



HAL
open science

La dualité des fractions : pour comprendre et mieux faire vivre le concept

Yann Tramier

► **To cite this version:**

Yann Tramier. La dualité des fractions : pour comprendre et mieux faire vivre le concept. Education. 2020. dumas-03231863

HAL Id: dumas-03231863

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-03231863>

Submitted on 21 May 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

Mémoire présenté par

Elodie SERVAN et Yann TRAMIER

Soutenu le
13 mai 2020 à l'INSPÉ d'Orléans

Pour obtenir le diplôme du

MASTER
MÉTIERS DE L'ENSEIGNEMENT, DE L'ÉDUCATION ET DE LA
FORMATION

Mention : 2nd degré
Discipline : Mathématiques

**LA DUALITE DES FRACTIONS : POUR
COMPRENDRE ET MIEUX FAIRE VIVRE LE CONCEPT**

Sous la direction d'Emmanuel CEPA, Maître de conférence à l'université
d'Orléans

Devant une commission d'examen composée de :

Mme Sandrine GRELLIER, présidente, professeure à l'université
d'Orléans

M. Emmanuel CEPA, directeur du mémoire, MCF université d'Orléans

M. Mathieu LUCAS, formateur à l'INSPÉ d'Orléans

Année universitaire 2019-2020



Mémoire de master

UNIVERSITE D'ORLEANS

INSPÉ Centre Val de Loire – FAUBOURG de BOURGOGNE

**MASTER MÉTIERS DE L'ENSEIGNEMENT, DE
L'ÉDUCATION ET DE LA FORMATION**

Elodie SERVAN et Yann TRAMIER

Sous la direction

d'Emmanuel CEPA, Maître de Conférence.

**LA DUALITE DES FRACTIONS : POUR
COMPRENDRE ET MIEUX FAIRE VIVRE LE CONCEPT.**

Année universitaire 2019-2020

Mémoire de Master 2

Discipline : Mathématiques

Remerciements

Nous tenons avant tout à remercier notre directeur de mémoire, Emmanuel Cépa, pour son travail, sa pédagogie, sa présence, ses précieux conseils et ses encouragements.

Nous remercions également, tous les professeurs de l'INSPÉ que nous avons eu le plaisir d'avoir en cours cette année, et en particulier Micael Vautrin, Vincent Paillet, Mathieu Lucas et Patrick Templereau pour leur complémentarité et leur investissement continu lors de notre formation.

Un grand merci à nos tuteurs, Vincent Gassot et Luc Pentecouteau, qui ont été de véritables piliers lors de cette année de stage, parfois difficile, passionnante, parfois les deux et dont les précieux conseils et encouragements nous ont fait progresser et prendre confiance en nous. Merci aux équipes pédagogiques et de direction des collèges Nicolas Robert et Saint-Exupery qui nous ont accueilli et dont la présence constante et bienveillante nous a guidé dans le métier.

Merci à nos proches, familles et amis pour leur soutien et confiance inébranlables ainsi qu'à nos collègues de promotion et à notre responsable de MEEF, Sandrine Grellier, qui nous a aidés, soutenus, épaulés en toutes circonstances et à chaque instant pour résoudre nos problèmes.

Enfin, nous ne pouvons terminer ces remerciements, sans mentionner les élèves de nos deux classes de 6^{ème}, car travailler avec eux a été tout à la fois agréable et motivant. Les avoir rencontrés nous a confortés dans notre envie de faire de l'enseignement, la voie que nous souhaitons suivre.

Listes des sigles et des abréviations

MEEF : Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation.

BO : Bulletin Officiel.

IREM : Institut de Recherche en Mathématiques.

CM1 : Cours Moyen de première année.

CM2 : Cours Moyen de deuxième année.

Socle commun : Le socle commun des connaissances et des compétences.

C1 : Critère 1.

C2 : Critère 2.

C3 : Critère 3.

Eval Diag : Evaluation diagnostique.

Eval Som : Evaluation sommative.

Sommaire

Remerciements	3
Listes des sigles et des abréviations	4
Sommaire	5
Introduction.....	7
1. Des cadres de recherche jusqu'au BO : pour le choix du protocole d'étude .	9
1.1 Les cadres de recherche et la didactique	9
1.1.1 La construction d'une séquence didactique.....	9
1.1.2 Le Concept, les schèmes et les situations	9
1.1.3 Le changement de registre	10
1.2 Fraction, BO et classe de 6 ^{ème}	12
1.3 Une compétence, trois critères et leurs indicateurs	14
1.3.1 Les évaluations	14
1.3.2 Critères et indicateurs	15
1.4 Le protocole d'étude.	17
1.4.1 Définition	17
1.4.2 Le triplet utilisé.....	17
1.4.3 Hypothèses de travail.....	17
1.4.4 Construction de la carte mentale	18
1.4.5 Structure de la carte d'identité	19
1.4.6 Présentation des outils utilisés pour l'interprétation	19
2. Séquence « dualité des fractions ».....	21
2.1 Description de la séquence de la classe 1	22
2.2 Description de la séquence de la classe 2	25
3. Analyses et interprétations	27
3.1 L'évaluation diagnostique : deux classes, une tendance	27
3.2 Evolution des résultats pour la classe 1	28
3.3 Trois groupes, trois évolutions	30
3.3.1 Groupe 1 : Quand l'élève trouve sa représentation d'affinité	30
3.3.2 Groupe 2 : Progrès et confiance en soi	33
3.3.3 Groupe 3 : Vers l'excellence	35
3.3.4 Bilan.....	37
Conclusion.....	38

Bibliographie.....	40
Sitographie	41
Annexe 1 : Evaluation diagnostique	42
Annexe 2 : Evaluation sommative	44
Annexe 3 : Exemples de carte d'identité de fractions usuelles pour la Classe 1 ..	46
Annexe 4 : Exemple de « Bingo » pour la Classe 1	47
Annexe 5 : Cartes mentales Classe 2 Elèves en difficulté	48
Annexe 6 : Cartes mentales Classe 2 Elèves performants	50
Annexe 7 : Carte mentale Classe 1 Groupe 1 premier exemple	52
Annexe 8 : Carte mentale Classe 1 Groupe 1 deuxième exemple	53
Annexe 9 : Carte mentale Classe 1 Groupe 2 premier exemple	54
Annexe 10 : Carte mentale Classe 1 Groupe 2 deuxième exemple	55
Annexe 11 : Carte mentale Classe 1 Groupe 3 premier exemple	56
Annexe 12 : Carte mentale Classe 1 Groupe 3 deuxième exemple	57

Introduction

Il ne suffit pas qu'il y ait un développement de chaque registre. Il faut également que les différents registres dont le sujet dispose, ou que l'enseignement s'efforce de lui faire acquérir (par exemple, celui de l'écriture algébrique), se coordonnent. Cette coordination est la condition pour la maîtrise de la compréhension dans la mesure où elle est la condition pour une différenciation réelle entre les objets mathématiques et leurs représentations : elle se manifeste par la capacité de reconnaître dans deux représentations différentes des représentations d'un même objet. Elle constitue un seuil dont le franchissement change radicalement l'attitude vis-à-vis d'une discipline, le sujet a conscience de franchir un seuil, d'acquérir le pouvoir d'initiative et de contrôle dans le déroulement des démarches.¹

Un tel constat ne peut bien évidemment pas se réduire au seul exemple de l'enseignement de l'écriture algébrique, il est tout à fait transposable à l'enseignement d'autres notions mathématiques et notamment l'enseignement des fractions.

Au sujet des fractions, il y a consensus dans le secondaire. Nombreux sont les professeurs de mathématiques qui déplorent le manque de compréhension des élèves, leurs difficultés à donner du sens à la fraction. Si les représentations de la fraction-partage et de la fraction-quotient semblent bien acquises séparément l'une de l'autre, le sens quant à lui est plus problématique et le lien entre les deux représentations souvent occulté. C'est en tout cas le constat que nous avons pu diagnostiquer dans nos deux classes de sixième au cours de nos stages, l'une au collège St Exupéry, Le Controis en Sologne dans le Loir et Cher et l'autre au collège Nicolas Robert de Vernouillet en Eure et Loir. Comment aider nos élèves à coordonner les différents registres de représentation de la fraction et utiliser la dualité des fractions pour mieux faire vivre ce concept ?

Nous tâcherons d'apporter une ou des réponses à notre interrogation en organisant notre travail en trois parties. Tout d'abord nous prendrons appui sur les connaissances didactiques des mathématiques et la place de l'enseignement des fractions pour les élèves de 6^{ème} afin d'établir un protocole permettant les expérimentations dans les deux classes. Puis nous tâcherons de décrire le plus précisément possible les séquences menées dans les deux classes ainsi que les objectifs, les attentes et les activités mises en place pour y parvenir. Enfin nous analyserons les résultats obtenus avant d'en proposer un bilan mettant en perspective les réussites et les limites de l'expérimentation, ce qui nous permettra de proposer les remédiations et les modifications à envisager.

¹ Duval, 1996, « Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? », *Recherches en didactiques des mathématiques*, 16(3), p.349-382.

La situation de confinement sanitaire effective le lundi 16 mars 2020 ne nous a pas permis de réaliser la deuxième évaluation diagnostique prévue dans les deux classes. L'évaluation sommative de la classe de Vernouillet n'a pas pu être réalisée en fin de séquence. Nous analyserons donc plus particulièrement les résultats d'expérimentations de la classe de Le Controis en Sologne.

1. Des cadres de recherche jusqu'au BO : pour le choix du protocole d'étude

1.1 Les cadres de recherche et la didactique

1.1.1 La construction d'une séquence didactique

Depuis les années 1980, de nombreux théoriciens et chercheurs comme G. Brousseau et G. Vergnaud ont étudié les processus de construction des objets du savoir. Les analyses mathématiques et épistémologiques de G. Brousseau, les analyses mathématiques et psychocognitives de G. Vergnaud ont notamment permis de fixer des cadres à la recherche et au développement de la didactique. Ils ont, en outre, souligné le rôle déterminant des deux acteurs, élève et enseignant, à propos de l'enseignement d'un objet de savoir. Ainsi, nous tâcherons de faire vivre au mieux les relations didactiques savoir, élèves, enseignant et de construire et organiser les situations d'apprentissage et d'enseignement des fractions car d'après J. Brun ne pas le faire :

Ce serait, par exemple, négliger le rôle central joué par le savoir respectivement, dans la relation didactique, la composition des situations et les interactions élèves-situations. Ce serait aussi négliger que tout système didactique est « chapeauté » par un projet social d'enseignement d'un savoir et, enfin, ce serait négliger le fait que le sujet cognitif que constitue l'élève est sollicité par et questionne un savoir mathématique institué par l'institution dans son rapport à la situation didactique ; l'élève est ainsi inscrit dans un processus de conversion connaissance→savoir→savoir institué.²

1.1.2 Le Concept, les schèmes et les situations

Dans l'ouvrage, « Didactiques des mathématiques », J. Brun fait référence à la définition de G. Vergnaud à propos du concept :

Un concept est un triplet de trois ensembles :

$$C = (S, I, \varepsilon)$$

S : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence) ;

I : l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié) ;

ε : l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitements (le signifiant).

Etudier le développement et le fonctionnement d'un concept, au cours de l'apprentissage ou lors de son utilisation, c'est nécessairement considérer ces trois plans à la fois.

² Conne, 1999, « Le cognitif en didactique des mathématiques », p. 210

Au vu de cette définition, il est évident que le concept des fractions défini par son triplet est un concept large car chacun des ensembles du triplet est un ensemble multiple. Nous focaliserons donc la suite du développement du concept de fraction avec le choix d'une situation problème associée à un invariant et à un type de représentation.

Puis, nous serons attentifs à la description des deux cas suivants :

- Le premier cas pour lequel les élèves disposeront des compétences nécessaires au traitement relativement immédiat de la situation, avec une conduite automatisée des actions organisée dans un schème³ unique.
- Le deuxième cas pour lequel les élèves seront obligés de réfléchir, d'explorer et de réaliser des tentatives les menant soit à la réussite soit à l'échec. Dans ce cas, nous commencerons par une étape diagnostique des schèmes efficaces et inefficaces utilisés par les élèves pour poursuivre sur une étape de guidage réflexif des élèves pour le choix d'un schème efficace ou la modification de leurs schèmes inefficaces.

1.1.3 Le changement de registre

The aim of this paper is to show the central place of the ability to change the register of any semiotic representation in the learning of mathematics. For that we shall tackle three topics. First, many of the difficulties encountered by students at different levels of their curriculum can be described and explained as a lack of coordination of register of representation. Secondly, conceptual knowledge is like the invariant of manifold semiotic representations. Thirdly, by taking into account different registers of representation we can define independent variables specific to cognitive contents, and so organize didactical sequences in order to develop the coordination of registers of representation.⁴

Dès 1993, R. Duval souligne la place centrale qu'occupe la capacité à passer d'un registre de représentation sémiotique⁵ à l'autre lors de l'apprentissage des mathématiques et aborde ainsi trois parties.

En premier lieu il constate que les difficultés rencontrées par les étudiants tout au long de leur parcours s'expliquent par un manque de coordination des registres de représentation.

Puis en second lieu, il affirme que la connaissance conceptuelle, l'idée ou la noésis, est comme l'invariant de plusieurs plans de représentation sémiotique,

³ Pour G. Vergnaud le schème est « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données. » Il ajoute « L'automatisation est évidemment l'une des manifestations les plus visibles du caractère invariant de l'organisation de l'action ».

⁴ Duval, « Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives », 5 (1993) (p37-65)-IREM de Strasbourg.

⁵ Duval, 1993, « Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives », p40 « Plusieurs registres de représentation sémiotique (figures, graphes, écriture symbolique, langue naturelle, etc...) ».

sémiosis ou signification. En d'autres termes « il faut affirmer que la noésis est inséparable de la sémiosis ».⁶

Enfin, il précise que la prise en considération de différents registres de représentation permet de définir des variables indépendantes spécifiques aux contenus cognitifs et ainsi nous permet d'organiser des séquences didactiques dont le but est de développer la coordination des registres de représentation.

Par conséquent, pour l'élaboration de la séquence didactique, nous choisirons les critères et indicateurs spécifiques à la compétence à enseigner. Puis en guise d'invariant nous enseignerons la coordination entre les registres de représentation fraction-quotient et fraction-partage. Enfin nous ferons construire aux élèves un outil individuel de représentation du concept des fractions, le signifiant, développant les différents registres de représentation abordés et leurs liens.

⁶ Duval, « Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives », 5 (1993) (p37-65)-IREM de Strasbourg.

1.2 Fraction, BO et classe de 6^{ème}

La classe de 6^{ème} est à la fois le premier niveau du collège et le dernier niveau du cycle 3 de consolidation qui comprend en outre les niveaux primaires de CM1 et CM2. Les fractions sont décrites dans la compétence « Représenter », domaine 1.5 du socle commun, qui est l'une des six compétences mathématiques du socle commun avec « Chercher », « Modéliser », « Raisonner », « Calculer » et « Communiquer ».

Représenter

- Utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages, ...
- Produire et utiliser diverses représentations des fractions simples et des nombres décimaux.
- Analyser une figure plane sous différents aspects (surface, contour de celle-ci, lignes et points).
- Reconnaître et utiliser des premiers éléments de codages d'une figure plane ou d'un solide.
- Utiliser et produire des représentations de solides et de situations spatiales.⁷

Dans cette prescription, le deuxième point de la compétence « Représenter » porte sur la production et l'utilisation de diverses fractions simples et de nombres décimaux. Il s'agit essentiellement de constituer et d'utiliser des représentations de fractions simples de référence sur l'ensemble du cycle 3. Pour le niveau 6^{ème} :

Les fractions sont à la fois objet d'étude et support pour l'introduction et l'apprentissage des nombres décimaux. Pour cette raison, on commence dès le CM1 l'étude des fractions simples (comme $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$) et des fractions décimales. Du CM1 à la 6e, on aborde différentes conceptions possibles de la fraction, du partage de grandeurs jusqu'au quotient de deux nombres entiers, qui sera étudié en 6e. Pour les nombres décimaux, les activités peuvent se limiter aux centièmes en début de cycle pour s'étendre aux dix-millièmes en 6e.⁸

On remarque que le programme de 6^{ème} ne mentionne pas l'aspect coordination ou interprétation des représentations des fractions qui est une dimension fondamentale pour la compréhension du concept de dualité. Seule exception est faite dans la partie « Ce que sait faire l'élève »⁹, se trouvant dans les attendus de fin

⁷ D'après le BO 2015 : <https://www.education.gouv.fr/bo/15/Special11/MENE1526483A.htm> (dernière consultation le 03/05/2020)

⁸ D'après le BO 2015 : <https://www.education.gouv.fr/bo/15/Special11/MENE1526483A.htm> (dernière consultation le 03/05/2020)

⁹ https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Attendus_et_reperes_C2-3-4/74/2/12-Maths-6e-attendus-eduscol_1114742.pdf (dernière consultation le 03/05/2020)

d'année où l'amorce d'une correspondance entre deux registres est énoncée avec le critère « Il sait faire le lien entre « la moitié de » et multiplié par $\frac{1}{2}$. »¹⁰

ATTENDUS DE FIN D'ANNÉE DE 6^E

NOMBRES ET CALCULS

• Ce que sait faire l'élève ♦ Type d'exercice ▪ Exemple d'énoncé Indication générale

Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux

Ce que sait faire l'élève

- Il sait utiliser les grands nombres entiers.
- Il utilise des nombres décimaux ayant au plus quatre décimales.
- Il sait faire le lien entre « la moitié de » et multiplier par $\frac{1}{2}$.
- Il ajoute des fractions décimales de même dénominateur.
- Il ajoute des fractions de même dénominateur.
- Il sait utiliser des fractions pour exprimer un quotient. Il comprend que $\frac{a}{b} \times b = a$.
- Il sait utiliser des fractions pour rendre compte de mesures de grandeurs.

11

Enfin la notion de sens et de lien est au centre même de l'enseignement des mathématiques car elle soulève la question de l'implicite, souvent difficile à percevoir pour les élèves.

¹⁰ https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Attendus_et_reperes_C2-3-4/74/2/12-Maths-6e-attendus-eduscol_1114742.pdf (dernière consultation le 03/05/2020)

¹¹ https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Attendus_et_reperes_C2-3-4/74/2/12-Maths-6e-attendus-eduscol_1114742.pdf (dernière consultation le 03/05/2020)

1.3 Une compétence, trois critères et leurs indicateurs

1.3.1 Les évaluations

L'analyse des résultats de l'évaluation diagnostique initiale ([Annexe 1](#)) nous a permis de construire une séquence adaptée à la spécificité de chacune de nos classes. Cette évaluation diagnostique aurait dû se réaliser à l'identique à deux moments distincts : l'évaluation diagnostique initiale avant le début de la séquence et l'évaluation diagnostique finale quelques semaines après la fin de la séquence. La comparaison des résultats des évaluations diagnostiques finale et initiale aurait permis de mesurer directement l'écart d'un même indicateur, complétant ainsi l'analyse critériée faite dans ce mémoire.

L'évaluation sommative ([Annexe 2](#)) permet de voir si les élèves ont gardé les acquis sur une durée de temps très courte et ont réinvesti les aspects (carte mentale, carte d'identité) développés dans la séquence. Les critères d'évaluation utilisés dans l'évaluation sommative sont les trois mêmes critères utilisés dans l'évaluation diagnostique mais le niveau d'exigence est supérieur.

1.3.2 Critères et indicateurs

La progression des élèves sera analysée sur le deuxième point de la compétence « Représenter »¹². Dans la partie analyse, on parlera de compétence « Représenter » pour décrire le deuxième point de la compétence « Représenter ». Ce point de la compétence est composé de critères.

Chaque critère est lui-même composé d'indicateurs. Chaque indicateur a été affecté d'un même barème dans les exercices des évaluations.

Nous pourrons ainsi observer une évolution de la réussite du point deux de la compétence « Représenter ».

Dans le cadre de notre expérimentation et dans un souci de clarté nous avons affecté un codage à chaque critère afin de faciliter l'analyse et l'interprétation des données au chapitre 3.

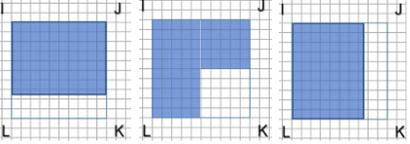
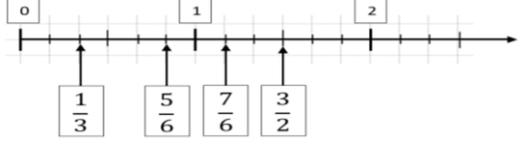
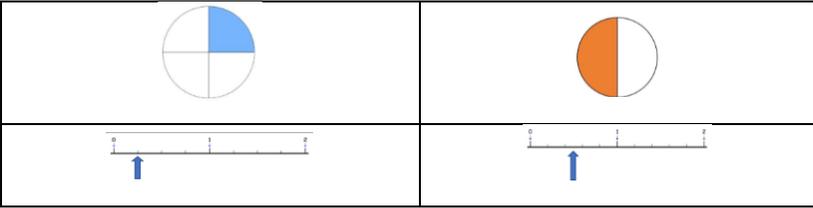
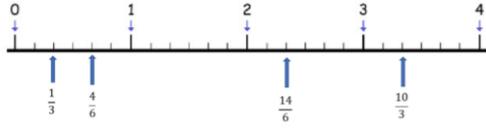
- C1 : Ajouter des fractions de même dénominateur ;
- C2 : Utiliser les fractions pour exprimer un quotient ;
- C3 : Utiliser les fractions pour rendre compte des mesures de grandeurs.

Les critères C2 et C3 correspondent aux deux registres de représentation des fractions de la dualité du concept des fractions.

Les résultats obtenus dans l'évaluation diagnostique seront comparés par la suite aux résultats obtenus dans l'évaluation sommative.

Les indicateurs sont regroupés dans le tableau ci-après.

¹² Produire et utiliser diverses représentations des fractions simples et des nombres décimaux.

Critères	Indicateurs	
	Evaluation diagnostique	Evaluation sommative
C1	Exercice 6 : <ul style="list-style-type: none"> $\frac{11}{9} = 1 + \frac{2}{9}$ $\frac{7}{2} = 1 + \frac{5}{2}$ 	Exercice 2 (question 1) : <ul style="list-style-type: none"> $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ $\frac{4}{9} + \frac{7}{9} = \frac{11}{9} = 1 + \frac{2}{9}$ $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$ $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1$ $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$ $\frac{7}{21} + \frac{14}{21} = 1$
C2	Exercice 2 : <ul style="list-style-type: none"> $\frac{5}{10} = \frac{50}{100}$ $\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$ Exercice 5 : <ul style="list-style-type: none"> $\frac{3}{10} = 0,3$ $\frac{4}{1000} = 0,004$ $\frac{5}{100} = 0,05$ Exercice 7 : $\frac{1}{4} = 0,25$	Exercice 1 : <ul style="list-style-type: none"> 0,25 $\frac{25}{100}$ ou $\frac{250}{1000}$ ou $\frac{2}{10} + \frac{5}{100}$ $1 \div 2$ $\frac{5}{10}$ ou $\frac{50}{100}$ ou $\frac{500}{1000}$ Exercice 2 (question 2) : <ul style="list-style-type: none"> $\frac{2}{7} \times 7 = 2$ $\frac{11}{4} \times 4 = 11$ $\frac{31}{51} \times 51 = 31$ $\frac{10}{3} \times 3 = 10$ $\frac{1}{2} \times 28 = 14$ $\frac{1}{4} \times 80 = 20$
C3	Exercice 1 : <ul style="list-style-type: none"> Réponse a) : $\frac{1}{3}$ ou $\frac{28}{84}$ Réponse b) : (au choix)  Exercice 3 : Tracer un segment de longueur 4 carreaux Exercice 4 : 	Exercice 1 :  Exercice 3 : 

1.4 Le protocole d'étude.

1.4.1 Définition

Dans le cadre de notre mémoire, nous définirons la dualité des fractions par le changement de registres de représentation sémiotique entre la fraction-partage et la fraction-quotient.

Dans la suite du mémoire, la classe de 6^{ème} du collège Saint-Exupéry sera nommée « classe 1 » et la classe de 6^{ème} du collège Nicolas Robert sera nommée « classe 2 ».

1.4.2 Le triplet utilisé

Pour mieux faire vivre le concept des fractions aux élèves de sixième, nous analyserons le concept au regard du triplet suivant :

- Une unique situation problème : le problème de dualité fraction-quotient et fraction-partage.
- Un invariant : il consistera à coordonner l'automatisation du changement de registres soit dans le sens de la fraction-quotient vers la fraction-partage soit dans le sens de la fraction-partage vers la fraction-quotient. Cette coordination nécessitera, le cas échéant, une étape d'ajustement et de remédiations des schèmes inefficaces chez certains élèves.
- Une modélisation du changement de registres par un collecteur de registres de représentation de type carte mentale et/ou carte d'identité.

1.4.3 Hypothèses de travail

Nous formulerons deux hypothèses de travail pour tenter de répondre à notre problématique : « Comment aider nos élèves à coordonner les différents registres de représentation de la fraction et utiliser la dualité des fractions pour mieux faire vivre ce concept ? »

- Hypothèse 1 : « Systématiser la dualité des fractions permet de faire vivre ce concept dans son ensemble ».

- Hypothèse 2 : « Faire construire une carte mentale individuelle regroupant les différentes représentations des fractions permet à chaque élève de s'approprier le concept de dualité ».

1.4.4 Construction de la carte mentale

La carte mentale sera élaborée avec les registres de représentations suivants :

- Nombre en écriture fractionnaire ;
- Nom de la fraction prononcé à l'oral ;
- Nombre correspondant en écriture décimale ;
- Schéma de la fraction-partage ;
- Décomposition du nombre décimal en une somme de fractions décimales ;
- Division correspondant au quotient ;
- Correspondance avec la fraction décimale équivalente ;
- Correspondance avec le pourcentage ;
- Construction de la droite graduée et le positionnement du nombre ;
- Nombre qui est multiplié par

Les cartes mentales des élèves de la classe 1 ont été réalisées en fin de séquence, après que les différents registres de représentation et leurs coordinations ont été abordés. Les productions, présentées dans ce mémoire, sont les premières versions non corrigées.

L'élaboration des cartes mentales de la classe 2 a été construite sur deux semaines, à partir d'un noyau de deux registres de représentation initiaux puis avec l'ajout progressif de nouveaux registres de représentation au cours de la séquence. Les productions de cette classe, présentées dans ce mémoire, sont les versions finales en l'état, à l'issue de la séquence.

1.4.5 Structure de la carte d'identité

Il s'agit d'une carte d'identité des fractions simples de références avec huit entrées, correspondant chacune à un registre de représentation :

- Ecrire le nom de la fraction tel que prononcé à l'oral ;
- Ecrire le nombre en écriture fractionnaire ;
- Ecrire la division en ligne correspondante ;
- Faire un schéma de la fraction partage ;
- Indiquer par une fraction le nom du repère sur une ligne graduée ;
- Ecrire le nombre décimal avec la convention du nombre à virgule ;
- Ecrire une fraction décimale ou une somme de fractions décimales ;
- Ecrire le pourcentage.

Le principe de l'exercice est de fournir une seule entrée aux élèves afin qu'ils remplissent les sept autres champs manquants et ainsi changent de registre de représentation.

1.4.6 Présentation des outils utilisés pour l'interprétation

Chaque indicateur est exprimé de la manière suivante :

- Réponse erronée ou absence de réponse : 0 ;
- Réponse partielle : 1 ;
- Réponse correcte : 2.

Un critère est la somme des indicateurs qui lui sont associés. Le pourcentage de réussite de chaque critère est déterminé par :

$$\% \text{ de réussite au critère} = \frac{\text{score obtenu par l'élève pour ce critère}}{\text{score maximal pouvant être obtenu pour ce critère}} \times 100$$

Le point 2 de la compétence « Représenter » est la moyenne, exprimée en pourcentage, des pourcentages moyens associés à chacun des trois critères.

Pour représenter une partie des progrès des élèves entre le début et la fin de la séquence, nous calculerons, pour chaque critère et pour le point 2 de la compétence « Représenter », le taux d'évolution défini ci-après :

$$\text{taux d'évolution} = \frac{\% \text{ de réussite finale} - \% \text{ de réussite initiale}}{\% \text{ de réussite initiale}}$$

On multipliera ce taux par 100 pour parler de pourcentage d'évolution.

Cependant, cette évolution ne tient pas compte de l'augmentation du niveau d'exigence demandé entre les deux évaluations. Il s'agit, pour un critère donné, d'un outil de comparaison entre les évaluations diagnostique et sommative.

Il sera interprété comme suit :

- Un pourcentage d'évolution positif traduit un progrès d'acquisition, pour le critère considéré, supérieur à l'augmentation du niveau d'exigence entre les évaluations diagnostique et sommative ;
- Un pourcentage d'évolution égal à 0 traduit un progrès d'acquisition correspondant à l'augmentation du niveau d'exigence entre les évaluations diagnostique et sommative ;
- Un pourcentage d'évolution négatif ne peut pas être interprété comme une régression s'il est proche de 0. Il reflètera une progression inférieure à l'augmentation du niveau d'exigence entre les évaluations diagnostique et sommative ;
- Un pourcentage d'évolution fortement négatif reflètera une régression des acquis.

2. Séquence « dualité des fractions »

Tout d'abord, la progressivité des séances d'enseignement des fractions dans chacune des classes a été choisie en fonction de son profil et des résultats à la première évaluation diagnostique.

De plus, cette séquence intervient à un moment où l'application du contrat didactique¹³ dans chaque groupe classe est fonctionnelle et harmonieuse. Ainsi dans chaque classe on retrouve :

- Des règles de gestion de classe ;
- Des rituels quotidiens de travail ;
- Un environnement favorable à la communication entre les élèves et l'enseignant d'une part, et entre pairs d'autre part.

Dans chaque classe, les élèves développent leur esprit de recherche, font des propositions et ont associé le fait que progresser était aussi lié à l'acceptation de leurs erreurs.

Quant à l'enseignant, il adopte une double posture : la première posture consiste à poser des questions aux élèves dans le but de les aiguiller dans leur réflexion et leurs réponses plutôt que de leur fournir les éléments de réponse et ainsi éviter à terme « l'effet Topaze ».¹⁴

Effet Topaze¹⁵

DIDACTIQUE

Défini par Guy Brousseau par référence à la pièce de Marcel Pagnol où le maître dicte : "des moutons...des moutons... moutonss. Je dis moutons. Etaient... étaieunnt. C'est-à-dire qu'il n'y avait pas qu'un moutonne. Il y avait plusieurs moutonssse." Il ne s'agit plus de comprendre et connaître le pluriel, mais d'entendre les sons.

Dans l'effet Topaze, le maître négocie l'adhésion de l'élève en transformant complètement la tâche. Il prend à sa charge l'essentiel du travail. Les connaissances nécessaires pour produire la bonne réponse ne sont plus les mêmes, au point que le savoir visé disparaît.

¹³ Il se définit par « L'ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus de l'élève, et de l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant. » Brousseau, 1980, p127.

¹⁴ G. Brousseau

¹⁵ <http://publimath.irem.univ-mrs.fr/glossaire/EF003.htm> (dernière consultation le 05/05/2020)

La seconde posture de l'enseignant consiste à maintenir une atmosphère bienveillante dans les interactions entre pairs.

2.1 Description de la séquence de la classe 1

La classe 1 compte 13 filles et 10 garçons. Elle est très hétérogène :

- Deux élèves survolent cette fin de cycle 3. Avec une dizaine d'autres élèves, ils forment la tête de classe.
- Six élèves ont des résultats plus variables.
- Cinq élèves sont en difficulté.

Il s'agit d'une classe très dynamique, curieuse, qui participe beaucoup mais qui nécessite d'être canalisée.

La séquence sur les fractions s'est déroulée sur deux semaines, la troisième semaine étant une semaine de rappel des notions sous la forme de « question flash » pour préparer l'évaluation de fin séquence. Son déroulement est détaillé dans le tableau ci-dessous :

Séances	Intitulés	Objectifs
Séance 1 10/02/2020 (1 h)	Introduction à la notion de fraction	Déterminer qu'il faut dix fois $\frac{1}{10}$ ou cent centièmes pour remplir une unité
	Dualité d'une fraction	Donner plusieurs représentations de la fraction $\frac{1}{2}$
Séance 2 11/02/2020 (2 h)	Vocabulaire	Savoir nommer et reconnaître le numérateur et le dénominateur d'une fraction
	Placer des fractions sur une demi-droite graduée	Rapporter la fraction à la notion d'unité et de partage équitable
	Dualité d'une fraction	Donner plusieurs représentations de la fraction $\frac{1}{4}$
	Définition de la fraction-quotient	Savoir et comprendre pourquoi $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a
Séance 3 14/02/2020 (1 h)	Addition de fractions de même dénominateur	Savoir et comprendre pourquoi $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
	Dualité d'une fraction	Donner plusieurs représentations de la fraction $\frac{3}{4}$
Séance 4 02/03/2020 (1 h)	Reconnaître des fractions égales	Savoir et comprendre pourquoi $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$
	Comparer des fractions	Ranger des fractions par ordre croissant ou décroissant
Séance 5 03/03/2020 (1h30)	Dualité d'une fraction	Donner plusieurs représentations de la fraction $\frac{1}{5}$
	Produit d'un nombre par une fraction	Résoudre des problèmes simples
	Dualité d'une fraction	Donner plusieurs représentations de la fraction $\frac{1}{3}$

	Elaboration d'une carte mentale	Compréhension des consignes
Du 06 au 10/03/2020 (3 séances)	Révisions en introduction des séances	Donner plusieurs représentations des fractions usuelles, réviser les différentes parties du cours

Tout au long de la séquence, l'accent a été mis sur les différents registres de représentation d'un même nombre rationnel. Pour cela, plusieurs stratégies ont été mises en place. Le déroulement d'une séance « type » est présenté dans le tableau ci-dessous :

Introduction	<ul style="list-style-type: none"> • Remplir une carte d'identité (Annexe 3) • Questions flashs sous forme d'un jeu : le Bingo (Annexe 4)
Correction des exercices	Toutes les représentations proposées par les élèves sont prises en compte et éventuellement complétées par le professeur.
Leçon	<ul style="list-style-type: none"> • Institutionnalisation mathématique par le professeur • Reformulation par les élèves
Carte mentale	<ul style="list-style-type: none"> • Elaboration abordée lors de l'avant-dernière séance

2.2 Description de la séquence de la classe 2

La classe 2 compte 14 filles et 15 garçons. Elle est très hétérogène :

- 12 élèves forment la tête de classe ;
- 8 élèves ont des résultats plus variables ;
- 9 élèves sont en difficulté.

Il s'agit d'une classe curieuse et intéressée qui participe et travaille dans le respect de chacun.

La séquence des fractions s'est inscrite dans une progression annuelle adaptée. Cette progression a tenu compte du fait que plus d'un tiers des élèves possédaient des faiblesses en numération de position pour les nombres supérieurs à dix milles et ce dès leur entrée en 6^{ème}. Le choix de renforcer la numération de position et d'utiliser le support des fractions pour rappeler la convention de l'écriture à virgule avec les fractions décimales a été décidé dès le mois de novembre.

La séquence sur les fractions s'est déroulée en trois temps et sur les trois semaines avant le confinement. Les notions abordées ont été réparties de la façon suivante :

- Semaine 1 : Fraction décimale, nombre décimal, convention de l'écriture à virgule, représentations des nombres sur une droite graduée.
- Semaine 2 : Fraction quotient, fraction partage, graduer une droite et placer des fractions et des nombres décimaux, début de la construction d'une carte mentale.
- Semaine 3 : Poursuite de l'élaboration de la carte mentale personnalisée avec modélisation du parcours mental de l'élève soit par un fléchage, une numérotation, des mots clefs ou une combinaison des trois.

Tous les élèves se sont retrouvés dans une situation de réflexion et d'exploration. Ils ont élaboré et amélioré leur carte mentale par une succession de tentatives. La modification de leurs schèmes ou le choix d'un meilleur schème a été explicité en partie avec la construction de la règle graduée sur laquelle il fallait placer des fractions et des nombres décimaux.

Des élèves en difficulté sur la première évaluation diagnostique ont réussi à représenter des cartes mentales satisfaisantes grâce notamment à une remédiation sur la maîtrise de la droite graduée qu'ils devaient dans un premier temps construire avant de positionner des fractions et des nombres décimaux. Cela a notamment été révélateur pour 3 élèves de la Classe 2 ([Annexe 5](#)). Considérés en difficulté après l'évaluation diagnostique, ils ont pris conscience des registres de représentation.

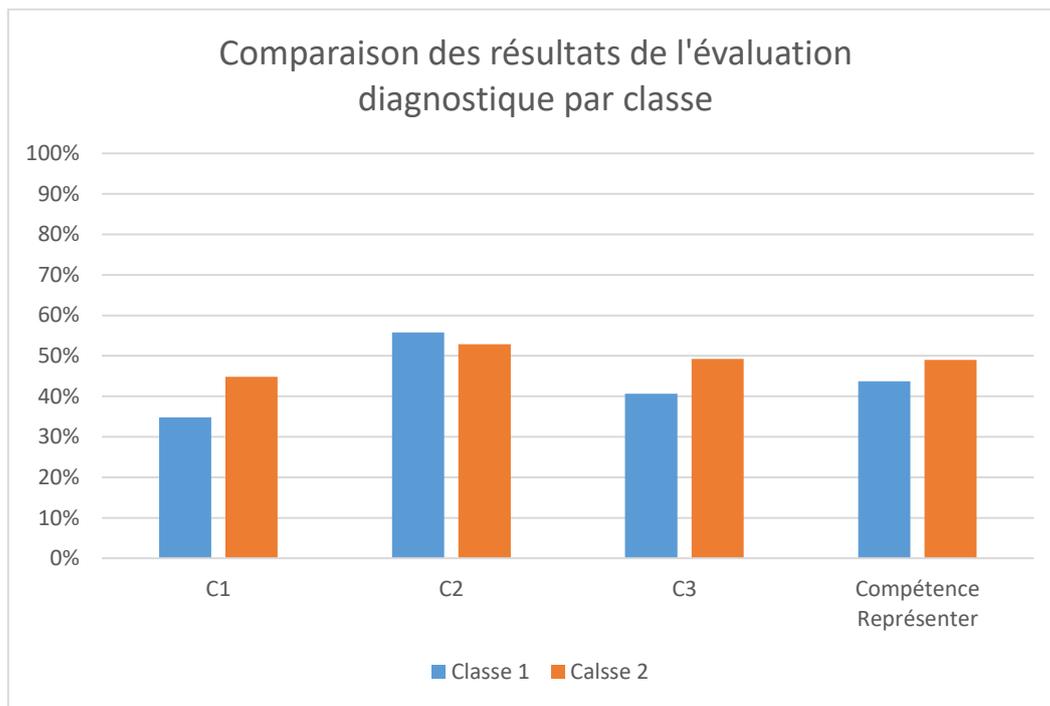
Des élèves, qui avaient une bonne maîtrise des représentations dans les différents registres lors de l'évaluation diagnostique, ont pu, grâce au travail quotidien sur la dualité des fractions, comprendre la correspondance terme à terme entre une addition de nombres fractionnaires avec un dénominateur commun et l'addition correspondante avec les nombres décimaux. Cela se traduit, notamment, pour deux élèves de la Classe 2, dans leur carte mentale ([Annexe 6](#)). Celles-ci représentent un parcours, entre les registres, numéroté et expliqué.

La séquence n'a pas pu être évaluée avec une évaluation sommative.

3. Analyses et interprétations

3.1 L'évaluation diagnostique : deux classes, une tendance

Les pourcentages moyens de réussite par critère, des résultats de l'évaluation diagnostique, sont présentés ci-dessous pour les deux classes.



Les deux classes suivent la même tendance pour l'ensemble des critères :

- Le critère 1 est le moins acquis ;
- Le critère 2 est le mieux acquis. Il est le seul critère dont le pourcentage de réussite dépasse les 50 % ;
- L'acquisition du critère 3 est similaire à l'acquisition de la compétence « Représenter » avec un pourcentage de réussite avoisinant les 45 %.

Par la suite, seuls les résultats de la classe 1 seront analysés, la classe 2 n'ayant pas pu effectuer l'évaluation sommative.

3.2 Evolution des résultats pour la classe 1

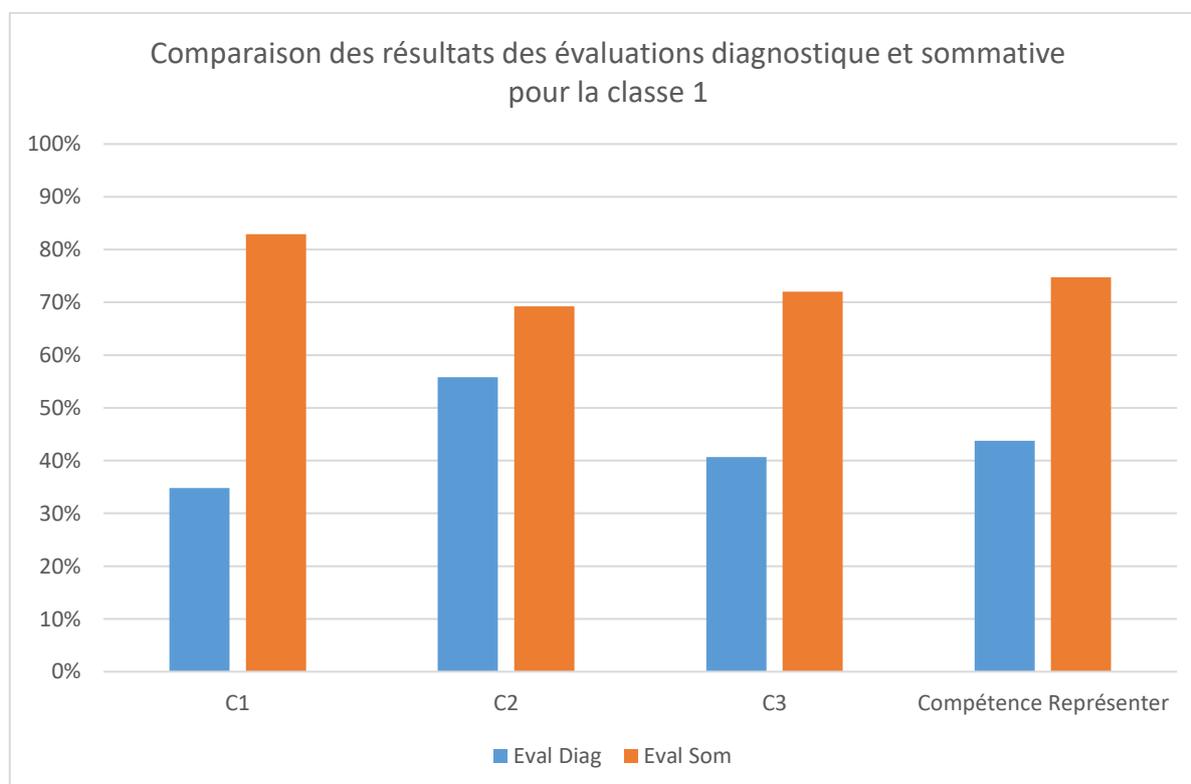
Dans cette classe, composée normalement de 23 élèves, les résultats de seulement 19 élèves seront pris en compte :

- Une élève a été absente deux semaines durant la séquence sur les fractions. Elle n'a donc pas effectué les évaluations.
- L'évaluation sommative ayant pu être faite le dernier jour avant le confinement, trois élèves étaient absents et le choix a été fait de ne pas leur faire rattraper l'évaluation à distance.

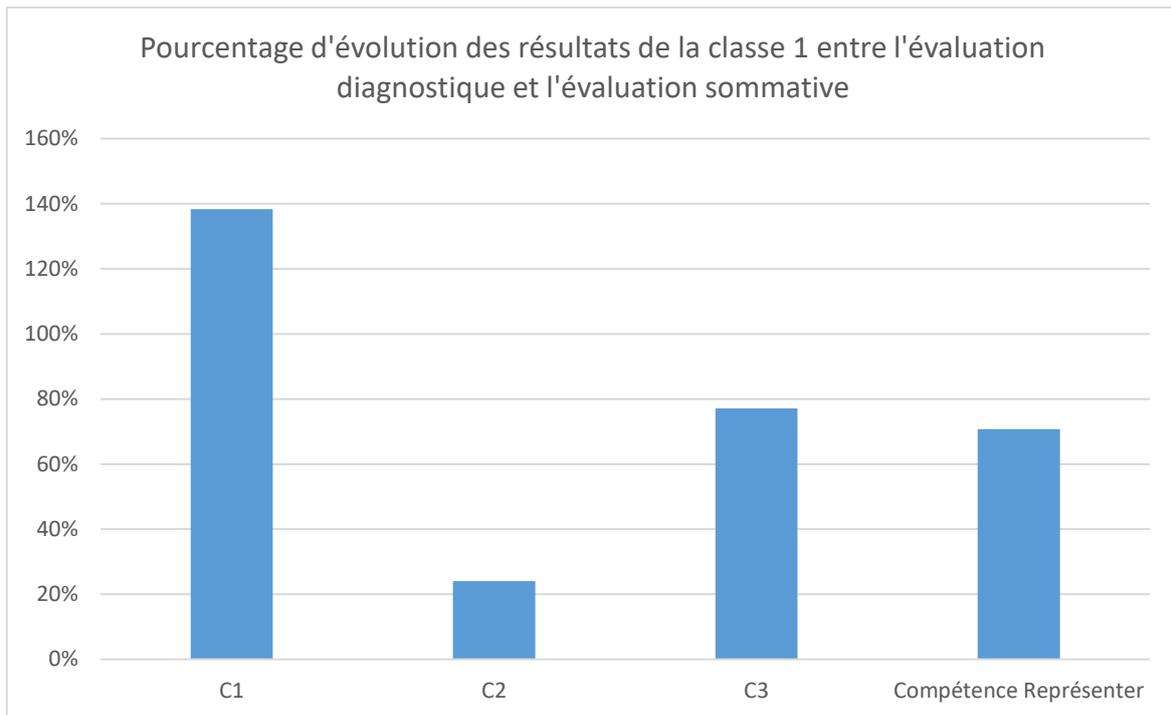
Donc seuls les résultats de 19 élèves seront analysés.

Dans le graphique ci-dessous, sont présentés les pourcentages moyens de réussite des différents critères pris en compte de la classe 1 ainsi que le pourcentage moyen de réussite de la compétence « Représenter ».

Par la suite, « Eval Diag » correspondra aux résultats de l'évaluation diagnostique, et « Eval Som » à ceux de l'évaluation sommative.



De manière générale, l'ensemble du groupe classe a progressé, atteignant un pourcentage de réussite de 75 % pour la compétence « Représenter ».



Le critère C1 présente le plus grand pourcentage d'évolution (avec 138 %). Au contraire, le critère C2 présente le plus faible pourcentage d'évolution (avec 24 %). Ce critère semblait déjà plutôt bien acquis avant le début de la séquence. A la vue de ce constat, il a été moins travaillé en cours. De plus, le niveau d'exigence sur ce critère était beaucoup plus élevé dans l'évaluation sommative.

Il faut garder à l'esprit que le progrès des élèves n'est pas intégralement représenté par le pourcentage d'évolution, car ce dernier n'intègre pas un pourcentage de correction positif qui reflèterait le fait que les élèves ont pallié à l'augmentation du niveau d'exigence entre les évaluations diagnostique et sommative.

La classe étant très hétérogène, le choix a été fait, afin d'analyser plus finement les progrès des élèves, de la scinder en trois groupes par rapport aux résultats de l'évaluation diagnostique selon le tableau suivant :

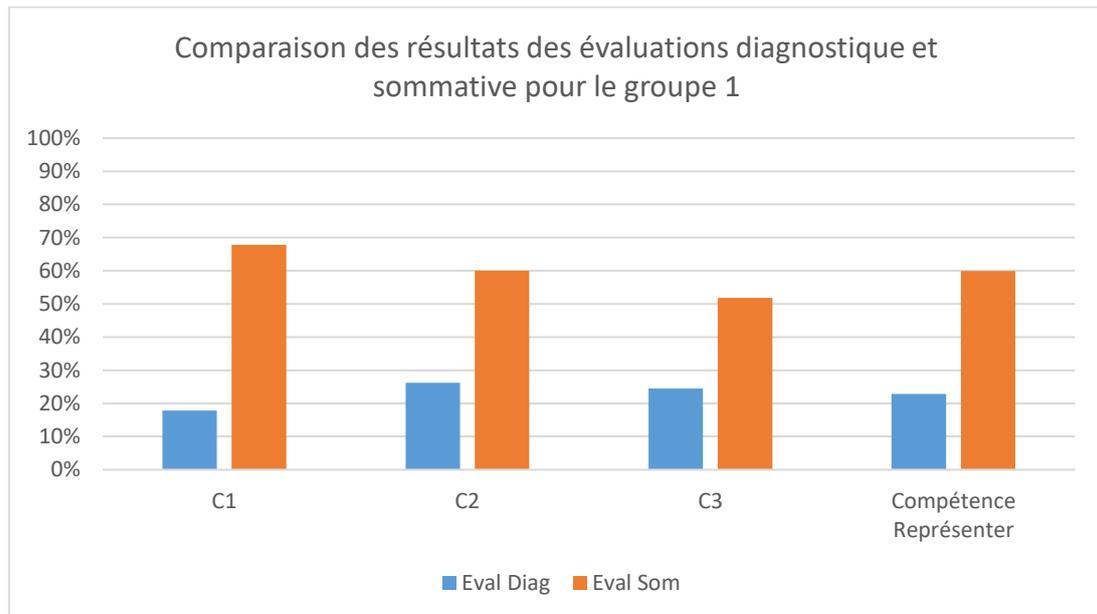
Groupe	Pourcentage de réussite à l'évaluation diagnostique	Nombre d'élèves
Groupe 1	Entre 0 et 33 %	7
Groupe 2	Entre 33 % et 66 %	7
Groupe 3	Entre 66 % et 100 %	5

3.3 Trois groupes, trois évolutions

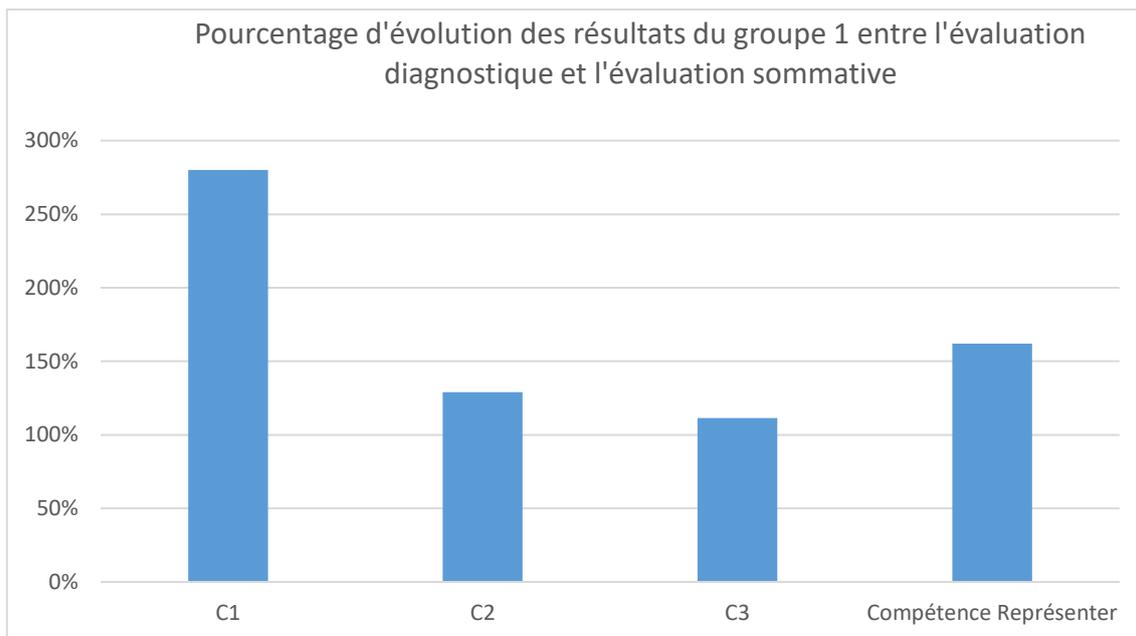
3.3.1 Groupe 1 : Quand l'élève trouve sa représentation d'affinité

Le groupe 1 est composé d'élèves ayant deux profils différents :

- Trois d'entre eux sont en difficulté scolaire ;
- Les quatre autres étaient effrayés par la notion de fraction.



Le pourcentage de réussite a augmenté pour l'ensemble des critères. La compétence « Représenter » est encore en cours d'acquisition pour ce groupe. Elle est acquise à 60 % (acquisition qui s'élevait à seulement 23 % pour l'évaluation diagnostique).



On note une évolution importante pour chacun des critères. Le pourcentage d'évolution de réussite de ces derniers est de 111 % pour le critère C3, de 129 % pour le critère C2 et atteint 280 % pour le critère C1.

Cela s'explique par le fait que la séquence a été pensée dans son intégralité et s'est déroulée pour travailler systématiquement la dualité des fractions à travers plusieurs changements de registres de représentation.

Ces élèves ont été, d'une part, particulièrement touchés par la présentation de différentes fractions sous forme de carte d'identité et, d'autre part, ils ont été les acteurs de la construction de leur carte mentale.

Leur participation orale à ces occasions leur a permis de prendre confiance en eux et de démystifier cette notion, la fraction, qui les effrayait. L'utilisation de différents registres de représentations les a particulièrement aidés car ils ont compris qu'ils avaient le choix d'utiliser les représentations avec lesquelles ils sont le plus à l'aise afin d'aborder les différentes situations utilisant le concept des fractions.

Les productions artistiques originales présentées en [Annexe 7](#) et en [Annexe 8](#) montrent leur motivation propre et leur investissement personnel. Ces cartes mentales ont été réalisées par deux élèves parmi ceux le plus en difficulté.

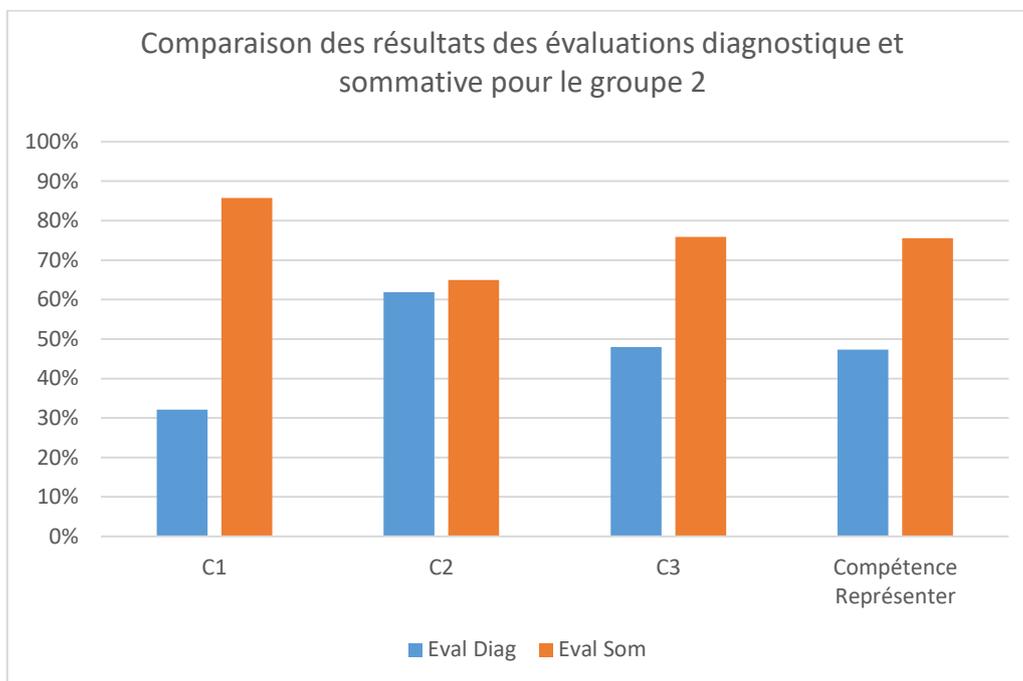
Cela leur a permis d'élargir leur conscience des différents registres de représentation des fractions et de corriger des schèmes inefficaces.

Le pourcentage d'évolution de réussite pour la compétence « Représenter » atteint 148 %, ce qui est la plus forte évolution des trois groupes. Cela peut être dû à diverses raisons :

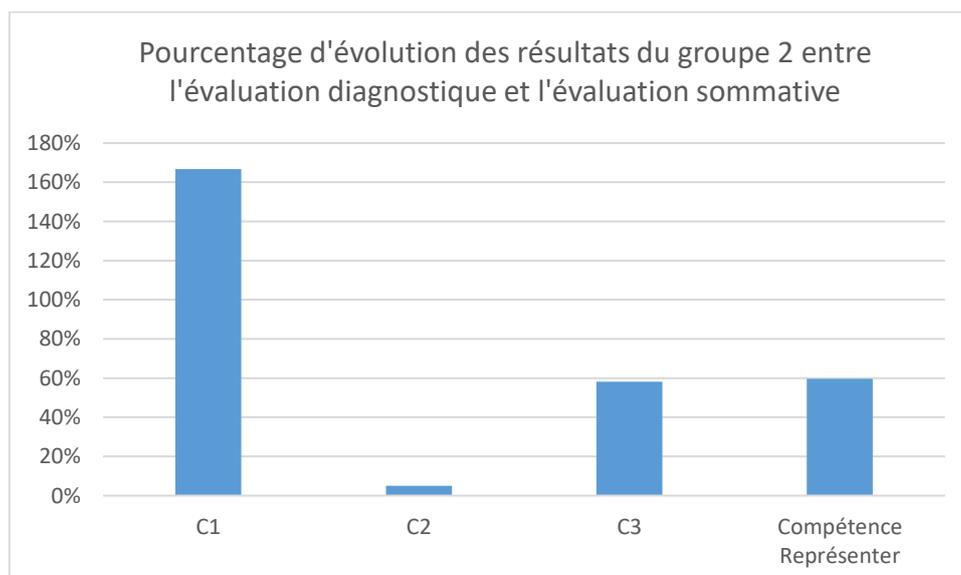
- Initialement, les élèves avaient peu de connaissances et d'acquis sur la notion de fraction ;
- La systématisation des changements de registres de représentation au cours de la séquence leur a ouvert la perspective de découvrir la multitude des registres de représentation, et en particulier leur registre de représentation d'affinité, qui leur permet d'appréhender la dualité du concept de fraction ;
- L'aspect ludique du dessin de la carte mentale et de la construction de cartes d'identité leur a fait surmonter leur peur et a ainsi facilité leur investissement dans l'apprentissage ;
- L'élaboration de la carte mentale en fin de séquence les a invités à reprendre la leçon dans son intégralité et à revoir certains exercices.

3.3.2 Groupe 2 : Progrès et confiance en soi

Ce groupe est composé de bons élèves qui manquent de confiance en eux et ont besoin d'être rassurés, notamment sur une notion comme la fraction.



On note une nette augmentation de la réussite pour les critères C1 et C3, et dans une moindre mesure pour le critère C2. La compétence « Représenter » est acquise à 76 % pour ce groupe (acquisition qui s'élevait à 47 % pour l'évaluation diagnostique).



Le critère C2 présente un pourcentage d'évolution de réussite de 5 %. Leur progrès est réel car il prend en compte à la fois le pourcentage d'évolution et l'augmentation du niveau d'exigence entre les évaluations diagnostique et sommative.

Le pourcentage d'évolution du critère C1, qui atteint 167 % s'explique notamment par l'importante différence entre le pourcentage de réussite de l'évaluation diagnostique pour ce critère de seulement 32 % et celui de l'évaluation sommative qui atteint 86 %. En effet, pour un critère donné, la marge de progression est d'autant plus importante que la réussite à l'évaluation diagnostique est faible.

Les élèves de ce groupe ont produit deux types de cartes mentales :

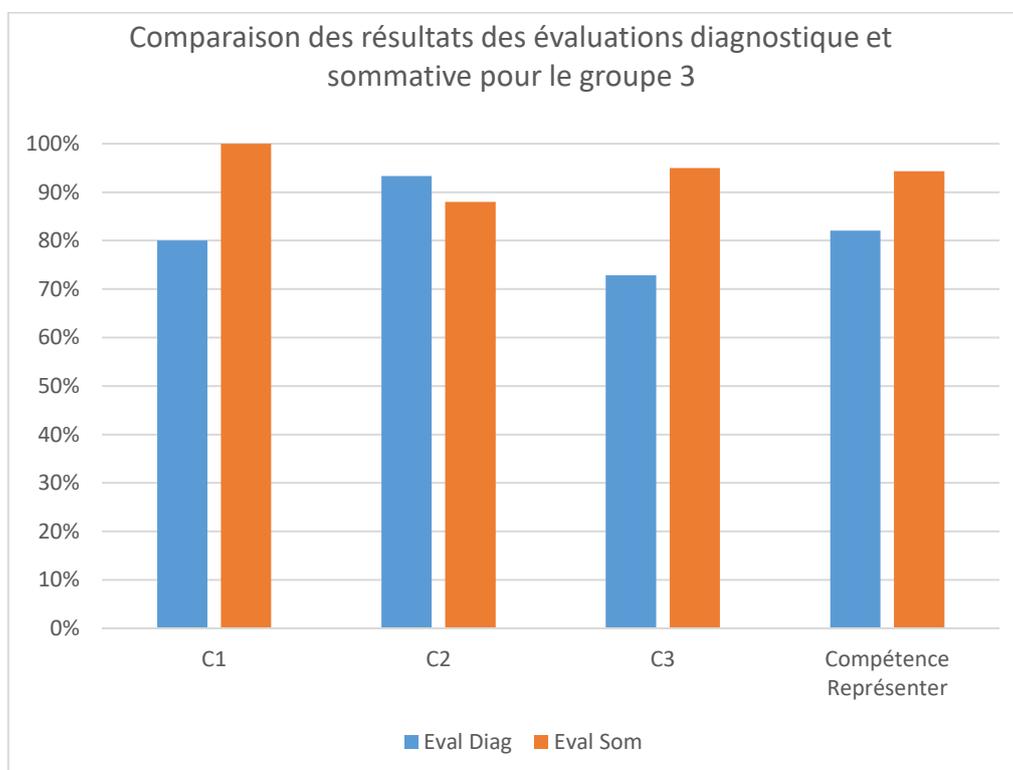
- Une vraie appropriation de la production (avec un exemple de carte mentale recto-verso en [Annexe 9](#)) ;
- Une présentation centrée sur le mot « Fraction » en [Annexe 10](#).

Le pourcentage d'évolution de la réussite de la compétence « Représenter » atteint quant à lui 60 %, ce qui est le taux médian des trois groupes. Cela peut être dû à diverses raisons :

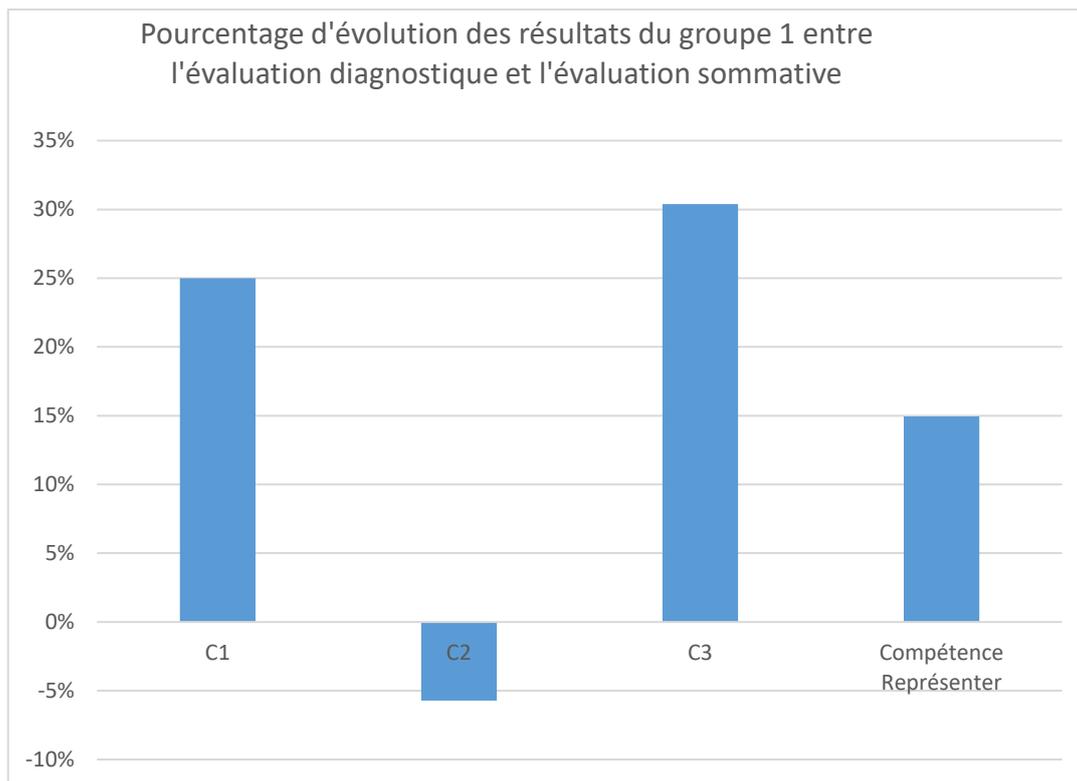
- Les élèves ont pris confiance en eux. Ils se sont appropriés différents registres de représentation des fractions et leurs liens grâce à la systématisation de leur utilisation au cours de la séquence ;
- Oraliser le passage entre le registre de représentation en fraction décimale et le registre de représentation en pourcentage a été un réel déclic observable en cours par la réaction spontanée de ces élèves.

3.3.3 Groupe 3 : Vers l'excellence

Ce groupe est composé de très bons élèves dont les compétences et les savoirs des deux premières années de cycle 3 sont acquis.



Les pourcentages de réussite des critères C1 et C3 ont légèrement augmenté. La compétence « Représenter », quant à elle, est acquise à 94 % pour ce groupe (acquisition qui était déjà à 82 % pour l'évaluation diagnostique).



Les pourcentages d'évolution de réussite des critères C1 et C3 sont les plus importants. En effet, il s'agissait des deux critères les « moins » réussis lors de l'évaluation diagnostique.

On note que le pourcentage d'évolution de réussite du critère C2 est négatif. Cela s'explique par :

- D'une part, le progrès au cours de la séquence a été inférieur à l'augmentation du niveau exigé dans l'évaluation sommative ;
- D'autre part, le pourcentage de réussite de ce critère a été particulièrement bien réussi dans l'évaluation diagnostique, atteignant 93 %. En effet, pour un critère donné, le potentiel de progression est d'autant plus faible que la réussite à l'évaluation diagnostique est forte.

Le pourcentage d'évolution de réussite de ce groupe d'élèves pour la compétence « Représenter » atteint 15 %. S'il semble moindre par rapport aux deux précédents groupes, le progrès est réel. Une véritable interprétation de cette séquence s'est reflétée dans l'élaboration des cartes mentales qui présentent une personnalisation du travail ([Annexe 11](#)), une organisation des savoirs structurée et une vraie réflexion sur les différentes représentations abordées ([Annexe 12](#)).

3.3.4 Bilan

On distingue deux types de progression :

- Une progression quantitative basée sur les résultats aux évaluations diagnostique et sommative. On remarque que la marge de progression est d'autant plus faible que les acquis initiaux sont importants.
- Une progression qualitative basée sur la capacité de réflexion et qui se révèle par l'étude des cartes mentales. La représentation est d'autant plus cohérente que les acquis initiaux sont maîtrisés.

Il semblerait que :

- La nature de cette progression soit propre à chaque individu ;
- Les élèves qui ont déjà d'importantes connaissances initiales soient plus sensibles à la coordination entre les différents registres de représentation et développent leur capacité d'analyse ;
- Pour les élèves ayant des connaissances initiales moins solides, la simple existence de différents registres de représentation ait été une découverte et un véritable changement d'attitude vers la consolidation de leurs connaissances.

Conclusion

Pour conclure, l'hypothèse 1 semble pouvoir être validée. Ainsi, nous affirmerons que « systématiser la dualité des fractions permet de faire vivre ce concept dans son ensemble ».

L'hypothèse 2, « faire construire une carte mentale individuelle regroupant les différentes représentations des fractions permet à chaque élève de s'approprier le concept de dualité », ne peut pas, quant à elle, être validée pour chaque individu. En effet, seul un groupe d'élève a validé cette hypothèse.

La prise de conscience par l'élève de l'existence de différents choix possibles (quand il exécute une décision en même temps qu'une action) ne suffit pas à garantir qu'il fasse un lien entre la décision et l'issue de l'action. Pour qu'il soit capable d'envisager de choisir en « connaissance de cause », il faut qu'il puisse essayer d'anticiper quelle est la portée des choix qu'il fait, c'est-à-dire des décisions qu'il prend.¹⁶

Faire le bon choix nécessite deux éléments, le premier élément est de pouvoir se représenter les choix possibles, en lien avec le second élément qui est la possibilité de se représenter les conséquences possibles de ses choix.

Si beaucoup de professeurs de mathématiques s'interrogent sur les difficultés que posent les fractions aux élèves dans le secondaire, mettant en avant les lacunes qui font boule de neige d'année en année ou encore le manque de sens donné à l'écriture d'un résultat, il semblerait que ce sens puisse trouver un écho positif dans l'esprit de nos élèves et ne soit pas si insaisissable qu'on pourrait le craindre.

Bien que nous n'ayons pas vérifié que les élèves pouvaient transposer leur connaissance des registres de représentation des fractions à d'autres situations problèmes autres que celui de la dualité, les activités de création de carte d'identité et de carte mentale à dessiner ont été pour un grand nombre d'entre eux une véritable prise de conscience. Elle leur a permis, de façon ludique, de développer des capacités, d'adopter des attitudes et d'acquérir des connaissances propres à la compétence mathématique fondamentale « Représenter ». Elle leur a aussi donné la possibilité de réfléchir aux liens entre les registres de représentation et à la manière dont ils pouvaient utiliser ces liens pour résoudre la situation problème de la dualité.

Ainsi de la peur de la difficulté que leur inspirait le simple mot fraction, les fameux « nombres à virgules », ou encore les pourcentages, certains de nos élèves

¹⁶ Margolinas, « De l'importance du vrai et du faux dans l'enseignement des mathématiques », p.112, 1993.

sont arrivés à nous exprimer que « Mais en fait, Madame, les fractions, c'est facile ! », ou que « C'était que ça que je ne comprenais pas, Monsieur ! ».

Les différents choix étaient mieux perçus, et point très satisfaisant, ils comprenaient comment les fractions pouvaient leur apporter de la logique et de la satisfaction alors qu'au début ils étaient, pour une bonne part, sceptiques, ne pensant pas qu'il y avait dans les fractions autant de matière à réflexion, compréhension voire amusement.

Certains élèves ont même été spontanément volontaires pour passer au tableau et proposer des corrections commentées alors que leur participation a été trop rare pour les autres séquences.

Enfin, bien que cette séquence n'ait pas fait l'unanimité chez nos élèves, mais quel chapitre de mathématiques fait l'unanimité ? Nous avons su que nous avons atteint notre but lorsque nous avons échangé avec eux. Un élève de la classe 2 a levé la main pour dire : « Mais en fait, Monsieur, les fractions c'est un peu comme un déguisement, il y a un même nombre qui porte plusieurs masques et nous on doit le trouver ». Ou, dans la classe C1, lors de l'oralisation des différentes représentations de la fraction un demi, plusieurs élèves se sont exclamés en une brève inspiration et l'une d'entre eux a pris la parole « Mais Madame, en fait, quand on voit 50 %, ça veut dire que c'est la moitié !!! J'avais jamais compris ça ! », réaction relayée par un autre élève « Du coup, il suffit de diviser par 2 quand on voit 50 % sur les prix ! ». Une vive discussion entre pairs s'est alors engagée, la professeure n'ayant désormais nul besoin d'intervenir, ils avaient compris le passage entre différents registres de représentation sémiotique.

Qu'un objet mathématique, qui date de la période des Egyptiens, soit à la fois associé à une tradition populaire qui se transmet dès le plus jeune âge, ou développé dans un dialogue spontané entre pairs, montre à quel point les concepts mathématiques associés à un modèle de leurs représentations ont le potentiel de susciter de l'intérêt, de créer une communication avec, entre et pour les élèves.

Bibliographie

Brun, F. (1996). *Didactiques des mathématiques*. Lausanne: Delachaux et Niestlé.

Conne, G. L. (1999). *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Montréal: Les presses de l'université de Montréal.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée / Registers of semiotic representation and cognitive function of thought. (I. d. Strasbourg, Éd.) *Annales de didactique et de sciences cognitives*, V 5, pp. 37-65.

Sitographie

« Annexe 2 Programme d'enseignement du cycle de consolidation (cycle 3) » [En ligne], 7 mai 2020 : <https://www.education.gouv.fr/bo/15/Special11/MENE1526483A.htm> (dernière consultation le 03/05/2020) Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015

« 12-Maths-6^e-attendus-eduscol_1114742.pdf » [En ligne], 24 avril 2019 : https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Attendus_et_reperes_C2-3-4/74/2/12-Maths-6e-attendus-eduscol_1114742.pdf (dernière consultation le 03/05/2020) 6e Mathématiques Attendus de fin d'année

« effet Topaze » [En ligne], 8 janvier 2017 : <http://publimath.irem.univ-mrs.fr/glossaire/EF003.htm> (dernière consultation le 05/05/2020) Effet Topaze Didactique

Annexe 1 : Evaluation diagnostique

[Revenir à 1.3.1 Les évaluations](#)

NOM :

Prénom :

Classe :

Date :

Test

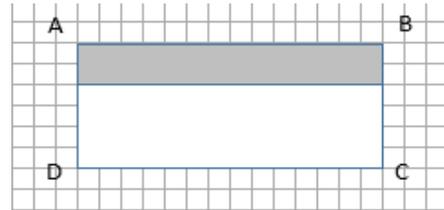
Les nombres en écritures fractionnaires

Exercice 1 :

a)

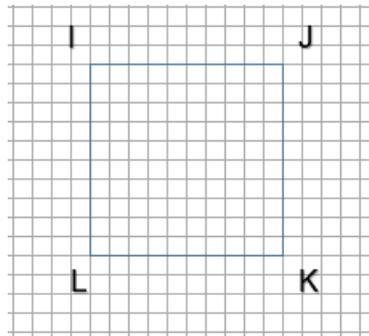
Compléter la phrase suivante avec la fraction qui convient :

La partie grisée du rectangle ADCB représente $\frac{\dots}{\dots}$ de la surface du rectangle



b)

Colorier les $\frac{3}{4}$ de la surface du carré IJKL.



Exercice 2 :

Compléter avec l'entier qui convient :

$$\frac{5}{10} = \frac{\dots}{100}$$

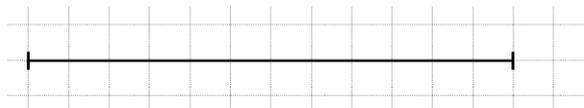
Compléter avec la fraction qui convient :

$$\frac{1}{4} \times 3 = \frac{\dots}{\dots}$$

Exercice 3 :

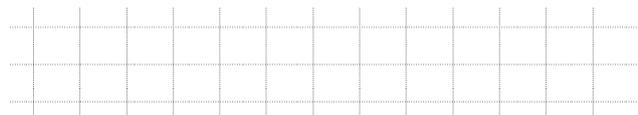
a)

Observer le segment donné.



b)

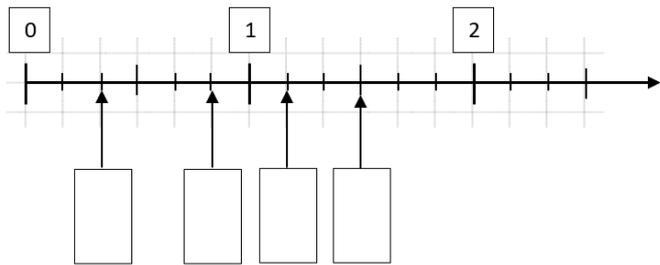
Construire un segment dont la longueur est $\frac{1}{3}$ de la longueur du segment donné en a).



Exercice 4 :

Compléter la droite graduée avec les fractions suivantes :

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}$$



Exercice 5 :

Observer les deux écritures d'un même nombre. En suivant l'exemple donné à la première ligne, compléter le tableau suivant :

Écriture fractionnaire	Écriture décimale
$\frac{54}{100}$	0,54
$\frac{3}{10}$...
$\frac{4}{1000}$...
...	0,05

Exercice 6 :

Compléter avec l'entier qui convient :

$$\frac{11}{9} = \dots + \frac{2}{9}$$

Compléter avec la fraction qui convient :

$$\frac{7}{2} = 1 + \frac{\dots}{\dots}$$

Exercice 7 :

Donner l'écriture décimale de $\frac{1}{4}$:

Annexe 2 : Evaluation sommative

[Revenir à 1.3.1 Les évaluations](#)

NOM :

Prénom :

Classe : 6^{ème}4

Date : 13/03/2020

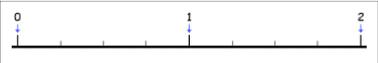
Devoir surveillé n°7
Séquence 3 : Fractions

Compétences évaluées	MI	MF	MS	TBM
D1.3.1 Utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux et les fractions simples				
D1.3.7 Produire et utiliser diverses représentations des fractions simples et des nombres décimaux				
D4.3 Ecrire, nommer, comparer et utiliser quelques fractions simples				

Observations :	Signature(s) :

Exercice 1 : / 7

Complète le tableau suivant :

Nom de la fraction		
Fraction		
Division	1 : 4	
Partage		
Position		
Ecriture décimale		0,5
Fraction(s) décimale(s)		
Pourcentage		

Exercice 2 : / 7

Compléter les opérations suivantes.

- 1) Addition de fractions (quand cela est possible, donne le résultat sous la forme d'un nombre entier ou d'une somme d'un entier et d'une fraction) : / 4

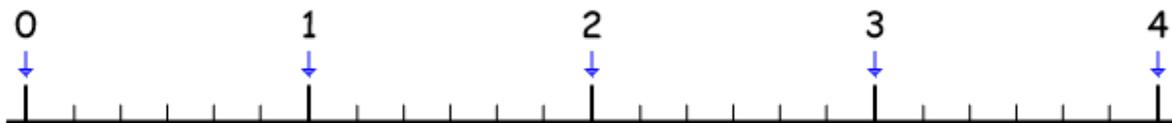
$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \dots\dots\dots$	$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \dots\dots\dots$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
$\frac{4}{9} + \frac{7}{9} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$	$\frac{2}{5} + \frac{\dots\dots\dots}{5} = \frac{5}{5} = 1$	$\frac{7}{21} + \dots\dots\dots = 1$

- 2) Multiplication d'une fraction par un nombre entier : /3

$\frac{2}{7} \times 7 = \dots\dots\dots$	$\frac{31}{51} \times 51 = \dots\dots\dots$	$\frac{1}{2} \times 28 = \dots\dots\dots$
$\dots\dots\dots \times 4 = 11$	$\dots\dots\dots \times 3 = 10$	$\frac{1}{4} \times 80 = \dots\dots\dots$

Exercice 3 : / 3

Placer les fractions suivantes sur la droite graduée : $\frac{4}{6}$; $\frac{14}{6}$; $\frac{10}{3}$; $\frac{1}{3}$.



Exercice 4 : / 3

Dans chaque cas, entourer la fraction la plus grande :

a) $\frac{7}{9}$ et $\frac{2}{9}$

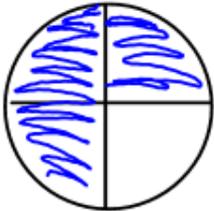
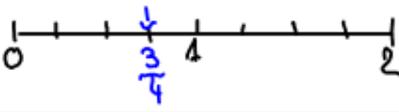
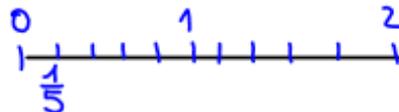
b) $\frac{7}{6}$ et $\frac{4}{3}$

c) $\frac{51}{100}$ et $\frac{501}{1000}$

Annexe 3 : Exemples de carte d'identité de fractions usuelles pour la Classe 1

[Revenir à 2.1 Description de la séquence de la Classe 1](#)

Voici deux exemples de carte d'identité complétée avec les élèves :

Trois quarts	Un cinquième
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$
3 : 4	1 ÷ 5
	
	
0,75	0,2
$\frac{75}{100} = \frac{750}{1000} = \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$	$\frac{20}{100} = \frac{2}{10}$
75%	20%

Dans le premier exemple, la représentation du nombre était sous forme fractionnaire : $\frac{3}{4}$. Pour le second exemple, le nombre était écrit en lettres. Puis les élèves avaient environ trois minutes pour donner toutes les autres représentations.

A chaque fois, une oralisation a été faite entre l'écriture en fraction décimale de dénominateur 100 et l'écriture sous forme de pourcentage, ce qui a permis un « déclic » chez de nombreux élèves qui ont l'habitude d'utiliser des pourcentages dans le langage courant mais ne savaient pas à quoi cela correspondait. Ils ont d'eux-mêmes, grâce à cette oralisation, fait le rapport entre 50% et « la moitié de ».

Annexe 4 : Exemple de « Bingo » pour la Classe 1

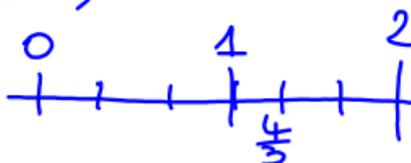
[Revenir à 2.1 Description de la séquence de la Classe 1](#)

Les élèves complètent aléatoirement une grille 3 x 3 qu'ils ont eux-mêmes construite par les chiffres de 1 à 9. Chaque question correspond à un chiffre aléatoire. Les élèves sont très actifs et clairement motivés par ce rituel.

Lundi 9 mars 2020

BINGO !

3) Donner l'écriture décimale de un demi. $0,5$

9) Sur une droite graduée, placer $\frac{4}{3}$. 

1) A quel pourcentage correspond $\frac{1}{4}$? 25%

6) Donner deux représentations de $\frac{3}{4}$.  75%  $0,75$ $\frac{750}{1000}$ $\frac{7}{10} + \frac{5}{100}$ $3:4$

2) Calculer $\frac{5}{11} + \frac{6}{11}$.

7) Quelle est la fraction la plus grande entre $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{3}$?

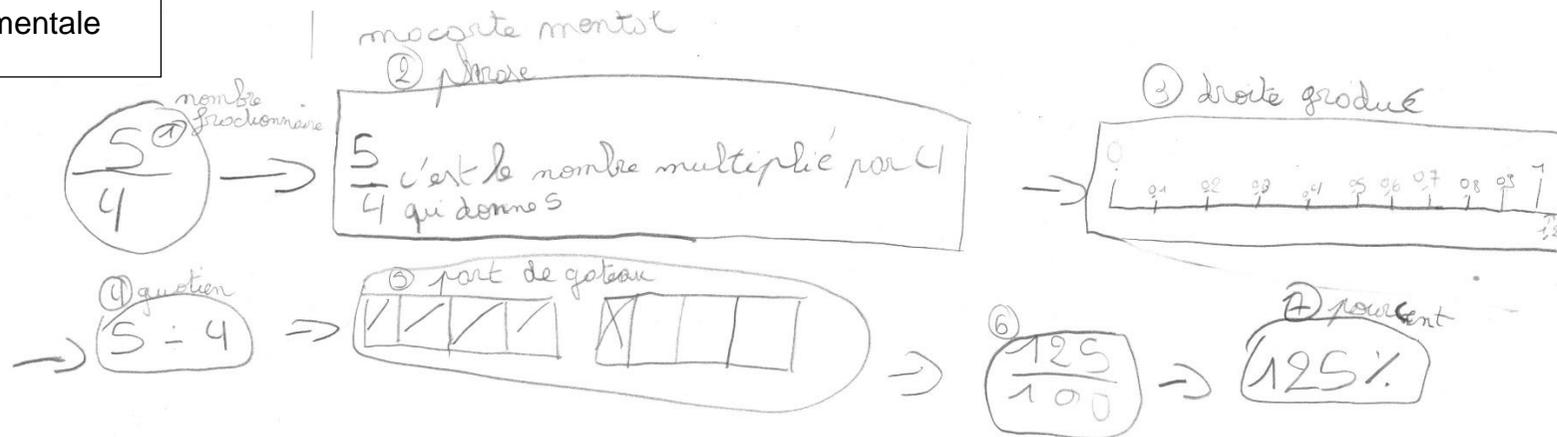
8) Calculer $\frac{2}{3}$ de 24.

4) Écrire 0,719 sous forme de fraction décimale.

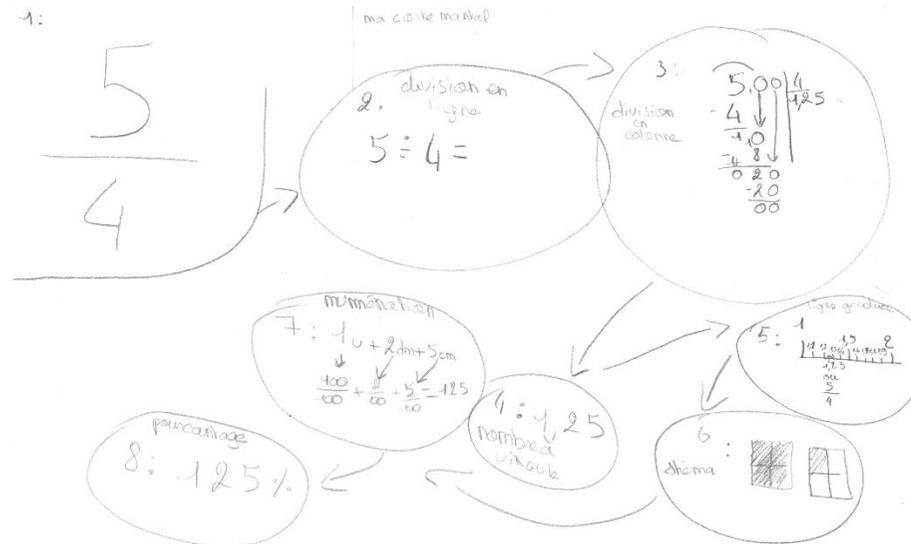
Annexe 5 : Cartes mentales Classe 2 Elèves en difficulté

Premier exemple
de carte mentale

[Revenir à 2.2 Description de la séquence de la classe 2](#)



Deuxième exemple
de carte mentale



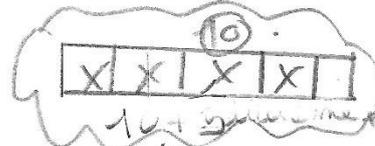
Troisième exemple
de carte mentale

$$\frac{5}{4} \text{ (1)}$$

$$5 \div 4 \text{ (2)}$$

10 et 25 centimes (3)

$$1,25 \text{ (4)}$$

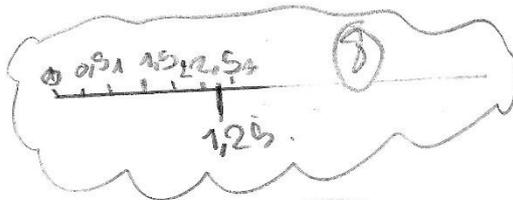


10 + 25 centimes + 25 centimes + 25 centimes = 100 centimes

$$\frac{125}{100} \text{ (5)}$$

ça se lit sur la (6)

$$125\% \text{ (7)}$$

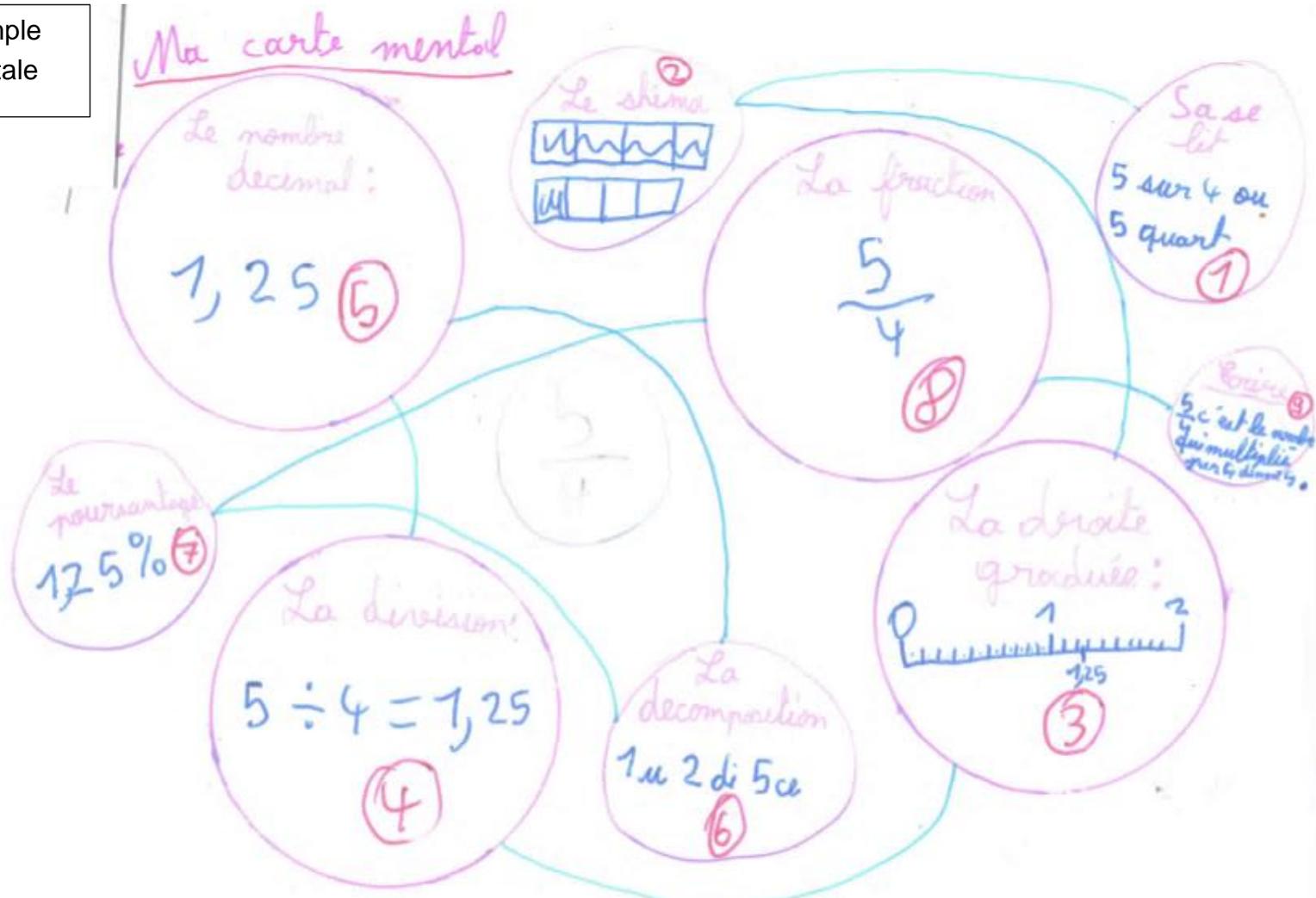


$\frac{5}{4}$ c'est le nombre qui multiplié par 4 donne 5.

Annexe 6 : Cartes mentales Classe 2 Elèves performants

[Revenir à 2.2 Description de la séquence de la classe 2](#)

Premier exemple
de carte mentale



Deuxième exemple
de carte mentale

1- La base lit $\frac{5}{4}$.

2- Le nombre décimale est 1,25.

3- Le pourcentage est 125%.

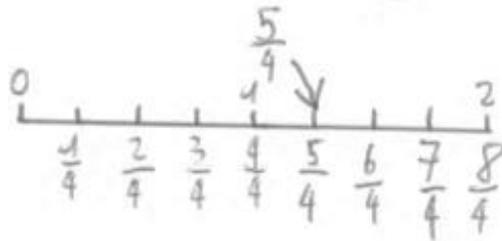
4- Le partage est .

5- Le calcul posé est $5 \div 4$.

6- La numérisation est $1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$.

7- La fraction décimale est $\frac{125}{100}$.

10-



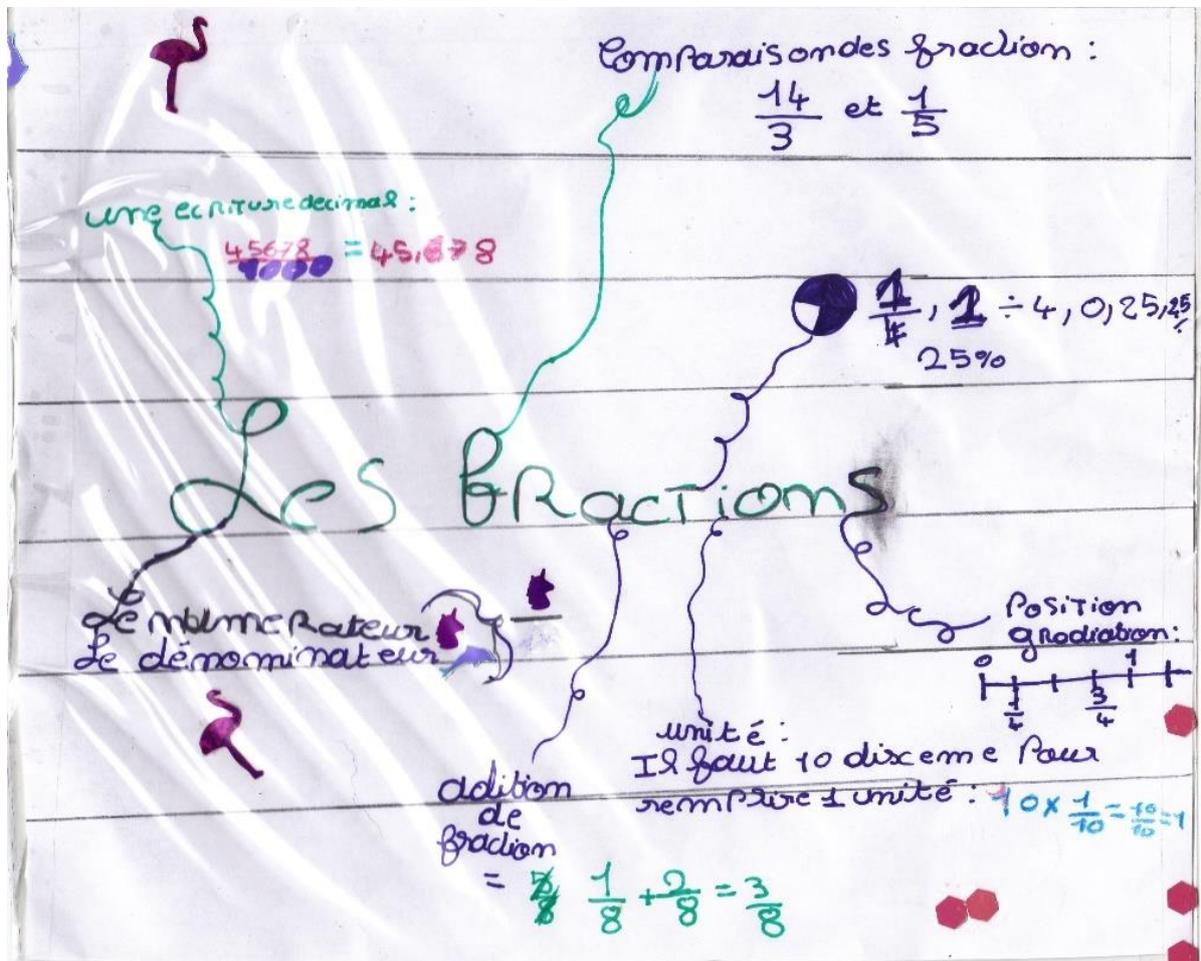
8- La division posée est $5 \overline{)4}$.

9- $\frac{\text{numérateur en haut}}{\text{dénominateur en bas}}$

Ma carte mentale de $\frac{5}{4}$

Annexe 7 : Carte mentale Classe 1 Groupe 1 premier exemple

[Revenir à 3.3.1 Groupe 1 : Quand l'élève trouve sa représentation d'affinité](#)



Annexe 8 : Carte mentale Classe 1 Groupe 1 deuxième exemple

[Revenir à 3.3.1 Groupe 1 : Quand l'élève trouve sa représentation d'affinité](#)

MÖTLEY CRÜE

Division:
$$\begin{array}{r} 598 \\ -56 \\ \hline 38 \\ -35 \\ \hline 3 \end{array}$$
 ↑ dividende
 ↑ diviseur
 ↑ quotient (598 ÷ 56)
 ↑ reste
 (division euclidienne)
 écriture Décimale!

au 2e signe ÷
 exemple: $7 \frac{3}{2} = 3,5$
 $14 < 14, 2 < 15$
 $14,1 < 14, 15 < 14, 2$

addition fraction:
 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
 $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$
 $\frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$

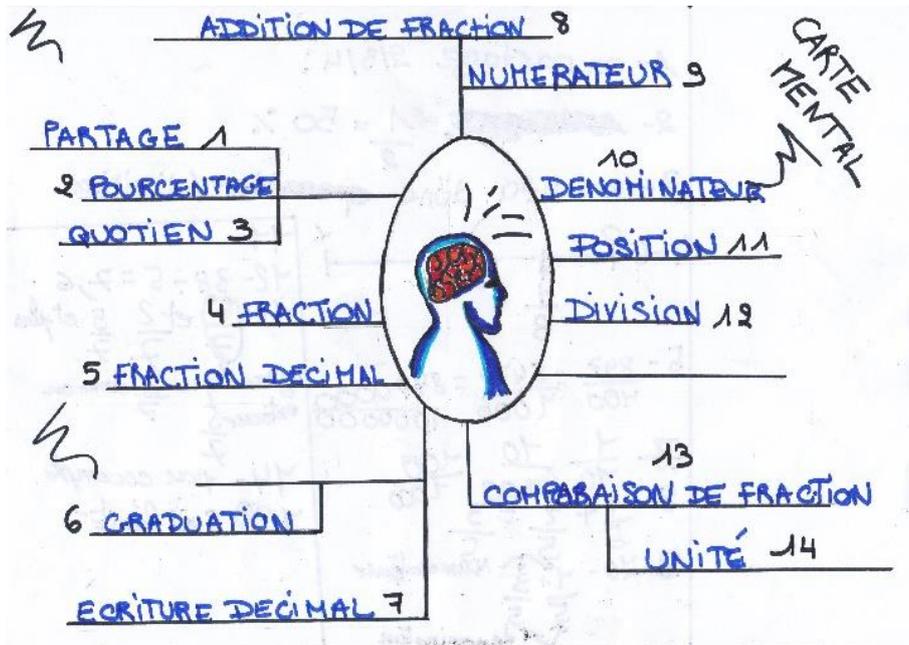
LE DENOMINATEUR
 3 → Numérateur
 5 → Dénominateur

6%, 9%, 25%, 3%, 17%, 22%

Annexe 9 : Carte mentale Classe 1 Groupe 2 premier exemple

[Revenir à 3.3.2 Groupe 2 : Progrès et confiance en soi](#)

Recto :



Verso

1- on partage $\frac{2}{3}/4$

2- ~~1/2 = 50%~~ $\frac{1}{2} = 50\%$

3- Resulta d'une ~~operation~~ / division

4- 6- $\frac{1}{3}$

5- $\frac{847}{400} = \frac{8470}{4000} = \frac{8470000}{10000000}$

7- $\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{100}{1000}$

8- $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

9- 10- $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$
↑ Numerateur
 ↓ Denominateur

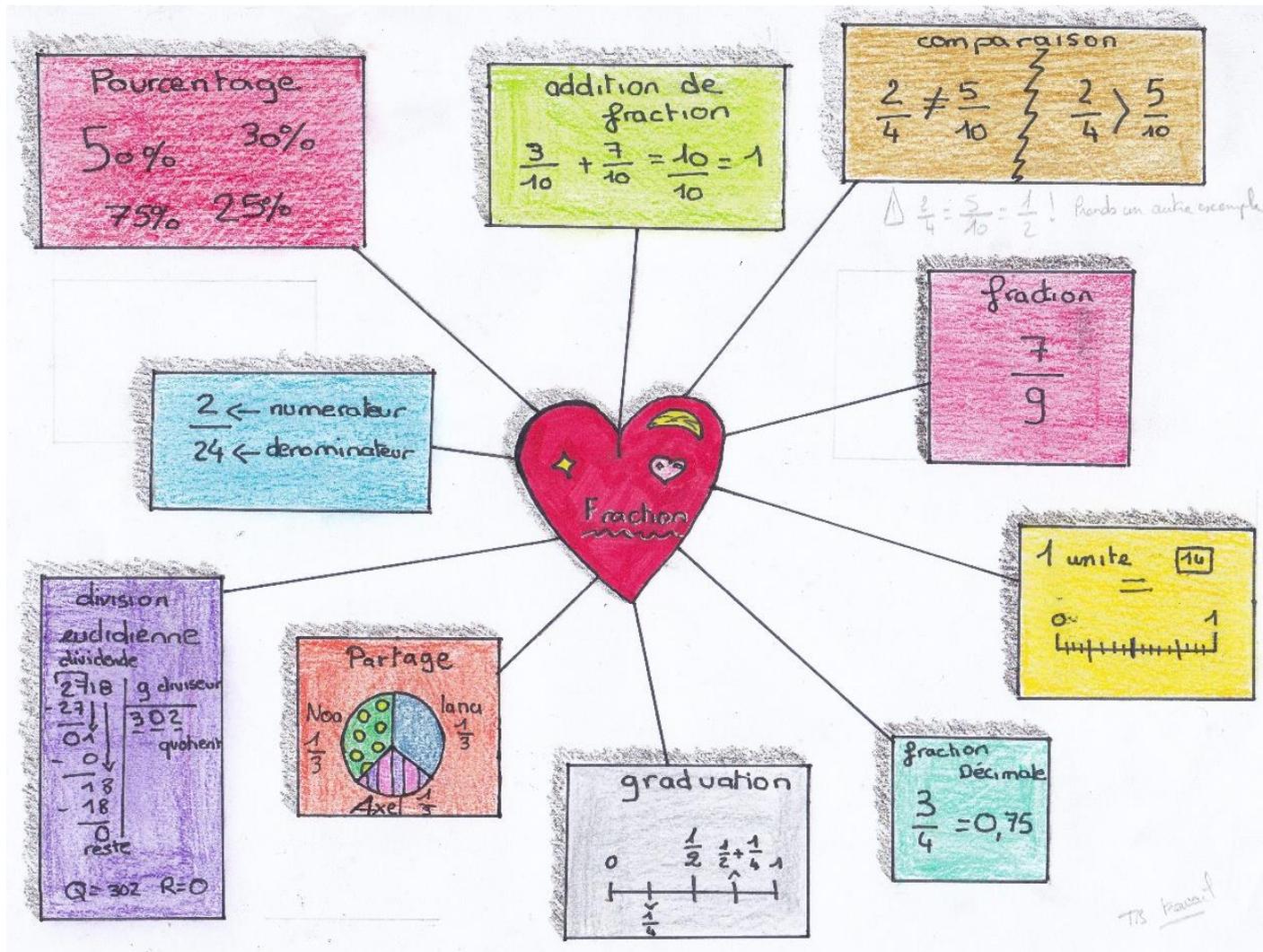
11- $38 \div 5 = 7,6$

13- $\frac{5}{7}$ et $\frac{2}{7}$ et plus
 grand que $\frac{2}{7}$ donc on
 obtient $\frac{5}{7}$

14- pour exemple
 720 8 et l'unité

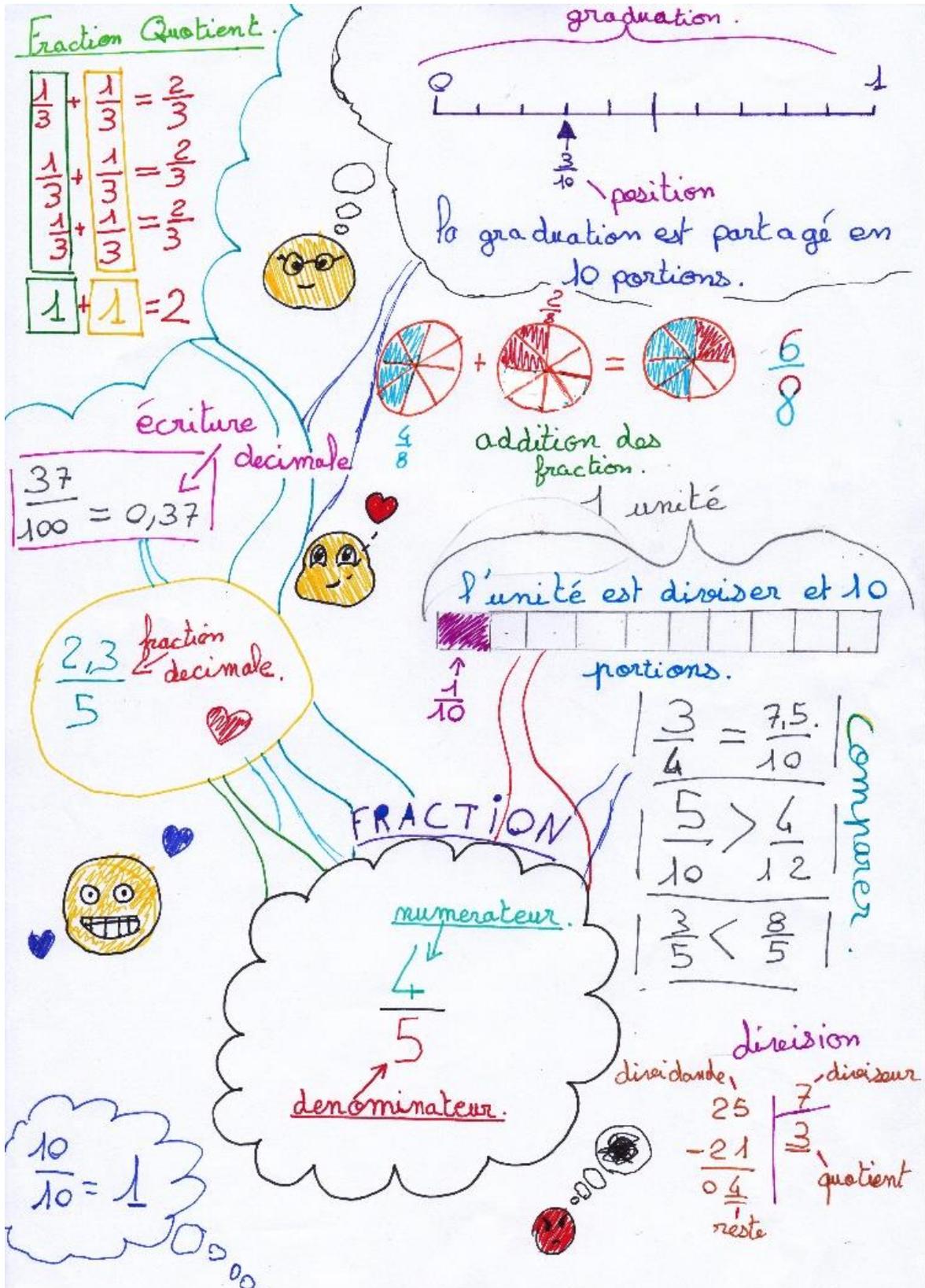
Annexe 10 : Carte mentale Classe 1 Groupe 2 deuxième exemple

[Revenir à 3.3.2 Groupe 2 : Progrès et confiance en soi](#)



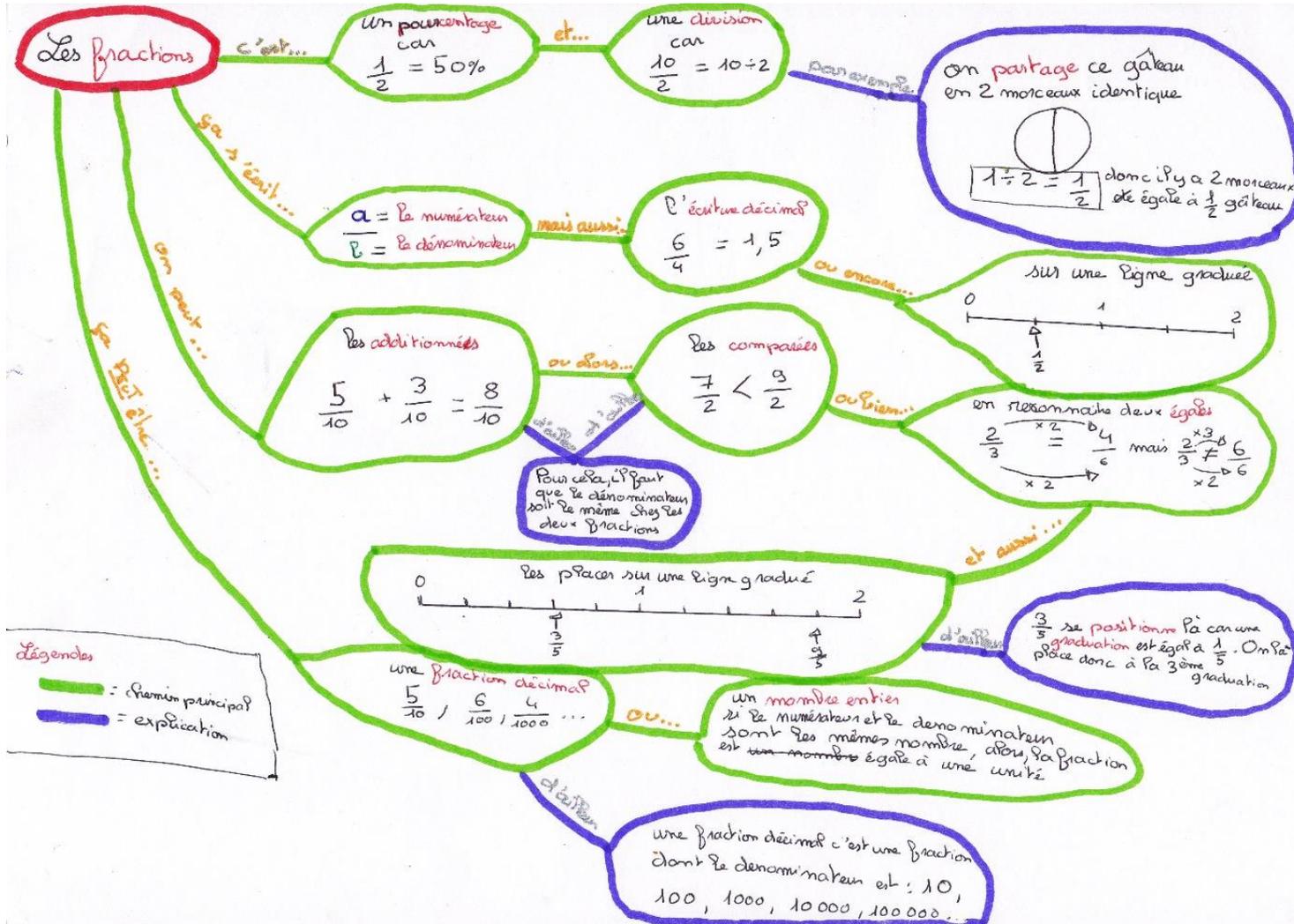
Annexe 11 : Carte mentale Classe 1 Groupe 3 premier exemple

[Revenir à 3.3.3. Groupe 3 : Vers l'excellence](#)



Annexe 12 : Carte mentale Classe 1 Groupe 3 deuxième exemple

[Revenir à 3.3.3 Groupe 3 : Vers l'excellence](#)



Résumé français

Le but de cette étude est d'utiliser la dualité des fractions pour mieux faire comprendre aux élèves le concept des fractions.

Les élèves construisent un modèle du concept des fractions.

Ce modèle décrit les registres de représentation des fractions et les liens existants entre les registres.

Mots clés

Dualité, Fractions, Représentation, Registre, Modèle, Concept

Abstract

The aim of that study is to use the duality of the fraction in order to make the students understand betterly the concept of the fractions.

Students build a model of the concept of the fractions.

This model describes the registers of representation of the fractions as well as the links between them.

Keyword

Duality, Fraction, Representation, Registers, Model, Concept