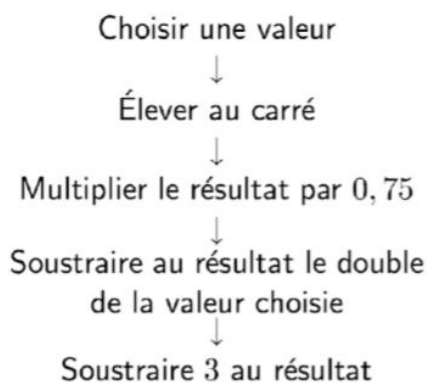
$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
Variation de $f$	↘		↗
		$0$	

- Le registre des écritures symboliques où est donné le calcul pour associer  $f(x)$  à tout nombre  $x$  de l'ensemble de définition de la fonction :

$$[ \quad ; \quad ] \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$x \longmapsto f(x) =$$

- Le registre algorithmique qui décrit la succession des opérations à mettre en œuvre pour passer d'un nombre  $x$  à son image  $f(x)$  :



- Le registre du langage naturel. En effet Duval, R. (2011), nous rappelle que « le langage naturel reste un registre fondamental en mathématiques pour la simple raison que la négation d'abord puis la quantification sont les possibilités de traitement qui caractérisent la langue ! » Exemple : pour tout nombre réel  $x$  de l'ensemble de définition correspond au plus une image pour une fonction donnée.

#### 1.4 Les conversions de registre de représentation sémiotique dans le cadre des fonctions

Nous l'avons vu, la conversion de registre tient une place centrale dans l'activité mathématique. Duval, R. déclare d'ailleurs, lors de la *XIIIe Conférence interaméricaine sur l'enseignement des mathématiques* (2011), « On ne peut pas vraiment faire de mathématiques

si on ne mobilise pas explicitement ou implicitement deux registres de représentations et si on ne peut pas passer plus ou moins spontanément de l'un à l'autre. » Ainsi, les conversions de registre ne sont pas seulement nécessaires à la conceptualisation de la notion de fonction, mais elles sont également au cœur même de la résolution de problèmes de mathématiques mettant en jeu les fonctions.

De nombreux exercices d'entraînement sur les fonctions demandent explicitement de passer d'un registre à un autre, sans laisser d'initiative aux élèves. Bien que de tels exercices soient nécessaires à l'apprentissage des élèves, ils sont très guidés et permettent aux élèves d'automatiser ces conversions et leurs règles, mais sans forcément les comprendre. Des exemples sont donnés en annexe 1.

Les résolutions de problèmes sont des activités moins guidées. Elles peuvent même ne pas l'être du tout pour les 'problèmes à prise d'initiative'. Leur résolution n'est souvent possible qu'en coordonnant plusieurs registres et les élèves doivent savoir « passer plus ou moins spontanément » d'un registre à un autre ou choisir le registre le plus approprié. Cela implique donc, de la part des élèves, de maîtriser les conversions de registre et de connaître les spécificités de chacun. On peut retrouver, dans ces types de problèmes, des situations concrètes et/ou un recours à la modélisation. Ils permettent de donner du sens à la notion de fonction et les élèves doivent être capables, sans indication de marche à suivre, pour le deuxième type de problème cité, de conduire un raisonnement pour apporter une réponse à la question posée. Prenons l'exemple du problème à prise d'initiative suivant (inspiré de *Math'x* 2<sup>nde</sup>, Didier) :

Pour délimiter une zone de baignade rectangulaire en bord de mer, on dispose d'un cordon flottant d'une longueur de 125 m. Pour la délimiter, on utilise la totalité du cordon flottant. Quelle doit être la largeur de cette zone afin d'avoir une aire de baignade maximale ?

On peut distinguer plusieurs étapes de résolution pour ce problème. Initialement, on se place dans le registre du langage naturel dans un cadre géométrique : « zone de baignade rectangulaire », « une longueur de 125m », « largeur » et « aire de baignade maximale ». La première étape consiste à traduire la situation dans le cadre des fonctions, toujours dans le registre du langage naturel : quelle est la valeur maximale que peut prendre la fonction qui à la largeur du rectangle associe son aire ? On peut ensuite passer au registre algébrique en écrivant la formule de cette fonction : soit  $A$  cette fonction et  $x$  la mesure de la largeur du

rectangle, on a alors  $A(x) = x(125 - 2x)$ . En classe de seconde, les élèves n'ont pas les connaissances pour répondre à la question sans être guidés dans ce registre et devront à nouveau faire une conversion de registre pour passer au registre graphique afin de représenter graphiquement cette fonction à l'aide du mode/GRAPH de leur calculatrice. Ils trouveront ainsi que le maximum de la fonction a pour ordonnée environ 31. Ils pourront alors conclure, en revenant au registre du langage naturel, que la largeur de la zone de baignade doit être égale à 31 mètres environ pour que son aire soit maximale. (Il est à préciser que si les élèves avaient accès à un logiciel de type tableur ou à un logiciel de géométrie dynamique, ils ne seraient pas obligés de passer par le mode graphique.) En réalité, de nombreux élèves, en début de seconde, n'auront pas le réflexe d'algébriquer le problème et n'utiliseront donc pas le registre algébrique mais plutôt le registre tableau de valeurs en trouvant spontanément des correspondances entre nombres. Il leur sera alors possible de trouver le maximum approximatif de la fonction, mais ils pourront aussi, s'ils le souhaitent, passer ensuite au registre graphique en traçant une courbe point par point et, dans tous les cas, conclure dans le registre du langage naturel. Nous voyons donc l'importance des conversions de registre et la nécessité de connaître le contenu de chacun pour l'utiliser dans la résolution de problèmes.

### **1.5. Analyse des programmes au vu des travaux de Raymond Duval**

Les programmes scolaires ont énormément évolué en ce qui concerne l'enseignement des fonctions depuis 2000. En effet, avant cette date, c'est essentiellement le registre algébrique qui était utilisé pour étudier les fonctions. A l'IUFM de Lyon, Coppé, S., Dorier, J.-L. et Yavuz, I. (2006) ont analysé les programmes de 2000 et ont constaté que le registre algébrique prend depuis cette date progressivement moins d'importance et que les tableaux de valeurs et de variations ne sont plus uniquement des éléments de transition permettant de passer du registre algébrique au registre graphique, et inversement. Il est demandé effectivement aux enseignants d'entrer dans le concept des fonctions en insistant sur les différents aspects sous lesquels les élèves les ont déjà rencontrées de manière informelle en mathématiques ou dans d'autres matières. Ce travail sur les courbes, les tableaux de valeurs et les tableaux de variation sont ainsi censés permettre aux élèves une entrée plus intuitive dans la notion de fonction. Ces chercheurs mettent alors en garde sur le risque de travailler davantage sur les ostensifs que sur l'objet lui-même, risque accentué par les obstacles épistémologiques dont nous avons déjà parlé. C'est exactement le point sur lequel insiste Duval, R. (1993) : l'élève risque de penser qu'une fonction se limite à une de ses

représentations. Pour Coppé, S. et al. (2006), l'enjeu est de faire comprendre aux élèves les limites d'un tableau de valeurs ou d'une courbe en tant que moyen de définir une fonction.

Dans les nouveaux programmes de 2019 pour le lycée, il est toujours préconisé « d'exploiter divers registres, notamment le registre graphique et le registre algébrique ». De plus les capacités « Relier représentation graphique et tableau de variations » ainsi que « Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine » incitent clairement à établir des correspondances entre les différents registres, ce qui, pour Duval, R. (1993), ne peut se faire qu'en travaillant sur les conversions de registres. Les documents d'accompagnement des programmes d'Eduscol (Représenter, 2016) préconisent l'importance de montrer à l'élève l'intérêt de chaque registre dans chaque situation présentée afin d'éviter qu'il ne se construise des représentations mentales erronées. La conception de l'objet reprend donc une place centrale dans les nouveaux programmes et le travail sur les différents registres et les conversions de registre, en faisant directement référence à Duval, R. (2011), est décrit comme étant nécessaire à cette conceptualisation : « Un élève capable de convoquer dans un exercice mettant en jeu une fonction un graphique, un tableau de nombres, une écriture symbolique, est en train de s'approprier la notion de fonction. » (Eduscol, Représenter, 2016). Les enseignants y sont également avertis de la nécessité de montrer les limites de chaque représentation pour aider les élèves à y parvenir.

### **1.6 Formulation de la problématique**

Les différentes lectures scientifiques analysées plus haut montrent les difficultés à conceptualiser un objet abstrait tel que celui des fonctions. Les programmes insistent sur l'importance, en seconde, de « consolider la notion de fonction ». Cependant, il est risqué de définir une fonction par une de ses représentations : une expression algébrique, une courbe, un tableau de valeurs ou de variations. En effet, on peut alors se poser la question de l'univocité : peut-on déterminer une seule fonction par une expression algébrique, une courbe, un tableau de valeurs ou de variations ? La réponse est oui en ce qui concerne l'expression algébrique. En ce qui concerne la courbe, cela est déjà plus délicat car la courbe visualisée n'est qu'une représentation de la courbe théorique et en est donc une représentation partielle. Quant aux autres représentations citées, la réponse est non. Or, les élèves ont tendance à le croire, ce qui rend difficile la compréhension de la notion de fonction. Le fait que l'expression algébrique ne soit plus la représentation dominante pour travailler sur les fonctions dans les programmes actuels soulève donc une question importante : comment faire pour que les élèves ne



confondent pas l'objet avec une de ses représentations ? La réponse des programmes et de la recherche serait de faire comprendre aux élèves les intérêts et limites de chaque registre de représentation sémiotique afin de mieux accéder au concept de fonction. Par ailleurs, il semble établi que les conversions de registre permettent de mieux conceptualiser un objet tout en étant indispensables à l'activité mathématique. On peut alors se demander si un travail sur les conversions de registre permet aux élèves de prendre conscience des limites des représentations d'une fonction. C'est cette hypothèse que je décide de tester à travers l'élaboration d'une expérimentation.

## **2 Expérimentation**

Dans cette deuxième partie, nous allons découvrir les modalités de l'expérimentation mise en place ainsi que les procédures des élèves qui peuvent être attendues.

### **2.1 Participants**

Afin de répondre à la problématique formulée précédemment, j'ai préparé une expérimentation à réaliser avec mes élèves de seconde. Je suis professeure dans un lycée général et technologique labellisé "lycée des métiers de la création industrielle". La classe est composée de 8 filles sur 33 élèves au total et beaucoup d'entre eux envisagent une poursuite d'étude en voie technologique. Le niveau de la classe est très hétérogène. En effet, l'un de mes élèves est plus âgé et reprend le lycée cette année en ayant déjà suivi des cours particuliers correspondant au niveau de la première S tandis que d'autres ont été diagnostiqués à haut potentiel et ont un an d'avance ; ce petit groupe d'élèves a des facilités et contribue à faire avancer le cours. Au contraire, un groupe d'élèves est en réelle difficulté dans cette matière et a besoin d'être étayé pour suivre et progresser. L'expérimentation qui va suivre est prévue au mois de mars, à la fin du deuxième trimestre, après avoir étudié les fonctions affines et les fonctions de référence, c'est-à-dire les fonctions carré, cube, racine carrée et inverse.

### **2.2 Matériel et procédure**

L'expérimentation a été prévue sur trois temps différents correspondant à trois activités distinctes. Elles auraient initialement dû avoir lieu à chaque fois en salle de classe ordinaire, c'est-à-dire sans matériel informatique spécifique. Malheureusement, la période de confinement observée par la population cette année depuis le 17 mars 2020 ne m'a pas permis de mener ces activités en classe comme je l'avais prévu. Aussi ai-je décidé de tenter tout de

même l'expérience dans le cadre de la continuité pédagogique, autrement dit en utilisant des outils de communication à distance avec mes élèves.

Les deux premières activités permettront aux élèves de découvrir les limites de la représentation d'une fonction par un tableau de valeurs ou par une courbe en travaillant sur une conversion du registre tableau de valeurs au registre graphique puis sur une conversion du registre graphique à celui des tableaux de valeurs ou des variations. La troisième activité permettra de mesurer l'efficacité de ce travail dont l'objectif est de faire prendre conscience aux élèves des limites de ces représentations.

### 2.2.1 Activité 1

L'objectif de la première activité est de montrer aux élèves les limites de la représentation d'une fonction par un tableau de valeurs en travaillant sur le passage du registre du tableau de valeurs au registre graphique.

L'idée est de donner aux élèves deux tableaux de valeurs différents sans leur dire qu'ils représentent une même fonction et sans leur donner son expression algébrique. Je vais leur demander ensuite de représenter graphiquement ces fonctions ainsi que de retrouver leur expression algébrique. Les élèves seront ainsi amenés à tracer deux allures de courbes différentes suivant le tableau de valeurs qu'ils auront au départ. L'annonce par le professeur que les deux tableaux de valeurs représentent la même fonction sera alors l'amorce d'une discussion sur les informations manquantes dans cette représentation et la non-univocité des correspondances entre tableaux de valeurs et courbes.

Je choisis la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[-5 ; 2]$  et représentée par l'expression :

$$f(x) = 0,05(x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2)(x + 5) = 0,005(x^5 + 5x^4 - 5x^3 + 4x + 20).$$

La courbe représentant cette fonction coupe l'axe des abscisses en 5 points distincts et comporte 4 extrema, ce qui va me permettre de les faire apparaître ou pas dans le tableau de valeurs. Sachant que les élèves ont tendance à utiliser les points du tableau pour créer leurs extrema, cela me permettra de faire tracer aux élèves deux courbes d'allures bien différentes. Je décide de donner un intervalle réduit pour ensemble de définition car la fonction croît très vite avant -5 et après 2. Cela évitera ainsi aux élèves d'extrapoler sur l'allure de la courbe au-delà de cet intervalle alors qu'ils n'auront aucun point pour les guider. Il y a déjà suffisamment d'allures de courbes différentes possibles dans cet intervalle et cela évitera des débats lors de la comparaison des courbes obtenues. Les deux tableaux ont également le même nombre de valeurs afin que les élèves ne pensent pas qu'une courbe serait plus précise que l'autre grâce à un plus grand nombre de points à placer sur le graphique.

Voici les deux tableaux de valeurs que j'ai préparés :

Tableau 1 (les valeurs sont approchées au dixième) :

$x$	-4,8	-3,0	-1,0	0	1,0	1,5
$f(x)$	4,2	4,0	0	1,0	0	-0,7

Tableau 2 (les valeurs sont approchées au dixième) :

$x$	-5,0	-4,1	-1,5	0	1,5	2,0
$f(x)$	0	9,1	-0,4	1,0	-0,7	0

Je prévois de partager la classe en deux groupes. A chaque élève du premier groupe, je donnerai le tableau de valeurs 1. De même, à chaque élève du deuxième groupe, je donnerai le tableau de valeurs 2. Je peux en effet créer deux groupes sur la plateforme numérique que j'utilise pour donner le travail à faire aux élèves et leur fournir les pièces-jointes nécessaires. Je leur fournirai alors l'énoncé de l'activité ainsi qu'une feuille de papier millimétré qu'ils pourront, s'ils le souhaitent et s'ils le peuvent, imprimer pour faciliter le tracé et avoir une meilleure précision. Contrairement à ce que j'avais prévu à l'origine, il n'y aura pas de temps limité pour ce travail puisque les élèves le feront chez eux, donc à leur rythme, et je ne sais pas en combien de temps. D'une manière générale, je ne donnerai pas de chronogramme, puisqu'il n'y a pas eu de séances en classe avec les élèves. Autre changement : ils travailleront individuellement alors que le travail en classe était prévu en groupes de trois élèves.

Une fois leur travail terminé, les élèves me renverront leur courbe par mail. Ensuite, nous utiliserons un de nos rendez-vous en classe virtuelle afin de mettre en commun leurs productions ; je partagerai un fichier que j'aurais préparé avec toutes leurs productions pour chacun des tableaux. Les élèves pourront ainsi comparer les différentes courbes tracées pour chacun des tableaux. Ils pourront aussi comparer les courbes obtenues pour chacun des tableaux lorsqu'ils sauront que les deux tableaux de valeurs représentaient la même fonction.

Pour terminer cette mise en commun, je demanderai aux élèves de formuler ce qu'ils pourront retenir de cette activité. Dans une trace écrite qui figurera dans leur cahier d'exercices, l'accent sera mis sur le fait qu'un tableau de valeurs ne représente une fonction que sur un intervalle discret, c'est-à-dire qu'on ne connaît qu'un nombre fini de valeurs que prend la fonction. Il peut donc permettre de déterminer un nombre fini d'images ou

d'antécédents. Ainsi, on ne connaît pas de formule générale et la courbe ne peut être tracée qu'en l'imaginant entre deux points donnés. Par conséquent, à un tableau de valeurs peuvent correspondre plusieurs courbes et donc plusieurs fonctions.

### **2.2.2 Activité 2**

L'objectif de la deuxième activité est de montrer aux élèves les limites de la représentation graphique d'une fonction en travaillant sur le passage du registre graphique à celui des tableaux de valeurs ou à celui des variations.

J'ai décidé de reprendre une des activités de l'expérimentation menée par Coppé, S. et al. (2006) en la modifiant légèrement et en espérant obtenir de meilleurs résultats.

L'idée est de donner à une partie de la classe une courbe et de lui demander de la décrire, autrement que par un dessin, pour que l'autre partie de la classe puisse la reproduire à l'identique.

En classe, celle-ci aurait été séparée en deux : une partie en petits groupes d'émetteurs qui auraient émis la description et l'autre en petits groupes de récepteurs qui auraient réceptionné la description et dessiné la courbe à partir de celle-ci. Chaque moitié de classe aurait joué le rôle d'émetteur en même temps mais à partir de deux courbes différentes et, de même, chaque moitié de classe aurait joué le rôle de récepteur dans un deuxième temps en échangeant le premier travail. Les émetteurs et les récepteurs auraient été répartis en groupes de trois, de manière à permettre aux élèves d'échanger et de faire évoluer leur raisonnement.

A distance, la procédure sera bien différente ; chaque élève travaillera individuellement à la description d'une des deux courbes que j'ai préparées et je renverrai une description d'un élève d'un groupe à chacun des élèves de l'autre groupe. Chaque élève pourra donc, dans un second temps, tracer une courbe d'après la description d'un camarade.

Les élèves aborderont l'activité décrite en sachant qu'à un tableau de valeurs peuvent correspondre plusieurs courbes et qu'à une courbe peuvent correspondre plusieurs tableaux de valeurs. Il y aura alors plus de chances pour que, lors de l'activité proposée, les élèves du groupe émetteur cherchent à décrire la courbe autrement que par un tableau de valeurs.

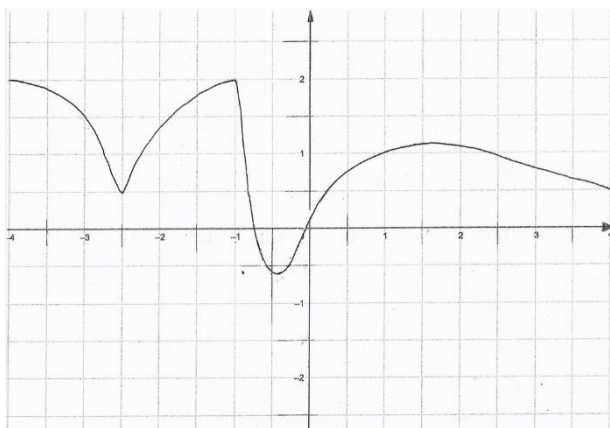
Chaque moitié de classe aura la même courbe à décrire de manière à pouvoir comparer les productions des élèves et pouvoir débattre lors de la mise en commun à l'issue de l'activité.

Je change le tracé de la courbe de l'expérimentation de Coppé, S. et al. (2006) car les résultats de leur étude ont montré que les élèves avaient tracé des courbes finalement assez ressemblantes à celle de départ. En effet, les élèves ont favorisé une description et un tracé point par point en utilisant le quadrillage. En analysant leur courbe, j'ai constaté que les

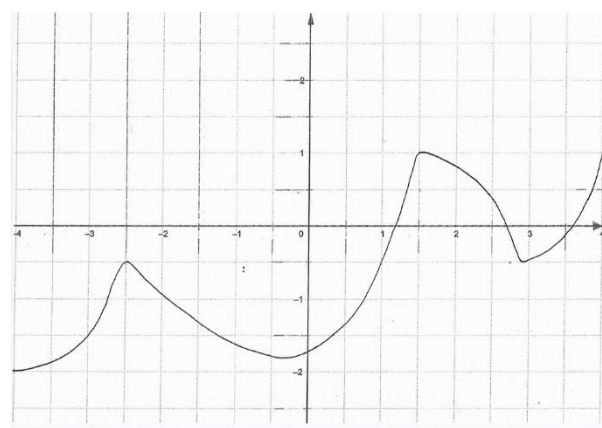
extrema se situaient tous sur des nœuds du quadrillage, ce qui aurait pu inciter largement les élèves ‘‘émetteurs’’ à n’utiliser qu’un tableau de valeurs les répertoriant et les ‘‘récepteurs’’ à les utiliser spontanément en guise d’extrema. Je vais donc changer les positions de certains extrema et créer ensuite une deuxième courbe sur le même principe, décrit plus loin, afin de faire travailler mes deux groupes d’élèves simultanément.

La courbe est créée avec un quadrillage visant à faciliter la lecture des coordonnées de certains points de la courbe. L’amplitude du domaine de définition est réduit afin de limiter le nombre de valeurs entières mais de donner la possibilité aux élèves de décrire la courbe point par point s’ils le souhaitent. Les extrema sont suffisamment nombreux pour permettre de décrire la courbe en termes de variations. Deux d’entre eux, seulement, ont leurs coordonnées entières ou demi-entières, afin de mettre en échec une procédure qui utiliserait systématiquement les points qui ont leur abscisse correspondant au quadrillage et je décide de faire apparaître des extrema en dehors des nœuds du quadrillage pour que les élèves se posent réellement la question de l’utilité de les mentionner plutôt qu’ils ne se contentent de répertorier tous les points de la courbe qui passent par les nœuds du quadrillage. Certains points de la courbe sont des nœuds de quadrillage, sans pour autant n’être ni des valeurs entières, ni des extrema. Enfin, je choisis également de faire apparaître des variations plus ou moins fortes pour inciter les élèves à les formuler.

**Courbe 1 :**



**Courbe 2 :**



Une fois le travail des émetteurs fini, les récepteurs devront donc tracer la courbe qui correspond à la description. En classe, j’aurais préparé plusieurs calques des deux courbes afin que chaque groupe puisse juger de la précision de sa courbe par rapport à la courbe d’origine, mais cela ne pourra pas être le cas à distance.

Un temps de mise en commun aura ensuite lieu. Il s’agira de comparer les courbes tracées des récepteurs par rapport aux courbes d’origine. Ce travail, réalisé en classe virtuelle,

conduira à se poser plusieurs questions : quelles difficultés ont rencontré les émetteurs ? Quelles données manquaient aux groupes récepteurs pour être en mesure de tracer la courbe d'origine à l'identique ? Ces données étaient-elles en possession des groupes émetteurs ?

Ce bilan conduira à une trace écrite dans le cahier d'exercices concernant les limites de la représentation d'une fonction par une courbe. Le but sera d'y formuler qu'une courbe donne une représentation explicite d'une fonction sur un intervalle. Ainsi, elle permet des lectures d'images (sur l'intervalle où elle est tracée), mais seulement avec la précision permise par le graphique, ainsi que la représentation des variations, contrairement à l'expression algébrique. Celle-ci ne pourra d'ailleurs pas être retrouvée, à priori, à partir de la courbe.

### **2.2.3 Activité 3**

Les deux activités précédentes auront permis un travail effectif sur les limites des registres de représentation "tableau de valeurs" et "courbe représentative", en travaillant la conversion entre ces deux registres. La troisième activité proposée alors aux élèves visera à mesurer l'impact de ce travail préalable dans leurs conceptions de la notion de fonction.

Cette activité est composée de trois exercices. Chacun présente une fonction par l'intermédiaire d'une représentation d'un registre différent : registre algébrique, tableau de valeurs et registre graphique. Il s'agit à chaque fois de répondre à des affirmations par : "vrai", "faux" ou "on ne peut pas savoir". Dans le cas où les élèves répondent "on ne peut pas savoir", ils doivent le justifier. En effet, les élèves ne seront pas en mesure de répondre à toutes les questions, la représentation donnée ne comportant pas tous les renseignements nécessaires sur la fonction. Les questions seront semblables d'un exercice à l'autre afin de pouvoir analyser les productions des élèves sur leur compréhension des renseignements manquants dans chacun des registres.

### 2.2.3.1 Exercice 1

<b>Énoncé :</b>			
Soit $f$ une fonction définie sur $[-4 ; 5]$ par $f(x) = x^3 - 2x + 3$ . En n'utilisant que cette expression algébrique (et pas le mode fonction/GRAPH de votre calculatrice) cocher pour chaque affirmation la réponse "vraie", "fausse" ou "on ne peut pas savoir". Justifier votre réponse sur une copie séparée si vous cochez "on ne peut pas savoir".			
affirmation	vraie	fausse	on ne peut pas savoir
1) $f(1) = 0$ .			
2) L'inéquation $f(x) < 0$ a pour ensemble de solution $]-4 ; -2[$ .			
3) Le point $A(2,2 ; 9)$ appartient à la courbe.			
4) La fonction $f$ est décroissante sur $[-2 ; 0]$ .			
5) Lorsque $x$ est compris entre 0 et 2, $f(x)$ est compris entre 3 et 7.			
6) 3 a un seul antécédent.			
7) L'antécédent de $-2$ est $-2,09$ .			

Ce premier exercice donne l'expression algébrique d'une fonction. Même si les activités précédentes n'utilisent pas directement ce registre, nous avons été amenés à nous poser des questions sur l'expression algébrique d'une fonction par comparaison aux tableaux de valeurs et aux courbes. Les intérêts et limites de la représentation d'une fonction ont été institutionnalisés également et les élèves ont suffisamment manipulé ces expressions durant leur travail sur les fonctions pour légitimer ce premier exercice.

L'expression algébrique de la fonction  $f$  a été choisie de manière à ce que les calculs d'images soient simples (questions 1, 3 et 7). Elle ne pourra cependant pas être factorisée par les élèves pour résoudre l'inéquation (question 2) car leurs connaissances ne le permettent pas. Elles ne leur permettront d'ailleurs pas non plus de répondre aux questions 4 et 5. La valeur de  $f(x)$  pour laquelle on veut connaître le nombre d'antécédents est 3 (question 6) de manière à ce que les élèves aient les outils pour résoudre l'équation qui leur permettra de répondre. Si les élèves pensent que la formule algébrique ne leur permet pas de répondre à certaines questions, ce sera donc qu'ils auront compris que certaines informations ne leur sont

pas accessibles en n'ayant que cette représentation (en tout cas, avec leur niveau de connaissances actuel).

### 2.2.3.2 Exercice 2

<b>Énoncé :</b>										
Soit $g$ une fonction définie sur $[-4 ; 5]$ et représentée par le tableau de valeurs suivant :										
$x$	-4	-2,9	-2	-0,8	0	1	1,7	2,6	4	5,1
$g(x)$	0	-1	-1,9	-2,3	-2,5	-0,5	-0,8	0,5	0	3
Cocher pour chaque affirmation la réponse "vraie", "fausse" ou "on ne peut pas savoir". Justifier votre réponse sur une copie séparée si vous cochez "on ne peut pas savoir".										
affirmation							vraie	fausse	on ne peut pas savoir	
1) $g(1) = 0$ .										
2) L'inéquation $g(x) < 0$ a pour ensemble de solution $]-4 ; 2[$ .										
3) Le point $B(1,2 ; -1)$ appartient à la courbe.										
4) La fonction $g$ est décroissante sur $[-2 ; 0]$ .										
5) Lorsque $x$ est compris entre 0 et 2, $g(x)$ est compris entre -2,5 et 2.										
6) 2 a un seul antécédent.										
7) L'antécédent de -2 est -2,09.										

Les valeurs de  $x$  sont choisies entières ou décimales pour habituer les élèves à ne pas travailler qu'avec des nombres entiers. D'autre part, les intervalles entre ces valeurs ne sont pas réguliers afin que les élèves ne tirent pas de conclusion hâtive sur la forme que doit prendre un tableau de valeurs. L'intervalle de définition de la fonction permet de prendre un grand nombre de valeurs pour  $x$  et de bien les répartir tout en les espaçant suffisamment pour qu'on ne sache pas comment peut se comporter la fonction entre ces valeurs. Ainsi, les élèves ne sont pas incités par l'énoncé de répondre qu'ils ne savent pas ce qu'il se passe entre deux points parce qu'il y a un trop grand intervalle entre eux. S'ils pensent que le tableau de

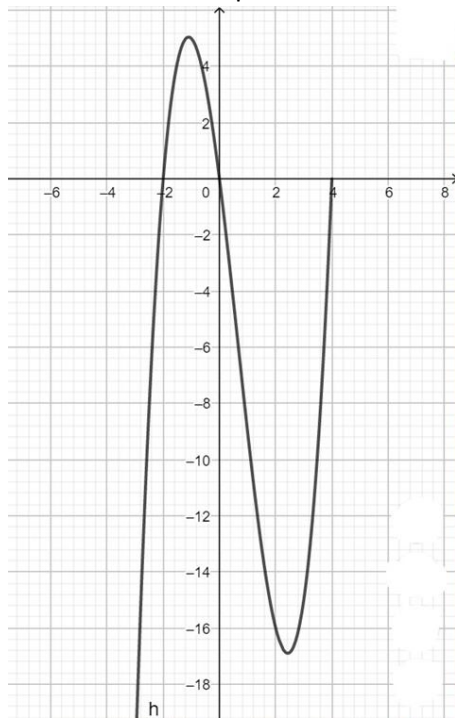


valeurs ne leur permet pas de répondre à certaines questions, ce sera uniquement parce qu'ils auront compris les limites de ce tableau.

### 2.2.3.3 Exercice 3

**Énoncé :**

Voici la courbe représentative de la fonction  $h$  définie sur  $[-4 ; 4]$  :



Cocher pour chaque affirmation la réponse "vraie", "fausse" ou "on ne peut pas savoir". Justifier votre réponse sur une copie séparée si vous cochez "on ne peut pas savoir".

affirmation	vraie	fausse	on ne peut pas savoir
1) $h(1) = 0$ .			
2) L'inéquation $h(x) < 0$ a pour ensemble de solution $] -4 ; -2[ \cup ] 0 ; 4[$ .			
3) Le point $C(-1 ; 4,5)$ appartient à la courbe.			
4) La fonction $h$ est décroissante sur $[-2 ; 0]$ .			
5) Lorsque $x$ est compris entre 0 et 2, $h(x)$ est compris entre 2 et $-18$ .			
6) 4 a un seul antécédent.			
7) L'antécédent de $-2$ est $-2,09$ .			

La courbe a été choisie pour être assez simple et pour que les points d'intersection avec l'axe des abscisses puissent être définis sans équivoque (questions 1 et 5). Les variations de la fonction sur l'intervalle  $[-2 ; 0]$  sont clairement visibles ainsi que le nombre d'antécédents de 4 (questions 4 et 6). Cependant, le graphique manque volontairement de précision pour répondre aux questions 2, 3 et 7, bien que les affirmations soient vraisemblables. Si les élèves pensent qu'ils ne peuvent pas répondre à ces questions, ce sera alors le signe qu'ils auront compris les limites de la représentation d'une fonction par une courbe.

## **2.3 Analyse à priori des procédures d'élèves**

### **2.3.1 Activité 1**

Je pense que les deux groupes devraient tracer deux allures de courbes très différentes (annexe 2). Tout le monde sera donc à peu près d'accord sur l'allure de la courbe correspondant à chacun des tableaux. Certains élèves devraient tenter de donner une expression algébrique pouvant définir la fonction, mais la plupart penseront que c'est trop difficile et peut-être que certains affirmeront que c'est même impossible.

Un moment primordial dans cette activité sera la mise en commun du travail des élèves. Ceux-ci auront travaillé sur la conversion du registre du tableau de valeurs au registre graphique et c'est cette conversion de registre qui sera à l'origine d'une discussion aboutissant au constat des limites d'un tableau de valeurs pour représenter une fonction.

Cette activité ne permettra pas à elle seule de répondre à ma problématique et ne me donnera pas d'éléments à analyser, à part le bilan oral. C'est en effet une première étape de travail sur les conversions de registre pour les élèves. Les élèves pourront se reposer sur le bilan écrit de cette activité pour faire la troisième qui, elle aura pour objectif de répondre à la problématique.

### **2.3.2 Activité 2**

Je pense qu'un certain nombre d'élèves risquent encore de se contenter de produire un tableau de valeurs pour décrire la courbe, malgré la première activité. En classe, j'aurais compté sur les échanges d'idées entre les élèves pour qu'ils trouvent une autre solution et que leur raisonnement évolue. Des élèves essaieront peut-être de réaliser la courbe à partir de leur description pour voir si celle-ci est correcte et seront ainsi amenés à la modifier suivant les procédures qu'ils imaginent pour les récepteurs. Ils pourraient ainsi être amenés à décrire les variations de la courbe : de telle valeur de  $x$  jusqu'à telle autre, la courbe "monte" ou "descend", elle est "très pentue" ou elle "descend légèrement", sa forme "ressemble à

...”. Peut-être que certains utiliseront les termes “croissante” et “décroissante”. Je précise qu’à ce moment de l’année, les élèves n’ont pas encore travaillé sur les tableaux de variation et qu’ils ont découvert les notions de croissance et décroissance uniquement à travers l’étude des fonctions affines et fonctions de référence, sans qu’elles ne soient encore rigoureusement définies.

En ce qui concerne les élèves récepteurs, s’ils ne reçoivent qu’un tableau de valeurs, je pense que certains vont placer les points donnés par leur camarade sur le graphique en les considérant comme des extrema et tout simplement les relier par des segments de droites ou lisser la courbe aux extrema, comme dans l’activité 1. Des commentaires sur les variations de la fonction vont sûrement leur permettre de s’approcher plus précisément de l’allure de la courbe d’origine.

### 2.3.3 Activité 3

Concernant l’exercice 1, les élèves ont déjà utilisé de nombreuses fois l’expression algébrique d’une fonction pour répondre à ce genre de questions. Ici, s’ils cochent “on ne peut pas savoir”, ce sera parce que leurs connaissances ne leur permettront pas. Certains élèves hésiteront sans doute à cocher cette case, pensant devoir être capables de répondre, préférant cocher “vraie” ou “fausse”.

Pour l’exercice 2, la première activité et la trace écrite qui en a été faite devrait aider les élèves dans leurs réponses. Je m’attends à ce qu’ils puissent tous dire que l’affirmation 1 est fausse car on peut explicitement lire dans le tableau de valeurs l’image de 1 par la fonction  $g$ . Pour toutes les autres questions, on ne peut pas savoir si l’affirmation est vraie. S’ils ont compris qu’on ne peut pas savoir ce qu’il se passe entre deux points dont les coordonnées figurent dans le tableau de valeurs, ils devraient pouvoir cocher ces réponses. Je garde à l’esprit qu’il peut être difficile pour les élèves de choisir la réponse “on ne peut pas savoir” car ils ont toujours été habitués à devoir donner une solution à une question.

Dans l’exercice 3, on ne peut pas savoir si les affirmations 2, 3 et 7 sont vraies ou fausses. Si les élèves ont compris que la représentation de la fonction par une courbe donne des informations imprécises quant aux points par lesquels elle passe, ils devraient pouvoir cocher cette réponse, en espérant qu’ils ne se sentiront pas obligés de répondre vrai ou faux. Pour l’affirmation 1, ils devraient être tous en mesure de répondre faux : la lecture de la courbe contredit l’information sans ambiguïté. Il en est de même pour l’affirmation 4, à condition que les élèves se souviennent bien de ce que signifie le terme “décroissante”, ce qui reste encore flou pour certains. Dans la question 5, la courbe indique clairement que l’affirmation est vraie,

cependant, quelques élèves pourraient cocher faux en considérant, à tort, que 2 et -18 doivent être la plus grande et la plus petite valeur prises par  $h(x)$ . Enfin, pour la question 6, la réponse ‘‘fausse’’ paraît également évidente sur le graphique, à condition que les élèves aient bien intégré où regarder sur la courbe pour trouver l’antécédent de 4. Cela reste peut-être à retravailler pour quelques élèves.

### 3 Productions d’élèves et résultats

Je ne donnerai pas ici de détail de procédures d’élèves. Etant en confinement, je n’ai eu la possibilité que de recueillir leurs productions et de les analyser. Aussi, certaines procédures semblent évidentes dans les grandes lignes, mais je ne peux avoir aucun détail sur l’évolution du raisonnement des élèves ni sur leur chronologie. Le nombre d’élèves ayant participé à chaque activité est variable et très en deçà de l’effectif normal de la classe.

#### 3.1 Activité 1

Pour cette activité, je relève 64% de participation.

Les élèves ont tous placé les points correspondant aux valeurs données dans le tableau qu’ils avaient en énoncé, certains, dans de rares cas, confondant encore abscisse et ordonnée. Ces points ont ensuite servi d’extrema pour tous les élèves. Pour le tracé de la courbe, deux démarches se distinguent alors : relier ces points par des segments de droites (figures 1 et 3) ou dessiner des courbes lisses (figures 2 et 4). On peut remarquer que des élèves qui ont eu le premier tableau de valeurs ont commencé leur courbe au premier point du tableau de valeurs et l’ont fini au dernier, ne la dessinant que sur  $[-4,8 ; 1,5]$  en ne tenant pas compte de l’ensemble de définition de la fonction.

Les courbes obtenues pour chacun des deux tableaux ont des allures très différentes (figures 1, 2, 3 et 4) car les élèves ont, comme prévu, pris les coordonnées des points donnés en guise d’extrema.

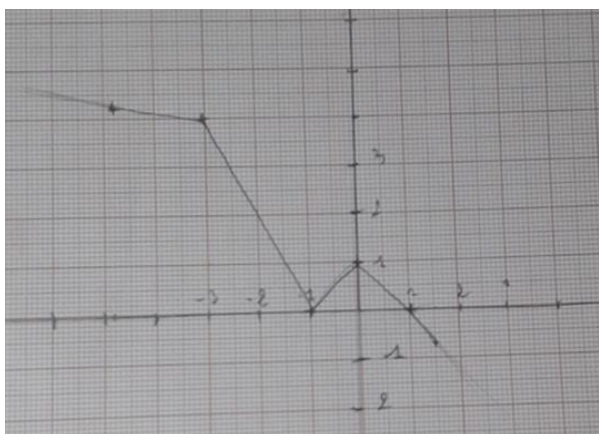


Figure 1, courbe tracée d'après tableau 1

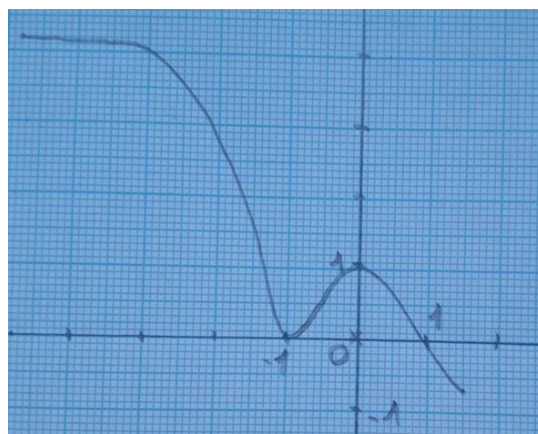


Figure 2, courbe tracée d'après tableau 1

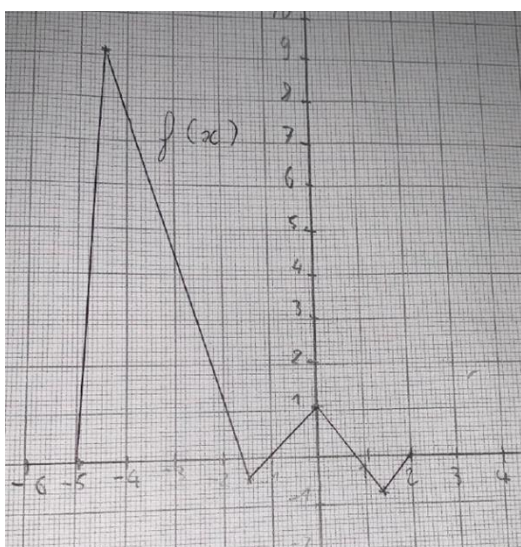


Figure 3, courbe tracée d'après tableau 2

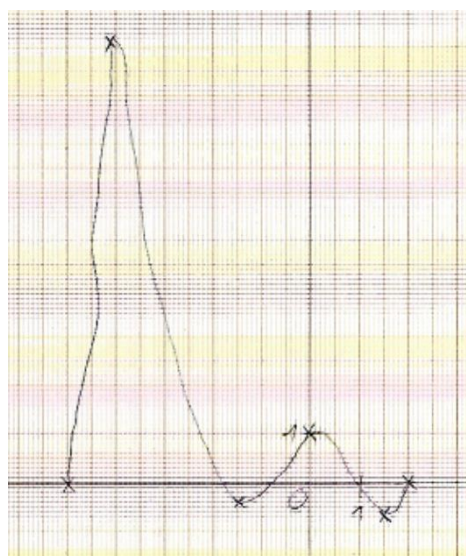


Figure 4, courbe tracée d'après tableau 2

A l'annonce que les deux tableaux de valeurs correspondaient à la même fonction, il y a eu de l'étonnement et des contestations et j'ai laissé aux élèves un temps pour le vérifier par le calcul en leur donnant l'expression algébrique de la fonction et en leur précisant bien que les valeurs des tableaux étaient approchées au dixième et qu'ils ne retrouveraient donc pas exactement ces valeurs. Certains élèves ont eu le réflexe d'utiliser leur calculatrice en mode fonction pour obtenir un tableau de valeurs avec un pas approprié, soit 0,1. J'ai incité les autres à faire de même afin de gagner du temps. Je précise que je ne voyais pas les élèves car je branchais ma caméra mais pas celle des élèves afin d'éviter les problèmes de connexion.

Une fois cette vérification faite, la discussion et les remarques des élèves a permis de conclure sur les informations manquantes dans le registre tableau de valeurs.

J'ai finalement demandé aux élèves s'ils avaient réussi, avant que je leur donne, à retrouver l'expression algébrique de la fonction. Au départ, certains élèves avaient tenté de donner une expression algébrique pouvant définir la fonction, persuadés que c'était possible. Ils avaient voulu utiliser la démarche qu'ils connaissaient pour déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine à partir de sa représentation graphique, puis se sont rendus compte que ce n'était pas le cas ici. Ils avaient donc conclu que c'était impossible. La plupart des autres élèves avaient pensé que c'était trop difficile et n'avaient pas essayé.

Cette activité a finalement abouti à la trace écrite prévue.

### 3.2 Activité 2

73% des élèves ont participé à cette activité mais 17% de ces élèves n'ont pas fait l'activité 1.

Nous pouvons classer les descriptions en trois grands types.

Le premier ne comporte qu'un tableau de valeurs ou donne de manière plus rédigée les coordonnées des différents points par lesquels passe la courbe, sans autre précision. Parmi les quatre élèves qui n'avaient pas fait la première activité, trois ont choisi ce type de description. Les points mentionnés sont parfois donnés de manière quasi-systématique pour les abscisses entières et demi-entières, comme nous pouvons le voir sur la figure 5, car on peut les lire directement sur le quadrillage qui est d'un carreau pour 0,5 unité.

x	-4	-3	-2,5	-1	-0,5	0	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
f(x)	2	1,5	0,5	2	-0,6	0,2	1	1,2	1,1	1	0,8	0,7	0,5

Figure 5 : tableau de valeurs, activité 2, émetteur

Certains élèves ont cependant rajouté d'autres points correspondant aux extrema de la courbe. Un élève les a même appelés « les points coins ».

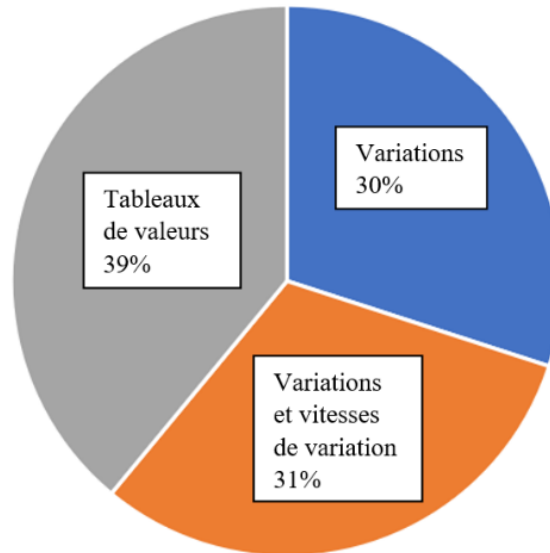
Le deuxième type de description donne des précisions supplémentaires sur les variations de la fonction. Tout d'abord en donnant l'allure générale de la courbe en « montagne russe », ou en précisant qu'elle « monte » / « descend », qu'elle « augmente » / « diminue » ou bien qu'elle est « croissante » / « décroissante » en précisant à chaque fois à partir de quel point et jusqu'à quel autre point.

Le troisième type de description donne encore des informations supplémentaires, par rapport à la dernière, sur la vitesse des variations : elle « s'aplatit petit à petit », elle est



« exponentielle », elle forme « un pic », elle est en forme de « cuvette ». On trouve aussi fréquemment le terme « en arrondi ».

La répartition entre les différents types de description est présentée ci-dessous :



*Figure 6, les différents types de description*

On constate donc que 39% des élèves se sont contentés de donner un tableau de valeurs mais que 61% des élèves ont spontanément décrit la courbe en donnant des informations sur les variations de la fonction. Il est à noter que certaines informations supplémentaires ont pu être données : deux élèves ont parlé de symétrie axiale pour la courbe 1 et trois élèves ont parlé d'arrondi « tourné vers le bas », « vers le haut » ou « vers l'axe des abscisse ».

Les courbes qui ont été tracées à partir des descriptions ne contenant que des points à placer c'est-à-dire catégorie "tableaux de valeurs" sont généralement peu ressemblantes à la courbe d'origine, que ce soit pour la courbe 1 ou pour la courbe 2, comme on peut le voir sur les figures 7a et 7b. En revanche, deux courbes tracées à partir de descriptions de la catégorie "variations et vitesses de variation" se sont montrées particulièrement ressemblantes à celles d'origine (figures 8a et 8b).

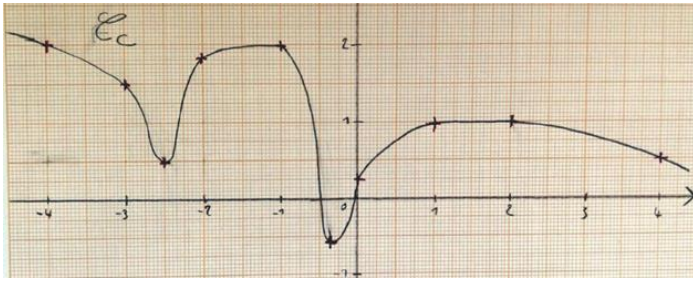


Figure 7a, courbe 1

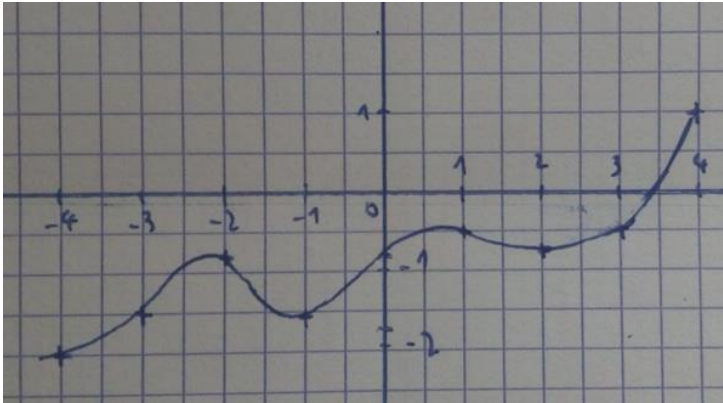


Figure 7b, courbe 2

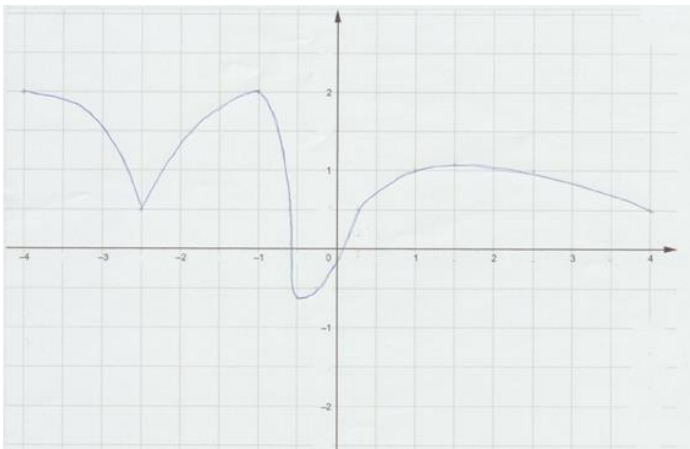


Figure 8a, courbe 1

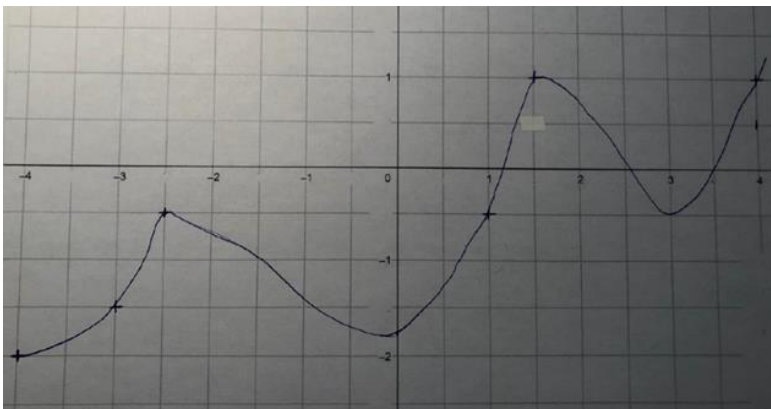


Figure 8b, courbe 2



Devant les difficultés que les élèves ont eu à tracer une courbe identique à celle qu'un camarade leur avait décrit, j'ai demandé aux élèves "récepteurs" quelles informations leur avait manqué. Ils ont essentiellement répondu que les descriptions manquaient de précision, pour toutes les catégories de description. Un élève a cité en exemple une information qui lui avait été donnée : « la courbe passe à gauche du point de coordonnées  $(-0,5 ; -0,5)$  » pour la courbe 1. Une autre élève a dit qu'elle ne pouvait pas placer correctement un point de coordonnées  $(-0,4 ; -0,6)$  à cause du quadrillage qui était peu précis. Les "émetteurs" ont pu répondre que le quadrillage manquait effectivement de précision pour eux aussi. Finalement, tout le monde a pu se rendre compte qu'on ne pouvait lire des images sur une courbe qu'avec la précision permise par le graphique mais qu'elle permettait de rendre compte des variations de la fonction. La trace écrite prévue a ensuite été notée dans le cahier.

En utilisant les connaissances que les élèves avaient déjà sur l'utilisation de l'expression algébrique d'une fonction, nous avons ajouté un complément aux deux traces écrites de ces deux premières activités. Celui-ci mentionne qu'une expression algébrique permet toujours de calculer la valeur exacte d'une image, contrairement aux courbes et aux tableaux de valeurs. En revanche, elle ne permet pas toujours de calculer des antécédents ou d'appréhender les variations de la fonction.

### 3.3 Activité 3

85% des élèves ont rendu cette activité, mais 29% d'entre eux n'avaient pas fait l'activité 1, ou les deux activités précédentes.

Voici le nombre de réponses cochées par case par les élèves pour chacun des exercices de cette dernière activité. Les cases vertes correspondent aux bonnes réponses. Le pourcentage de réussite pour chaque question est indiqué en vert s'il est strictement supérieur à 50%.

#### Exercice 1

affirmation	vraie	fausse	on ne peut pas savoir	Pourcentage de réussite (arrondi à l'unité)
1) $f(1) = 0$ .	5	24	0	86
2) L'inéquation $f(x) < 0$ a pour ensemble de solution $]-4 ; -2[$ .	4	7	17	61

3) Le point $A(2,2 ; 9)$ appartient à la courbe.	3	23	2	82
4) La fonction $f$ est décroissante sur $[-2 ; 0]$ .	7	16	5	18
5) Lorsque $x$ est compris entre 0 et 2, $f(x)$ est compris entre 3 et 7.	20	6	2	7
6) 3 a un seul antécédent.	13	14	1	50
7) L'antécédent de $-2$ est $-2,09$ .	3	24	1	86

Tableau 1, résultats activité 3 exercice 1

### Exercice 2

affirmation	vraie	fausse	on ne peut pas savoir	Pourcentage de réussite (arrondi à l'unité)
1) $g(1) = 0$ .	1	26	1	93
2) L'inéquation $g(x) < 0$ a pour ensemble de solution $]-4 ; 2[$ .	6	8	14	50
3) Le point $B(1,2 ; -1)$ appartient à la courbe.	1	9	18	64
4) La fonction $g$ est décroissante sur $[-2 ; 0]$ .	14	4	10	36
5) Lorsque $x$ est compris entre 0 et 2, $g(x)$ est compris entre $-2,5$ et 2.	9	9	10	36
6) 2 a un seul antécédent.	11	1	16	57
7) L'antécédent de $-2$ est $-2,09$ .	4	12	12	43

Tableau 2, résultats activité 3 exercice 2

### Exercice 3

affirmation	vraie	fausse	on ne peut pas savoir	Pourcentage de réussite (arrondi à l'unité)
1) $h(1) = 0$ .	3	23	2	82

2) L'inéquation $h(x) < 0$ a pour ensemble de solution $] -4 ; -2[ \cup ] 0 ; 4[$ .	13	4	11	39
3) Le point $C(-1 ; 4,5)$ appartient à la courbe.	15	8	5	18
4) La fonction $h$ est décroissante sur $[-2 ; 0]$ .	6	21	1	75
5) Lorsque $x$ est compris entre 0 et 2, $h(x)$ est compris entre 2 et $-18$ .	18	9	1	64
6) 4 a un seul antécédent.	7	19	2	68
7) L'antécédent de $-2$ est $-2,09$ .	9	9	10	36

Tableau 3, résultats activité 3 exercice 3

Etant donné que tous les élèves n'ont pas participé aux deux premières activités, il me semble pertinent de donner le pourcentage de réussite des élèves qui ont coché "on ne peut pas savoir", pour les questions dont les réponses attendues étaient "on ne peut pas savoir", dans le cas où ils ont fait les activités 1 et 2 pour les comparer aux pourcentages de réussite de tous les élèves qui ont participé, sans distinction.

#### Exercice 1

	Activités 1 et 2 faites	Sans distinction
2) L'inéquation $f(x) < 0$ a pour ensemble de solution $] -4 ; -2[$ .	65%	61%
4) La fonction $f$ est décroissante sur $[-2 ; 0]$ .	15%	18%
5) Lorsque $x$ est compris entre 0 et 2, $f(x)$ est compris entre 3 et 7.	10%	7%

Tableau 4, pourcentages de réussite activité 3 exercice 1

### Exercice 2

	Activités 1 et 2 faites	Sans distinction
2) L'inéquation $g(x) < 0$ a pour ensemble de solution $] -4 ; 2[$ .	<b>50%</b>	50%
3) Le point $B(1,2 ; -1)$ appartient à la courbe.	<b>65%</b>	64%
4) La fonction $g$ est décroissante sur $[-2 ; 0]$ .	<b>35%</b>	36%
5) Lorsque $x$ est compris entre 0 et 2, $g(x)$ est compris entre $-2,5$ et 2.	<b>30%</b>	36%
6) 2 a un seul antécédent.	<b>60%</b>	57%
7) L'antécédent de $-2$ est $-2,09$ .	<b>50%</b>	43%

Tableau 5, pourcentages de réussite activité 3 exercice 2

### Exercice 3

	Activités 1 et 2 faites	Sans distinction
2) L'inéquation $h(x) < 0$ a pour ensemble de solution $] -4 ; -2[ \cup ] 0 ; 4[$ .	<b>20%</b>	39%
3) Le point $C(-1 ; 4,5)$ appartient à la courbe.	<b>20%</b>	18%
7) L'antécédent de $-2$ est $-2,09$ .	<b>40%</b>	36%

Tableau 6, pourcentages de réussite activité 3 exercice 3

Tous ces résultats seront analysés et mis en perspective dans la partie suivante.

Regardons maintenant comment les élèves ont justifié qu'ils ne pouvaient pas savoir si l'affirmation était vraie ou fausse.

Pour l'exercice 1, des élèves ont expliqué qu'il leur manquait des informations que la courbe aurait pu leur donner :

4) On ne peut pas savoir de tête car nous n'avons pas la courbe.

4) On ne connaît pas l'allure de la courbe, donc on ne peut pas savoir si cette partie de la courbe est décroissante elle pourrait l'être au début, mais que au milieu elle remonte de cette section elle remonte.

Pour l'exercice 2, les élèves ont globalement dit qu'il leur manquait des valeurs dans le tableau ainsi que des informations sur la fonction :

Ex 2:

2) On ne peut pas savoir car dans le tableau de valeur il n'est pas donné  $x=2$  donc on ne sait pas si celui-ci est inférieure ou supérieur à 0.  
strictement

3) Les valeurs ne sont pas données dans le tableau ~~mais~~  
~~car~~ ~~un~~

4) D'après les valeurs données la fonction  $g$  est décroissante sur  $E=2;0$  mais on n'a pas toutes les valeurs pour réellement l'affirmer

6) La valeur  $x=2$  n'est pas donnée  
On ne possède pas l'image  $g(x)=2$

7) dans le tableau il ne figure pas l'image  $-2$  ni l'antécédent  $2,09$

N°2

1) → Faux

2) → On ne peut pas savoir car on a pas toute les valeurs et on ne connaît pas la fonction

3) → On peut pas savoir pour les même raisons.

4) → On peut pas savoir pour les même raisons.

5) → On peut pas savoir pour les même raisons

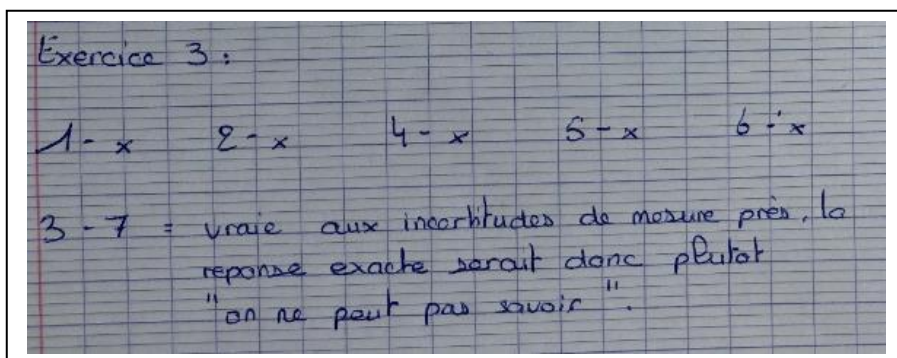
6) → On peut pas savoir pour les même raisons

7) → On ne peut pas savoir pour les même raisons

## Exercice 2

2. 3.4.6.7. On a pas assez d'informations sur la nature de la courbe ni passer de points, on ne peut donc pas répondre. Aussi on pourrait penser tracer une courbe avec les points donnés mais celle-ci serait sans doute fautive car il pourrait y avoir d'autres points hors de la "trajectoire intuitive" de la courbe.

Pour l'exercice 3, les élèves ont évoqué l'imprécision de la courbe donnée.



(3)

toutes ces réponses ne sont pas trouvables car la courbe est:  
"représentative" donc certainement pas parfaite sans compter les pixels,  
le point que l'on pense être à (0;0) peut très bien être à (0;0.000001)  
une différence qui ne peut être visible à l'œil  
la courbe nous permet tout de même de remarquer (pour la 6) que 4 a  
deux antécédents donc la six est fautive.

## 4 Discussion et conclusion

Cette étude a pour objectif de savoir si faire travailler les élèves sur les conversions de registre de représentation sémiotique d'une fonction peut leur permettre de prendre conscience des limites de chacun de ces registres, dans le but de leur permettre de mieux conceptualiser la notion de fonction. Pour cela, les deux premières activités permettent aux élèves de travailler sur des conversions de registres et de découvrir les limites du registre des tableaux de valeurs et du registre graphique, tandis que la troisième permet de mesurer l'impact de ce travail sur leur compréhension de ces limites en évaluant leur capacité à le réinvestir.

### 4.1 Interprétation des résultats

La première activité s'est déroulée comme prévu et les objectifs visés ont été atteints. Les élèves ont tous découvert qu'à la formule algébrique d'une fonction pouvaient correspondre plusieurs tableaux de valeurs et qu'à un tableau de valeurs pouvaient correspondre plusieurs

courbes. Cette activité est intéressante car elle donne la possibilité aux élèves de se poser cette question de l'univocité des correspondances entre les registres algébrique et tableau de valeurs et les registres tableau de valeur et graphique. Grâce à ce questionnement, nous avons pu établir que des informations sur la fonction manquaient dans le registre des tableaux de valeurs.

Suite à l'activité précédente, les élèves étaient donc en mesure de se douter que leur camarade ne pourrait pas tracer une courbe très ressemblante s'ils ne donnaient qu'un tableau de valeurs en guise de description dans l'activité 2. 4 élèves seulement ont réalisé une description en n'ayant pas fait l'activité 1 et trois parmi ceux-là ont donné une description sous forme de tableau de valeurs, ce qui représente 75% de ces élèves alors que 39% seulement des élèves ont utilisé ce procédé parmi ceux qui ont participé. Cela laisse donc à penser que la première activité, grâce à son travail à partir d'une conversion du registre tableau de valeurs au registre graphique, a bien permis aux élèves de prendre conscience des limites d'un tableau de valeurs pour représenter une fonction. En effet, 61% des élèves ont eu besoin de donner des précisions complémentaires pour que leur camarade puisse retracer cette courbe le plus fidèlement possible. Ces précisions portent sur les variations de la fonction, ainsi que sur la pente de la tangente à la courbe en un point. Cependant, il faut rester conscient que l'expérimentation a été faite à petite échelle et que 75% des élèves n'ayant pas fait la première activité ne représente en réalité que 3 élèves sur les 4, ce qui est peu significatif par rapport aux 20 autres élèves qui l'ont faite. Cette activité a permis aux élèves récepteurs (et tous les élèves ont joué alternativement les deux rôles) de se poser la question sur les éléments qui leur manquaient pour tracer une courbe identique à celle décrite. Ils se sont rendus compte que les émetteurs eux-mêmes n'avaient finalement pas ces éléments. En y réfléchissant bien, ils ont compris que la courbe qui représente une fonction manque de précision et que les coordonnées des points ne peuvent être déterminées qu'avec la précision permise par le graphique. Devant les difficultés des élèves à décrire leur courbe puis à reproduire celle de leur camarade d'après leur description, on peut dire que la conversion du registre graphique au registre tableau de valeurs ou des variations et inversement, leur a permis d'établir les limites de la représentation d'une fonction par une courbe. L'objectif de cette activité a donc été atteint. Il est tout de même à noter qu'aucun élève émetteur n'a pensé à décrire la courbe à l'aide d'un tableau de valeurs avec un pas systématique très petit, 0,1 par exemple, ce qui aurait sûrement donné un résultat assez satisfaisant pour lui et aurait fait perdre son intérêt à cette activité. C'est d'ailleurs ce que j'ai voulu éviter en donnant un quadrillage peu précis.

Nous avons vu que les deux premières activités avaient rempli leur rôle en permettant de faire réfléchir les élèves sur les limites des informations données par un tableau de valeurs et par une courbe. Celles-ci figurent d'ailleurs dans une trace écrite dans leur cahier. Il reste maintenant à vérifier leur impact sur la prise de conscience de ces limites par les élèves. En effet, il ne s'agit pas seulement de leur faire pointer du doigt, mais de leur faire assimiler afin de les aider dans leur conception de la notion de fonction. Nous pourrions dire que les élèves ont eu cette prise de conscience s'ils ont été capable de réinvestir les bilans de ces deux activités. La troisième activité est donc le test final permettant d'évaluer la compréhension des élèves sur les limites des représentations d'une fonction par un tableau de valeurs ou une courbe.

Lorsqu'on regarde dans leur ensemble les résultats des élèves sur ces trois exercices (tableaux 1, 2 et 3), on constate que pour 11 questions sur 21 (soit 52% des questions), plus de la moitié des élèves ont répondu correctement. Ce bilan se montre donc encourageant et nous invite à conclure que les élèves ont su réinvestir leur travail des deux premières activités et leur ont bien permis de comprendre les limites de chacun des trois registres de représentation en jeu dans ces exercices.

Dans ces trois exercices, les questions les plus intéressantes à analyser sont celles où les réponses attendues étaient "on ne peut pas savoir", car ce sont elles qui permettent de voir si les élèves ont compris que l'information demandée manque dans la représentation de la fonction fournie dans l'énoncé. Plus de la moitié des élèves a répondu correctement pour 3 questions sur 12 seulement, soit 25%. On pourrait donc maintenant se dire que les élèves n'ont globalement pas compris quelles informations manquent dans chacune des représentations. Cependant un facteur important peut expliquer ces résultats. Si nous observons les réponses aux autres questions, celles auxquelles les réponses étaient "vraie" ou "fausse", nous constatons que les élèves obtiennent un score de 8 sur 9, soit 89%. Nous pouvons alors nous demander si les élèves ont tout simplement osé répondre "on ne peut pas savoir". Effectivement, il n'est pas habituel pour eux d'être autorisés à répondre de cette manière car cela ne fait habituellement pas partie du contrat didactique. Un élève qui répond qu'il "ne sait pas" à un exercice pense qu'il "n'est pas capable" de trouver la réponse. Cela lui a été inculqué dès l'école : on a toujours exigé de lui de trouver la réponse à un exercice ou à un problème et on lui a rarement laissé la possibilité de réfléchir à la possibilité qu'il n'y ait pas de réponse possible. Je pense alors qu'il peut s'avérer difficile pour les élèves d'affirmer qu'ils ne sont pas en mesure de savoir si l'affirmation est vraie ou fausse car ils ont du mal à



distinguer si cela provient d'une incapacité de leur part à répondre ou d'une impossibilité due à l'énoncé.

Nous avons vu que les élèves qui avaient participé à l'activité 3 n'avaient pas tous participé aux deux premières activités. Reprenons donc uniquement les questions précédentes et comparons les pourcentages de réussite entre les élèves qui avaient suivi les deux premières activités et ceux qui ne les avaient pas suivies ou n'en avaient suivi qu'une seule (tableaux 4, 5 et 6). Nous voyons que pour 7 questions sur 12, soit 58% des questions, les résultats obtenus par les élèves sont meilleurs lorsqu'ils ont suivi les deux premières activités. Il semble donc que les activités 1 et 2 ont effectivement permis aux élèves de mieux comprendre que des informations manquent dans la représentation d'une fonction par son expression algébrique, un tableau de valeurs ou sa courbe. Les différences des résultats entre ces élèves sont malgré tout très proches et ils ne permettent pas de tirer des conclusions très nettes.

Pour finir, nous constatons que les élèves ont su justifier qu'ils ne pouvaient pas répondre à certaines questions car des informations manquaient dans la représentation donnée. Pour l'exercice 1, il leur manquait les variations ou le signe de la fonction qui auraient pu être, selon eux, données par une courbe représentative. Pour l'exercice 2, le tableau de valeurs ne permettait pas de connaître le signe de la fonction sur son intervalle de définition ni ses variations ni tous les antécédents ou images car il ne permettait pas de savoir ce qu'il se passait entre deux couples de nombres donnés, d'après leurs justifications. Pour finir, dans l'exercice 3, les élèves ont trouvé que la courbe représentative de la fonction manquait de précision et ne donnait donc pas d'informations suffisantes sur son signe, les antécédents, les images et les variations. Les élèves ont donc apparemment compris que chaque représentation donnait des informations spécifiques et incomplètes sur la fonction et ont assez bien su le reformuler.

L'analyse des résultats de cette expérimentation nous permet finalement de valider l'hypothèse de départ. Nous savions, suite aux différentes lectures scientifiques, que les conversions de registre permettaient de mieux conceptualiser une notion. Nous savions également que pour accéder à la compréhension de l'objet mathématique, il fallait avoir conscience des intérêts et des limites de chaque registre de représentation sémiotique. Nous sommes maintenant en mesure de mieux comprendre ce mécanisme : cette expérimentation nous apprend que le travail sur les conversions de registre de représentation sémiotique d'une fonction aide à conceptualiser la notion de fonction car elle permet directement d'améliorer la compréhension des spécificités de chaque registre.

Nous pouvons maintenant nous demander comment cette expérimentation aurait pu être améliorée.

#### **4.2 Pistes d'amélioration de l'expérimentation et prolongements**

Afin d'aborder sereinement l'activité 3, je pense qu'il aurait été souhaitable que les élèves aient eu régulièrement des questions type QCM au préalable avec, à chaque fois, le choix 'on ne peut pas savoir'. Cette démarche serait de toute façon profitable aux élèves pour les raisons que nous avons déjà citées plus haut. La dernière activité aurait aussi pu prendre une forme différente afin de ne pas rajouter une difficulté aux élèves. Une autre manière de savoir si le travail sur les conversions de registre a été profitable aux élèves pour leur faire comprendre les limites de chacun des registres utilisés serait de leur poser les mêmes questions mais en changeant de fonction à chaque fois et en leur donnant pour chaque fonction l'expression algébrique, un tableau de valeurs et la représentation graphique. Il s'agirait ensuite de leur demander de cocher quelle(s) représentation(s) leur permettrait de répondre à la question. Si les élèves savaient quel registre choisir pour répondre, c'est qu'ils auraient compris quelles informations contient ou non chacun de ces registres. Il serait alors possible d'aller plus loin dans ce travail sur les conversions de registre. En effet, toujours dans l'objectif d'aider les élèves à conceptualiser la notion de fonction, nous pourrions leur donner des activités leur laissant le choix du registre dans lequel ils peuvent résoudre un problème. Nous comprenons mieux, maintenant, l'importance de la prise d'initiative des élèves dans les résolutions de problèmes : le choix du registre de résolution ne permet pas seulement à l'enseignant d'évaluer l'élève sur sa compréhension de la notion mais aussi, et surtout, il permet à l'élève d'améliorer sa conception de la notion.

Cette expérimentation aurait également pu être améliorée en donnant cette troisième activité à une autre classe, afin de comparer à plus grande échelle les résultats d'une classe ayant travaillé spécifiquement sur les conversions de registre à l'aide des activités 1 et 2 et ceux d'une autre classe n'ayant pas fait ce travail. Il aurait aussi été intéressant de reposer la question de départ aux élèves : « Qu'est-ce qu'une fonction ? ». Cela aurait permis de voir l'évolution de leurs réponses afin de mesurer l'impact du travail effectué.

Comme évoqué précédemment, cette expérimentation a été imaginée avant la déclaration du confinement au 17 mars. Les modalités de travail initiales ont donc été modifiées afin d'être adaptées à l'enseignement à distance. Des contraintes sont donc apparues et les élèves n'ont pas pu travailler en groupe, comme prévu, pour les activités 1 et 2. De plus, je n'ai pas

pu voir l'évolution des raisonnements des élèves mais seulement leurs productions. Les classes virtuelles nous ont cependant permis les mises en commun nécessaires et celles-ci ont été concluantes. Le manque d'organisation et de motivation de certains élèves durant la continuité pédagogique, ainsi qu'un équipement informatique parfois limité ou inexistant de certaines familles est également à prendre en compte. Tous les élèves ne peuvent donc pas participer aux classes virtuelles mises en place et certains élèves ne réalisent pas le travail demandé. L'expérimentation a donc été conduite sur une seule classe et celle-ci avait un effectif réduit de surcroît. Ces conditions ont rendu l'expérimentation difficile et ont pu fausser les résultats, ce qui contribue à la difficulté de conclure sur la problématique de départ.

Je tiens à dire, cependant, que ces trois activités ont permis à un certain nombre de mes élèves de se remettre au travail. Ces activités n'étant pas habituelles et, peut-être, moins laborieuses que d'autres, les ont motivés et intéressés. Il était plutôt bienvenu que, durant le confinement et coupés les uns les autres, les élèves puissent s'envoyer, par mon intermédiaire, des descriptions de courbe, les mathématiques devenant ainsi un prétexte pour rester en contact. En effet, beaucoup d'élèves n'ont pas hésité à écrire leur description sous forme d'une lettre, même s'ils ne connaissaient pas précisément le destinataire. Cela, en plus des mises en commun des travaux réalisés, a contribué, il me semble, à recréer une cohésion de groupe au sein de notre "classe virtuelle", qui n'avait jamais eu autant de participants !

### **4.3 Conclusion**

L'étude menée lors de ce mémoire a permis de préciser le rôle des conversions de registre de représentation sémiotique dans la conception de la notion de fonction. Celles-ci permettent de mieux comprendre les informations que donnent chacun de ces registres afin d'obtenir une vision complète de la notion, ce qui donne accès à la compréhension du concept.

Sur le plan professionnel, le travail de recherche réalisé pour mettre en place cette expérimentation m'a permis de mieux comprendre les mécanismes d'acquisition d'une notion en mathématiques. En effet, cette réflexion qui se prête particulièrement bien à la notion de fonction en raison du grand nombre de ses registres de représentations sémiotiques peut se transposer à toutes les autres notions mathématiques. Les résultats de cette expérience me montrent l'importance de prendre le temps de faire prendre conscience aux élèves des spécificités de chacun de ces registres en les manipulant grâce aux conversions de registre. C'est en effet à cette condition qu'ils pourront ensuite articuler les différents registres et avoir

accès au concept mathématique. Cela met clairement au premier plan le choix des exercices à donner aux élèves. Ainsi, il faut veiller à leur laisser l'initiative des conversions de registres et ne pas les restreindre seulement à une automatisation vide de sens, mais aussi leur donner la possibilité de choisir le registre approprié pour répondre à une question, afin de leur permettre d'accéder à la compréhension du concept.

## Bibliographie

- Benzekry, B., Fauve, C., Pilorge, F., Robert, A., Rousse, S., Vuong, M., De Zelicourt, C. (2011). *Repères-IREM*, 83, 5-37.
- Chesnais, A., Grenier-Boley, N., Horoks, J., Robert, A. (2015). Caractérisation didactique de l'évolution des contenus à enseigner lors des transitions – deux exemples d'une même notion abordée avant et après une transition (symétrie et fonction), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé3, 970-981.
- Coppé, S., Dorier, J.-L., Yavuz, I. (2006). Eléments d'analyse sur le programme de 2000 concernant l'enseignement des fonctions en seconde, *Petit x*, 71, 29-60.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, (pp.37-65).
- Duval, R. (2011). Idées directrices pour analyser les problèmes de compréhension, dans l'apprentissage des mathématiques, *XIII CIAEM, Recife, Brazil*.
- Eduscol (2016). Représenter. Repéré à :  
[https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences\\_travaillees/20/7/RA16\\_C4\\_MAT\\_H\\_representer\\_N.D\\_566207.pdf](https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/20/7/RA16_C4_MAT_H_representer_N.D_566207.pdf)
- Gaudin, N. (2002). Conceptions de fonction et registre de représentation : étude de cas au lycée, *For the Learning of Mathematics*, 22, pp.35-47.
- Programmes des lycées. *Bulletin officiel n°1 du 22 janvier 2019 – Ministère de l'éducation nationale*.

## Annexes

### 1 Annexe 1 : Quelques exemples de conversions de registre dans le cadre des fonctions

#### 1.1 Passer du registre algébrique au tableau de valeurs

Exemple (*Mathématiques 2<sup>nde</sup>*, collection Barbazzo, Hachette) :

On donne la fonction affine  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = 2x + 3$ .

Compléter, en calculant mentalement, le tableau de valeurs de la fonction  $f$  ci-dessous.

$x$	-1	0	1	2	10
$f(x)$					

#### 1.2 Passer du tableau de valeurs au registre algébrique

Exemple (*Maths 2<sup>nde</sup>*, lelivrescolaire.fr) :

1. Justifier que le tableau de valeurs suivant peut correspondre à une fonction affine  $f$ .

$x$	5	15	25
$f(x)$	-1	-9	-17

2. Déterminer alors l'expression algébrique de  $f$ .

#### 1.3 Passer du tableau de valeurs au registre graphique

Exemple (*Maths 2<sup>nde</sup>*, lelivrescolaire.fr) :

$x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$x^2$	0	0,04	0,16	0,36	0,64	1	1,44	1,96	2,56	3,24	4
$x^3$	0	0,008	0,064	0,216	0,512	1	1,728	2,744	4,096	5,832	8

c) À l'aide de ce tableau, tracer la représentation graphique de la fonction identité, de la fonction carré et de la fonction cube dans un même repère orthogonal.

### 1.4 Passer du registre graphique au tableau de valeurs

Exemple (*Maths 2<sup>nde</sup>*, lelivrescolaire.fr) :

1 Par lecture graphique, recopier et compléter le tableau de valeurs suivant.

Distance $d$ (en m)	1	5	10	15	20	30	40	50	60
Intensité $I$ (en dB)									



### 1.5 Passer du registre algébrique au registre graphique

Exemple (*Maths 2<sup>nde</sup>*, lelivrescolaire.fr) :

Dans un repère orthogonal du plan, représenter précisément les fonctions affines  $f$ ,  $g$ ,  $h$  et  $k$  définies respectivement sur  $\mathbb{R}$  par :

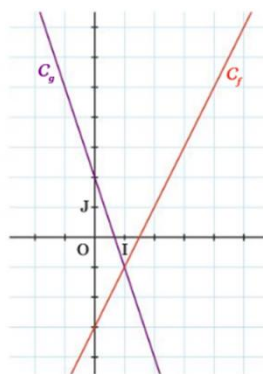
$$f(x) = \frac{4}{3}x - 2 ; g(x) = -\frac{5}{7}x ;$$

$$h(x) = \frac{-x + 11}{6} ; k(x) = \frac{7}{5}x - \frac{1}{5}.$$

### 1.6 Passer du registre graphique au registre algébrique

Exemple (*Maths 2<sup>nde</sup>*, lelivrescolaire.fr) :

Deux fonctions affines  $f$  et  $g$  ont été représentées dans le repère  $(O ; I, J)$  ci-dessous.



1. Retrouver l'expression algébrique de chacune de ces fonctions.



### 1.7 Passer du registre symbolique au registre algébrique

Exemple (*Mathématiques 2<sup>nde</sup>*, collection Barbazzo, Hachette) :

On considère la fonction affine  $f: x \mapsto -3x + 2$ .

1. Calculer l'image de 5 par  $f$ .
2. Calculer  $f(-2)$ .

### 1.8 Passer du registre algorithmique au registre algébrique

Exemple (*Déclic seconde*, Hachette) :

**87** ALGO  La fonction  $f$  est définie par l'algorithme ci-contre.

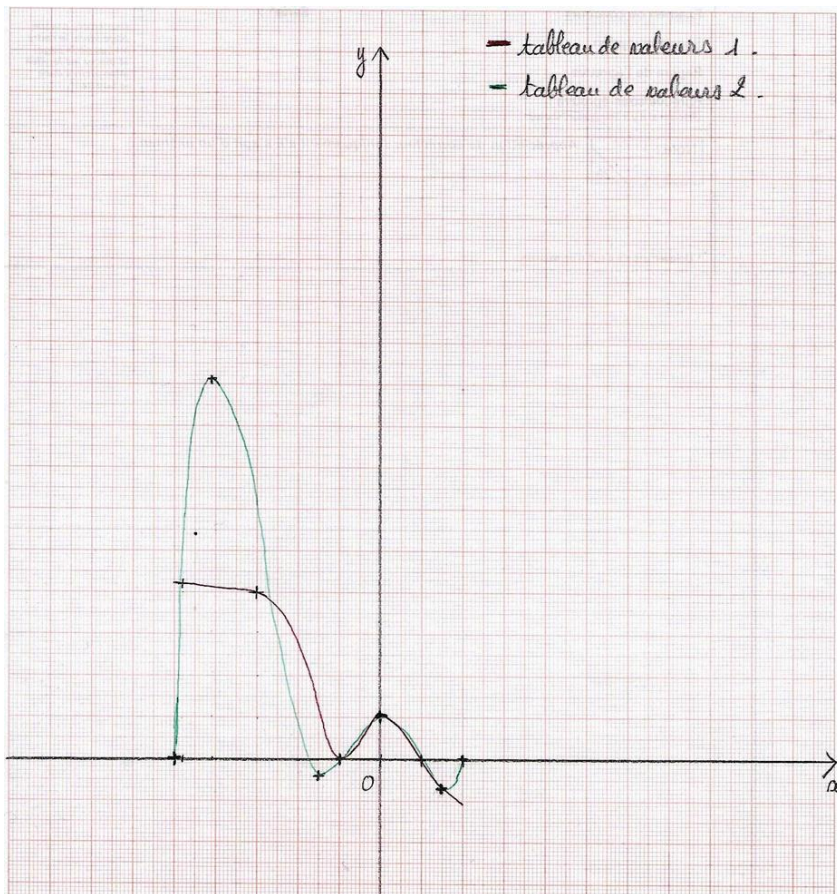
1. Quelle est l'image de 1 ?  
Et celle de 4 ?

2. Parmi les expressions Y1, Y2, Y3 entrées dans la calculatrice ci-contre, laquelle correspond à  $f(x)$  ?

Choisir un réel non nul  
Prendre l'inverse  
Prendre l'opposé  
Ajouter 2  
Renvoyer le résultat

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=1/X-2
\Y2=1/(X-2)
\Y3=2-1/X
\Y4=
\Y5=
```

## 2 Annexe 2 : Tracés de courbes attendus pour l'activité 1





## Année universitaire 2019-2020

### ***DU Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation***

#### ***Mention Second degré***

#### ***Parcours : Mathématiques***

**Titre de l'écrit scientifique réflexif** : Conversions de registre et apprentissage de la notion de fonction en seconde

**Auteur** : Virginie Decraemer Lafontaine

**Résumé** : La notion de fonction occupe une large place dans les programmes de mathématiques tout au long du lycée et reste pourtant difficile à conceptualiser pour les élèves de seconde. Les écrits scientifiques soulignent les difficultés liées aux différents modes de représentation d'une fonction et la nécessité de travailler sur le passage d'un registre de représentation à un autre afin de mieux comprendre ce qu'est une fonction. L'expérimentation décrite ici sous forme de trois activités montrera en quoi ces conversions de registre de représentation sémiotique permettent de mieux accéder au concept. La nécessité d'un travail sur les conversions de registre pour comprendre les mécanismes d'acquisition d'une notion en mathématiques est ainsi mise en lumière.

**Mots clés** : enseignement des mathématiques, 2<sup>nd</sup>e générale, concept de fonction, différentes représentations d'une fonction, changement de registre de représentation sémiotique

**Summary** : Function notion takes a very important place in the mathematics' teaching in high school but it's difficult to conceptualize for students. For researchers, it's important to work on using different registers of representation and pass from one to another to have a better idea of this concept. The experimentation described here shows, through three activities, in what it helps students to know what is a function. So the requirement of working on changing the register of semiotic representation to acquire a mathematic concept is emphasized.

**Key words** : mathematics teaching, high school 10<sup>th</sup> grade, function's concept, different representations of a function, changing of register of semiotic representation