Année universitaire 2020 - 2021

Master MEEF

Mention 2nd degré - parcours mathématiques

2ème année

La compétence « *Chercher* » en mathématiques

Mots Clefs :
Problèmes de recherche
Compétence « Chercher »
Mathématiques
Cycle 4

Présenté par : Elsa LEBEN et Chloé SIMON

Encadré par : Renaud CHORLAY

Remerciements

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce à plusieurs personnes, à qui nous voudrions témoigner notre gratitude.

Nous tenons tout d'abord à exprimer toute notre reconnaissance à notre directeur de mémoire, Renaud CHORLAY. Nous le remercions pour son encadrement, sa disponibilité et surtout, ses judicieux conseils qui ont fortement contribué à alimenter notre réflexion.

Nous remercions aussi l'équipe pédagogique de l'INSPE de l'Académie de Paris pour avoir assuré notre formation et nous avoir fourni les outils nécessaires à la réalisation de ce mémoire.

Nous voudrions remercier spécialement Caroline GIRARDOT et Nathalie VILAIN, formatrices de l'UE Accompagnement de stage, qui ont su nourrir nos recherches, notamment grâce à leur séance intitulée : Comment développer la compétence « C*hercher* » avec nos élèves ?

Un grand merci à nos tuteurs Pierre COMPAIN et Sébastien GOURDON, qui par leurs paroles, leurs idées, mais aussi leurs critiques, nous ont orientées, aidées et conseillées durant cette année de stage.

Nous remercions également nos élèves de 5ème, qui ont montré un investissement régulier et un vif intérêt lors des temps dédiés aux résolutions de problèmes tout au long de l'année. Leurs remarques, leurs interrogations et même leurs doutes, ont été autant d'échanges qui ont fait avancer notre analyse.

Aussi, nous souhaitons remercier nos parents, Cristelle SIMON et Edgard LEBEN, pour leur aide précieuse à la relecture et à la correction de ce mémoire.

Enfin, merci à Théo pour son soutien permanent et ses pertinentes suggestions.

A tous ces intervenants, nous présentons nos remerciements, notre respect et notre gratitude.

Sommaire

Introduction 1

I- Les problèmes de recherche : un processus complexe de résolution 4

a) Une pratique déjà existante qui fait naître des questions … 4
b) … auxquelles la littérature permet d'apporter des réponses 11

II- Expérimentation menée en classe de 5ème 21

a) Choix du sujet et des paramètres retenus 21
b) Analyse a priori 26
c) Déroulé effectif 35
d) Analyse a posteriori 45

Conclusion 50

Bibliographie 52

Annexe 53

Introduction

« *On résout les problèmes qu'on se pose et non les problèmes qui se posent.* » [1]

Cette citation du mathématicien Henri Poincaré illustre le phénomène que nous pouvons éprouver dans le contexte scolaire où les élèves ne sont pas toujours prêts à s'engager dans un problème de recherche. Cet engagement est cependant essentiel à la résolution de ce type de tâches, comme le souligne la célèbre enquête PISA : *« Les compétences en résolution de problèmes renvoient à la capacité d'un individu de s'engager dans un traitement cognitif pour comprendre et résoudre des problèmes, en l'absence de méthode de solution évidente, ce qui inclut sa volonté de s'engager dans de telles situations pour exploiter tout son potentiel de citoyen constructif et réfléchi ».* [2]

Les programmes de mathématiques du primaire et du secondaire distinguent six grandes compétences à développer par l'activité mathématique de l'élève, parmi lesquelles figure la compétence « *Chercher* ». C'est peut-être même la première compétence qui nous vient à l'esprit lorsqu'on essaie de décrire l'activité mathématique. Souvent qualifiée de tâche stimulante [3], cette part de l'activité mathématique est pourtant considérée comme un travail ardu par de nombreux élèves [4].

Le verbe « *chercher* », issu du mot latin *circare* signifiant « *aller autour* », est un terme polysémique ; on ne pourrait ainsi être étonné de savoir que la compétence « *Chercher* » regroupe deux activités, qu'il convient de distinguer. Reprenons l'exemple abordé dans le document d'accompagnement Eduscol sur la compétence « *Chercher* » [5]. Deux consignes sont proposées, toutes deux relatives à une même série de représentations d'angles : la première est « *chercher quels sont les angles droits* », tandis que la seconde est « *chercher comment classer les angles* ». Il s'agit toutes deux d'activités mettant en œuvre une recherche. Cependant, dans le premier cas, l'élève met en œuvre des processus éprouvés, repère et utilise les attitudes expertes qui lui auront été explicitement apprises, alors que dans l'autre, il s'agit plutôt de donner un sens à la question, voire même de la définir. Selon nous, ce premier sens correspond davantage à la résolution d'un exercice d'application directe (complexité faible, connaissance ou technique connue à mettre en oeuvre) ; c'est pourquoi nous nous intéresserons davantage au second sens de la compétence « *Chercher* ».

---

[1] Henri Poincaré, in « *Apprendre à apprendre* » , A. Giordan et J. Saltet, 2019

[2] Rapport OCDE - Cadre d'évaluation de la résolution de problèmes du cycle PISA 2012

[3] « *Le concours Kangourou offre chaque année un rendez-vous ludique autour de la résolution de problèmes et permet aux jeunes de ressentir l'activité mathématique comme un vrai moment de bonheur, ce qui est tout à fait réjouissant.* » Brigitte Bajou (doyenne de l'Inspection Générale de mathématiques), 2010

[4] « *43 % des élèves Français se sentent perdus quand ils doivent résoudre un problème de mathématiques* » Enquête PISA, 2012

[5] Eduscol, ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 4) - Compétences travaillées en mathématiques - Compétence « *Chercher* », page 1

Celui-ci se retrouve dans la partie « *Compétences travaillées* » du programme de mathématiques du cycle 4 [6] : il est attendu de l'élève qu'il sache « *émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre - exemples* » et « *tester, essayer plusieurs pistes de résolution* ». Les attendus relatifs à ce second sens de la compétence « *Chercher* » ne sont pas aisés à circonscrire : il s'agit pourtant ici d'une part fort intéressante et essentielle de l'activité mathématique car on ne pourrait réduire l'apprentissage des mathématiques à des tâches simples et isolées pour lesquelles il suffit d'appliquer une propriété et/ou de reproduire à l'identique une démarche induite par l'énoncé.

Il n'est cependant pas toujours facile de réussir à mettre en oeuvre la compétence « *Chercher* » en classe car lorsqu'on cherche, on ne trouve pas toujours… Et surtout, on ne trouve pas du premier coup. Chercher, cela suppose de prendre des initiatives, de faire des tests ou des essais, de pouvoir discerner s'ils conviennent ou de comprendre pourquoi on peut les écarter. Face à de telles tâches, nos élèves peuvent se sentir démunis et avoir peur : peur de se tromper, peur de ne pas bien faire et même, peur de ne pas savoir faire. Le mathématicien Alexandre Grothendieck a dit [7]: « *Celui qui craint de se tromper est impuissant à découvrir. C'est quand nous craignons de nous tromper que l'erreur qui est en nous se fait immuable comme un roc.* ».

Chercher demande donc des compétences : s'organiser (même dans son brouillon), réussir à formuler les étapes d'une démarche, extraire les informations utiles et savoir les exploiter. Parallèlement à ces compétences transversales, il existe également certaines méthodes propres aux mathématiques, relevant de l'heuristique : exploration d'un espace d'exemples (avec des exemples standards, mais aussi des exemples originaux, ou la recherche de contre-exemples), relâchement d'une ou plusieurs contraintes dans un problème à plusieurs contraintes, ou bien au contraire, ajout provisoire de contraintes, etc. Ces compétences et méthodes doivent être clairement identifiées afin de permettre aux élèves de savoir que chercher, comment chercher, mais aussi, jusqu'où chercher. Elles peuvent être définies comme *« ce qui reste lorsque la recherche est terminée, en dehors du résultat lui-même »* [8].

Tous ces éléments constituent des compétences et méthodes à développer en mettant les élèves dans ce type de situations régulièrement : « *une place importante doit être accordée à la résolution de problèmes* » [9]. Les tâches qui nécessitent inventivité, organisation et persévérance doivent faire partie des séances de mathématiques : il serait regrettable d'en

---

[6] Programme du cycle 4 d'après le BOEN n°31 du 30 juillet 2020, page 129

[7] *Récoltes et Semailles : Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien,* Université Paris 6, Grothendieck Circle, 1986, Première partie, § 5.2.

[8] Eduscol, ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 4) - Compétences travaillées en mathématiques - Compétence « Chercher », page 3

[9] Programme du cycle 4 d'après le BOEN n°31 du 30 juillet 2020, page 127

faire des activités rares et disjointes de l'ordinaire de la classe, constitué quant à lui de questions fermées et d'exercices balisés.

Si les craintes et les difficultés des élèves constituent un obstacle majeur au développement de la compétence « *Chercher* », des conditions d'enseignement propices et adaptées à la résolution de problèmes de recherche, constitue selon nous un levier favorable. D'après Philippe Meirieu, « *un élève motivé parviendra à surmonter des obstacles intellectuels qui vont bien au delà de ses possibilités attestées* »[10]. Pour développer la compétence « *Chercher* » chez nos élèves, il nous semble donc essentiel de leur permettre d'entrer dans une démarche scientifique de recherche grâce à des situations construites en vue de cet objectif. Cela participe également à l'ambition de former des élèves émancipés et capables de réussir.

L'objet de notre mémoire sera donc :

Quel type de situation d'apprentissage peut permettre à nos élèves de s'engager dans une démarche de recherche, essentielle au développement de la compétence « Chercher » ?

Afin de trouver des éléments de réponse, il convient tout d'abord de s'intéresser au processus complexe que constitue la résolution d'un problème de recherche *(partie I)*, avant de produire une situation de recherche, que nous allons ensuite analyser et expérimenter avec nos élèves en faisant varier certains paramètres didactiques préalablement choisis *(partie II).*

[10] Les entretiens Nathan, Actes VI, « *Ecole, diversités et cohérence* », Paris, 1996, page 5

I- Les problèmes de recherche : un processus complexe de résolution

a) Une pratique déjà existante qui fait naître des questions …

Enseignant toutes les deux dans des établissements évaluant par compétence, nous nous avons été amenées à nous questionner très tôt dans l'année scolaire sur les attentes précises pour chacune des six compétences mathématiques discernées par le programme de mathématiques du cycle 4 où évoluent nos classes. Les attendus relatifs à la compétence « *Chercher* » nous sont alors apparus comme difficiles à circonscrire. De plus, nous nous sommes également interrogées sur les modes d'évaluation de cette compétence, mais aussi sur la façon de préparer nos élèves à ces évaluations. Le travail avec nos élèves sur des problèmes de recherche a commencé dès la rentrée de septembre ; après quelques mois de pratiques, nous avons chacune pu établir un bilan de nos pratiques, mais également des difficultés rencontrées et des questions soulevées.

- *Bilan de Chloé SIMON, enseignante au collège George Sand de Crégy-Les-Meaux auprès de deux classes de 5ème et d'une classe de 4ème*

Parmi les six compétences travaillées en mathématiques au collège, la compétence « C*hercher* » me parait au cœur même de ce que sont les mathématiques. C'est pourquoi, j'ai voulu m'intéresser en particulier à cette compétence. Pour pouvoir la développer avec mes élèves, j'ai d'abord voulu travailler sur leur possible peur de l'erreur et leur confiance en eux. J'ai décidé de donner à mes élèves pendant les deux premières périodes (de septembre aux vacances de Noël) deux problèmes de recherche par semaine. Ces derniers étaient à faire individuellement à la fin du cahier d'exercices. Nous les corrigions ensemble le lundi et le jeudi. L'objectif principal était tout d'abord que les élèves essayent et osent se lancer dans ce type d'exercices.

En mathématiques, les problèmes font partie des activités proposées à partir du cycle 2 et ne sont pas appréciés de tous, souvent en raison du fait que les élèves ne se sentent pas en confiance, comme ils pourraient l'être dans un schéma de résolution connu. En donnant ces problèmes à mes élèves, j'ai constaté que ceux-ci avaient souvent envie de bien faire pour faire plaisir au professeur ou à leurs parents, avant de se faire plaisir à eux. Cette envie de bien faire accentue leur peur de l'échec : ils n'ont pas envie de dire de bêtises, alors ils préfèrent ne rien dire. En septembre - octobre, certains élèves me disaient lors des corrections « *je n'ai pas réussi* » sans plus d'explications et sans trace de recherche. Je prenais alors le temps à chaque fois de leur rappeler que même s'ils ne trouvaient pas le résultat final, tout ce qu'ils auraient pu trouver comme idée était déjà intéressant. C'était également l'occasion de leur rappeler que ce n'est pas grave de se tromper car c'est grâce à cela qu'on peut avancer.

Lorsqu'un élève est confronté à un problème, il cherche d'abord dans ses bagages de connaissances ce qu'il pourrait utiliser pour le résoudre. S'il réalise qu'il est dans une nouvelle situation et que la réponse ou le raisonnement est inconnu pour lui, l'élève peut alors être stimulé par l'envie de résoudre ce problème qui lui fera travailler de nouvelles compétences ou bien se braquer et avoir peur de cette situation inconnue. L'élève peut alors mettre en place des mécanismes de défense. Un exemple de mécanisme de défense assez fréquent est la fuite. Un élève qui préfère rêver ou bavarder avec d'autres camarades peut être un élève qui fuit le problème car en n'essayant pas de le résoudre, il ne peut pas se tromper. L'élève peut également donner une réponse rapide pour se débarrasser du problème. Même s'il sait que sa réponse est fausse, l'élève a pour lui fini son travail et n'est donc plus dans une situation de gêne et d'anxiété que peut provoquer la résolution d'un problème. Pour éviter au mieux ces situations, j'ai décidé de ne pas évaluer ces problèmes pour ne pas que mes élèves ressentent une pression supplémentaire. La compétence « *Chercher* » étant évaluable dans plusieurs types de tâches mathématiques, je l'ai évaluée plus tard, lors de travaux de groupes, mais aussi en évaluation, une fois que nous avions travaillé en classe sur un certain nombre de problèmes de recherche.

De plus, j'ai découvert que certains élèves pouvaient se retrouver dans ce qu'on peut appeler « *l'impuissance apprise* ». C'est une expression proposée dans les années 1970 par Martin Seligman, un psychologue américain, qui décrit « *un sentiment d'impuissance permanente et générale qui est provoqué par le fait d'être plongé, de façon durable ou répétée, dans des situations (…) en lesquelles l'individu ne peut agir et auxquelles il ne peut échapper* ».[11] Ce sentiment correspond à un découragement engendré par une répétition d'échecs qui arrivent malgré les efforts fournis pour réaliser une tâche. Si l'élève ressent ce découragement, il peut penser que quoi qu'il fasse à présent, cela ne fonctionnera pas et il échouera. L'élève n'est plus motivé et peut une fois de plus, mettre en place des mécanismes de défense en rejetant le problème. Je me suis aperçue que certains de mes élèves pouvaient ressentir une forme d'impuissance apprise car ils n'essayaient pas et me disaient dit : « *c'est trop dur pour moi, je n'arrive jamais à résoudre les problèmes* ».

Dès lors, il était important d'instaurer en classe un climat de confiance, que ce soit entre les élèves et l'enseignant, mais également entre les élèves. Pour rassurer ces derniers, il était aussi indispensable de les informer sur l'importance de l'erreur : on apprend aussi en se trompant. Il était pour moi indispensable de dédramatiser l'erreur pour que les élèves reprennent confiance en eux et en leurs capacités. Les problèmes de recherche en particulier, demandent cette capacité à accepter de se tromper et à savoir avancer à partir de ses erreurs. Se tromper, ce n'est pas échouer ; c'est déjà avancer et savoir ce qu'il ne faut pas faire pour finalement résoudre le problème.

Pour que les élèves puissent développer cette capacité d'avancer à partir d'une erreur, il est important de s'exercer régulièrement. Pendant les deux premiers mois, les seuls élèves

[11] Wikipédia « *Impuissance apprise* »

qui osaient prendre la parole lors des corrections pour expliquer leurs démarches étaient de bons élèves en mathématiques qui étaient sûrs de ce qu'ils allaient exposer. C'était alors difficile de mettre tout le monde en valeur et de leur montrer que tout le monde était capable. Quand nous commencions la correction d'un problème, je demandais toutes les réponses, complètes ou partielles, qui avaient été trouvées, puis nous essayions de comprendre chacune des propositions. Je pense qu'il est important pour un élève qui a donné une mauvaise réponse ou une réponse incomplète de savoir qu'il peut y avoir beaucoup de choses positives dans son travail, mais aussi qu'il n'est pas seul à s'être trompé.

C'est ainsi qu'au retour des vacances de la Toussaint, j'ai pu voir certaines attitudes changer. Les élèves avaient de moins en moins peur de donner leur réponse, complète ou partielle, devant la classe. La confiance peut mettre du temps à arriver pour certains élèves, mais quand elle est instaurée, cela se ressent dans le travail global de la classe. C'est pour cela qu'il est nécessaire de faire ce travail sur la durée. Les élèves qui ne proposaient rien en début d'année étaient désormais contents de proposer un début de résolution. Au fil des semaines, les élèves étaient de plus en plus à l'aise avec les résolutions de problèmes, quelles que soient leurs difficultés au début de l'année. La problématique de la peur de l'erreur avait disparue pour beaucoup d'élèves et nous pouvions à présent travailler plus en détails la compétence « *Chercher »*.

Cela montre également qu'en plus de l'ambiance de classe et de la confiance dont les élèves ont besoin, il est important d'être patient. Les corrections des problèmes pendant le mois de décembre étaient plus intéressantes car je pouvais partir d'une réponse partielle que les élèves avaient donnée et nous finissions la résolution ensemble en rebondissant sur les propositions des élèves. Les corrections étaient ainsi plus vivantes.

J'ai pu constater que certains élèves étaient néanmoins toujours désemparés avec ces problèmes face auxquels ils n'avaient pas d'outils, ni de méthode. J'ai pensé que ces élèves seraient peut-être rassurés d'avoir une trame de résolution à pouvoir suivre dans le cas où ils ne sauraient pas comment commencer et avancer.

De plus, je me suis aperçue que certains élèves proposaient des résolutions que je n'avais pas anticipées. Ces procédures de résolution ont parfois permis une meilleure compréhension à des élèves en difficulté que les procédures déjà évoquées jusque là. C'est important de préciser aux élèves qu'il peut exister plusieurs méthodes pour résoudre le même problème. Certaines peuvent être plus rapides que d'autres, mais il faut insister sur le fait que l'essentiel c'est de chercher (et de trouver si possible !), quelle que soit la méthode choisie. Certains élèves peuvent être surpris car ils pensent que le raisonnement à effectuer pour résoudre un problème de recherche en mathématiques est unique.

Je trouve intéressant d'aider les élèves à entrer dans une démarche de chercheur pour pouvoir leur montrer une autre facette des mathématiques. Cependant, il n'est pas toujours facile de les accompagner dans une telle démarche, nécessitant une remise en question dans leurs apprentissages.

- *Bilan d'Elsa LEBEN, enseignante au collège Pierre Perret de Bernes-Sur-Oise auprès de deux classes de 5ème*

Le travail sur la compétence « *Chercher* » avec mes élèves a commencé en septembre lors de la première séance bimensuel de demi-groupe dont je dispose avec chacune de mes classes. Cette séance était consacrée à l'introduction à la recherche, et s'articulait autour de trois problèmes : le premier consistait à trouver le nombre de chameaux dans un troupeau de chameaux et de dromadaires, sachant qu'on connaissait le nombre total de têtes et le nombre total de bosses du troupeau ; le deuxième portait sur un partage géométrique (7 points étant placés, l'objectif était de séparer chacun des points en ne traçant que 3 droites) ; enfin, pour le troisième problème, il s'agissait de déterminer quel jour de la semaine il sera quand les 48 volets de la maison de Jonathan auront été repeints, sachant qu'il a commencé seul un lundi, que chaque jour qui suit, le nombre d'amis qui l'aident augmente de 2 et que chaque personne peint 2 volets par jour.

Certains élèves ont eu du mal à rentrer dans une démarche de recherche et étaient plutôt perturbés de ne pas savoir quelles connaissances mathématiques utiliser ; ils se plongeaient donc dans leur cahier de leçons, essayant de trouver un lien entre les règles de priorité opératoire et ce que je leur demandais maintenant. Mon approche a été alors d'insister sur le fait que ce soit tout à fait normal que l'on se sente désemparé à la lecture d'un problème de recherche et qu'on ne sache pas forcément comment faire face à ce type d'exercices. J'ai également souligné l'importance du fait que pour pouvoir résoudre un problème de recherche, il faut déjà chercher, c'est-à-dire explorer des pistes, faire des essais, effectuer des schémas, ne pas hésiter à utiliser un brouillon, etc. Il faut également s'engager et essayer : si l'on ne cherche pas, il est sûr qu'on ne pourra rien trouver.

Bien que ces trois problèmes ne peuvent être réellement qualifiés de « *concrets* »[12] (il est plutôt rare pour nos élèves comme pour nous, d'avoir à dénombrer des chameaux dans la vie quotidienne), les élèves se sont montrés volontaires et motivés lors de cette séance. Certains m'ont même dit qu'ils avaient beaucoup aimé car « *ce n'était pas des mathématiques* » et m'ont demandé si les autres séances de demi-groupe seraient également sur ce modèle. Je trouvais ainsi un premier éclaircissement au constat du rapport de l'OCDE lié à l'enquête PISA de 2012 sur les élèves face aux problèmes de recherche[13], que je n'avais jusqu'alors pas vraiment compris : la réussite des élèves en mathématiques, comme en résolution de problèmes, étant étroitement liée à leur motivation, les problèmes de recherche peuvent être des sources d'engagement plus important, et donc de réussite accrue. Les faire travailler en binôme lors de cette séance a également pu permettre d'accroître leur adhésion à ce type d'activités.

---

[12] Concret : « *qui est en prise directe avec la réalité, qui y fait référence, qui est en rapport étroit avec l'expérience* » Larousse, 2021

[13] « *En France, les élèves obtiennent de meilleurs résultats en résolution de problèmes qu'en mathématiques* » Rapport OCDE - Résultats du PISA 2012 en résolution de problèmes

Par la suite, mes élèves ont travaillé la compétence « *Chercher* » de façons variées : tantôt individuellement, tantôt collectivement, en fin de séances « classiques »[14] sur des petites énigmes de 5 à 10 minutes, lors de séances de 55 minutes intégralement dédiées à la résolution d'une tâche complexe, avec ou sans outil TICE à leur disposition, lors d'évaluation bilan en classe, mais aussi chez eux, avec des devoirs maison de recherche déclinés en trois sujets. Ces derniers étaient distribués une semaine avant les vacances scolaires, le prénom de chaque élève étant écrit sur le sujet donné. Le travail était à effectuer individuellement sur copie double et à rendre une semaine après le retour des vacances scolaires. Ces trois sujets font référence à trois niveaux différents de maîtrise de la compétence « *Chercher* »[15] :

- Niveau 1 : L'élève sait prélever dans un document les informations utiles, mais peine à les organiser en autonomie et à émettre des hypothèses. Il s'engage dans une démarche, si le contexte lui est familier, mais a besoin d'être soutenu dans le cas contraire. Il a besoin d'aide pour le questionnement, mais s'engage ensuite dans la manipulation et l'expérimentation.
- Niveau 2 : L'élève sait extraire d'un document les informations utiles, les organiser et les reformuler. Il s'engage de lui-même dans une démarche scientifique, observe, questionne et manipule. Il a encore besoin d'être soutenu pour expérimenter, chercher des exemples ou contre-exemples, tester plusieurs pistes. L'élève émet des hypothèses et des conjectures.
- Niveau 3 : L'élève sait extraire d'un document les informations utiles, les organiser, les reformuler et les confronter à ses connaissances. Il s'engage dans une démarche scientifique, observe, questionne, manipule, expérimente (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émet des hypothèses, cherche des exemples et contre-exemples, simplifie ou particularise une situation, émet une conjecture. L'élève teste, essaie plusieurs pistes de résolution. Il sait décomposer un problème en sous-problèmes.

Dans chacun des trois sujets, les mêmes connaissances et compétences sont travaillées ; certains paramètres sont modifiés afin de complexifier graduellement les situations de recherche. Par exemple, dans le DM de recherche n°2 (dont les sujets sont disponibles en annexe), tous les élèves travaillent des notions d'arithmétique dans le premier exercice et l'organisation de données, ainsi que l'utilisation du raisonnement déductif dans le second exercice. Chaque devoir maison comporte également un exercice supplémentaire, pris en compte uniquement si cela est bénéfique pour l'évaluation de l'élève. On peut remarquer que la situation de l'exercice supplémentaire de ce DM n°2 a de nombreux points communs avec le problème vu plus haut, relatif au troupeau de chameaux et de dromadaires. Il n'est en effet pas rare que je réinvestisse au cours de l'année des situations de recherche déjà traitées précédemment en classe, mais dans un contexte légèrement différent.

[14] Construite autour du schéma : Accueil des élèves / Rappels de cours / Correction des devoirs / Activité flash / Institutionnalisation dans le cahier de leçons / Exercices d'application

[15] Document ressource de l'académie de Lyon - Mathématiques - Descripteurs de compétences du cycle 4

Afin d'éviter toute stigmatisation, les sujets sont nommés A, B et C ; avec la réalisation d'une permutation lors de l'élaboration de chaque nouveau sujet. J'ai fait le choix de décider moi-même du niveau de difficulté donné à chaque élève, afin qu'il ne sous-estime ou sur-estime pas son degré d'aisance face à un problème de recherche, ce qui aurait pu ainsi rendre ce devoir de recherche trop facile et ennuyeux, ou bien au contraire, trop difficile et éprouvant. L'attribution des différents sujets s'effectue en fonction de l'engagement des élèves en classe lors des phases de recherche, de leur attitude face à de nouvelles situations de recherche, mais aussi de leurs traces écrites lors des évaluations où figurent des problèmes de recherche. Ces choix sont également réfléchis et reconsidérés tout au long de l'année, en fonction des progrès et des attitudes des élèves. Voici la répartition générale des élèves de mes deux classes de 5ème sur les trois premiers devoirs maison de recherche :

	DM n°1 (Toussaint)	DM n°2 (Noël)	DM n°3 (Hiver)
Niveau 1	16 élèves 28 %	16 élèves 28 %	14 élèves 25%
Niveau 2	17 élèves 30%	16 élèves 28 %	15 élèves 26%
Niveau 3	24 élèves 42%	25 élèves 44%	28 élèves 49%

Valeurs arrondies au pourcentage près

De plus, il est à noter que les attendus relatifs à l'évaluation de ce devoir de recherche sont clairement explicités en début de devoir : « *L'évaluation porte sur le travail de recherche, elle pourra être positive même si la réponse est fausse, à condition de faire apparaître les traces de recherche sur la copie (schémas, tests, calculs, …). En revanche, une réponse seule n'est pas suffisante : la démarche pour y parvenir doit figurer sur la copie. Toute réponse devra être justifiée.* ». L'importance de laisser des traces de recherche est un point sur lequel j'ai jugé bon d'insister dès les premières séances sur ce type de tâches car la recherche est « *un chemin qui laisse des traces* »[16] et ces traces sont pour moi aussi intéressantes et cruciales que le résultat lui-même. Elles permettent en effet de suivre les démarches initiées par le chercheur, de parcourir les tests et essais déjà effectués, d'expliciter clairement s'ils conviennent ou de tenter de comprendre pourquoi on peut les écarter, et ainsi permettre d'effectuer de nouvelles conjectures et/ou de s'engager dans une nouvelle démarche.

Plus personnellement, en tant qu'enseignante, la conduite d'une situation de recherche en classe n'est pas non plus un exercice aisé. La préparation associée à ce type de tâches est plutôt lourde et la posture en classe lors de ces moments amène souvent son flot de remises en question. En effet, face aux questionnements des élèves, l'enjeu est de réussir à leur fournir une aide qui en dit juste assez pour les motiver, mais sans en dire trop, au risque de court-circuiter le problème. Cependant, lorsque la préparation s'est montrée efficace et que la situation a été bien menée, il en ressort souvent une satisfaction générale pour l'enseignant, comme pour les élèves.

[16] Eduscol, ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 4) - Compétences travaillées en mathématiques - Compétence « Chercher », page 3

• *Les principales questions soulevées par nos pratiques ont donc été les suivantes :*

➡ Comment aider les élèves à entrer dans une posture de chercheur ?

➡ Existe t-il un apprentissage spécifique à la résolution de problèmes ?

➡ Est-il possible de concevoir une trame de résolution, orientant à l'aide d'étapes clés les élèves dans leur recherche ?

➡ Comment caractériser une aide adaptée et efficace, proposée par l'enseignant pour motiver les élèves, sans court-circuiter le problème ?

b) … auxquelles la littérature permet d'apporter des réponses

Afin de répondre à ces interrogations liées à nos pratiques en classe, nous nous sommes appuyées sur la littérature professionnelle et de recherche liée aux problèmes de recherche. Sur les conseils de notre directeur de mémoire, nous nous sommes en particulier intéressées à deux textes :

- La transcription de la conférence donnée par le mathématicien Daniel Perrin en 2007 au collège de Boussy-Saint-Antoine, intitulée : « En mathématiques : que cherche-t-on ? comment cherche-t-on ? »[17]

- L'article de Jean Julo, maître de conférences de Sciences de l'Education à l'université de Rennes, intitulé : « Des apprentissages spécifiques à la résolution de problèmes ? »[18]

Pour chacun de ces textes, nous avons effectué une fiche de lecture. Les voici :

En mathématiques : que cherche-t-on ? Comment cherche-t-on ?
Daniel Perrin

L'auteur est un enseignant chercheur. Ce texte est issu de la transcription d'une conférence à destination d'élèves d'un collège. Il prend appui sur des questions posées par des élèves pour finalement montrer l'utilité des mathématiques et parler de problèmes dont on ne connait pas encore la solution. Il évoque également le métier de chercheur.

Daniel Perrin essaye d'abord de montrer aux élèves que les mathématiques sont utiles, mais il admet que c'est difficile de trouver des exemples adaptées aux élèves. Les mathématiques sont partout, mais souvent cachées : la météo, la physique, l'informatique ou même la génétique. Il explique aussi que certaines notions peuvent sembler inutiles, mais c'est peut-être parce qu'on n'a pas encore trouvé d'applications (*comme par exemple les coniques qui semblaient inutiles avant le 17ème siècle ou encore les nombres premiers qui semblaient encore inutiles il y a 50 ans*).

Les nombres premiers sont maintenant extrêmement importants, que ce soit pour la communication, la finance ou le domaine militaire entre autres. C'est sur eux que repose la cryptographie qui remonte à l'Antiquité. Plus récemment (1978), le code RSA a été inventé. Ce code repose sur le fait que produire de grands nombres premiers est beaucoup plus facile que de décomposer un nombre en produit de facteurs premiers ; ce qui est très long et compliqué pour un ordinateur.

---

[17] Disponible sur le site : https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Conferences/Boussy.pdf

[18] Paru dans la revue Grand N. N° 69, 2002, pages 31 à 52

Daniel Perrin affirme que beaucoup de questions sont sans réponse en mathématiques. Personne ne connait toutes les mathématiques. Il déclare : « *il y a bien plus de choses inconnues que de choses connues* ». La plupart des exemples porteront sur l'arithmétique car ce sont les seuls exemples accessibles au collège.

1er exemple : Nombres de Fermat (problème non résolu)

2ème exemple : Constructions à la règle et au compas (problème qui nous vient des Grecs, résolu qu'au 19ème siècle)

3ème exemple : Peut-on trouver une infinité de dizaines riches contenant 4 nombres premiers ? (non résolu, la calculatrice permet d'explorer le problème, mais pas de le résoudre)

4ème exemple : Y a-t-il une infinité de nombres premiers jumeaux ? (problème datant des Grecs, exploré à l'ordinateur jusqu'à 10^{15}, mais toujours non résolu)

5ème exemple : Conjecture de Goldbach (1725) « *Tout nombre pair autre que 2 peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers* » (conjecture non encore démontrée, mais vérifiée avec un ordinateur jusqu'à des nombres de l'ordre de 10^{16})

Les ordinateurs et calculatrices sont des outils très puissants, mais ils ne permettent pas de démontrer les choses. Ils peuvent nous aider à voir ce qu'il se passe au début, mais en aucun cas, de démontrer une propriété qui fait appel à des ensembles infinis. Les ordinateurs peuvent même abandonner un problème qui possède une solution, mais hors de portée. Les seuls cas où cela est possible, ce sont pour les problèmes qui peuvent se ramener à une situation qui étudie un nombre fini de cas.

6ème exemple : Est-il possible de colorier une carte de géographie avec quatre couleurs sans que deux pays admettant une frontière commune soient coloriées de la même couleur ? (problème résolu avec ordinateur)

7ème exemple : Suite de Collatz ou de Syracuse. On part d'un entier. S'il est pair, on le divise par 2. S'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. On recommence avec le résultat. Finit-on toujours par aboutir à 1 ? (problème non résolu)

8ème exemple : Les sept problèmes du millenium (problèmes non résolus)

Ensuite, Daniel Perrin nous parle du métier de chercheur. Pour expliquer aux élèves ce que fait le chercheur, il décide de travailler avec les élèves sur un problème et de voir les différentes étapes à réaliser pour aboutir à la solution.

1ère étape : Choisir un thème de recherche (proposé si c'est un jeune chercheur ou provenant de lectures, discussions, de réflexions personnelles si c'est un chercheur confirmé). Pour les collégiens, le mathématicien a choisi ce problème :

Tous les entiers ne sont pas des carrés parfaits, mais tout entier naturel peut-il s'écrire comme différence de deux carrés ?

2ème étape : Explorer et expérimenter : étudier des exemples, faire des calculs (souvent sur ordinateur), reprendre ce qu'on sait déjà sur le sujet (articles d'autres auteurs). Il faut ensuite réussir à formuler ce que l'on voit. Il ne faut pas craindre de dire des bêtises.

On liste les carrés parfaits et on s'organise pour faire une liste des entiers trouvés (on retranche deux carrés consécutifs, puis deux carrés pris de deux en deux …).

Dans cette liste, on observe que tous les nombres impairs et tous les multiples de 4 sont obtenus. Mais on remarque également que les multiples de 2, qui ne sont pas multiples de 4, ne sont jamais atteints.

Donc on pose la conjecture suivante : les entiers n qui sont différences de deux carrés d'entiers sont les nombres impairs et les multiples de 4.

3ème étape : Une fois la conjecture énoncée, il faut la démontrer. C'est la partie la plus longue et difficile. Il faut souvent inventer une stratégie et parfois créer de toutes pièces de nouveaux outils.

La méthode qui nous a permis de formuler la conjecture va nous permettre de la démontrer (pour le cas de nombres impairs). On remarque que 7 est atteint par $4^2 - 3^2$, puis 9 par $5^2 - 4^2$. Ainsi, les carrés qu'il faut utiliser pour atteindre les nombres impairs sont les carrés « du dessus et du dessous » de la moitié du nombre impair. $7 \div 2 = 3{,}5$; donc on prend 3 et 4. Une fois cela repéré, il suffit de le démontrer en utilisant des lettres.

Daniel Perrin nous laisse faire la démonstration pour le cas divisible par 4. De plus, l'expérience nous montre que certains nombres sont obtenus plusieurs fois *(par exemple, $15 = 64 - 49 = 16 - 1$).* On peut alors se poser une nouvelle question : lorsqu'un nombre s'écrit sous la forme $x^2 - y^2$, de combien de façons est-ce possible ?

4ème étape : Vérifier que sa preuve n'est pas fausse. Daniel Perrin nous donne un exemple de son expérience : en étudiant un nouvel exemple assez « *simple* », il s'est rendu compte que ce qu'il venait de démontrer était faux. Après ré-étude de ce qu'il voulait démontrer, il s'est rendu compte que c'était tout l'inverse qui était juste, et il a donc démontré cette nouvelle propriété.

5ème étape : Quand la proposition est établie, il faut la rédiger puis la publier et en faire la promotion.

Daniel Perrin poursuit en donnant aux élèves de nombreux problèmes pour réfléchir, qui portent sur plusieurs notions : arithmétique, géométrie, nombres décimaux, fractions et probabilités.

La dernière partie du texte de Daniel Perrin porte sur des réponses aux questions posées par les collégiens. Ces questions sont sur les mathématiques en général (Pourquoi y a t-il 9 chiffres ? Pourquoi les maths existent ? Qui a inventé les maths ? Depuis quand les maths existent ?) ou portent sur l'utilité des mathématiques (A quoi ça sert les maths ? A quoi sert votre métier ? Quel métier peut-on faire avec les maths ?).

Il y a également des questions sur les problèmes non résolus (Qu'est-ce qui n'a pas été résolu ? Comment les résout-on ? Comment fait-on pour créer des formules ?). Une question sur les programmes est aussi posée : comment s'opère le choix de l'apprentissage des théorèmes ou des connaissances selon les niveaux scolaires ?

C'est ensuite Daniel Perrin qui pose une question aux élèves : « *Pour vous, qu'est-ce que le travail d'un mathématicien ? Que fait-il au quotidien ?* » Les réponses sont variables, et à chacune d'elles, Daniel Perrin commente rapidement. Une réponse lui a beaucoup plu : *« Un chercheur en maths est un homme qui invente des maths, qui invente des problèmes et qui trouve des solutions. Il résout les problèmes mathématiques des autres personnes. »*

Puis, une question sur la formation pour être mathématicien est posée. Daniel Perrin décrit les parcours les plus courants. Quelques questions concrètes sur le métier de mathématicien ont aussi été posées : une question financière, une question sur la médaille Fields, une question sur les concours et sur le nombre de mathématiciens dans le monde, une question sur le matériel, puis sur l'emploi du temps d'un mathématicien.

Pour finir, Daniel Perrin répond aux questions personnelles sur son choix des mathématiques, sur sa formation pour devenir mathématicien, sur son sujet de recherche actuel, ainsi que sur son lieu de travail.

En conclusion, par l'échange entre cet enseignant chercheur et ces collégiens, on peut percevoir les difficultés que représente la résolution d'un problème de recherche pour les élèves, en particulier la difficulté de trouver du sens à ce type de tâches, étant donné que les mathématiques ne permettent pas toujours d'accéder à une réponde rapide, évidente ou définitive. C'est pourquoi Daniel Perrin organise son intervention en deux temps : après avoir pris le soin de donner un sens aux mathématiques en s'appuyant sur des exemples relevant de la culture scientifique, il fait le choix de vivre avec ces élèves une expérience de résolution d'un problème de recherche. Il leur permet ainsi d'entrer dans une posture de chercheur.

Des apprentissages spécifiques à la résolution de problèmes ?
Jean Julo

Ce texte est un article du maître de conférences en Sciences de l'Education de l'université de Rennes, Jean Julo. Il est paru en 2002 dans le numéro 69 de la revue semestrielle Grand N, qui était initialement dédiée à l'enseignement des mathématiques pour les professeurs du 1er degré, mais dont le public s'est désormais élargi. Cet article est donc à destination des enseignants de mathématiques, du 1er comme du 2nd degré.

✦ Introduction (p 31 - 32)

L'auteur pose d'abord la question des rapports entre apprentissage et résolution de problèmes. Elle concerne en premier lieu selon lui la didactique des mathématiques. Pour Jean Julo, résoudre de manière intelligente des problèmes ne s'apprend pas : « *Soit on résout mécaniquement après s'être longuement exercé, soit la solution s'impose d'elle-même, issue*

de ce que l'on a pu appeler l'intuition, le travail inconscient ou, tout simplement, l'intelligence ». Cependant, cette conception est incompatible avec les données actuelles. L'objectif de l'auteur est donc d'apporter une contribution en s'appuyant sur des données de la psychologie cognitive concernant l'activité de résolution de problèmes et sur une réflexion didactique autour de la notion d'aide à la résolution de problèmes en mathématiques.

✦ **Apprendre à résoudre des problèmes : les principales approches (p 32 - 35)**

Jean Julo développe trois axes principaux, dans l'ordre chronologique d'apparition :

1. Du transfert d'apprentissage au raisonnement par analogie

Les recherches en psychologie de Turquin (1970) ont permis d'analyser l'effet d'entraînements à la résolution de problèmes. Les résultats se sont montrés très limités ; cette approche avait d'ailleurs été dès le début critiquée par des chercheurs qui estimaient que « *de tels entraînements ne pouvaient conduire qu'à une " mécanisation " de la pensée et nuire au mécanisme qui leur semble essentiel pour la découverte de la solution : la restructuration des données du problème* ».

Ainsi, émerge la « *théorie de la forme* » (Gestalttheorie) qui étudie plutôt les caractéristiques de la situation qui favorisent ou font obstacle à la résolution d'un problème. En 1972, Newell et Simon publient *Human Problem Solving,* ouvrage dont la préoccupation est donnée au fonctionnement cognitif, ainsi qu'aux notions de représentation, de schémas et de stratégies. Depuis 1980, le raisonnement par analogie défini comme « *un raisonnement qui s'appuie sur le traitement de la "ressemblance" qui existe entre des objets ou leurs représentations* » est à l'étude, souvent associé à l'utilisation de schémas.

2. Heuristique, problem-solving, métacognition

L'ouvrage de George Polya, *How to solve it ?,* publié en 1945 se veut être un outil pour les enseignants de mathématiques, afin d'aider les élèves et étudiants en leur apprenant à résoudre des problèmes. Il s'agit d'ailleurs pour Polya de « *l'un des devoirs les plus stricts du professeur* ». Or, cette méthode se révèle peu efficace. La réflexion est cependant initiée, et le courant du *Problem solving* naît alors. Jean Julo nous met cependant en garde contre les méthodes générales : il énonce le risque de faire « *de la résolution de problèmes pour la résolution de problèmes* ».

3. Classes de problèmes, catégorisation, apprentissage de schémas

Au début des années 80, on étudie davantage la capacité à regrouper des problèmes qui ont des structures proches : on parle alors de *"schémas de problèmes". Les r*ésultats semblent encourageants, mais le nombre d'expérimentations est trop faible. L'idée est alors de catégoriser les situations de recherche et d'enseigner aux élèves des procédures spécifiques des problèmes qu'on voudrait qu'ils sachent résoudre.

✦ **Comment se forment les schémas de problèmes ? (p 35 - 43)**

Selon l'auteur, il existe des processus spécifiques à la base de l'activité de résolution de problèmes, pour lesquels on suppose d'avoir deux versants : le versant opératoire (la

stratégie) et le versant représentationnel (lié aux schémas de problèmes). De par la diversité de la nature des objets qui organisent la mémoire des problèmes, au moins trois sortes de schémas de problèmes sont dénombrées :

Les schémas de type « cas »	Il s'agit de problèmes qui laissent une trace en mémoire à long terme. Cette trace est sémantique, et non épisodique. L'élaboration cognitive associée est donc très variable en fonction de la réussite, de la compréhension du problème, etc. Jean Julo prend l'exemple du jeu d'échecs, où un bon joueur connaît un ensemble significatif de cas, de configurations. Cela rejoint l'hypothèse des *« situations fondamentales »* de Brousseau (1986).
Les schémas de type « regroupements »	Il existait auparavant une hiérarchie entre deux modes de catégorisation des problèmes : celui des « *traits de surface* » (habillages) était dominé par celui de la structure des problèmes. Désormais, le rôle important des traits de surfaces a été reconnu et l'intérêt du regroupement des problèmes par les traits de surface a été mis en évidence : on a par exemple remarqué que les problèmes de proportionnalité mettant en jeu des prix n'étaient pas traités de la même façon.
Les schémas de type « catégories abstraites »	Liés aux méthodes de résolution de problème par analogie, ces schémas abstraits permettraient de reconnaître et analyser des problèmes appartenant à une même catégorie, ce qui rendrait alors « *capable de transférer la solution d'un problème connu à un problème nouveau ».* Ces schémas abstraits comprennent par exemple les tableaux de proportionnalité, les diagrammes fléchés pour les problèmes additifs ou la règle de trois. Il est aussi défini un sous-groupe de schémas abstraits correspondant à des « *catégories bien différenciées en termes de structures de problèmes* » que l'on débute cependant seulement à savoir reconnaître et analyser.

Question soulevée par l'auteur :

Dans quelle mesure est-il possible d'agir, par un apprentissage provoqué, sur la formation de ces connaissances spécifiques que constituent les schémas de problèmes ?

Pour y répondre, Jean Julo décrit trois démarches fréquemment utilisées dans la pratique :

* Recourir à des représentations symboliques conventionnelles pour fournir un principe de catégorisation

  Une distinction est d'abord faite entre les problèmes de combinaison et ceux de changement. Bien que tous les deux soient additifs, les diagrammes associés à ses problèmes sont différents. Les diagrammes proposés par Vergnaud en 1997 dans *Le Moniteur de Mathématiques* forment un outil pédagogique pour le cycle 3, largement reconnu en France.

  La représentation symbolique est une aide à la catégorisation, ainsi qu'un support pour l'élaboration de la procédure de résolution. Le rôle de ces diagrammes est espéré provisoire : d'après Vergnaud, ils sont destinés à être « *oubliés au fur et à mesure de la maîtrise de ces problèmes »*. Cette maîtrise nécessite cependant du temps ; les diagrammes peuvent donc être durant un temps plus ou moins long « *un support utile, voire indispensable pour comprendre un problème et envisager des procédures de résolution* » (Vergnaud).

* Expliciter la structure des problèmes en vue d'une meilleure catégorisation

  Il s'agit de définir précisément la base de problèmes à laquelle on va confronter l'élève. L'élève est invité à effectuer des tâches de classement de problèmes ou de fabrication

d'énoncés afin de l'amener à faire des rapprochements et des différenciations parmi les problèmes pour mieux les catégoriser.

✱ Agir sur l'activité de catégorisation en vue d'une meilleure résolution des problèmes

Obstacle : La catégorisation ne joue qu'un rôle partiel dans la formation des schémas de problèmes et ne semble pas concerner tous les types de schémas. Par exemple, dans un schéma de type « *cas* », il semble ne pas s'agir d'un processus de catégorisation, mais plutôt d'abduction (« l*a possibilité que semble avoir notre système cognitif de fabriquer de la compréhension à partir d'une seule situation et d'une activité particulière liée à cette situation* »).

=> Ainsi, l'apprentissage de schémas n'est pas probant. L'auteur considère donc un autre point de vue basé sur l'hypothèse que la représentation a un rôle important dans l'activité mentale, que constitue la résolution de problèmes. L'activité de représentation repose sur un double mouvement : les informations stimulent des connaissances, qui guident alors le traitement et l'interprétation de ces mêmes informations.

Les schémas de problèmes semblent être des connaissances décisives intervenant dans la construction de la représentation du problème. Ce serait donc au coeur de la résolution de problème, lors de l'activité de représentation, et non de catégorisation, qu'aurait lieu l'essentiel de la formation de ces schémas. Il s'agit donc maintenant pour l'auteur de s'intéresser aux pratiques portant sur l'activité de représentation en classe.

✦ L'aide à la représentation des problèmes (p 43 - 47)

Sous l'hypothèse que *« ce sont donc les représentations construites lors de la résolution de différents problèmes qui s'organisent progressivement en schémas de problèmes »,* Jean Julo se demande alors quels sont les effets attendus d'une aide à la résolution d'un problème. Il dégage deux objectifs distincts :

I. Permettre l'invention d'une procédure

Jean Julo distingue deux critères principaux d'une véritable activité de résolution de problème : *« d'abord on ne peut pas réaliser le but proposé au moyen d'une application plus ou moins routinière de ses connaissances procédurales, ensuite on trouve soi-même, sans guidage, un moyen de réaliser ce but ».* La démarche d'invention de procédure a donc des bénéfices sur le plan opératoire (nécessité de coordonner et planifier un ensemble d'actions matérielles et mentales), mais aussi au niveau des schémas de problèmes (des empreintes profondes sont laissées par les problèmes réussis, ce qui permet la mise en place de schémas performants) et enfin, liés à l'appropriation de savoirs. Le doute subsiste sur l'éventuel bénéfice positif tiré d'un échec dans la résolution, même si le problème est ensuite corrigé et expliqué ; il est également assez fréquent d'observer des effets négatifs à l'échec.

II. Induire une évolution des schémas

Il s'agit d'aider l'élève à progresser dans sa représentation du problème, en lui montrant

comment il fallait penser le problème plutôt que ce qu'il fallait faire pour trouver la solution. La trace laissée à l'élève doit être utile, en enrichissant ses schémas de problèmes malgré l'échec.

Quelques critères pour une aide performante en vue de ces objectifs :

- L'aide ne contient pas d'indices sur la solution.
- L'aide n'oriente pas vers une procédure de résolution.
- L'aide ne suggère pas une modélisation du problème.

Ces critères se révèlent très exigeants et sévères. C'est pourquoi ils sont dans la pratique fréquemment transgressés car ces véritables aides à la représentation ne sont pas aisées à concevoir. De plus, les élèves ne sont pas forcément prêts à les recevoir comme telles puisqu'une aide est souvent associée pour eux à l'idée d'une efficacité relativement immédiate sur le plan opératoire.

Jean Julo propose alors l'idée d'aide par les modalités, avec un exemple d'un problème d'une recette de crêpes. Il expose la modalité de la multiprésentation : l'énoncé est présenté avec deux autres strictement isomorphes (même structure, mêmes valeurs numériques, même solution). L'intérêt est alors lié à la résolution de problèmes par analogie et à l'aide à la représentation. Il est aussi possible de rajouter une catégorie d'aides appelées *« tâches surajoutées »* (par exemple, comparer à l'écrit les ressemblances et différences des trois problèmes proposés). Le cumul des aides, de nature et de logiques différentes (en environnement numérisé par exemple) est profitable à l'activité de représentation.

Jean Julo résume ainsi l'objectif principal d'une aide : il s'agit de *« préserver autant que possible ce phénomène extraordinairement riche sur le plan cognitif qu'est la réussite par invention d'une procédure de résolution. Pourtant il faut aussi éviter l'échec qui n'apporte rien de bon et il faut essayer de faire progresser la représentation, au moins un peu. »*

✦ Conclusion (p 48)

Il existe des processus et connaissances spécifiques à la base de l'activité de la recherche de problèmes. Certaines connaissances sont opératoires, d'autres sont liées à la représentation du problème, comme les schémas de problèmes, qui ont un rôle essentiel dans l'appréhension du problème et le processus d'échec systématique de certains élèves.

Pour améliorer la qualité de ces schémas, certains misent sur un entraînement à la catégorisation et sur l'explicitation des différences entre des problèmes qui se ressemblent (éventuellement avec des diagrammes), mais l'efficacité de ces méthodes peut être mise en doute. Jean Julo a aussi évoqué l'idée d'une aide à la représentation.

Ces deux approches ne sont cependant pas exclusives. De plus, il est parfois plus judicieux pour des élèves déjà habitués au cercle de l'échec, de tenter de mettre en place un entraînement systématique que de les laisser abandonner.

Enfin, pour répondre au titre de l'article « *Des apprentissages spécifiques à la résolution de problèmes ? »,* l'auteur répond plutôt à la négative pour des méthodes générales comme celles de Polya ou des diagrammes pour les problèmes additifs. Il privilégie plutôt les ensembles de problèmes donnés aux élèves, qui comportent ainsi un ensemble d'aides et constitue également une aide à la représentation.

A la lumière de ces réflexions, témoignant d'une part du point de vue d'un mathématicien, et abordant d'autre part la résolution de problèmes dans l'apprentissage d'un point de vue didactique, nous avons trouvé des éléments de réponse aux questions que nous nous posions précédemment, liées à nos pratiques professionnelles.

✓ Pour aider les élèves à entrer dans une posture de chercheur, il peut être intéressant de recourir à quelques éléments d'histoire des mathématiques, leur montrant que la recherche est l'essence même des mathématiques et qu'elle a toujours existé. De tout temps, les hommes ont cherché des outils mathématiques de plus en plus performants, la preuve de leurs propriétés, mais aussi tout simplement leur utilité qui parfois n'est apparue que plusieurs dizaines d'années ou siècles plus tard. L'ignorance ne doit pas être source de peur en mathématiques. Il faut parfois accepter de ne pas tout savoir, prendre des initiatives et surtout persévérer. Par exemple, les constructions à la règle et au compas sont un problème légué par les Grecs qui n'a été résolu qu'au 19ème siècle. Il est donc tout à fait normal de trouver un problème de recherche difficile, de se sentir possiblement désemparé, mais la clef de la réussite est cependant la persévérance.

✓ L'article de Jean Julo apporte de manière directe une réponse à notre question « *Existe-t-il un apprentissage spécifique à la résolution de problèmes ?* ». En effet, l'auteur réfute les méthodes générales de résolution de problèmes, que ce soient les méthodes heuristiques de George Polya ou les diagrammes systématisés des problèmes additifs. Il encourage plutôt la mise à disposition aux élèves d'un ensemble de problèmes, ayant aussi le rôle d'aides, permettant ainsi une meilleure représentation, et donc une résolution plus prometteuse du problème donné.

✓ La conception d'une trame de résolution unique, commune à toutes les situations de recherche est un processus complexe. Daniel Perrin a cependant esquissé une succession d'étapes clés dans la démarche de chercheur que l'on peut adapter pour aider les élèves dans leur recherche :

1ère étape : « Choix d'un thème de recherche » qui pourrait pour nos élèves plutôt être remplacée par « **Compréhension du thème de la recherche** » (lire attentivement le problème, s'informer si besoin sur le vocabulaire ou les notions évoqués, essayer de formuler l'objet de la recherche)

2ème étape : « **Exploration et expérimentation** » ; il s'agit d'étudier des exemples, des contre-exemples, de prendre des initiatives, de faire des tests, des essais, de reprendre ce qu'on sait

déjà sur le sujet. Il faut ensuite réussir à formuler ce qu'on voit et ne pas craindre de dire des bêtises.

3ème étape : « **Démontrer la conjecture énoncée** » ; pour nos élèves de cycle 4, cette partie peut prendre différentes formes selon le problème de recherche posé. Il s'agira souvent de reprendre le raisonnement ayant permis l'énonciation de la conjecture, en essayant de justifier chacun des choix et hypothèses effectués (éventuellement à l'aide de propriétés).

4ème étape : « **Vérification de la preuve** » ; il peut s'agir pour nos élèves de bien relire attentivement leurs justifications, de contrôler la vraisemblance de leur réponse vis-à-vis de l'énoncé, de veiller à ne pas avoir seulement traité un cas particulier ou d'avoir commis une erreur de calcul. Si l'énoncé porte sur un cas général, ils pourront par exemple considérer un cas particulier et vérifier si le résultat trouvé, en utilisant le même raisonnement que celui effectué pour le cas général, est bien le résultat attendu.

5ème étape : « Rédaction, publication et promotion *»* qui pourrait plutôt être remplacée pour nos élèves par « **Rédaction au propre** ». Il s'agit alors de rédiger clairement leurs démarches de recherche, de manière détaillée et argumentée, en n'hésitant pas à expliciter également les raisonnements qui n'ont pas abouti ou les conjectures effectuées qui n'ont finalement pas été retenues. Il faut veiller à s'exprimer le plus clairement possible, en utilisant un vocabulaire mathématique adapté.

✓ Selon Jean Julo, lors de la conduite d'une situation de recherche en classe, les aides apportées par l'enseignant ne doivent pas contenir d'indices sur la solution, orienter vers une procédure de résolution ou suggérer une modélisation du problème. Ces critères pour une aide performante sont très exigeants et contraignants : il est en effet plus aisé d'imaginer ce qui n'est pas une aide performante, que ce qui l'est. C'est pourquoi, dans la pratique, l'enseignant est souvent amené à transgresser ces règles en apportant assez d'indications à l'élève pour le motiver dans sa recherche, tout en étant attentif à ne pas trop le guider pour ne pas brider ou diriger son processus d'invention de procédure de résolution. Afin que le problème reste attractif pour les élèves, il est donc préférable que chaque aide apportée par l'enseignant lors de la conduite d'une situation de recherche en classe ait été anticipée et réfléchie en amont, lors de la préparation de la séance.

II- Expérimentation menée en classe de 5ème

Après avoir analysé le processus complexe que représente la résolution d'un problème de recherche, notamment grâce à un appui sur des textes issus de la littérature professionnelle et de recherche, nous avons souhaité faire vivre à nos élèves une expérience de recherche commune à la lumière de ces enseignements. Nous disposions de quatre classes de 5ème, qui constituaient donc quatre groupes distincts pour lesquels il nous était possible de faire varier certains paramètres didactiques, afin d'analyser a posteriori leurs rôles dans le processus de recherche. Nous avons donc été amenées à construire une situation d'apprentissage en définissant un sujet et en décidant des paramètres que nous souhaitions faire varier ou non au sein de chaque classe, avant de réaliser l'analyse a priori de notre activité, de l'expérimenter avec nos élèves et d'en effectuer une analyse a posteriori.

a) *Choix du sujet et des paramètres retenus*

Nous avons tout d'abord effectué des recherches afin de trouver une situation de recherche pertinente pour cette expérimentation. Daniel Perrin ayant proposé un certain nombre de problèmes pour réfléchir lors de sa conférence, nous avons d'abord pensé à s'inspirer d'un de ses problèmes. Cependant, les problèmes présentés, bien que très intéressants, étaient difficilement réalisables en une seule séance de 55 minutes. Comme nous ne disposions toutes les deux d'aucun créneau de deux séances consécutives, nous ne souhaitions pas effectuer cette situation de recherche sur deux moments disjoints afin de ne pas interrompre la dynamique de recherche de nos élèves.

Nous avons donc continué la recherche de notre sujet d'expérimentation dans les manuels scolaires, sur les sites des IREM, dans les revues du concours Kangourou, etc. Parmi les nombreux problèmes de recherche que nous avons trouvés, l'un d'entre eux a particulièrement attiré notre attention. Il s'agissait d'un problème classique : le dénombrement des diagonales d'un polygone. Nous connaissions déjà ce problème, mais n'avions pas pensé auparavant à le présenter à nos élèves. Issu d'une production du GIPTIC[19] de mathématiques de l'académie de Paris, ce problème était présenté sous l'angle de deux approches différentes : tout d'abord, sous la forme d'une proposition de travail hybride pour des élèves de 6ème, alternant des phases de travail en classe et des recherches à effectuer à la maison à l'aide du logiciel de géométrie dynamique Géogebra, mais aussi, sous la forme d'un problème ouvert « *Combien de diagonales possède un polygone à n sommets ?* » à partir de la 5ème [20].

Sous des traits de surface purement géométriques, le dénombrement des diagonales d'un polygone peut s'effectuer selon divers procédés, dont l'efficacité varie en fonction du nombre

[19] Groupe d'Intégration Pédagogique des Technologies de l'Information et de la Communication

[20] Site de l'académie de Paris, rubrique « Enseigner », cycle 4, article « Diagonales d'un polygone » : https://www.ac-paris.fr/portail/jcms/p1_316143/diagonales-d-un-polygone-cycle-4

de côtés du polygone en question : en effet, le raisonnement effectué n'est généralement pas le même pour compter le nombre de diagonales d'un pentagone que pour dénombrer les diagonales d'un chiliogone (polygone à 1 000 côtés).

Ce problème étant classique, nous avons trouvé des articles décrivant la façon dont il est présenté en classe. Traité dès la classe de CM2 lors d'une séance de recherche guidée par la maîtresse [21], en devoir maison avec un énoncé découpé en plusieurs parties pour une classe de 6ème [22] ou dans le cadre d'une narration de recherche en groupe avec des élèves de 5ème [23], nous avons pu analyser plusieurs productions d'élèves et observer les différentes possibilités de rédaction de l'énoncé, en fonction des objectifs visés.

N'ayant pas la même progression, nos quatre classes n'avaient pas encore toutes étudié le chapitre portant sur le calcul littéral. Ainsi, nous ne souhaitions pas proposer à nos élèves de 5ème la détermination du nombre de diagonales d'un polygone à n côtés (où n est un entier naturel, n ≥ 3). De plus, cette formulation du problème, bien que reflétant un cas général, nous est apparue comme légèrement réductrice concernant la démarche de recherche : en effet, un polygone à n côtés, pour n non fixé, n'étant pas traçable, il peut être d'autant plus naturel de commencer à tracer des polygones pour différentes valeurs de n, sûrement petites au début, puis de dénombrer les diagonales obtenues afin d'ensuite établir un raisonnement adaptable au cas général. Or, nous voulions que la prise d'initiative et la démarche d'essais-erreurs soient au coeur de notre expérimentation.

Ainsi, nous avons décidé de proposer ce problème à nos élèves pour un polygone dont le nombre de côtés était clairement défini. Après quelques calculs, 100 nous est apparu comme un bon prétendant. Notre choix pour cet entier naturel habitué des élèves s'est encore affirmé quand nous avons appris qu'un polygone à 100 côtés se nommait un hectogone, dénomination qui de plus nous a paru très logique de par son préfixe « *hecto* », représentant 10^2, soit 100. Nous avons donc opté pour l'énoncé suivant :

« *Combien de diagonales possède un hectogone (polygone à 100 côtés) ?* »

Nous avons apprécié la concision d'énonciation de ce problème de recherche, dont la solution ne se dévoile cependant pas à la première lecture, même pour une personne mathématiquement aguerrie. Nous retrouvons ainsi la remarque que Daniel Perrin a fait aux élèves sur les « *véritables problèmes de recherche* » : « *il ne faut pas espérer les résoudre en un instant, mais au contraire, y revenir encore et encore (…) La première qualité d'un*

[21] https://ecoles-rpi-broualan-trans.ac-rennes.fr/spip.php?article62

[22] https://rallye-bombyx.asso-web.com/uploaded/6e3-travail-du-11-janvier-2016-sur-pb-ouvert-copyright-rallye-bombyx-corriges.pdf

[23] http://college-reydellet.ac-reunion.fr/narration-de-recherche-les-diagonales-dun-polygone-en-classe/

chercheur c'est l'obstination » [24]. Jean Julo distinguait quant à lui, deux critères principaux d'une véritable activité de résolution de problème : *« d'abord on ne peut pas réaliser le but proposé au moyen d'une application plus ou moins routinière de ses connaissances procédurales, ensuite on trouve soi-même, sans guidage, un moyen de réaliser ce but »*[25].

Le premier critère proposé par Jean Julo est bien vérifié ici par ce problème de recherche, puisqu'on ne pourra se contenter de tracer un hectogone, puis de dénombrer ses diagonales : en effet, tracer un polygone à 100 côtés est déjà fastidieux, mais compter ses 4 850 diagonales l'est encore plus. De plus, l'énoncé du problème n'oriente aucunement les élèves dans une procédure particulière de résolution. Afin qu'ils puissent malgré tout trouver par eux-même une manière de résoudre ce problème, nous avons décidé de les faire travailler en groupe de trois à quatre élèves : « *la recherche est souvent une affaire d'équipe »* [24]. Afin qu'ils soient de niveau homogène entre eux, ces groupes étaient choisis en amont par l'enseignante. Avec ces groupes de travail, l'idée était que les élèves mettent en commun leurs idées, leurs remarques, leurs résultats, mais aussi leurs questions, motivant ainsi tous les élèves à être acteurs d'une recherche quels que soient leurs profils ou difficultés originels.

Ce problème de recherche voulait également être présenté comme un « *défi* » pour les élèves. Il s'agissait de leur faire comprendre qu'il était normal qu'ils ne sachent pas d'avance comment résoudre ce problème, qu'ils seraient sûrement amenés à essayer des raisonnements qui aboutiraient peut-être à un résultat concluant ou non, qu'ils feraient sûrement des erreurs, mais que dans tous les cas, la clef de la réussite était la persévérance. Nous avons également choisi de demander aux élèves de rendre à la fin de la séance une feuille par groupe avec les détails de leur démarche. L'évaluation serait axée sur la réflexion, la démarche de recherche et le travail de groupe, et non sur le(s) résultat(s) trouvé(s). Ainsi, l'évaluation pourrait être positive, même si la réponse trouvée au problème n'est pas correcte, dès lors que les démarches sont explicitées et que des traces de recherche sont visibles.

Ces conditions d'enseignement ont pour objectif de ne pas orienter nos élèves dans une procédure particulière de résolution, mais plutôt de les motiver (par la dynamique d'un groupe, par le défi mathématique que représente cet énoncé, par l'idée d'un travail dont l'évaluation est positive) à chercher par eux-même une manière de résoudre ce problème. De par ces choix, nous considérons que notre sujet peut être assimilé au sens de Daniel Perrin et de Jean Julo à un « *véritable »* problème de recherche, permettant à nos élèves d'adopter une posture de chercheur.

Une fois notre choix de sujet effectué, il nous est apparu intéressant de décider de paramètres à faire varier entre nos différents groupes, afin d'enrichir notre expérimentation. Le

---

[24] Conférence donnée par Daniel Perrin en 2007 au collège de Boussy-Saint-Antoine, intitulée : « *En mathématiques : que cherche-t-on ? comment cherche-t-on ?* »

[25] Jean Julo, revue Grand N. N° 69, 2002, page 43

dénombrement des diagonales d'un hectogone s'inscrit dans une classe d'exercices où l'élève peut être tenté de vouloir produire une formule décrivant une situation générale, s'affranchissant ainsi de toute valeur numérique particulière. Il peut alors avoir recours à la lettre et donc au calcul littéral, élément du programme de mathématiques de 5ème ayant été déjà abordé par les élèves de Chloé, mais pas par ceux d'Elsa. D'où l'apparition d'un premier paramètre didactique qui s'imposait clairement à nous : la connaissance du calcul littéral.

Nous avions ensuite envisagé de mettre à disposition de certains groupes des tablettes afin de leur faire bénéficier du logiciel de géométrie Géogebra, pouvant s'avérer utile pour une rapide représentation de différents polygones, mais aussi d'un tableur, outil efficace pour effectuer une addition itérée sous réserve d'avoir une aisance suffisante avec la poignée de recopie. La durée de recherche de ce travail pour nos élèves n'étant que de 55 minutes, nous avons estimé après réflexion, que l'usage d'un outil informatique se révélerait plus laborieuse que bénéfique. Nous n'avons donc pas retenu cette possibilité. Pour autant, dans d'autres conditions, il s'agit d'un paramètre nous apparaissant comme pertinent à prendre en considération.

Nous avons également réfléchi à la mise au travail des élèves face à un tel problème de recherche. Nos élèves n'ont cette année jamais étudié de problèmes de type *pattern*, les incitant ainsi à trouver une solution générique en décrivant et formalisant les notions sous-jacentes au problème. Chloé avait déjà traité avec ses classes le problème des poignées de mains pour 7 individus et les élèves d'Elsa avaient déjà travaillé sur un problème relatif à 25 personnes s'offrant des cadeaux deux à deux. Nous n'avions cependant ni l'une, ni l'autre prolongé la tâche à un cas plus général. Il était donc possible que nos élèves se sentent désemparés face à ce problème de recherche, ce qui retarderait leur mise en activité. Pour les impliquer le plus rapidement possible, nous avons donc pensé à précéder le travail en groupe d'un temps de recherche individuelle, dans le cahier d'exercices. Dès la projection de l'énoncé sur le tableau numérique, les élèves disposeraient de 5 minutes de travail personnel, où il ne serait pas possible d'interroger l'enseignante. Il s'agirait plutôt de noter ses questions et réflexions pour ensuite les mettre en commun dès la formation des groupes de travail. Ce travail personnel pourrait également permettre aux élèves les plus éloignés de la compétence « *Chercher* » de disposer d'un temps de réflexion personnelle avant de commencer le travail de groupe, au sein duquel des élèves plus expérimentés pourraient vouloir orienter directement la recherche vers un raisonnement approfondi. Afin d'analyser son influence sur la mise en activité des élèves, nous pourrions réaliser ce travail individuel avec deux classes, tandis que pour les deux autres classes restantes, la formation en groupe s'effectuerait dès la découverte de l'énoncé, sans aucun temps de réflexion individuelle préalable.

Enfin, nous nous sommes intéressées à la possibilité de modifier légèrement l'énoncé pour certains groupes : par exemple, la détermination du nombre de diagonales d'un triacontagone

(polygone à 30 côtés). L'objectif serait alors de savoir si les élèves étudiant le triacontagone auraient raisonné et utilisé les mêmes outils que ceux s'intéressant à l'hectogone.

Bien que ces dernières pistes de réflexion soient toutes les deux intéressantes, nous avons dû faire un choix car ne disposant que de quatre classes pour notre expérimentation, nous ne pouvions faire varier beaucoup de paramètres à la fois, sans courir le risque de ne plus pouvoir analyser clairement leurs influences dans le processus de recherche de nos élèves. Nous avons donc retenu au total deux paramètres, qui sont la connaissance du calcul littéral et la mise en place d'un temps de recherche individuel précédant le travail de groupe. Nous avons fait varier ces paramètres de la façon suivante :

Paramètres retenus	*Classes d'Elsa*		*Classes de Chloé*	
	A	B	C	D
Connaissance du calcul littéral	Non	Non	Oui	Oui
Mise en place d'un temps de recherche individuelle	Non	Oui	Non	Oui

b) *Analyse a priori*

Avant d'expérimenter notre situation de recherche avec nos élèves, nous avons défini les objectifs de l'activité et les compétences travaillées, détaillé les différentes procédures de résolution possibles, mais aussi évoqué les difficultés anticipées et les aides envisagées pour la conduite de l'activité en classe.

❖ Objectifs de l'activité et compétences travaillées

Pour les élèves, l'objectif de cette activité est de trouver le résultat, c'est-à-dire le nombre de diagonales d'un hectogone. Cependant, en tant qu'enseignantes, notre objectif est différent : il s'agit de développer la compétence « *Chercher* » chez nos élèves grâce à ce problème de recherche.

Nous nous assurons alors que les élèves développent la compétence « *Chercher* » car pour réaliser ce type de tâches, il faudra que les élèves décomposent eux-mêmes le problème en sous-problèmes et fassent des tests afin d'avancer dans la résolution.

Par ailleurs, le travail sur la compétence « *Chercher* » est rarement une action isolée ; son développement s'accompagne souvent pour les élèves d'un travail sur d'autres compétences. Ainsi, notre sujet sur les diagonales de l'hectogone permet de travailler la compétence « *Chercher* », mais aussi les compétences « *Raisonner* » et « *Communiquer* » de nos élèves. Le tableau suivant [26] regroupe plus concrètement les compétences que nous souhaitons faire travailler à nos élèves lors de cette situation de recherche :

Compétences travaillées		*Domaine du socle commun*
Chercher	S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre une conjecture. Tester, essayer plusieurs pistes de résolution.	4
	Décomposer un problème en sous-problèmes.	2
Raisonner	Mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui.	3
	Résoudre des problèmes […] en mobilisant les connaissances nécessaires, analysant et exploitant ses erreurs, mettant à l'essai plusieurs solutions.	4
Communiquer	Expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, […]), comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.	3
	Faire le lien entre le langage naturel et le langage algébrique. Distinguer les spécificités du langage mathématique par rapport au français.	1

[26] Programme du cycle 4 d'après le BOEN n°31 du 30 juillet 2020, pages 129 et 130

❖ Procédures possibles

Beaucoup d'élèves pourraient être désemparés ou effrayés à la lecture de l'énoncé du problème. En effet, un polygone à 100 côtés est difficilement représentable que ce soit mentalement ou sur un schéma. Certains pourraient même mettre en doute l'existence d'un tel polygone ; le rappel de la définition d'un polygone [27] permettrait d'ôter cette interrogation. Les élèves ne pourraient pas utiliser directement la stratégie du comptage, qui reviendrait à dessiner le polygone, ainsi que ses diagonales, puis de compter ces dernières. Il est possible que certains élèves se lancent dans une telle tâche, qu'ils ne finaliseront cependant pas en raison de sa durée relativement longue. Il est cependant à noter que cette première procédure, bien que monotone et peu efficiente, permettrait bien de trouver le résultat souhaité, sous réserve de ne pas se tromper lors de la représentation d'un hectogone et du dénombrement de ses diagonales.

A la suite de cela, les élèves pourraient vouloir chercher les nombres de diagonales de polygones qui leur sont plus familiers à 4, 5, 6, 7 ou 8 côtés par exemple. L'objectif serait ensuite de trouver un raisonnement logique entre les différents nombres de diagonales trouvées pour ces polygones. L'avantage pour les élèves de tester sur des polygones possédant un petit nombre de côtés est qu'il serait possible de les tracer, puis de construire et dénombrer leurs diagonales. Si les élèves pensent à tester pour des polygones possédant un petit nombre de côtés pour essayer de dégager une conjecture générale, ils auraient déjà réussi une partie du problème et seraient bien engagés pour la résolution du problème de l'hectogone.

A partir d'un seul essai, certaines conjectures pourront être proposées par les élèves :

- **Comme un quadrilatère possède deux diagonales, le nombre de diagonales d'un polygone est égal à la moitié de son nombre de côtés**. Cette conjecture peut rapidement être écartée, ou complétée, au vue de sa non-compatibilité pour des polygones dont le nombre de côtés est impair.
- **Comme un pentagone a cinq diagonales, le nombre de diagonales d'un polygone est égal à son nombre de côtés**. Cette conjecture pourra être réfutée par la détermination du nombre de diagonales de n'importe quel autre polygone (cela n'est en effet vrai que si le nombre de côtés du polygone est cinq).

Si les élèves décident plutôt de réaliser leur essai avec un polygone à 5, 6, 7, 8 côtés ou plus, l'élaboration d'une première conjecture est moins immédiate et évidente.

Polygones	*Nombres de côtés*	*Nombres de diagonales*
quadrilatère	4	2
pentagone	5	5
hexagone	6	9

[27] Un *polygone* est une figure géométrique plane formée d'une ligne brisée fermée.

heptagone	7	14
octogone	8	20
ennéagone	9	27
décagone	10	35
…	…	…

Pour trouver ces résultats, les élèves peuvent utiliser un schéma, en comptant directement les diagonales tracées ou bien en essayant de comprendre comment les diagonales d'un polygone sont construites, pour ensuite obtenir leur nombre.

Pour les élèves ayant compté le nombre de diagonales sur un schéma, il sera plus difficile de trouver tout de suite une formule explicite qui permet d'obtenir le nombre de diagonales en fonction du nombre de côtés. Cependant, s'ils ont essayé avec plusieurs polygones, comme répertorié dans le tableau ci-dessous, ils peuvent voir apparaître une certaine logique.

Polygones	*Nombres de côtés*	*Nombres de diagonales*	
quadrilatère	4	2	
pentagone	5	5	+3
hexagone	6	9	+4
heptagone	7	14	+5
octogone	8	20	+6
ennéagone	9	27	+7
décagone	10	35	+8
…	…	…	

Comme indiqué par les flèches rouges, les élèves peuvent trouver que pour obtenir le nombre de diagonales d'un pentagone, il suffit d'ajouter trois au nombre de diagonales d'un quadrilatère. Pour obtenir le nombre de diagonales d'un hexagone, il suffit d'ajouter quatre au nombre de diagonales d'un pentagone. Et ainsi de suite… Certains élèves peuvent donc vouloir utiliser cette procédure pour obtenir le nombre de diagonales d'un hectogone, en cherchant à effectuer la somme des entiers de 2 à 98. Cette somme peut être effectuée à l'aide de regroupements astucieux ou bien en additionnant à la calculatrice l'ensemble des entiers de 2 à 98 compris.

Le nombre de diagonales d'un polygone de n côtés, noté D, s'obtient donc en faisant la somme des entiers allant de 2 à n - 2. Après calculs, on peut obtenir la formule explicite suivante : $D = \frac{(n-2)\times(n-1)}{2} - 1$. Nous verrons après, d'autres formules explicites qui seront bien égales à celle-ci.

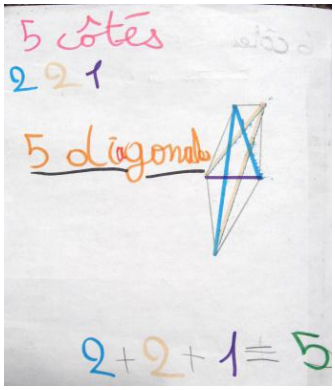
Pour les élèves ayant déterminé le nombre de diagonales d'un polygone en étudiant la construction de ses diagonales, deux procédures peuvent être déduites.

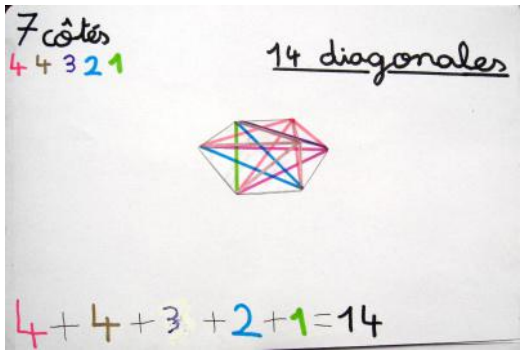
Nous avons pu observer une première procédure dans des copies d'élèves de CM2 [28] de l'académie de Rennes, qui ont traité la question « *Combien de diagonales a un polygone ?* ». Pour répondre à cela, les élèves ont tracé des polygones, et compté le nombre de diagonales après les avoir tracées. Pour être sûrs de ne pas en oublier, certains élèves ont tracé d'une même couleur toutes les diagonales qui partent d'un même sommet.

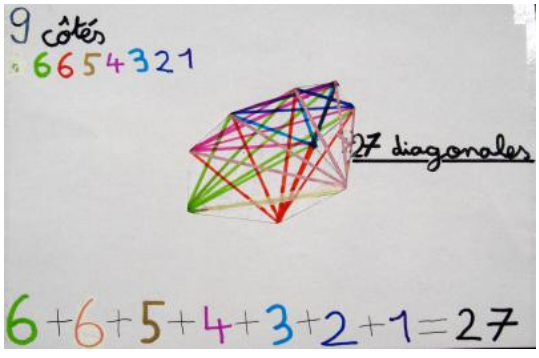
Tout d'abord, les élèves doivent faire le lien entre le nombre de côtés d'un polygone et son nombre de sommets. En effet, les informations données dans l'énoncé concernent le nombre de côtés d'un polygone, mais les élèves utilisant cette procédure seront amenés à raisonner sur ses sommets. Dans un polygone, il y a autant de côtés que de sommets. Pour fixer les idées, notons n le nombre de côtés (et donc de sommets) d'un polygone.

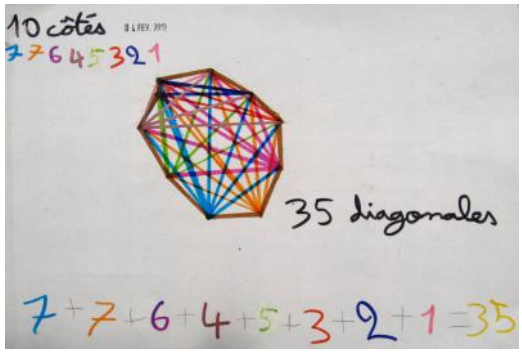
Les élèves peuvent construire les diagonales de ce polygone de la façon suivante : du premier sommet considéré partent n - 3 diagonales (on ne peut pas tracer de diagonale en provenance des deux sommets voisins et du sommet de départ). Du deuxième sommet considéré (qui est un sommet voisin du sommet précédent) partent également n - 3 diagonales. On considère les sommets de voisin en voisin. Pour le troisième sommet considéré, il y aura n - 4 diagonales partant de ce sommet, puis n - 5 pour le quatrième sommet considéré, etc. Cela vient du fait que certaines diagonales sont déjà tracées ; il serait donc inutile de les tracer à nouveau et même incorrect de les dénombrer une nouvelle fois.

Voici différents exemples pour des polygones à 5, 7, 9 et 10 côtés :









[28] Combien de diagonales a un polygone ? - Écoles Publiques RPI Broualan - Trans (ac-rennes.fr)

Le nombre de diagonales d'un polygone de n côtés, noté D, s'obtient donc en faisant la somme des entiers allant de 1 à n - 3, puis en ajoutant n - 3 au résultat obtenu. Après calculs, on peut obtenir la formule explicite suivante : $D = \frac{(n-3)\times(n-2)}{2} + n - 3$. Cette formule est bien égale à celle précédemment trouvée.

Les élèves peuvent donc utiliser cette procédure pour résoudre le problème, en effectuant la somme des entiers allant de 1 à 97, puis en ajoutant finalement 97 au résultat trouvé. Quelque soit la méthode de calcul utilisée pour effectuer cette somme, des erreurs sont possibles malgré un raisonnement jusque là correct.

Une deuxième procédure peut être effectuée par des élèves ayant déterminé le nombre de diagonales d'un polygone en étudiant leur construction. Tout comme précédemment, il faudra raisonner sur les sommets d'un polygone et non sur ses côtés. Ainsi, le lien entre le nombre de côtés d'un polygone et son nombre de sommets doit être connu. Dans la suite, on notera n le nombre de côtés (et donc de sommets) d'un polygone.

Il s'agit alors de se demander le nombre de diagonales que l'on peut tracer à partir d'un sommet quelconque fixé. Comme on ne peut pas tracer de diagonales à partir des sommets voisins et du sommet considéré, cela fait un total de n - 3 diagonales pouvant être tracées en partant de ce sommet. Certains élèves peuvent oublier de considérer que trois sommets sont inutilisables pour tracer une diagonale partant de ce sommet fixé ou bien seulement oublier de considérer le sommet lui-même comme inutilisable. Le rappel de la définition d'une diagonale[29] d'un polygone pourrait éclaircir ce point.

Etant donné que le polygone possède n sommets, il y aurait donc $n \times (n-3)$ diagonales à tracer. Cependant, on aurait alors tracé chaque diagonale deux fois car pour chaque sommet, on a tracé toutes les diagonales possibles partant de ce sommet, indépendamment de celles déjà tracées. Ce raisonnement pourrait être un point délicat pour les élèves. En effet, les élèves pourraient oublier qu'en dénombrant $n \times (n-3)$ diagonales, on a compté en double chaque diagonale. D'autres élèves pourraient penser à supprimer les diagonales comptées deux fois, mais ils pourraient éventuellement avoir des difficultés à déterminer combien de diagonales ont été comptées en double. Le rappel de la définition d'une diagonale d'un polygone pourrait également éclaircir ce point.

Ainsi, afin d'éviter de dénombrer une deuxième fois les diagonales déjà tracées, il s'agit de diviser par deux le résultat précédent. On obtient donc la formule explicite suivante :

$$D = \frac{n \times (n-3)}{2}$$ *(où D est le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés)*

Sans avoir recours au calcul littéral mais en ayant observé cette logique, les élèves pourraient déterminer que d'un sommet quelconque d'un hectogone, on pourrait tracer 97 diagonales. En

[29] Une diagonale d'un polygone est un segment de droite reliant deux sommets non consécutifs d'un polygone.

effectuant ce même raisonnement pour les 99 autres sommets et en n'oubliant pas de ne dénombrer chaque diagonale qu'une seule fois, on obtiendrait donc un total de 4 850 diagonales pour un hectogone.

Enfin, nous avons trouvé une dernière procédure de résolution de ce problème de recherche. Certains élèves pourraient essayer de raisonner en relâchant une contrainte du problème, avant de conclure en prenant en compte à nouveau cette contrainte. Les élèves pourraient donc décider de ne considérer que les sommets d'un polygone, que l'on suppose toujours au nombre de n (où n est un entier naturel supérieur ou égal à 3). On aurait donc n points.

A partir de chaque point, on pourrait tracer $n-1$ segments entre le point considéré et les autres points (on ne peut relier un point à lui-même par un segment). En reprenant le raisonnement précédent, comme il y a n points, nous obtiendrions donc $n \times (n-1)$ segments tracés. Cependant, en prenant en compte que tous les segments ont été comptés deux fois, il y a en fait $\frac{n \times (n-1)}{2}$ segments tracés. Ceci correspond donc au nombre de segments qui peuvent être tracés à partir de n points du plan. Or, pour le polygone formé par ces n points, ces segments représentent des diagonales ou des côtés. Afin de dénombrer uniquement les diagonales de ce polygone à n sommets (et donc à n côtés), il nous faut donc soustraire le nombre de côtés du polygone, c'est-à-dire n.

On obtient donc une formule explicite, égale elle aussi à celles proposées précédemment :

$$D = \frac{n \times (n-1)}{2} - n$$ *(où D est le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés)*

Nous avons explicité ici les différentes procédures de résolution dans le cas général grâce au calcul littéral, mais nous avons bien conscience que ce problème de recherche est quadratique, donc bien au-delà de ce qui est maîtrisé en calcul littéral par des élèves de 5ème. Nous pensons que le calcul littéral peut être un outil pertinent pour résoudre ce problème de recherche, mais il n'est pas exigible. De plus, il est demandé aux élèves de rechercher le nombre de diagonales d'un hectogone, et non d'un polygone à n côtés. Quelle que soit la procédure retenue par les élèves, le résultat correct est 4850 diagonales pour un hectogone. Il s'agit dans tous les cas d'expliquer clairement la démarche, d'expliciter pourquoi certaines conjectures ont peut-être été finalement réfutées, de justifier les expressions des calculs, etc.

Même si les élèves n'aboutissent pas, il est important qu'ils se lancent dans une démarche mathématique de recherche et qu'ils essayent différentes pistes de réflexion pour essayer de résoudre ce problème.

❖ Difficultés anticipées et aide envisagées

Les problèmes pour chercher soulèvent fréquemment de nombreuses difficultés chez les élèves. L'objectif principal de ce type de tâches est de leur apprendre à chercher, mais

aussi de savoir ce qu'ils savent et à quoi sert ce qu'ils ont appris. Cependant, on connaît mieux ce qu'on sait quand cela a un nom, comme le théorème de Pythagore par exemple. Ainsi, il est possible que les raisonnements effectués précédemment sur les problèmes de serrage de mains ou d'échanges de cadeaux n'aient pas été pleinement assimilés par nos élèves. Le réinvestissement de ces procédures de résolution et leur adaptation à ce nouveau problème de recherche ne sont donc pas assurés.

De plus, à la lecture de cet énoncé, les élèves peuvent s'interroger sur l'utilité de cette situation de recherche. En dehors du défi mathématique que cela représente, ils peuvent se questionner sur l'intérêt réel de connaître le nombre de diagonales d'un hectogone, polygone qui est d'ailleurs très peu utilisé dans la vie quotidienne. Pour reprendre Daniel Perrin répondant aux élèves sur l'utilité des mathématiques, nous pourrions dire que « *la réponse est à la fois facile : les maths, ça sert partout, et difficile, car il n'est pas évident de donner des exemples qui se situent [au niveau des élèves]* » [30]. Dans notre cas, une application possible de connaître le nombre de diagonales d'un polygone est liée à la représentation sous forme de graphes. Que ce soit pour les réseaux sociaux, le commerce ou la construction de nouvelles routes, il peut être utile de savoir combien de connexions seraient nécessaires pour que tous les éléments soient reliés deux à deux entre eux, sachant que chacun est déjà relié à deux éléments voisins, formant ainsi un cycle. Dans la théorie des graphes, on dirait que tous les sommets sont adjacents et on qualifierait alors le graphe de complet.

Nous avons anticipé certaines difficultés que pourraient rencontrer nos élèves face à cette situation de recherche, mais aussi prévu des aides. Il est important pour nous que nos élèves puissent chercher et trouver par eux-mêmes des procédures de résolution, mais l'objectif n'est pas non plus de les démotiver, en les laissant bloqués face à une difficulté. De plus, l'activité étant programmée sur une séance de cours de 55 minutes, il pourrait être parfois judicieux de ré-orienter certains groupes engagés dans une procédure de résolution, qui ne pourrait aboutir. Nous avons donc préparé des aides, en essayant de respecter le plus possible les critères d'une aide « *performante* »[31], qui selon Jean Julo, ne doit contenir aucun indice sur la solution, ne doit pas orienter vers une procédure de résolution et qui ne doit suggérer aucune modélisation du problème.

Le premier coup de pouce envisagé est d'aider les élèves à se questionner sur ce qu'ils proposent. En effet, c'est un bon réflexe d'effectuer des tests et d'émettre des conjectures, mais pour ne pas qu'ils fassent des conclusions trop hâtives, il est important de savoir également prendre du recul et essayer d'adopter une posture réflexive. Par exemple, si un groupe propose une conjecture en n'ayant testé sur qu'un seul polygone et en demandant à l'enseignante s'il s'agit de la bonne réponse, on peut alors conseiller à ces élèves de tester avec un autre polygone pour confirmer ou réfuter leur conjecture. Ce conseil est autant

---

[30] Conférence donnée par Daniel Perrin en 2007 au collège de Boussy-Saint-Antoine, intitulée : « *En mathématiques : que cherche-t-on ? comment cherche-t-on ?* »

[31] Jean Julo, revue Grand N. N° 69, 2002, page 45

pertinent que la proposition des élèves soit juste ou fausse car il est important qu'ils vérifient par eux-même leur proposition.

Le problème de recherche que nous avons choisi appartient à une classe d'exercices où les outils de validation et de contrôle des résultats sont parfois difficiles à déceler. Ainsi, face à un résultat, il peut être compliqué pour les élèves de savoir si celui-ci est correct ou non. Effectuer le même raisonnement pour un polygone, dont le nombre de diagonales est cette fois-ci connu, est un moyen dont dispose les élèves afin d'évaluer leurs tentatives. Nous avions également pensé à la notion d'ordre de grandeur comme *feedback* du milieu pour permettre aux élèves de contrôler leurs résultats, mais après réflexion, cette piste nous semble trop complexe et confuse pour nos élèves de 5ème.

La deuxième aide envisagée est destinée aux élèves essayant de tracer un hectogone, ainsi que ses diagonales. Il s'agit de valoriser leur procédure en mettant en évidence qu'elle permettrait bien d'obtenir le résultat souhaité. Il est cependant possible que les élèves trouvent d'eux-même que cette résolution est laborieuse, voire impossible sur une simple feuille de papier pour un hectogone. Il s'agit alors d'insister sur le fait que cette méthode serait par contre tout à fait réalisable pour d'autres polygones, dont le nombre de côtés est moins élevé par exemple. Le fait de mettre en avant les avantages de leur procédure pour un faible nombre de côtés peut les inciter à essayer avec d'autres polygones à 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 côtés par exemple. Les élèves peuvent également se sentir valorisés d'avoir trouvé par eux-mêmes une méthode intéressante, même si son utilisation initiale n'était que peu pertinente.

Si un groupe ne sait pas du tout comment commencer ou quoi faire pour résoudre ce problème, l'enseignante pourra conseiller à ces élèves d'essayer de se rappeler ce qu'est un polygone, ainsi qu'une diagonale, si besoin en utilisant le cahier de leçons. Différentes questions pourront émerger de ces notions : le polygone de l'énoncé est-il considéré comme régulier ? Est-il forcément convexe ? Dans le cas où il ne le serait pas, il y aurait donc des diagonales extérieures au polygone : est-ce alors toujours considéré comme une diagonale ? Si besoin, l'enseignante rappellera au groupe les définitions d'un polygone et d'une diagonale d'un polygone pour répondre à ces questions. Nous avons fait le choix de ne pas faire ces rappels à l'ensemble de la classe lors de la projection de l'énoncé pour que, si elles émergent, ces réflexions viennent d'eux et ne soient pas amorcées par l'enseignante. Le groupe pourra alors tracer un polygone, ainsi que ses diagonales, avant de réfléchir à une procédure de résolution pour trouver le nombre de diagonales d'un hectogone.

Ensuite, concernant les deux dernières procédures de résolution évoquées précédemment, nous avons pensé que certains élèves pourraient avoir des difficultés à passer de l'analyse d'un sommet ($n-3$ diagonales tracées à partir d'un sommet) à l'analyse du polygone entier (il y a n sommets, donc possiblement $n \times (n-3)$ diagonales). Ils pourraient plutôt vouloir écrire une addition itérée à l'aide de pointillés ; ce qui est tout à fait correct, mais peu pratique. L'enseignante pourrait alors les faire se questionner sur le nombre

de fois où ils vont sommer $n - 3$. Puis, si besoin, un exemple simple d'addition itérée écrite à l'aide d'une multiplication pourrait amener les élèves à plutôt effectuer une multiplication.

Enfin, nous avons envisagé le fait qu'en fonction de la procédure effectuée, les élèves peuvent ne pas se rendre compte qu'ils ont dénombré deux fois chaque diagonale. Si un groupe ne s'en aperçoit pas, l'enseignante peut utiliser le premier coup de pouce, en leur demandant d'utiliser ce même raisonnement pour un polygone, dont ils connaissent le nombre de diagonales. Cette aide peut également être proposée à un groupe ayant remarqué que les diagonales peuvent être comptées plusieurs fois, mais n'arrivant pas à déterminer que chaque diagonale est dénombrée exactement deux fois. Le fait d'appliquer leur raisonnement sur un polygone, dont le nombre de diagonales est connu grâce à un schéma, pourra leur permettre de comparer les deux résultats et éventuellement de s'apercevoir qu'il y a un rapport de 2 entre le résultat trouvé et celui souhaité.

Pour finir, nous avons effectué une cartographie des réponses possibles que nos élèves pourraient nous proposer. Cette liste de réponses n'est évidemment pas exhaustive : en effet, des erreurs de raisonnements ou de calculs pourraient amener les élèves à proposer d'autres résultats, que nous n'aurions pas anticipés.

Réponses possibles (intermédiaires ou finales)	*Explications*
50 diagonales	En considérant que le nombre de diagonales d'un polygone correspond à la moitié de son nombre de côtés (comme le quadrilatère)
100 diagonales	En considérant que le nombre de diagonales d'un polygone correspond à son nombre de côtés (comme le pentagone)
4900 diagonales *(9 800 diagonales)*	Calcul : $\frac{100 \times (100 - 2)}{2}$ En oubliant d'estimer le sommet considéré comme inutilisable afin de tracer une diagonale le reliant à lui-même *(En oubliant en plus de décompter les diagonales en double)*
4950 diagonales *(9 900 diagonales)*	Calcul : $\frac{100 \times (100 - 1)}{2}$ En oubliant d'estimer les deux sommets voisins du sommet considéré comme inutilisables pour tracer une diagonale partant de ce sommet **ou** en oubliant de décompter les segments correspondant à des côtés, et non à des diagonales *(En oubliant en plus de décompter les diagonales en double)*
5000 diagonales *(10 000 diagonales)*	Calcul : $\frac{100 \times 100}{2}$ En oubliant d'estimer que le sommet considéré et ses deux sommets voisins sont inutilisables pour tracer une diagonale partant de ce sommet *(En oubliant en plus de décompter les diagonales en double)*
4850 diagonales	Réponse correcte
9700 diagonales	Calcul : $100 \times (100 - 3)$ En oubliant de décompter les diagonales en double

c) *Déroulé effectif*

Afin de débuter notre expérimentation en classe, nous avons d'abord décidé de réaliser une première fois le problème de recherche avec une classe dans le but de faire un premier bilan pour s'assurer de la faisabilité de notre situation en une seule séance, de l'intérêt des paramètres retenus, de la pertinence des aides prévues, etc. Cela nous permettrait, en cas d'obstacle ou de résistance, de préciser et d'affiner notre projet. Ce premier essai de notre situation de recherche s'est déroulé le 15 mars, dans l'une des classes de Chloé, où les deux paramètres retenus étaient appliqués : les élèves avaient traité le chapitre sur le calcul littéral et ils ont été invités, lors de la projection de l'énoncé, à effectuer un temps de recherche individuel de cinq minutes, avant de commencer à travailler en groupes. Cet essai s'étant avéré concluant, nous n'avons pas apporté de modifications à l'énoncé, aux paramètres didactiques retenus ou aux aides apportées par l'enseignante. Nous avons donc mené le reste de notre expérimentation en classe selon le calendrier suivant :

Paramètres	*Classe de Chloé*	*Classe d'Elsa*	*Classe de Chloé*	*Classe d'Elsa*
	15/03	22/03	01/04	02/04
Connaissance du calcul littéral	Oui	Non	Oui	Non
Mise en place d'un temps de recherche individuel	Oui	Non	Non	Oui

Lors de la conduite de l'activité en classe, nous avons remarqué plusieurs invariants, que les deux paramètres étudiés soient appliqués ou non :

- Dès la projection de l'énoncé au tableau, malgré les règles de gestion de la parole mises en place dans chacune de nos classes, certaines remarques n'ont pu être retenues par nos élèves telles que : « *Ooooh* », « *Il y en a beaucoup trop !* », « *C'est impossible Madame* », « *Ça existe un polygone à 100 côtés ?* », « *Madame, c'est quoi un hectogone ?* » (alors que la définition d'un hectogone était écrite entre parenthèses dans l'énoncé).
- Dès le début de la recherche, de nombreuses difficultés sont apparues quant au tracé des diagonales dès lors que la figure n'était pas un quadrilatère. En effet, pour beaucoup d'élèves, la représentation d'une diagonale d'un polygone était liée à celle d'axe de symétrie, avec la précision que cet axe de symétrie devait passer par deux sommets du polygone. Certaines diagonales étaient donc fréquemment oubliées lors du dénombrement.
- Au cours de l'activité, la majorité des groupes a émis des conjectures à partir du cas particulier du quadrilatère et/ou du pentagone. Cependant, il était rare que les élèves vérifient d'eux-même leurs conjectures, ces derniers étaient plutôt dans l'attente de la validation du professeur.
- Comme anticipé, parmi les groupes ayant procédé par analyse de la construction des diagonales, le fait que les diagonales soient comptées deux fois lors du raisonnement n'a souvent pas été remarqué. Le coup de pouce invitant les élèves à effectuer cette même

procédure pour un polygone, dont le nombre de diagonales est connu, s'est révélé cependant très efficace afin d'amener les élèves à se questionner sur ce point.

- Dans l'ensemble, les groupes choisis par l'enseignante de façon à être de niveau homogène entre eux ont bien fonctionné. Le travail de groupe était parfois entièrement collectif, tous les élèves cherchant ensemble sur un même document, parfois parsemé de travaux individuels, les élèves du groupe cherchant chacun individuellement dans leurs cahiers d'exercices, puis mettant ensuite en commun leurs observations dès que l'un d'entre avait trouvé quelque chose.
- La plupart des groupes a réalisé un brouillon. Certains rédigeaient au propre au fur et à mesure que leurs idées étaient éprouvées, tandis que d'autres ont écrit l'ensemble de leur démarche une fois celle-ci aboutie. Il a parfois été difficile pour certains groupes d'expliciter leur démarche et surtout de s'autoriser à se tromper : lorsqu'une conjecture était ensuite réfutée par un contre-exemple, l'envie était grande de barrer l'idée initialement émise ou même de prendre une nouvelle feuille pour ne pas laisser visible l'erreur commise.
- L'ensemble des groupes a eu le temps de chercher, d'explorer différentes pistes, d'échanger sur leurs idées et de rédiger de manière plus ou moins détaillée leurs procédures. Un seul groupe a indiqué avoir manqué de temps, principalement en raison d'une idée apparue un peu tardivement lors de la séance. Concernant les autres groupes n'ayant pas abouti à un résultat à la fin de la séance, il ne nous a pas semblé que la durée de recherche mise à disposition en soit l'obstacle principal.
- Sur l'ensemble des quatre classes, seulement deux élèves nous ont questionné sur l'utilité de connaître le nombre de diagonales d'un hectogone dans la vie quotidienne. L'application à des connexions entre plusieurs individus pour une structure du type réseau social a semblé les satisfaire tous deux.

Pour les deux classes disposant d'un temps de travail individuel préalable à la formation des groupes, nous avons remarqué plusieurs attitudes : quelques élèves ont commencé la recherche directement en notant des idées dans leur cahier d'exercices ou en faisant des dessins (souvent des carrés, des rectangles, ou des pentagones réguliers), mais la majorité des élèves étaient plutôt perplexes et réfléchissaient plutôt sans prendre de notes. Pour beaucoup, l'énoncé a été relu à plusieurs reprises. Nous avons également noté dans chacune de nos classes que les élèves les plus éloignés de la compétence « *Chercher* » étaient très passifs durant cette phase de recherche individuelle.

Lors de la formation des groupes, la mise au travail s'est par contre effectuée très rapidement. Les élèves ont mis en commun leurs observations et ont échangé sur les difficultés de la tâche, leurs questions, mais aussi sur leurs idées. C'est à partir de ce moment seulement que nous avons commencé à répondre aux questions des élèves.

Lors de nos passages dans les différents groupes, nous avons été amenées de nombreuses fois à rappeler la définition d'une diagonale. Certains groupes ayant tracé des polygones concaves, la présence de diagonales extérieures au polygone les a souvent dérangés dans

leur procédure de dénombrement. Dans notre posture d'enseignante, nous avons parfois dû laisser les élèves chercher, en laissant des questions en suspens, sans apporter de réponse, afin de ne pas les orienter dans une procédure particulière de résolution ou de ne pas court-circuiter le problème.

En regroupant l'ensemble de nos classes, nous avons obtenu 31 groupes de travail pour cette activité. Tous les groupes ont travaillé et rendu un travail. En début de recherche, la plupart ont commencé par chercher le nombre de diagonales d'un quadrilatère ou d'un pentagone, voire des deux. Des premières conjectures ont alors été émises, parfois même en distinguant la parité du nombre de côtés du polygone étudié. Ce type de raisonnement correspond à un raisonnement par disjonction de cas. Certains groupes ont explicité clairement les raisons des réfutations de ces premières conjectures émises, souvent en considérant un contre-exemple.

D'autres groupes se sont lancés dans la représentation par un dessin d'un hectogone et de ses diagonales. Un groupe a, quant à lui, commencé à tracer un polygone à 50 côtés. Le polygone tracé étant concave, les élèves de ce groupe ont été bloqués par les diagonales qui étaient extérieures au polygone et n'ont donc pas continué. Un second groupe a lui aussi tracé des polygones concaves. Le fait que les diagonales « sortent » du polygone ne semble pas avoir dérangé ces élèves pour leur construction, mais le nombre total de diagonales trouvées est faux, sûrement dû à la configuration inhabituelle qui leur a fait oublier certaines diagonales.

Certains groupes ont décidé de s'intéresser au nombre de diagonales d'autres polygones tels que des hexagones, des octogones ou des décagones. Les résultats obtenus n'étant pas toujours corrects, souvent en raison d'un oubli de diagonales tracées, les conjectures sont difficiles à extraire. Excepté le pentagone, aucun groupe n'a représenté de polygone dont le nombre de côtés est impair.

Certains groupes ont choisi, après invalidation de certaines conjectures ou dès le début du problème, de se concentrer sur la construction des diagonales, principalement en se demandant le nombre de diagonales que l'on peut tracer à partir d'un sommet. Dans le cas de l'hectogone, deux résultats différents ont été trouvés : 97 et 98. Les groupes, ayant déterminé le nombre de diagonales pouvant être tracées à partir d'un sommet ont ensuite majoritairement multiplié ce nombre par le nombre de sommets de l'hectogone, c'est-à-dire 100. Un seul groupe a d'abord essayé de calculer à l'aide d'une addition itérée, avant de passer à la multiplication.

Quelques groupes se sont arrêtés à cette étape par manque de temps, en pensant avoir terminé, ou bien en comprenant que certaines diagonales ont été comptées en double, mais en ne sachant pas en donner le nombre. Souvent grâce à un coup de pouce de l'enseignante, les incitant à effectuer leur raisonnement sur un polygone dont ils connaissent le nombre de diagonales, de nombreux groupes ont finalement réalisé une division par deux pour ne compter les diagonales qu'une seule fois.

Deux groupes des classes de Chloé ont utilisé le calcul littéral :

✴ Le premier groupe n'a finalement pas abouti au résultat correct. Le calcul littéral n'a pas été totalement exploité, en raison d'un second raisonnement débuté. Il est cependant à noter que la démarche générale a été explicitée et justifiée.

✴ Le second groupe a donné une formule explicite à l'aide du calcul littéral en expliquant chaque partie de cette formule. Cette formule est correcte et a ensuite été appliquée dans le cas de l'hectogone.

Enfin, un groupe a également utilisé la construction des diagonales, mais différemment des autres groupes. Ce groupe a en effet raisonné sur les sommets, mais en prenant en compte le sommet précédent, et donc les diagonales ayant déjà pu être tracées. La situation est particulière car une succession d'erreurs de raisonnements a permis malgré tout de trouver le résultat correct.

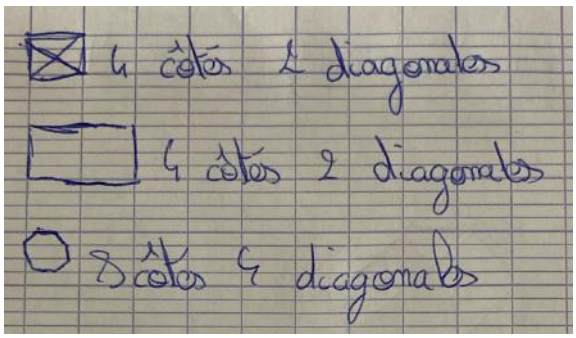
Voici un tableau contenant quelques chiffres au sujet des différentes procédures de recherche effectuées par les groupes, ainsi que l'état final de leur recherche à la fin de la séance :

<table>
<tr><td></td><td colspan="5">Quelques chiffres (31 groupes)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Procédures de recherche</td><td colspan="5">Etude d'un polygone ayant un petit nombre de côtés</td></tr>
<tr><td>35 %
Etude d'un quadrilatère
(11 groupes)</td><td>19 %
Etude d'un pentagone
(6 groupes)</td><td>23 %
Etude d'un hexagone
(7 groupes)</td><td>13 %
Etude d'un octogone
(4 groupes)</td><td>6 %
Etude d'un décagone
(2 groupes)</td></tr>
<tr><td colspan="5">Tentative de schématisation d'un polygone ayant de nombreux côtés</td></tr>
<tr><td colspan="2">13 %
Réalisation d'un schéma d'un hectogone
(4 groupes)</td><td colspan="3">3 %
Réalisation d'un schéma d'un polygone à 50 côtés
(1 groupe)</td></tr>
<tr><td colspan="5">Recherche du nombre de diagonales que l'on peut tracer à partir d'un sommet
48 %
(15 groupes)</td></tr>
<tr><td>Différentes représentations</td><td colspan="2">10 %
Représentation de polygones concaves
(3 groupes)</td><td colspan="3">6 %
Utilisation du calcul littéral
(2 groupes)</td></tr>
<tr><td>Fin de la recherche</td><td>10 %
Peu d'idées / Réfutation des premières conjectures sans plus d'essais ensuite
(3 groupes)</td><td>19 %
Essais avec des petits polygones sans trouver de nouvelles conjectures à explorer
(6 groupes)</td><td>23 %
Émissions de conjectures partielles qui n'ont pas abouties
(7 groupes)</td><td>13 %
Résultats incorrects
(4 groupes)</td><td>35 %
Résultat correct
(11 groupes)</td></tr>
</table>

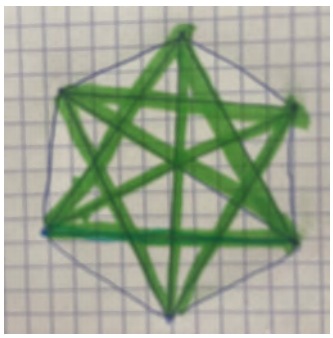
Valeurs approchées au pourcentage près

Voici quelques extraits commentés des productions de nos élèves :

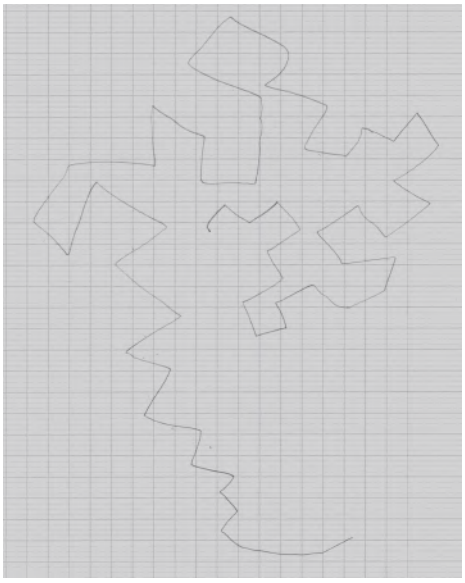
Pour les classes concernées, nous avons photographié à l'issue du travail individuel de 5 minutes ce que les élèves avaient écrit ou noté. Ci-dessous se trouvent quatre productions réalisées durant ce temps de réflexion individuelle :



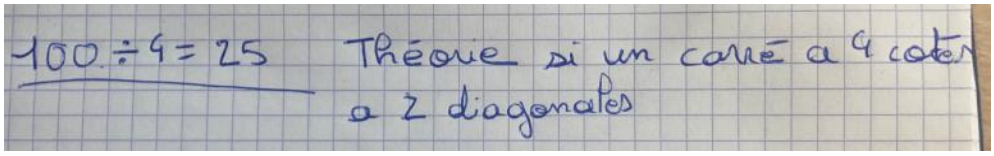
Production n°1



Production n°2



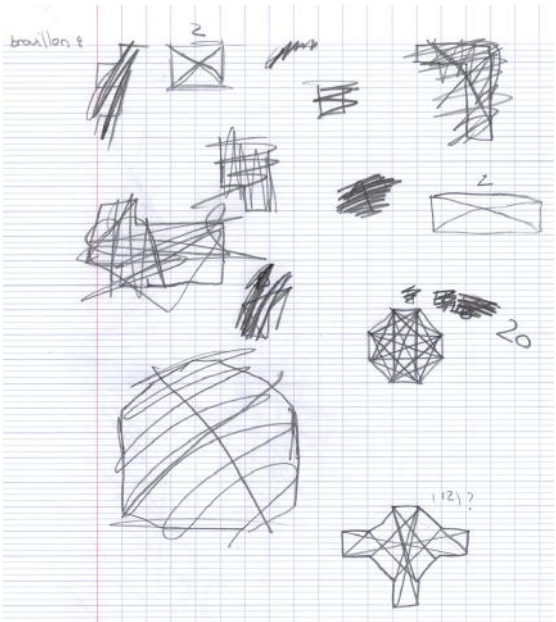
Production n°4



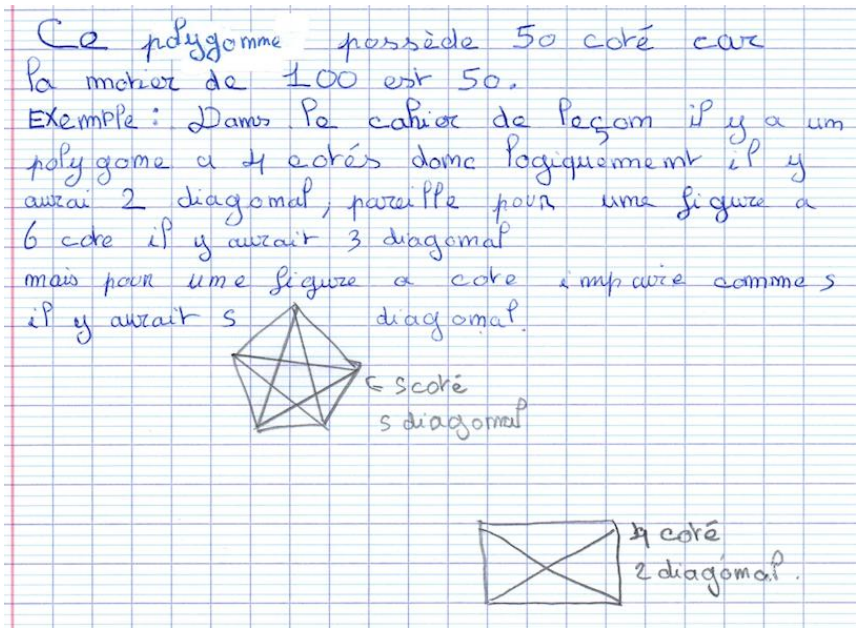
Production n°3

Ces productions illustrent bien les premières démarches de recherche observées chez nos élèves à la lecture de l'énoncé, qu'ils aient disposé ou non d'un temps de réflexion personnelle. Certains élèves tentent de tracer un hectogone (production n°4), d'autres s'intéressent plutôt à des polygones dont le nombre de côtés est plus petit (productions n°1 et 2) pour ensuite essayer d'adapter le raisonnement au cas de l'hectogone (production n°3).

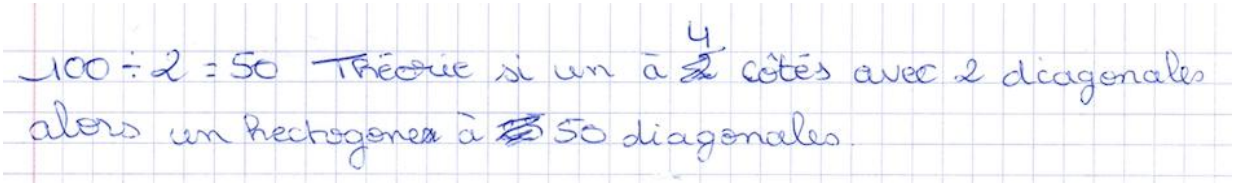
Lors de la formation des groupes, les mêmes procédures sont repérées chez nos élèves :



Production n°5



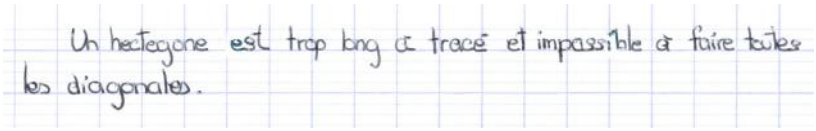
Production n°6


100 ÷ 2 = 50 Théorie si un 4 à 2 côtés avec 2 diagonales alors un hectogones à 50 diagonales.

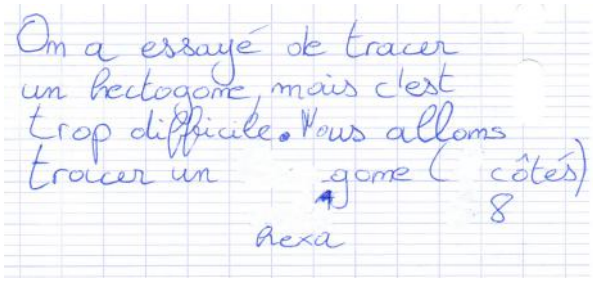
Production n°7 (extrait)

Les élèves effectuent des schémas (production n°5), réalisent des conjectures à partir de l'étude de polygones davantage familiers (production n°7), contrôlent ces conjectures en étudiant un nouvel exemple (production n°6).

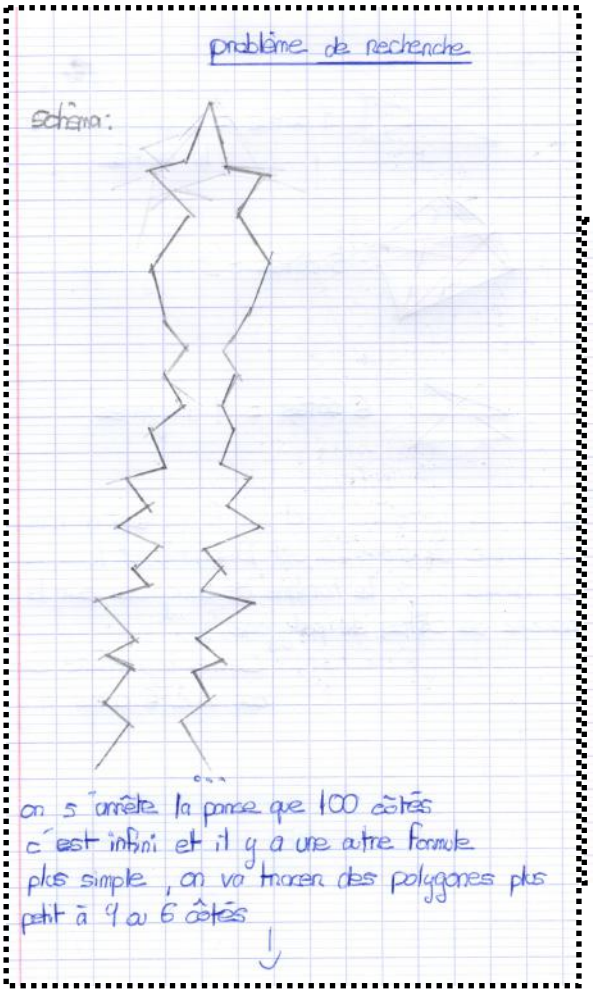
Pour les élèves ayant commencé à tracer un hectogone, ils jugent souvent d'eux-même que cette procédure est trop longue (production n°8) et débutent un nouveau raisonnement (productions n°9 et 10) :

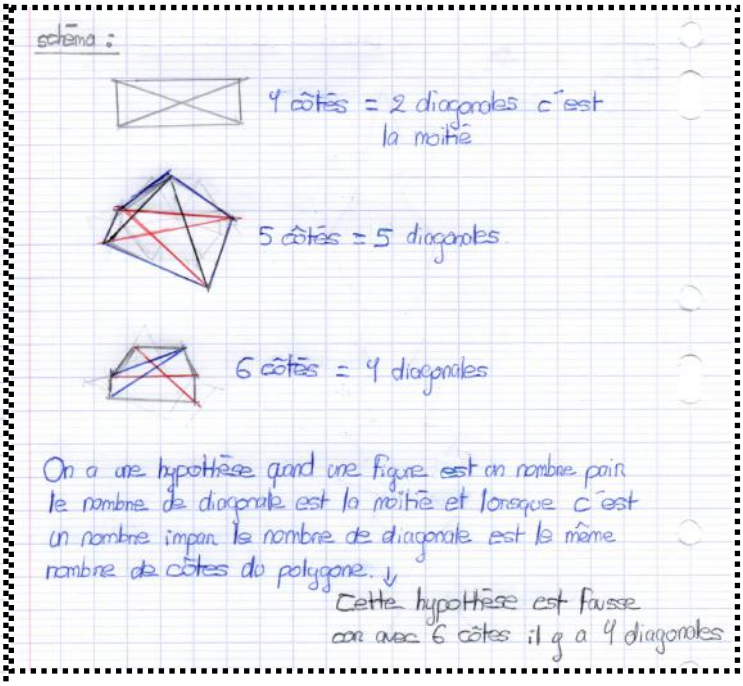

Un hectogone est trop long à tracé et impossible à faire toutes les diagonales.

Production n°8 (extrait)


On a essayé de tracer un hectogone, mais c'est trop difficile. Nous allons tracer un 4gone (8 côtés)
Hexa

Production n°9 (extrait)

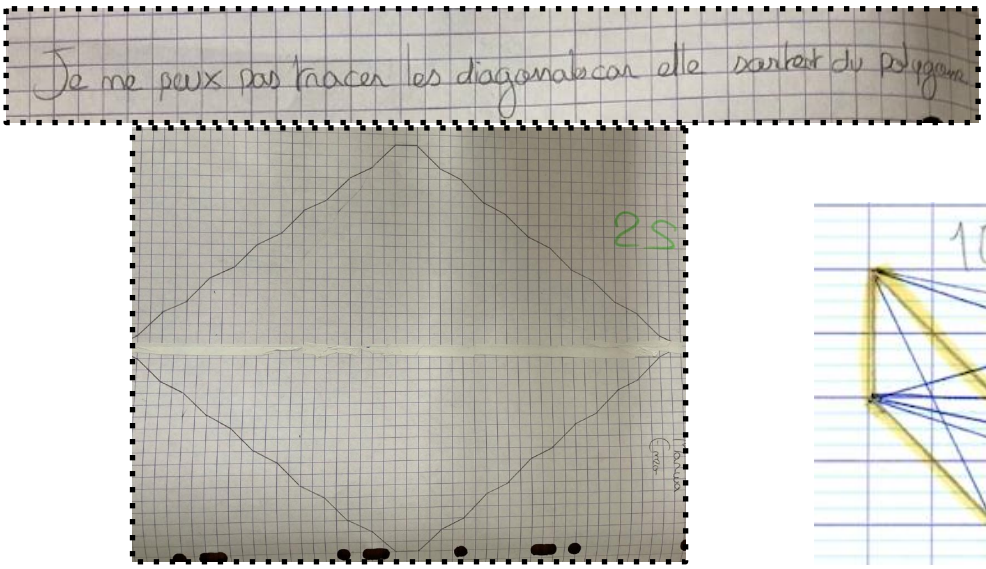

problème de recherche
schéma :
on s'arrête la parce que 100 côtés c'est infini et il y a une autre formule plus simple, on va tracer des polygones plus petit à 4 ou 6 côtés


schéma :
4 côtés = 2 diagonales c'est la moitié
5 côtés = 5 diagonales
6 côtés = 4 diagonales
On a une hypothèse quand une figure est un nombre pair le nombre de diagonale est la moitié et lorsque c'est un nombre impair le nombre de diagonale est le même nombre de côtes du polygone.
Cette hypothèse est fausse car avec 6 côtés il y a 4 diagonales

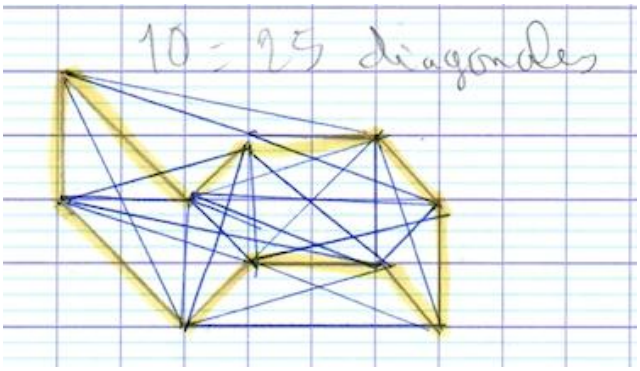
Production n°10

Dans la production n°10, on observe le cheminement des différentes idées des élèves, les menant jusqu'à émettre une conjecture par disjonction de cas selon la parité du nombre de côtés du polygone, conjecture qu'ils réfuteront avec le contre-exemple de l'hexagone (même si le dénombrement effectué pour les diagonales de l'hexagone est incomplet).

Lors du tracé des polygones, les élèves ont parfois représenté des polygones concaves, ce qui a alors pu les perturber pour tracer les diagonales (production n°11) ou bien, a rendu la figure plus complexe et donc les diagonales plus difficiles à dénombrer avec précision (production n°12).

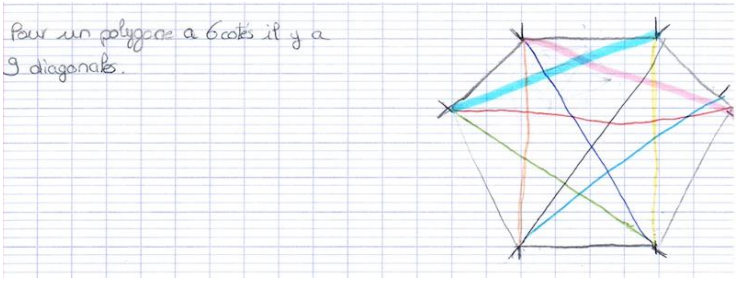


Production n°11 (extrait)

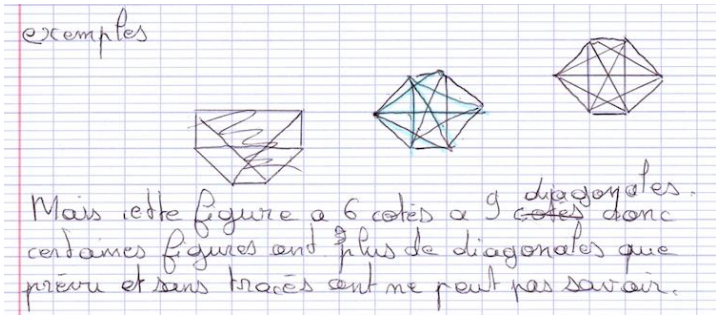


Production n°12 (extrait)

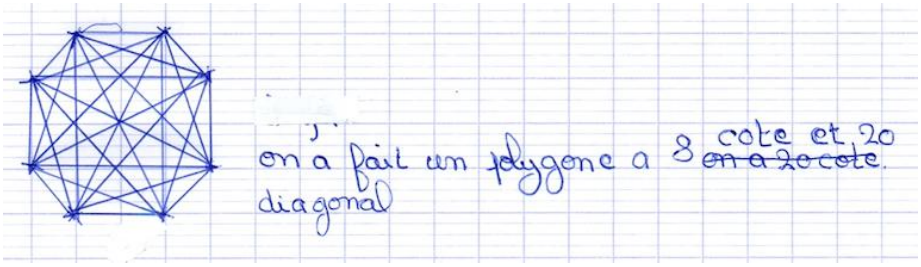
Certains groupes essaient de trouver de nouvelles conjectures en étudiant des polygones à 6 côtés (production n°13), à 8 côtés (production n°15) ou à 10 côtés (production n°16). Cependant, même quand le résultat trouvé est correct, il est souvent difficile d'émettre une conjecture entre le nombre de côtés d'un polygone et son nombre de diagonales (production n°14).



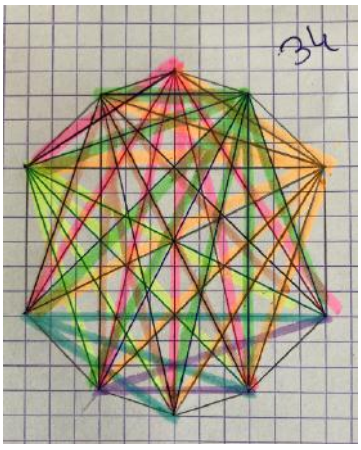
Production n°13 (extrait)



Production n°14 (extrait)

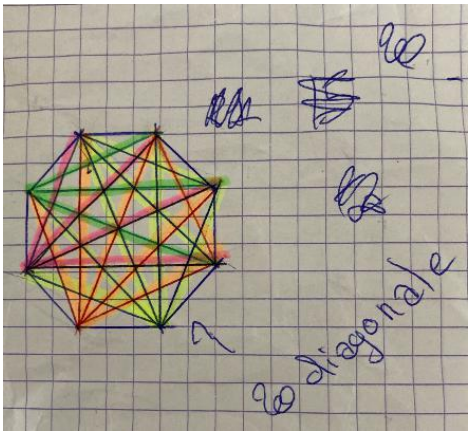


Production n°15 (extrait)

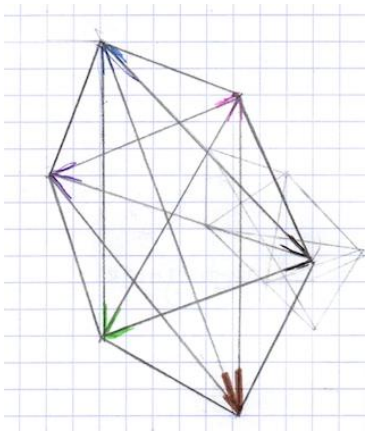


Production n°16 (extrait 1)

Malgré l'erreur de dénombrement de la production n°16, l'idée émerge alors chez certains élèves de s'intéresser davantage à la construction des diagonales. C'est ainsi que certains groupes utilisent des couleurs pour distinguer les diagonales partant du même sommet (productions n°16 et 17), jusqu'à se rendre progressivement compte que certains sommets ne sont pas utilisables pour tracer une diagonale en partant d'un sommet fixé (production n°18).



Production n°16 (extrait 2)

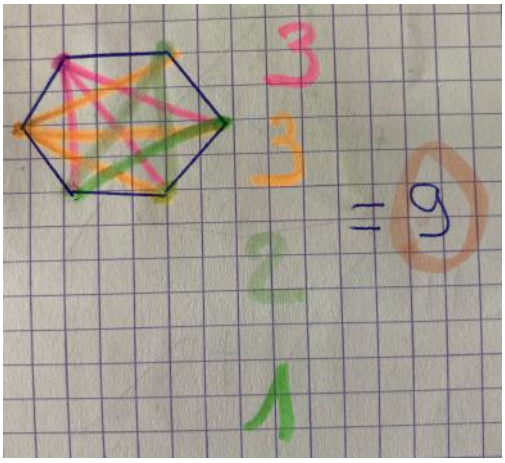


Production n°17 (extrait)

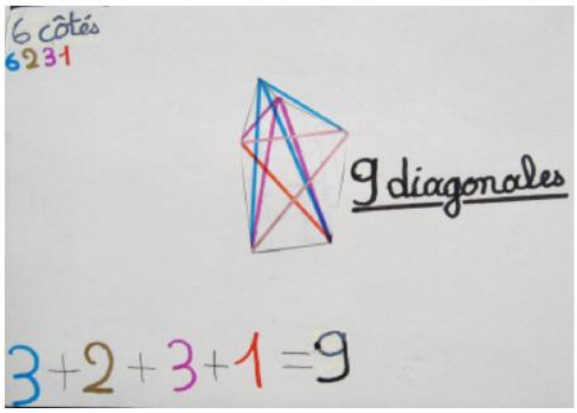


Production n°18 (extrait)

Le groupe de la production n°16 semble même utiliser la procédure, que nous avions observée dans les copies des élèves de CM2 [32] lors de l'analyse a priori, afin de dénombrer les diagonales d'un polygone (production n°19). Cependant, ils n'ont pas ensuite réussi à le transposer au cas de l'hectogone.



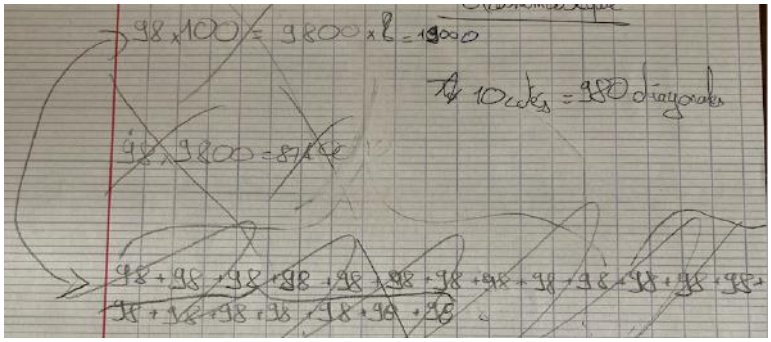
Production n°16 (extrait 3)



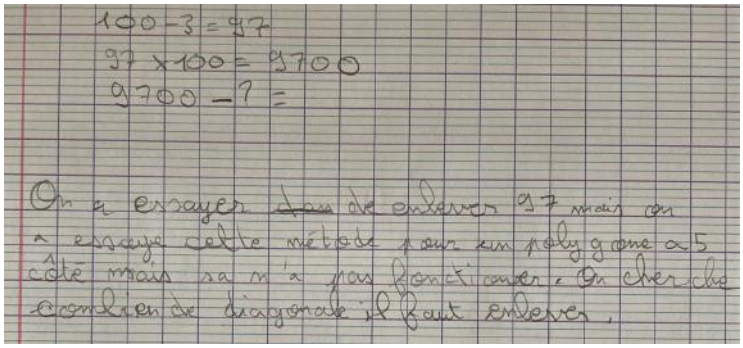
Production des élèves de CM2 pour un polygone à 6 côtés

Une fois le nombre de diagonales partant d'un sommet déterminé (les résultats trouvés ont été 97 ou 98 selon les groupes), un seul groupe a essayé d'effectuer une addition itérée (production n°19), avant d'ensuite opter pour une multiplication. Le décompte des diagonales déjà dénombrées par cette procédure a ensuite suscité des difficultés (production n°20), qui ont pu être dépassées par de nombreux groupes par la réalisation du même raisonnement avec un polygone dont le nombre de diagonales est déjà connu (productions n°21 et 22).

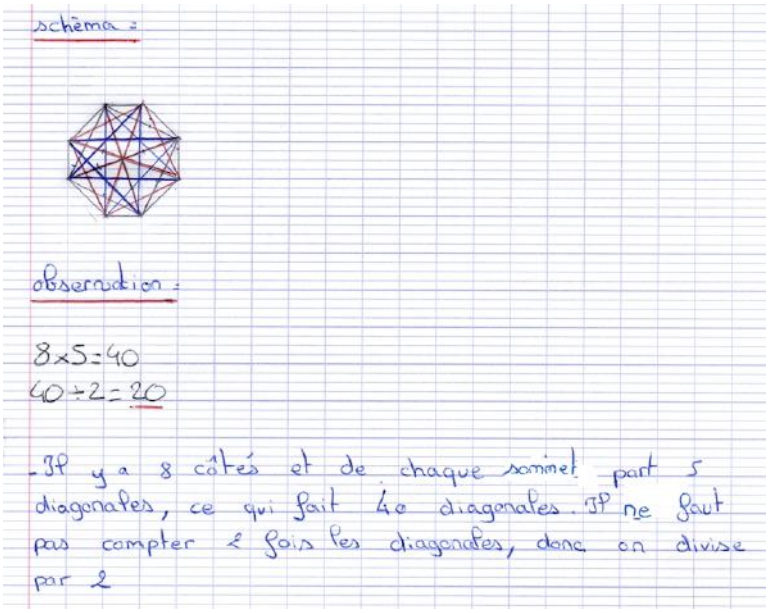
[32] Combien de diagonales a un polygone ? - Écoles Publiques RPI Broualan - Trans (ac-rennes.fr)



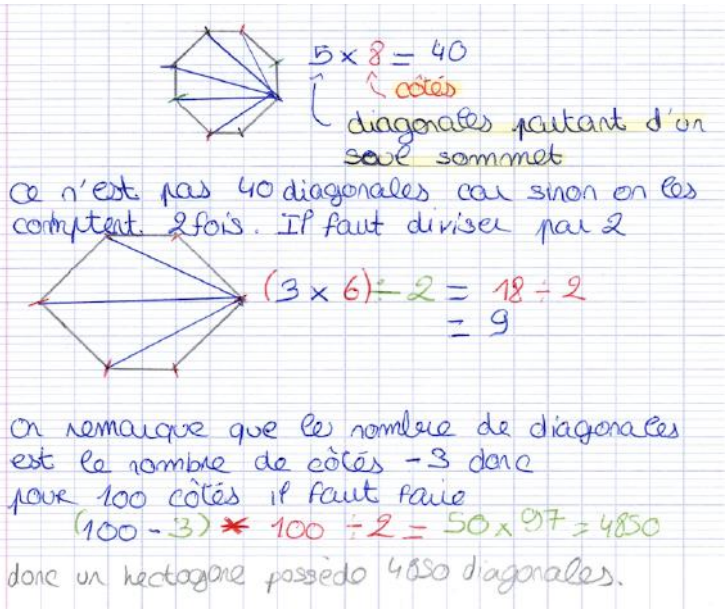
Production n°19 (extrait)



Production n°20 (extrait)

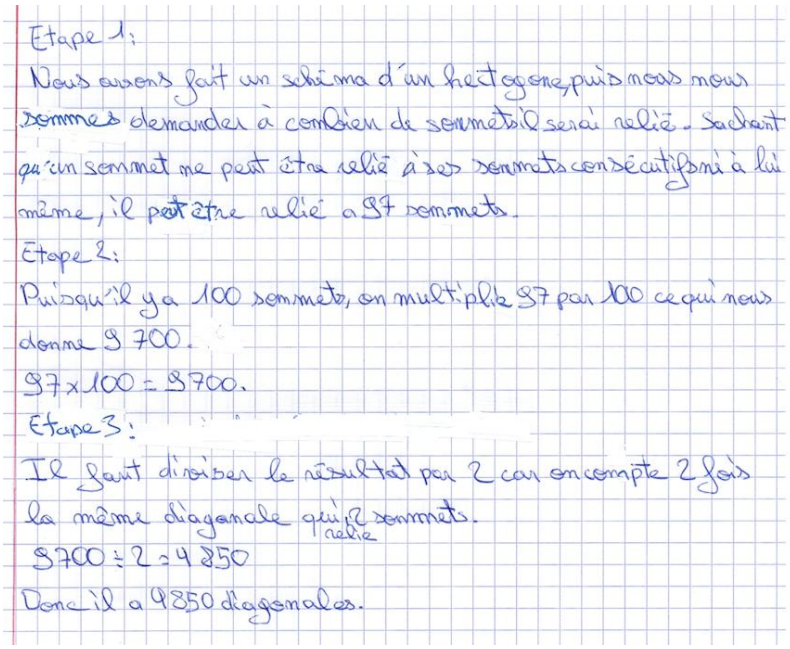


Production n°21 (extrait)

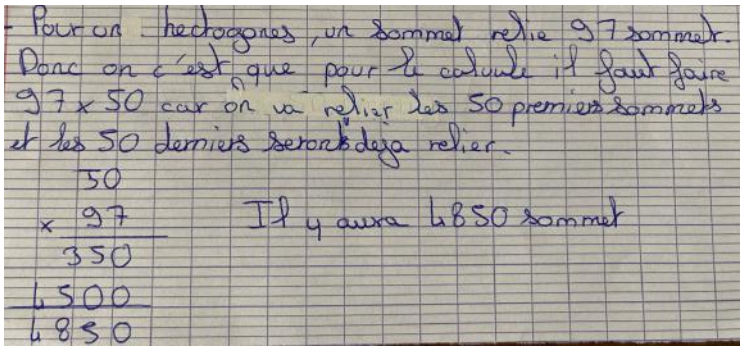


Production n°22 (extrait)

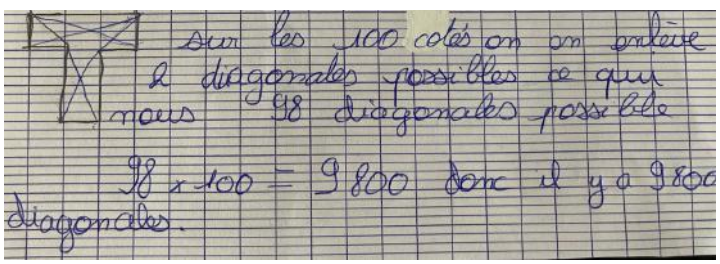
En adaptant cette procédure au cas de l'hectogone, il était alors possible de trouver le résultat souhaité (productions n°22, 23 et 24). Des résultats différents ont également été trouvés selon les raisonnements effectués, comportant parfois des erreurs (production n°25).



Production n°23

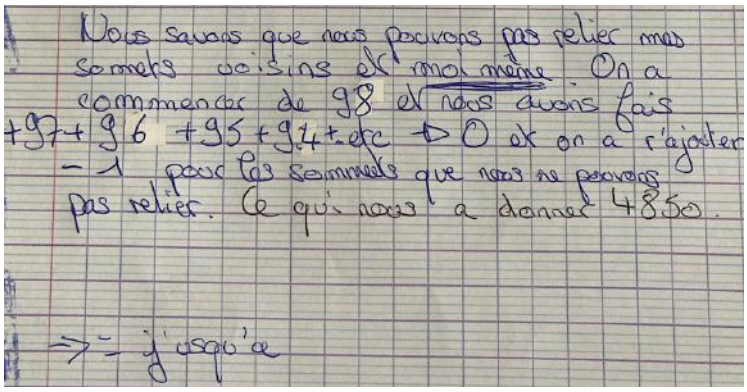


Production n°24 (extrait)

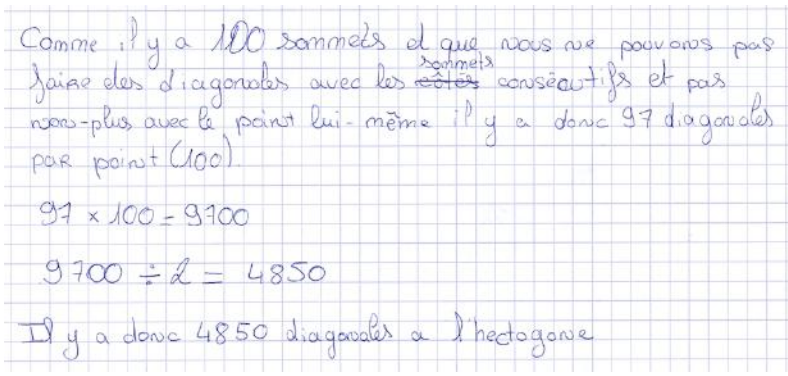


Production n°25 (extrait)

Un groupe a d'ailleurs trouvé le résultat souhaité, malgré une succession d'erreurs. En effet, les élèves de ce groupe ont d'abord considéré 98 comme nombre de diagonales pouvant être tracées depuis un sommet (première erreur de raisonnement). Ils ont ensuite estimé que depuis le sommet voisin, il faudrait tracer 97 diagonales (deuxième erreur de raisonnement par rapport à leur premier raisonnement) car le sommet voisin au premier n'a aucune diagonale en commun avec ce deuxième sommet, étant donné qu'ils sont consécutifs. En classe, un élève du groupe s'est alors lancé dans la somme des entiers de 98 à 1 à la calculatrice, pendant que les autres élèves continuaient à réfléchir. Après réflexion, les élèves ont finalement compris que le premier sommet ne pouvait être relié qu'à 97 autres sommets (et non 98). Ils ont alors décidé, plutôt que de refaire leur somme depuis le début, de soustraire 1 au résultat trouvé, en se disant que cela allait compenser le fait d'avoir commencé à 98 plutôt qu'à 97 (troisième erreur de raisonnement). Ils souhaitaient en fait effectuer la somme de 97 à 1 (explications données à l'oral à l'enseignante), alors qu'ils faisaient dans la pratique la somme de 98 à 2, ou bien la somme de 97 à 1 + 97. Dans les deux cas, cela correspond à une procédure de résolution exposée dans l'analyse a priori. Mais cette démarche n'était pas entièrement réfléchie ainsi. Ces différentes erreurs de raisonnement ont finalement permis à ce groupe d'obtenir le résultat souhaité (production n°26).



Production n°26 (extrait)

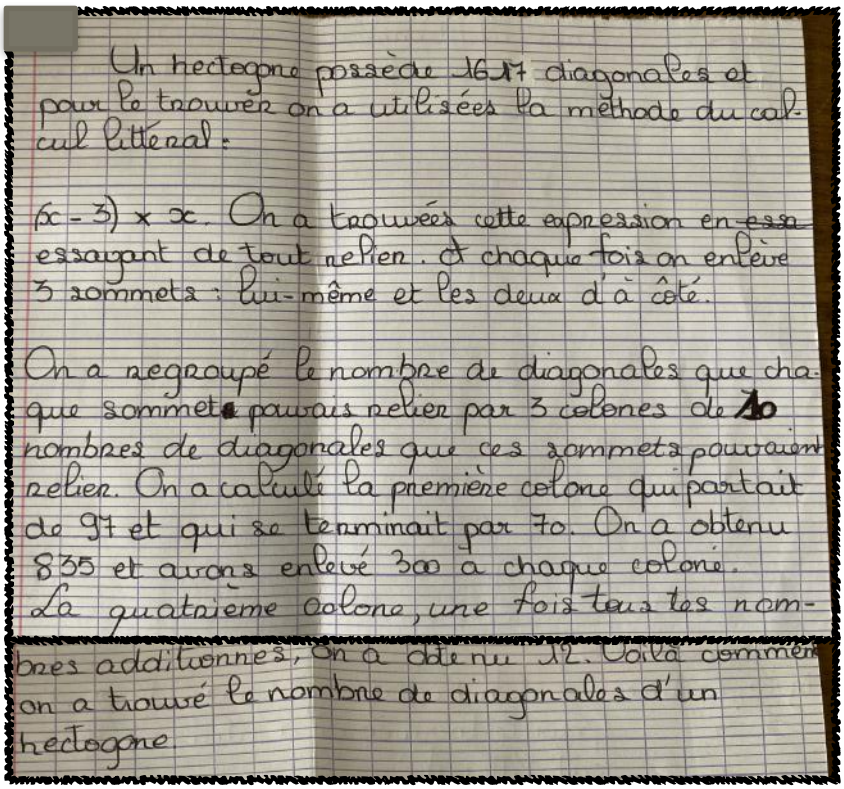


Production n°27 (extrait)

Nous observons dans de nombreuses productions des imprécisions lors de l'explication des raisonnements ou de la justification des calculs, comme en témoigne l'alternance de l'utilisation des mots « point » et « sommet » dans la production n°27, la confusion entre « sommets » et « diagonales » dans la production 24 ou bien l'expression « *nous [ne] pouvons pas relier mes sommets voisins et moi-même* » dans la production n°26. Dans ce dernier cas, on peut supposer que les élèves se sont représentés la situation en considérant par exemple que chacun des élèves du groupe était un sommet du polygone considéré.

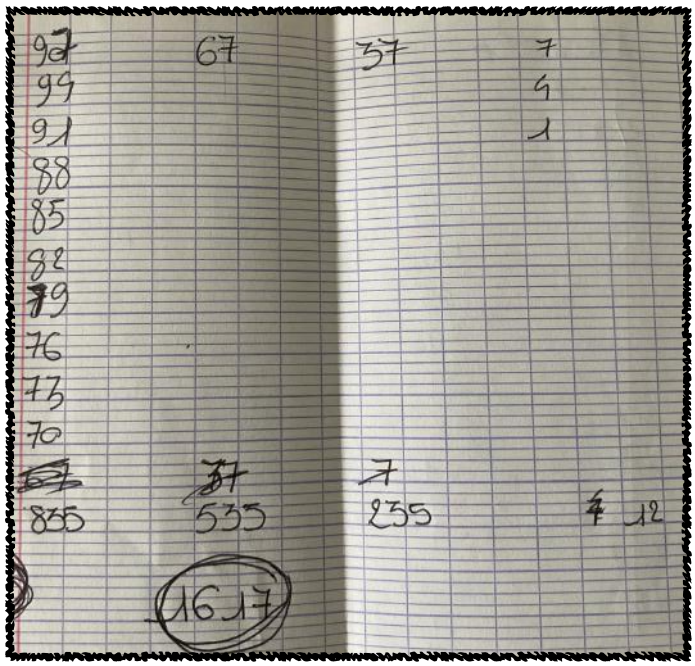
Enfin, deux groupes ont utilisé des expressions relevant du calcul littéral afin de résoudre ce problème de recherche : un premier groupe n'a cependant pas abouti au résultat souhaité et semble ne pas avoir utilisé l'expression littérale dans la suite de son raisonnement (production n°27), tandis qu'un second groupe a donné une formule explicite correcte, en la justifiant et en l'utilisant (production n°28). Dans ce dernier cas, l'hypothèse d'une situation de

proportionnalité entre le nombre de côtés d'un polygone et son nombre de diagonales avait également été envisagée en début de recherche.

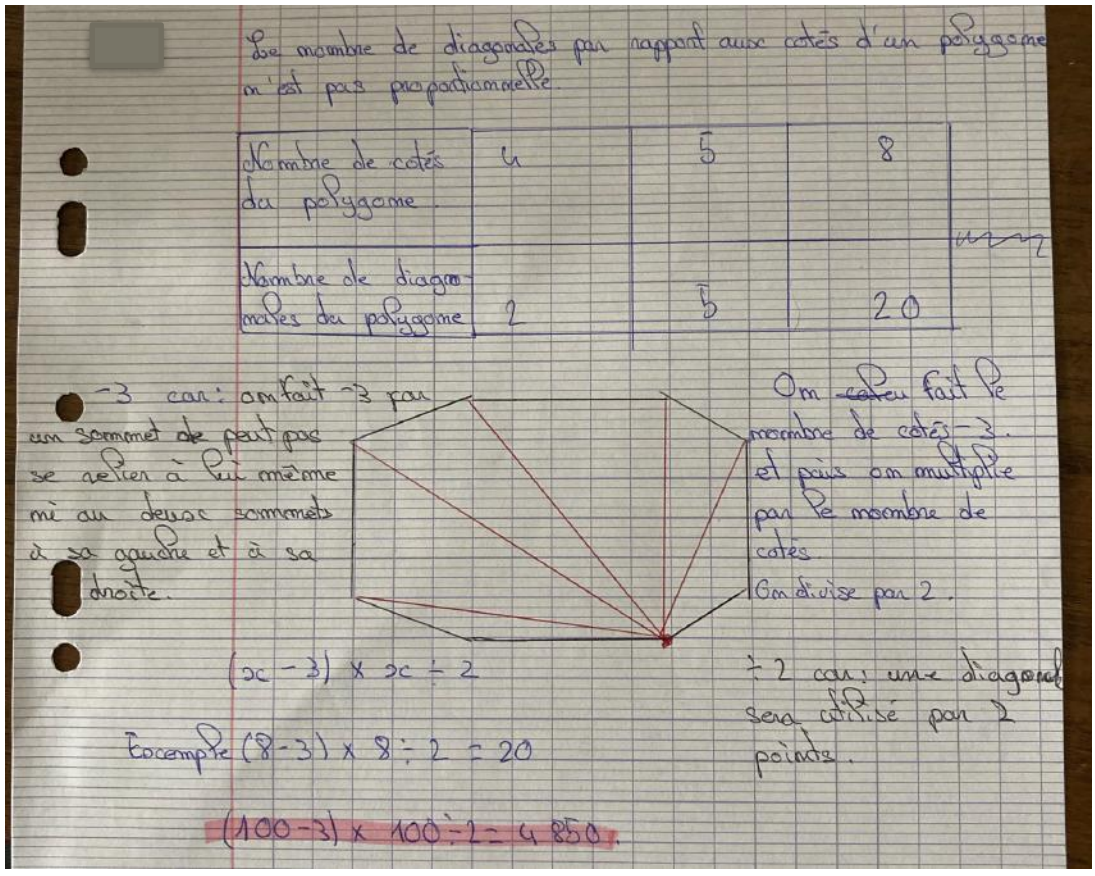

Un hectogone possède 1617 diagonales et pour le trouver on a utilisées la méthode du calcul littéral :

(x - 3) x x. On a trouvées cette expression en essayant de tout relier. Et chaque fois on enlève 3 sommets : lui-même et les deux d'à côté.

On a regroupé le nombre de diagonales que chaque sommets pouvais relier par 3 colones de 10 nombres de diagonales que ces sommets pouvaient relier. On a calculé la première colone qui partait de 97 et qui se terminait par 70. On a obtenu 835 et avons enlevé 300 à chaque colone. La quatrième colone, une fois tous les nombres additionnés, on a obtenu 12. Voilà comment on a trouvé le nombre de diagonales d'un hectogone


97 67 37 7
99 4
91 1
88
85
82
79
76
73
70
835 535 235 12
1617

Production n°27


Le nombre de diagonales par rapport aux côtés d'un polygone n'est pas proportionnelle.

Nombre de côtés du polygone	4	5	8
Nombre de diagonales du polygone	2	5	20

-3 car : on fait -3 par un sommet de peut pas se relier à lui même ni au deux sommets à sa gauche et à sa droite.

On fait le nombre de côtés - 3. et puis on multiplie par le nombre de côtés. On divise par 2.

(x - 3) x x ÷ 2

÷ 2 car : une diagonale sera utilisé par 2 points.

Exemple (8 - 3) x 8 ÷ 2 = 20

(100 - 3) x 100 ÷ 2 = 4 850.

Production n°28

d) *Analyse a posteriori*

A l'issue de la conduite en classe de notre situation de recherche, nous avons mis en commun nos observations sur cette activité. Au premier abord, une partie des élèves s'est sentie désemparée, voire effrayée, par la tâche que nous leur demandions de réaliser. Cependant, ils ont su rapidement dépasser leurs a priori en acceptant le doute et l'incertitude de la situation et en osant se servir de leur intuition pour amorcer une procédure de résolution. Dans l'ensemble, nos élèves se sont montrés très volontaires et motivés par le défi que représentait la tâche d'étudier un polygone à 100 côtés. Très peu d'élèves (seulement deux sur nos quatre classes) se sont questionnés sur le sens de ce problème de recherche et l'intérêt qu'il pouvait représenter dans la vie quotidienne, questionnement auquel nous avons répondu par l'illustration d'un réseau de connexions entre les utilisateurs d'un réseau social.

De plus, la plupart des groupes que nous avions formés ont bien fonctionné. Au fil de la séance, nous avons observé des échanges stimulants entre élèves, de nombreuses procédures d'essais-erreurs au brouillon, des conjectures émises presque aussitôt réfutées à l'aide d'un contre-exemple d'un autre élève du groupe, mais aussi des questionnements collectifs lorsque des difficultés étaient rencontrées. Le climat de travail était dans l'ensemble favorable à la réalisation de cette activité. Nous avons également remarqué, dans de nombreuses productions, des efforts de rédaction et de clarté, même si de multiples imprécisions et maladresses ont malgré tout persisté.

Après avoir échangé sur cette expérimentation, nous sommes revenues sur un de nos choix décidés lors de l'analyse a priori. En effet, nous avons dû rappeler aux élèves à de (trop) nombreuses reprises la définition d'une diagonale d'un polygone, que ce soit lors de la construction d'un polygone et de ses diagonales ou lors du raisonnement lié au décompte des diagonales dénombrées deux fois. Nous avions initialement décidé de ne pas effectuer ce rappel à l'ensemble de la classe lors de la projection de l'énoncé pour que, si elles émergeaient, les réflexions liées aux polygones concaves et à la construction de leurs diagonales viennent des élèves et ne soient pas orientées par l'enseignante. Nous n'avions cependant pas anticipé qu'une assimilation incorrecte de la notion de diagonale pouvait compromettre l'autonomie des élèves face à ce problème de recherche et donc nuire à leur entrée dans une posture de chercheur. Ainsi, si cela était à refaire, nous effectuerions un rappel de la définition d'une diagonale d'un polygone à l'ensemble de la classe dès la découverte de l'énoncé ou bien quelques minutes seulement après.

Après avoir analysé les procédures de nos différents groupes, nous nous sommes aperçues de l'émergence d'une démarche commune de la part des élèves, s'affinant au fil de la recherche. Cette démarche est composée d'une réflexion autour des termes du sujet (étape 1), d'une exploration d'exemples aboutissant à l'émission d'une conjecture (étape 2), d'un contrôle de cette conjecture (étape 3), d'une vérification de la validité du raisonnement effectué (étape 4) et enfin, d'une rédaction détaillée de la procédure de résolution (étape 5).

Lors du contrôle de la conjecture, si cette dernière a été réfutée, elle l'a souvent été grâce à un contre-exemple ; cela a ensuite abouti à une nouvelle expérimentation. Lors de l'étape 4, la validité du raisonnement effectué a souvent été vérifiée par l'étude d'un cas particulier, c'est-à-dire d'un polygone dont les élèves connaissaient le nombre de diagonales, en utilisant le même raisonnement que dans le cas général et en vérifiant ensuite que le résultat obtenu est bien celui attendu. Nous observons ainsi que cette démarche effectuée par nos élèves au fil de leur recherche a de nombreuses similitudes avec la succession d'étapes dans la démarche de chercheur proposée précédemment par Daniel Perrin. Il n'est cependant sans doute pas anodin de voir apparaître cette trame de résolution dans les raisonnements effectués par nos élèves, puisque nous avions construit le problème de recherche et avions anticipé nos interventions auprès des groupes en nous appuyant sur les travaux de cet auteur. En conséquence, cette démarche effectuée par nos élèves atteste, selon nous, qu'une part satisfaisante de nos élèves a adopté la posture de chercheur souhaitée lors de ce travail, et a ainsi développé la compétence « *Chercher* ».

Lors de la séance suivant notre travail en classe sur ce problème de recherche, nous avons échangé avec nos élèves sur la tâche qui leur avait été demandée de réaliser. Nous avions préalablement numérisé les productions des différents groupes. A partir de questions-réponses avec les élèves et d'une présentation reprenant leurs différentes procédures, nous avons analysé et mis en avant le cheminement de leur réflexion au fil de la recherche. Il s'agissait d'explorer avec nos élèves comment il fallait penser le problème plutôt que de dire ce qu'il fallait faire pour le résoudre. Cela nous a conduit à évoquer les différentes étapes proposées par Daniel Perrin, que certains élèves ont finalement retrouvé sans aucune trame donnée, seulement en persévérant dans leur recherche, parfois aussi grâce à une aide de l'enseignante. Cette situation à résolution de problème nous a donc permis de conclure avec les élèves de l'importance dans ce type de tâches de chercher, de prendre des initiatives, de suivre parfois son intuition, tout en régulant et contrôlant par soi-même à l'aide de tests les différentes conjectures émises. Nous avons également insisté sur l'apport pour les élèves de cet exercice qui était bien plus conséquent que la seule connaissance du nombre de diagonales d'un hectogone, mais qui consistait plutôt à leur faire expérimenter une « *véritable* » situation de recherche pour voir émerger la présence d'étapes clés aboutissant ainsi à une trame de résolution de problème, adaptable à différents énoncés de recherche.

Nous nous sommes également intéressées à l'influence sur la recherche des élèves, de paramètres didactiques que nous avions fait varier. Notre premier paramètre était lié à la connaissance du calcul littéral, notion mathématique souvent utile pour traiter les problèmes de recherche de type *pattern*, catégorie auquel appartient notre problème de l'hectogone. Les élèves d'Elsa ne l'avaient pas encore abordé, alors que les élèves de Chloé avaient commencé le chapitre portant sur le calcul littéral à la fin du mois de janvier. Dans les productions rendues, seuls deux groupes dans les classes de Chloé ont utilisé le calcul littéral. Nous avons regroupé dans le tableau suivant quelques chiffres liés à l'état de la recherche de

nos groupes à la fin de la séance, en fonction de leur connaissance du calcul littéral ou non (*les valeurs ont été approchées au pourcentage près*) :

Quelques chiffres pour évaluer l'influence du paramètre « Connaissance du calcul littéral»		
	Sans connaissance du calcul littéral	**Avec connaissance du calcul littéral**
Effectifs	16	15
Etat de la recherche à la fin de la séance		
Résolution correcte	**44%** *(7 groupes)*	**27%** *(4 groupes)*
Engagement dans une démarche de recherche justifiée et détaillée	**25%** *(4 groupes)*	**54%** *(8 groupes)*
Peu d'initiatives prises, difficultés à émettre des conjectures et à expliciter leur démarche	**31%** *(5 groupes)*	**20%** *(3 groupes)*

On remarque quelques disparités de répartition des groupes au sein des trois états de recherche définis, selon qu'ils aient eu ou non des connaissances sur le calcul littéral. Cependant, en s'appuyant également sur les observations de notre conduite de situation de recherche en classe, le fait que les élèves de Chloé soient déjà outillés du calcul littéral ne semble pas les avoir orientés plus rapidement dans une procédure particulière de résolution, contrairement à ce que nous avions imaginé lors de l'analyse a priori. Cela illustre la difficulté que peut rencontrer l'enseignant dans la préparation d'une situation de recherche, à se mettre à la place des élèves et à anticiper leurs procédures. Cette différence d'approche entre l'adulte outillé, que représente l'enseignant, et l'élève en cours d'apprentissage est cependant riche d'enseignements pour le professeur. De plus, il apparaît clairement que des élèves dépourvus du calcul littéral peuvent réussir à s'engager et à résoudre ce problème de recherche, au moins aussi bien que des élèves en étant pourvus. Dans notre situation d'apprentissage, l'engagement dans une démarche de recherche semble primer sur certaines connaissances et outils mathématiques.

Le deuxième paramètre que nous avons étudié a été la mise à disposition d'un temps de recherche individuelle de cinq minutes avant la formation des groupes. Voici quelques données que nous avons pu obtenir liées à ce paramètre :

Quelques chiffres pour évaluer l'influence du paramètre « Temps individuel de recherche »		
	Sans temps individuel de recherche	**Avec temps individuel de recherche**
Effectifs	16	15
Etat de la recherche à la fin de la séance		
Résolution correcte	**25%** *(4 groupes)*	**47 % *** *(7 groupes)*
Engagement dans une démarche de recherche justifiée et détaillée	**37,5%** *(6 groupes)*	**40%** *(6 groupes)*
Peu d'initiatives prises, difficultés à émettre des conjectures et à expliciter leur démarche	**37,5%** *(6 groupes)*	**13% *** *(2 groupes)*

* valeurs approchées au pourcentage

Au vu des statistiques obtenues, les groupes pour lesquels les élèves ont eu un temps individuel de recherche semblent avoir clairement mieux réussi à entrer dans une posture de chercheur que les groupes constitués d'élèves n'ayant pas eu ce temps de réflexion préalable à la formation des groupes. Lors de la conduite de la situation de recherche en classe, nous avons observé un réel apport de ce temps individuel de réflexion pour la mise en activité des élèves. En effet, ce temps individuel de recherche s'est révélé particulièrement bénéfique pour les élèves afin de s'approprier l'énoncé et de commencer une première réflexion. Lors de la formation des groupes, nous avons également observé avec ces classes qu'une première mise en commun entre l'ensemble des élèves du groupe s'effectuait naturellement, créant ainsi rapidement une dynamique stimulante de recherche. Dans l'ensemble, nous avons remarqué que la mise en activité des groupes pour lesquels les élèves avaient disposé d'un temps de réflexion personnel, était plus rapide et efficace que pour celle des groupes déjà formés lors de la projection de l'énoncé.

Néanmoins, les données précédentes peuvent être nuancées en raison de l'hétérogénéité existant entre les deux classes d'Elsa. Les profils de ses deux classes ne sont en effet pas similaires : celle qui a disposé d'un temps individuel de recherche est constituée d'un noyau solide d'élèves moteurs, investis et intéressés par les problèmes de recherche tandis que celle qui n'a pas disposé de ce temps de réflexion personnelle est composée d'un plus petit nombre d'élèves moteurs et aussi de nombreux élèves ayant montré des difficultés au cours de l'année lors du travail de la compétence « *Chercher* ». Il serait donc réducteur de conclure que le fait d'avoir eu un temps personnel de recherche ait suffi pour permettre aux élèves de mieux réussir que ceux n'ayant pas disposé de ce temps de réflexion individuelle. Cependant, de par ses bénéfices sur la mise en activité des élèves lors de la formation des groupes, nous pensons adopter ce temps individuel de recherche comme modalité d'enseignement pour nos prochaines situations de recherche.

Enfin, nous avons trouvé que les procédures proposées par les élèves n'étaient pas très variées, par rapport à celles que nous avions anticipées. En effet, la plupart des groupes qui ont trouvé le nombre attendu de diagonales pour un hectogone ont raisonné en travaillant sur la construction des diagonales, en particulier sur le nombre de diagonales que l'on peut tracer à partir d'un sommet avant d'adapter leur raisonnement au polygone entier. La domination de cette procédure peut éventuellement provenir de nos attitudes lors de la conduite en classe, car il s'agit de la première procédure de résolution que nous avions envisagée. Malgré des aides anticipées et réfléchies en vue de ne pas orienter nos élèves dans une procédure particulière de résolution, nous l'avons peut-être fait malgré nous.

Conclusion

Lorsque nous nous sommes intéressées à la compétence « *Chercher* », nous nous sommes rendues compte des difficultés et peurs pouvant être rencontrées par nos élèves lors de la résolution d'un problème de recherche. Après avoir mis en perspective nos expériences personnelles et étudié des ressources issues de la littérature scientifique et de recherche, nous avons renoncé à l'idée de pouvoir apporter à nos élèves un apprentissage spécifique à la résolution de problèmes que nous pensions initialement utile afin de les outiller pour répondre aux exigences de ce type de tâches. Nous avons alors plutôt cherché à construire des situations d'apprentissages, favorisant leur entrée dans une posture de chercheur, valorisant la recherche en elle-même et leur engagement. Nous avons considéré que c'était par cette expérience vécue que les élèves pourraient développer la compétence « *Chercher* », au sens que nous l'avions préalablement définie.

C'est pourquoi, nous avons conçu une situation de recherche en définissant un énoncé souhaité attractif pour les élèves et en considérant une évaluation qui ne représente pas pour eux une source d'anxiété supplémentaire, où l'expérimentation prime sur le résultat. Nous avons aussi anticipé et pesé nos interventions lors de la conduite de l'activité en classe pour les motiver, tout en ne court-circuitant pas le problème, ni leurs propres initiatives. Afin que puisse s'opérer une transformation chez nos élèves, il a également été essentiel de leur donner du temps. La combinaison d'un court temps individuel de recherche précédant un travail de groupe s'est montrée favorable à une mise en activité efficace et rapide de nos élèves. La mise en place de telles conditions a permis à l'ensemble de nos élèves d'entrer dans une posture de chercheur, indépendamment d'un sens contextualisé donné à notre situation de recherche, sauf pour deux d'entre eux à qui nous avons alors apporté une réponse.

Lors de notre situation d'apprentissage, la persévérance de nos élèves dans une démarche de recherche les a conduit à expérimenter des méthodes et procédures, permettant l'élaboration d'un cheminement réfléchi, ponctué par des étapes clés. C'est donc l'engagement dans une démarche de recherche qui s'est avéré essentiel à la résolution du problème, primant ainsi sur la connaissance mathématique du calcul littéral. Par l'intermédiaire d'un raisonnement par essais-erreurs, nos élèves se sont montrés réflexifs et forces de propositions.

Ainsi, de cette expérimentation, nous pouvons tirer la conclusion que les élèves sont aptes à s'engager dans un problème de recherche, sous réserve de conditions d'apprentissage consciemment réfléchies en amont par l'enseignant. Nous avons pu faire vivre à nos élèves une « *véritable* » expérience de recherche au sens de Daniel Perrin et de Jean Julo, leur permettant ainsi de développer la compétence « *Chercher* ».

L'expérience de recherche est à la fois aux fondements des mathématiques, tout en étant également transversale et adaptable à tous les domaines. Elle est notamment au coeur des objectifs de l'école actuelle, dont le but est de « *former un élève doué d'un esprit critique conscient de ses possibilités et acteur de sa scolarité* » [33]. Nous pensons donc que ce type de situations d'apprentissage doit faire l'objet de répétitions, ne se se limitant pas à être des activités extraordinaires.

De plus, nous pensons que valoriser les problèmes de recherche dans les curricula pourrait également s'avérer être un levier d'amélioration de la perception qu'ont les élèves des mathématiques. Néanmoins, le développement de la compétence « *Chercher* » requérant du temps, nous estimons essentiel qu'elle intervienne dès le début du parcours de formation de nos élèves afin de leur permettre de dépasser leurs a priori sur ce type de tâches, et plus largement sur les mathématiques.

Par ce devoir, nous n'avons pas la prétention d'avoir profondément changé la perception de nos élèves sur la recherche ou les mathématiques. Cependant, les pistes favorables que nous avons aperçues nous encouragent à poursuivre dans cette voie et à encourager nos élèves à y voir un terrain d'expérimentations multiples, en espérant peut-être un jour créer des vocations parmi eux.

[33] Jean-Michel Blanquer et Edgar Morin, « *Quelle école voulons-nous ?* », 2020

Bibliographie

❖ Documents officiels :

Programme du cycle 4 d'après le BOEN n°31 du 30 juillet 2020

Eduscol, ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 4) - Compétences travaillées en mathématiques - Compétence « *Chercher* »

Document ressource de l'académie de Lyon - Mathématiques - Descripteurs de compétences du cycle 4

❖ Rapport :

Rapport OCDE - Cadre d'évaluation de la résolution de problèmes du cycle PISA 2012

❖ Conférence :

Daniel Perrin aux collégiens de Boussy-Saint-Antoine, 2007 : « *En mathématiques : que cherche-t-on ? comment cherche-t-on ?* », transcription disponible sur : https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Conferences/Boussy.pdf

❖ Articles :

Jean Julo, revue Grand N. N° 69, 2002, pages 31 à 52

Philipe Meirieu, Les entretiens Nathan, Actes VI, « *Ecole, diversités et cohérence* », 1996

❖ Ouvrages :

« *Apprendre à apprendre* » , A. Giordan et J. Saltet, 2019

Récoltes et Semailles : Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien, Université Paris 6, Grothendieck Circle, 1986

Jean-Michel Blanquer et Edgar Morin, « Quelle école voulons-nous ? », 2020

Larousse, 2021

❖ Sites Internet :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Impuissance_apprise

https://www.ac-paris.fr/portail/jcms/p1_316143/diagonales-d-un-polygone-cycle-4

https://rallye-bombyx.asso-web.com/uploaded/6e3-travail-du-11-janvier-2016-sur-pb-ouvert-copyright-rallye-bombyx-corriges.pdf

http://college-reydellet.ac-reunion.fr/narration-de-recherche-les-diagonales-dun-polygone-en-classe/

Combien de diagonales a un polygone ? - Écoles Publiques RPI Broualan - Trans (ac-rennes.fr)

Annexe : Devoir maison n°2 de recherche *(Elsa)*

Nom :
Prénom :
Classe :

Sujet A

Devoir maison de recherche n°2

(À rendre le lundi 11 janvier)

Compétences évaluées :		*Appréciation :*
Chercher		
Communiquer (Soin, présentation, rédaction, orthographe, notations, unités)		

Le travail est à faire sur une copie double. L'énoncé est à rendre avec la copie. La calculatrice est autorisée. Ce travail est à faire de manière individuelle.

L'évaluation porte sur le travail de recherche, elle pourra être positive même si la réponse est fausse, à condition de faire apparaître les traces de recherche sur la copie (schémas, tests, calculs, …). En revanche, une réponse seule n'est pas suffisante : la démarche pour y parvenir doit figurer sur la copie.
Tout réponse devra être justifiée.

- Exercice 1

La tante d'Anaïs n'a pas encore 45 ans. Cette année, son âge est divisible par 3. L'année dernière, il était divisible par 5 et l'année prochaine, son âge sera un nombre premier.

Quel est l'âge de la tante d'Anaïs ?

- Exercice 2

On a trois boîtes : une blanche, une rouge et une verte. L'une d'entre elles contient une barre de chocolat. Une autre contient une pomme. La troisième est vide. On sait que la boîte vide est la blanche ou la rouge. On sait que la pomme n'est ni dans la blanche, ni dans la verte.

Dans quelle boîte est le chocolat ?

- Exercice supplémentaire (évalué uniquement si satisfaisant)

Dans un restaurant, il y a 10 tables : des tables rondes avec 3 chaises autour et des tables carrées avec 4 chaises autour. Ensemble, ces tables peuvent accueillir 36 personnes.

Combien y a-t-il de tables rondes ?

Vous avez deux semaines pour faire ce devoir, ne vous y prenez pas au dernier moment.
En cas de difficulté, vous pouvez demander un indice à votre professeur.

Nom :
Prénom :
Classe :

Sujet C

Devoir maison de recherche n°2

(À rendre le lundi 11 janvier)

Compétences évaluées :		*Appréciation :*
Chercher		
Communiquer (Soin, présentation, rédaction, orthographe, notations, unités)		

Le travail est à faire sur une copie double. L'énoncé est à rendre avec la copie. La calculatrice est autorisée. Ce travail est à faire de manière individuelle.

L'évaluation porte sur le travail de recherche, elle pourra être positive même si la réponse est fausse, à condition de faire apparaître les traces de recherche sur la copie (schémas, tests, calculs, …). En revanche, une réponse seule n'est pas suffisante : la démarche pour y parvenir doit figurer sur la copie.
Tout réponse devra être justifiée.

- Exercice 1

Je suis un nombre premier inférieur à 50. Mon chiffre des dizaines s'obtient en ajoutant 1 au triple de mon chiffre des unités.
Qui suis-je ?

- Exercice 2

Trois amis vivent dans la même rue : un docteur, un ingénieur et un musicien. Leurs noms sont : Smith, Martin et Dupont. Le docteur est le plus jeune d'entre eux ; il n'a ni frère ni soeur. Dupont est plus âgé que l'ingénieur et il est marié à la soeur de Smith.
Quel est le métier de Smith ? De Martin ? Et de Dupont ?

- Exercice supplémentaire (évalué uniquement si satisfaisant)

Dans un restaurant, il y a 15 tables : des tables rondes avec 3 chaises autour et des tables carrées avec 4 chaises autour. Ensemble, ces tables peuvent accueillir 54 personnes.

Combien y a-t-il de tables rondes ?

Vous avez deux semaines pour faire ce devoir, ne vous y prenez pas au dernier moment.
En cas de difficulté, vous pouvez demander un indice à votre professeur.

Nom :
Prénom :
Classe :

Sujet B

Devoir maison de recherche n°2

(À rendre le lundi 11 janvier)

Compétences évaluées :		*Appréciation :*
Chercher		
Communiquer (Soin, présentation, rédaction, orthographe, notations, unités)		

Le travail est à faire sur une copie double. L'énoncé est à rendre avec la copie. La calculatrice est autorisée. Ce travail est à faire de manière individuelle.

L'évaluation porte sur le travail de recherche, elle pourra être positive même si la réponse est fausse, à condition de faire apparaître les traces de recherche sur la copie (schémas, tests, calculs, …). En revanche, une réponse seule n'est pas suffisante : la démarche pour y parvenir doit figurer sur la copie.
Tout réponse devra être justifiée.

- Exercice 1

Je suis un nombre premier compris entre 50 et 100. Mon chiffre des dizaines s'obtient en ajoutant 1 au double de mon chiffre des unités.
Qui suis-je ?

- Exercice 2

Anaïs, Brigitte, Cécile et Diana pratiquent chacune un sport différent : karaté, football, volley et judo. Anaïs n'aime pas les jeux de ballon et la judoka Brigitte va souvent au stade regarder des matchs de foot.

Quelle phrase peut être vraie ?

A) Anaïs joue au volley.
B) Brigitte joue au football.
C) Anaïs pratique le judo.
D) Diana fait du karaté.
E) Cécile joue au volley.

(*1 seule réponse est possible.*)

- Exercice supplémentaire (évalué uniquement si satisfaisant)

Dans un restaurant, il y a 30 tables : des tables rondes avec 3 chaises autour et des tables carrées avec 4 chaises autour. Ensemble, ces tables peuvent accueillir 108 personnes.

Combien y a-t-il de tables rondes ?

Vous avez deux semaines pour faire ce devoir, ne vous y prenez pas au dernier moment.
En cas de difficulté, vous pouvez demander un indice à votre professeur.