



**HAL**  
open science

# Prévention des troubles de la cognition mathématique : un outil de repérage pour les enseignants de grande section de maternelle

Cécile Beudot-Samyn

## ► To cite this version:

Cécile Beudot-Samyn. Prévention des troubles de la cognition mathématique : un outil de repérage pour les enseignants de grande section de maternelle. Sciences du Vivant [q-bio]. 2021. dumas-03343556

**HAL Id: dumas-03343556**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-03343556v1>**

Submitted on 14 Sep 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Faculté des sciences  
médicales et paramédicales  
Aix-Marseille Université

AIX MARSEILLE UNIVERSITÉ  
Faculté de Médecine de Marseille

Centre de Formation Universitaire en Orthophonie de Marseille

PREVENTION DES TROUBLES DE LA COGNITION MATHÉMATIQUE :  
UN OUTIL DE REPERAGE POUR LES ENSEIGNANTS  
DE GRANDE SECTION DE MATERNELLE  
*Articulation entre orthophonie, didactique des mathématiques,  
sciences cognitives*

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du Certificat de Capacité d'Orthophoniste

Cécile BEUDOT-SAMYN  
Sous la direction de Justine DESFORGES

Juin 2021

## REMERCIEMENTS

Je tiens à adresser mes plus sincères remerciements à Madame Justine Desforges, ma directrice de mémoire, qui m'a guidée avec bienveillance et compétence tout au long de l'élaboration de cette tâche. Elle a su me rassurer et me soutenir au cours de ces mois de travail. Ses qualités professionnelles et humaines sont remarquables et je tenais à les saluer ici. Elle reste un modèle d'efficacité, de dynamisme, d'humour, de générosité et d'écoute en ce qui me concerne. Merci Justine pour ta confiance, tes relectures et tes encouragements qui m'ont permis d'avancer à mon rythme en développant mes propres idées.

Je souhaite également remercier Mesdames Odile Beurthey et Julie Riccio pour avoir accepté de faire partie de mon jury de mémoire. Leurs cours resteront des ressources solides dans ma future pratique par la grande qualité de leur enseignement.

Mes remerciements vont également à tous les orthophonistes qui m'ont accueillie en stage et qui ont su me conforter dans mon nouveau choix de vie en faisant preuve de pédagogie, d'indulgence, de partage de leur savoir-être et de leur savoir-faire. Leur engagement à mon égard a été remarquable, je leur en suis infiniment reconnaissante. Merci à Jessica, Delphine, Tiffanie, Elisabeth, Margaux, Alexandra, Charlène, Philippine, Axelle, Eléonore, Aude, Sandra, Guillaume et Justine.

Sans Maÿlis, Caroline, Mélanie, Katell et Axelle, mes amies, je n'aurais pas pu poursuivre et terminer mon cursus universitaire. Chaque année fut une aventure humaine nourrie d'entraide et d'amitié grâce à elles ; cet appui fut inestimable, pour tout merci.

Un grand merci également à l'équipe pédagogique de l'école maternelle de La Jouvène avec laquelle j'ai partagé des années heureuses. J'y ai rencontré des collègues formidables qui se sont associés à mon aspiration à une nouvelle vie professionnelle, en supportant mes fluctuations intempestives d'emploi du temps avec le sourire...

Merci à ma famille qui m'a encouragée dans ce projet de reconversion un peu fou. Votre soutien a été inconditionnel et exceptionnel. Grâce à votre aide, j'ai pu le mener à bien, vous m'avez permis de croire qu'il n'y a pas de rêve interdit. Merci à mes parents, à toi maman qui t'es vraiment intéressée à mon mémoire et qui l'a lu en entier, à toi papa pour les prises en charge des enfants et les plats mitonnés avec amour. Merci à toi, mon autre, ma petite sœur qui est présente depuis toujours auprès de moi.

Enfin, merci Marc, tu as toujours été mon socle et mon réconfort malgré les moments de doute et d'angoisse qui m'ont souvent assaillie. Parfois tu y as cru plus que moi... et tu as permis que cet objectif se concrétise. Merci à vous Baptiste et Emma qui m'avez aussi soutenue pendant cinq ans, et qui avez su me convaincre que le temps passé à étudier finirait par concrétiser un rêve insensé...



# TABLE DES MATIERES

## **PARTIE I : CONTEXTE ET PROBLEMATIQUE** **1**

### **1. INTRODUCTION** **1**

### **2. LIEN ENTRE ORTHOPHONIE ET APPRENTISSAGES A L'ECOLE** **2**

#### **2.1 TSLA ET RECOMMANDATIONS DE LA HAS : ANALYSE** **2**

#### **2.2 TROUBLES DES APPRENTISSAGES MATHÉMATIQUES (MLD : MATHEMATICAL LEARNING DISABILITIES)** **6**

#### **2.3 « LES DYSCALCULIES »** **8**

##### **2.3.1 LE TROUBLE DU SENS DU NOMBRE (DYSCALCULIE PRIMAIRE)** **9**

##### **2.3.2 LES DYSCALCULIES SYMPTOMES (SECONDAIRES)** **10**

###### **2.3.2.1 DYSCALCULIE SYMPTOME D'UN TROUBLE LINGUISTIQUE** **10**

###### **2.3.2.2 DYSCALCULIE SYMPTOME D'UN TROUBLE VISUO-SPATIAL** **11**

###### **2.3.2.3 DYSCALCULIE SYMPTOME D'UN TROUBLE MNESIQUE** **11**

###### **2.3.2.4 DYSCALCULIE SYMPTOME D'UN SYNDROME DYSEXECUTIF** **11**

##### **2.3.3 LE DEVELOPPEMENT DE L'ENFANT : LA LOGIQUE ET LE « RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE »** **12**

###### **2.3.3.1 RAISONNEMENTS LOGIQUES ÉLÉMENTAIRES (NUMÉRIQUES)** **12**

###### **2.3.3.2 UN AUTRE MODE DE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE : LA COMPARAISON** **15**

#### **2.4 ANALYSE DES REPONSES DES PROFESSEURS DES ECOLES ET DES ORTHOPHONISTES** **17**

##### **2.4.1 REPONSES DES ORTHOPHONISTES** **17**

##### **2.4.2 REPONSES DES PROFESSEURS DES ECOLES DE GS** **20**

##### **2.5.1 LES PROGRAMMES SCOLAIRES DE 2015 ET 2020 EN GS ET EN CP** **24**

## **PARTIE II : REVUES DE LA LITTERATURE** **40**

### **1. COGNITION NUMÉRIQUE** **40**

#### **1.1 LES MODÈLES DE LA CONSTRUCTION DE LA PENSÉE MATHÉMATIQUE** **40**

##### **1.1.1 LE MODÈLE DU TRIPLE CODE DE DEHAENE** **40**

##### **1.1.2. LE MODÈLE DÉVELOPPEMENTAL DE VON ASTER ET SHALEV** **42**

##### **1.1.3 PROPOSITION D'UN MODÈLE INTÉGRÉ DU TRAITEMENT DU CALCUL** **43**

##### **1.1.4 MODÈLE DE DÉVELOPPEMENT DES NOMBRES A 2 CHIFFRES** **44**

#### **1.2 LE CONCEPT DE NOMBRE, SON UTILISATION** **45**

##### **1.2.2 LES CODES** **46**

###### **1.2.2.1 « CODES ANALOGIQUES »** **46**

###### **1.2.2.2 « CODES SYMBOLIQUES »** **49**

##### **1.2.3 LA QUANTIFICATION** **53**

###### **1.2.3.1 L'ESTIMATION** **54**

###### **1.2.3.2 LE SUBITIZING** **55**

###### **1.2.3.3 LE DENOMBREMENT** **57**

###### **1.2.3.4 LE « CALCUL » DANS LES PETITS PROBLÈMES** **60**

### **2. RAISONNEMENTS ET FONCTIONS EXECUTIVES** **65**

#### **2.1 DÉVELOPPEMENT DE LA COGNITION** **65**

##### **2.1.1 LE DÉVELOPPEMENT DE L'ENFANT ENTRE PIAGET ET LURIA** **65**

2.1.2	LA LOGIQUE : DE PIAGET A MOSHMAN	71
2.2	LES COMPETENCES LOGICO-MATHEMATIQUES ET LA NUMERATION	74
2.3	LES FONCTIONS COGNITIVES	78
2.3.1	LES FONCTIONS EXECUTIVES	78
2.3.2	L'ATTENTION ET LA MEMOIRE	79

**PARTIE III : EBAUCHE D'UN DISPOSITIF DE PREVENTION DES TROUBLES DE LA COGNITION MATHEMATIQUE** **82**

**1. PRECONISATIONS POUR L'ACQUISITION DE LA LA NUMERATION** **82**

1.1	FICHE : REPRESENTATION AUDITIVO-VERBALE DU NOMBRE	83
1.2	FICHE : LA REPRESENTATION INDO-ARABE DU NOMBRE	84
1.3	FICHE : LE TRANSCODAGE (ENTRE LES DEUX REPRESENTATIONS PRECEDENTES)	85
1.4	FICHES : LA REPRESENTATION ANALOGIQUE DU NOMBRE	86

**2. PRECONISATIONS POUR LE RAISONNEMENT ET LES FONCTIONS COGNITIVES**  
**92**

2.1	FICHE : LE RAISONNEMENT	93
2.2	FICHE : LES FONCTIONS COGNITIVES	94

**PARTIE IV : DISCUSSION** **95**

**PARTIE V : CONCLUSION** **106**

**BIBLIOGRAPHIE** **108**

**ANNEXES** **119**

# **PARTIE I : CONTEXTE ET PROBLEMATIQUE**

## **1. INTRODUCTION**

Le choix du sujet d'étude concernant les troubles de la cognition mathématique pour mon thème de mémoire clinique s'est installé naturellement. En effet au fil du temps, mon projet de reconversion professionnelle m'a conduit à réfléchir de manière plus approfondie aux pratiques d'enseignement et à leurs liens avec l'évaluation et la rééducation orthophoniques liées aux troubles des apprentissages. Ayant été enseignante en école maternelle durant plusieurs années, j'ai pu observer certaines difficultés récurrentes (chiffres en miroir, difficultés à construire des collections (pointage), difficultés dans les décompositions de nombres, difficultés dans les transcodages nombres arabes/cardinalité/numéraux verbaux) dans ce champ disciplinaire alors même que les pratiques pédagogiques semblaient s'enrichir sur le plan didactique. Un intérêt particulier vis-à-vis de ce constat, à la croisée des chemins des deux professions, s'est imposé.

La frontière est fragile entre ce qui peut relever de difficultés d'apprentissage et ce qui constitue réellement un trouble : c'est le cas en particulier de la dyscalculie, dont le diagnostic est complexe et dont la définition reste une question vive dans les recherches en sciences cognitives, notamment en orthophonie et en neurosciences. Ainsi plusieurs interrogations me sont apparues pour investir les points de convergence et de divergence de ce questionnement. Plus spécifiquement, certaines observations m'ont interpellée.

En recherchant précisément les compétences exigibles dans le domaine mathématique à la fin de l'école maternelle et en fin de CP, j'ai pu observer un écart notable entre les attentes respectives en fin de cycle 1 (PS, MS, GS) et à l'issue de la première année du cycle 2.

Qu'en est-il de la capacité de l'enfant à intérioriser progressivement ses connaissances numériques ? Sur quels pré-requis et sur quelles stratégies peut-il s'appuyer pour y parvenir ? Y-a-t-il une congruence entre les compétences en mathématiques attendues à l'école et les modèles théoriques récents de la construction de la pensée numérique.

Les techniques d'apprentissage utilisées pour travailler la numération à l'école sont-elles adaptées aux modèles cognitifs développementaux ? Est-ce que la formation continue et initiale accorde une place suffisamment importante aux recherches récentes en psychologie cognitive ou en orthophonie. Quel est le rôle du centre national d'étude des systèmes scolaires (CNESCO), quelles informations apporte-t-il ?

Quelle est la place de la logique dans la structuration du nombre, est-ce une passerelle, un préalable à cette acquisition ?

Parallèlement, j'ai eu l'occasion lors de mes stages d'observer des bilans et des rééducations en cognition mathématique ; pour la plupart, elles concernent majoritairement des enfants de fin de cycle 2 ou de cycle 3, d'où mon questionnement quant à la prévention des retards ou des troubles pour cet apprentissage précis. Existe-t-il des tests de screening de la cognition numérique à destination des enseignants et des professionnels de la petite enfance, et pour quelle tranche d'âge ? Quelles sont les capacités effectives des élèves de cycle 1, sont-elles limitées au programme scolaire. Comment sont-elles évaluables et par qui ?

Serait-il possible de proposer une évaluation formative en grande section de maternelle ?

Enfin, il est légitime de se demander dans quelle mesure l'impact d'autres compétences scolaires ou d'autres aptitudes cognitives peut avoir un effet sur la construction des savoirs mathématiques avant l'école élémentaire, comment se construit le raisonnement de l'enfant.

Ainsi, j'ai choisi d'investiguer les interactions du triptyque : orthophonie, sciences cognitives et didactique des mathématiques. L'objet est de confronter les approches pour les réunir afin de mieux appréhender et mieux dépister les troubles des apprentissages en mathématiques en proposant des activités très spécifiques avant l'entrée au CP. J'effectuerai pour cela une revue de la littérature.

Je commencerai par faire un état des lieux sur les troubles de la cognition mathématique et de la dyscalculie en évoquant leur répercussion sur les apprentissages. Je m'appuierai sur les remarques des professionnels concernés pour faire le lien entre la théorie et la pratique. Ensuite, j'analyserai et comparerai les compétences attendues à la fin du cycle 1 et au début du cycle 2.

Par la suite, je m'intéresserai aux concepts du raisonnement mathématique et du nombre et comment « l'apprentissage » de ces notions se construit. Quels sont les pré-requis qui y sont associés. Pour cela il sera pertinent d'explorer également certains projets de recherche en didactique des mathématiques et de se questionner par ailleurs sur le raisonnement de l'enfant.

Après avoir croisé les données investiguées, j'envisagerai de proposer un dispositif simple de repérage des difficultés en cognition mathématique pour les orthophonistes, les enseignants de maternelle et les professionnels médicaux et paramédicaux spécialisés dans la petite enfance.

## **2. LIEN ENTRE ORTHOPHONIE ET APPRENTISSAGES A L'ECOLE**

### **TROUBLE DES APPRENTISSAGES**

#### **2.1 TSLA et recommandations de la HAS : analyse**

Les troubles spécifiques du langage et des apprentissages (TSLA) d'après le DSM-5 (ou les troubles spécifiques des acquisitions scolaires d'après la CIM-10) appelés « troubles dys » sont la conséquence de troubles cognitifs spécifiques neurodéveloppementaux (déficit d'une ou plusieurs fonctions cognitives, sans déficience intellectuelle globale).

La prise en charge précoce d'un enfant atteint de ces troubles vise à prévenir ou atténuer leurs impacts fonctionnels et parfois psychologiques. Qu'en est-il du dépistage précoce des troubles en mathématiques ?

En décembre 2017, la Haute Autorité de Santé publie ce document : « **Comment améliorer le parcours de santé d'un enfant avec troubles spécifiques du langage et des apprentissages ?** ». Ce guide s'attache à améliorer le parcours de santé de ces enfants, l'enjeu en est primordial (Haute Autorité de santé, 2017).

En effet, tant que les processus cognitifs impliqués dans le développement des apprentissages ne sont pas automatisés, ils peuvent générer une surcharge attentionnelle et l'enfant ne peut accéder à l'aspect « multitâche » de tout apprentissage. Les troubles peuvent provoquer une lenteur, une fatigabilité, parfois des problèmes d'organisation ou des troubles du comportement. Ils peuvent nécessiter des aménagements et/ou des adaptations, voire des compensations dans certains cas. D'autre part, sans diagnostic ou prise en charge adaptée il y a un risque :

- de décrochage scolaire ou d'échec scolaire, nécessitant des dispositifs scolaires particuliers,
- d'apparition de troubles émotionnels secondaires : faible estime de soi, anxiété, dépression, faible intérêt ou dégoût pour la scolarité, opposition, agressivité réactionnelle,
- de difficultés d'insertion professionnelle et sociale.

Le repérage des difficultés préscolaires (avant 6 ans) permet donc d'identifier des signes d'alerte précoces, c'est l'objet même de ce mémoire dans le domaine de la cognition mathématique.

La HAS préconise des actions de repérage précis effectuées notamment par les principaux intervenants intéressant notre étude à savoir les enseignants et les professionnels de la santé. Ainsi d'une part les professeurs utilisent des évaluations institutionnelles normées et les médecins et les personnels paramédicaux (PMI) ont une grille de signes d'alerte à observer le cas échéant :

**« signes d’alerte lors de consultations médicales réalisées aux âges clés du développement (examens à 9 mois, 24 mois, 36 mois, 4 ans, 5 ans et 6 ans), devant toute difficulté dans le développement » :**

- **du langage oral :**
  - dès 18 mois en l’absence de mot signifiant, ou de suspicion de trouble de la communication verbale et non verbale,
  - en cas de plainte isolée :
    - dès que les difficultés sont sévères,
    - et particulièrement à 5 ans si difficultés persistantes ;
- **du graphisme et de la motricité :**
  - dès 4-5 ans en cas de difficultés avec retentissement scolaire ou dans la vie quotidienne,
  - particulièrement à 7 ans et après (pour l’écriture, l’organisation, la manipulation des outils) ;
- **du langage écrit :** dès le CP si les étapes de déchiffrement et de transcription ne sont pas en adéquation avec l’évolution attendue, particulièrement en CE1 et après ;
- **du calcul :** dès le CP en cas de difficultés sévères et après tout au long de la scolarité ;
- « face à des difficultés d’attention, une hyperactivité motrice, et une impulsivité. »

Il apparait ici que les difficultés en cognition numérique ne sont explorées spécifiquement par les professionnels de santé (scolaires ou non) qu’à partir du CP alors que les compétences en langage oral ou en graphisme peuvent être examinées dès l’âge de 4 ans.

Néanmoins, les consignes sont clarifiées quant aux étapes de ce parcours pour le niveau 1 ; notamment, le fait que toute difficulté d’apprentissages persistant à l’issue de 3 à 6 mois de pédagogie différenciée, ou d’emblée sévère, et/ou toute difficulté d’adaptation scolaire et/ou dans la vie quotidienne et sociale nécessitent une évaluation par l’équipe médicale de l’Éducation nationale. Ici, le médecin est sollicité, il utilise alors des tests étalonnés spécifiques des difficultés signalées dans un domaine de compétences précis pour dépister un éventuel trouble.

Il est notifié dans le document l’item : **« calcul : numération, opérations, raisonnement ».**

L’orthophoniste intervient juste après, à l’étape de contextualisation du trouble afin de produire un diagnostic positif ou différentiel en tant que spécialiste du domaine concerné.

Par ailleurs, lorsqu'une rééducation orthophonique est préconisée en cognition mathématique, les modalités de sa mise en œuvre restent générales contrairement aux descriptions relatives aux troubles touchant d'autres domaines d'apprentissage :

*« Trouble spécifique de la cognition mathématique :*

*En fonction des troubles, l'intervention orthophonique peut être complétée d'une rééducation simultanée ou successive en neuropsychologie, ergothérapie ou psychomotricité. Le choix de l'intervenant pour la rééducation dépend du contexte cognitif du trouble, la comorbidité étant élevée avec les troubles d'acquisition du langage écrit, les troubles du langage oral et ou de l'organisation du geste, les troubles exécutifs et aggravant la situation d'échec de l'enfant. »*

Cette recommandation semble sous-tendre la rééducation d'une dyscalculie secondaire à un autre trouble ou à un retard dans d'autres apprentissages, mais dans ce contexte de prise en charge précoce, qu'en est-il de l'âge de début de rééducation ?

Enfin, certains leviers (ou propositions-conseils) sont énoncés en direction de l'amélioration de l'ensemble du parcours de soin, parmi elles, deux points concernant la formation initiale et continue des enseignants sont particulièrement notables. Le premier porte sur le développement normal de l'enfant, le repérage des difficultés dans les apprentissages, la capacité à effectuer des tests simples et normés en classe ; l'autre sur une meilleure connaissance des troubles des apprentissages.

Un autre item appartenant à ceux répertoriés dans la rubrique « ***l'amélioration des bonnes pratiques*** » souligne l'importance de former les professionnels aux outils et aux concepts actuels de la cognition mathématique afin de permettre aux enfants de bénéficier d'évaluations normées et de prises en charges rééducatives correspondant aux troubles sous-jacents (modèle du triple code).

Autrement dit, il apparaît de plus en plus important de s'engager dans la prévention en ce qui concerne les TSA. Dans le champ de la cognition mathématique, un dépistage s'appuyant sur les modèles neurocognitifs récents (triple code) pourrait être envisagé avant le CP, il pourrait alors être proposé aux élèves par les orthophonistes mais également par les enseignants. La HAS se base sur le modèle de la construction de la pensée numérique de référence soit le modèle du triple code de S. Dehaene ; chaque représentation qui le compose est considérée comme les bases de la cognition mathématique.

Ces observations mettent de nouveau en évidence le lien toujours présent : orthophoniste/enseignant aussi bien que la recherche d'éléments d'informations précis à explorer dans le domaine de la cognition mathématique et de son évaluation.

## DEFINITIONS

Auparavant, les enfants dits « mauvais en maths » étaient plutôt qualifiés d'élèves peu scientifiques sans qu'aucune référence à un trouble précis ne soit évoquée. Nommé pour la première fois en 1918, le terme de « dyscalculie » entre officiellement dans la nomenclature générale des actes des orthophonistes en 1983. En effet, ce n'est qu'en 1980 que la dyscalculie développementale sera officiellement reconnue par le corps médical avec la publication du DSM-III (Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders) par l'American Psychiatric Association. Elle se présente alors sous le nom de « *developmental arithmetic disorder* ». Le repérage et la prise en charge de « troubles des mathématiques » apparaissent alors comme des interventions fondées.

### 2.2 Troubles des apprentissages mathématiques (MLD : mathematical learning disabilities)

Ces dernières décennies sont marquées, au niveau international, par une augmentation du nombre de recherches dont les objectifs sont tournés vers une meilleure compréhension des troubles spécifiques d'apprentissage. Certains d'entre eux sont aujourd'hui mieux identifiés et pris en charge (comme la dyslexie), d'autres font encore l'objet d'études du fait de la complexité de leur repérage et de leur compréhension (Lewis & Fisher, 2016). C'est le cas des « troubles des apprentissages en mathématiques » nommés : mathematical learning disabilities dans la littérature anglo-saxonne (MLD). Ces difficultés sont hétérogènes et interrogent sur leurs définitions : dyscalculie, trouble d'apprentissage en mathématiques, raisonnement mathématique notamment.

Le DSM-5 les définit comme des « déficiences » (« trouble spécifique des apprentissages avec déficit du calcul »). Deux symptômes sont à observer : a) une difficulté à maîtriser le sens du nombre, la mémorisation des faits arithmétiques, la précision et la fluidité du calcul ou b) une difficulté avec le raisonnement mathématique, il faut ensuite qualifier le trouble en spécifiant la/les composante(s) atteinte (s). Les difficultés peuvent être légères, modérées ou sévères. On peut remarquer ici l'absence des mentions du transcodage et du traitement numérique, composantes importantes à prendre en compte d'après Seron et Deloche (Seron & Deloche, 1994).

Cependant il précise : « ... Si le terme dyscalculie est utilisé pour définir cet ensemble spécifique de difficultés mathématiques, il est important de préciser également toute difficulté supplémentaire éventuelle présente, telle que des difficultés de raisonnement mathématique ou de raisonnement verbal ». La présence d'un trouble du raisonnement mathématique est donc un élément distinctif fondamental par rapport à la dyscalculie.

Ces déficiences pourraient toucher plus de 5 à 10 % des élèves (Szűcs & Goswami, 2013) et seraient persistantes dans la scolarité (Geary et al., 2012), y compris au niveau de l'enseignement supérieur (McGregor et al., 2016).

Les MLD se décrivent souvent comme des difficultés dans le traitement des quantités numériques et dans le calcul arithmétique (ce qui explique le terme souvent utilisé de « dyscalculia ») (Butterworth et al., 2011).

La CIM-10 (et la version anglaise de la CIM-11, édition française prévue en 2022) utilise le terme de : « trouble développemental de l'apprentissage avec déficience en mathématiques ». Il est caractérisé par des difficultés significatives et persistantes dans l'apprentissage des compétences académiques relatives aux mathématiques (*ensemble des disciplines qui procèdent selon la méthode déductive et qui étudient les propriétés des êtres abstraits comme les nombres, les figures géométriques ainsi que les relations qui existent entre eux*) et à l'arithmétique (*partie des mathématiques consacrée à l'étude des nombres et des opérations de base*). Elles peuvent toucher le sens du nombre, la mémorisation des faits arithmétiques, la précision du calcul, la vitesse de calcul, le raisonnement mathématique.

Les représentations du nombre sont absentes de cette définition.

Le trouble n'est pas lié à un trouble du développement intellectuel (critère d'exclusion), à un trouble sensoriel, neurologique, une carence éducative, à un manque de compétence dans la langue de l'enseignement académique ou à un trouble psychosocial. Tout lien avec une comorbidité est inexistant contrairement à la définition du DSM-5.

Le dictionnaire d'orthophonie cite la CIH (classification internationale du fonctionnement, du handicap et de la santé) pour définir une déficience ; c'est une : « *perte de substance ou altération définitive ou provisoire d'une structure ou d'une fonction psychologique, physiologique ou anatomique, la déficience correspond à l'aspect lésionnel, et équivaut, dans la définition du handicap, à la notion d'altération d'une fonction* ». Ce terme dans la traduction française est plus global que celui de trouble, qui n'inclut pas de perte de substance.

Nous avons ainsi défini pour rappel trois notions :

- **déficience** : altération définitive ou provisoire d'une fonction.
- **trouble** : déficience caractérisée par la durabilité et la persistance
- **difficulté** : déficience provisoire et contextuelle

La définition du raisonnement mathématique est difficile à établir ; ce dernier n'est pas seulement déductif, ceci sera développé plus tard. Nous pouvons ici face à une hétérogénéité de concepts nous poser la question des définitions des « dyscalculies » et du « trouble du

raisonnement mathématique/verbal ». La dénomination MLD peut se traduire en français par « trouble de la cognition mathématique », c'est cette appellation qui sera employée au cours de ce mémoire.

### 2.3 « Les dyscalculies »

D'après J. Piaget, l'accès au sens du nombre nécessite des opérations mentales logiques fondatrices : la catégorisation, l'inclusion, la conservation. La sériation, elle, permet à l'enfant de comprendre que les nombres entretiennent entre eux une relation d'ordre (Mazeau, 2017). La catégorisation serait véritablement indispensable pour permettre la construction progressive du concept de nombre et constituerait par ailleurs un marqueur de l'intelligence générale (facteur g).

D'après Mazeau, il semble qu'une déficience intellectuelle légère (non-accès à la catégorisation) patente puisse conduire à des anomalies dans la construction et l'utilisation du nombre. Ici, on serait alors en présence d'un effet de cette déficience intellectuelle sur les apprentissages et non de la marque d'un trouble spécifique. L'observation d'un tel dysfonctionnement réside dans un des premiers symptômes scolaires de la déficience intellectuelle et/ou la résultante d'une erreur pédagogique ; on ne peut évoquer alors « les troubles logico-mathématiques » comme marqueurs des difficultés de la construction du nombre.

La déficience intellectuelle est définie comme un trouble du développement intellectuel (DSM-5), ou de « retard mental » (CIM 10) caractérisé par une insuffisance des facultés et du niveau global d'intelligence (fonctions cognitives, langage, motricité, performances sociales). Plus précisément, le diagnostic repose à la fois sur le niveau d'efficacité intellectuelle et sur le niveau d'adaptation de l'enfant. Le diagnostic précoce n'est pas recommandé car les scores peuvent fluctuer dans le temps et les aptitudes d'adaptation sont susceptibles d'évoluer chez les jeunes enfants (Lussier & Flessas, 2009). Les déficiences légères sont difficilement mises en évidence, elles sont identifiées tardivement (enfance ou adolescence). L'étiologie est souvent multifactorielle, selon le DSM-5, elle serait liée à des facteurs psychosociaux (carence de stimulation, statut socio-économique défavorisé, carence parentale), biologiques (lésions, malformations congénitales) ou à une combinaison des deux.

On peut donc raisonnablement imaginer que des conditions environnementales favorables pour le jeune enfant (notamment scolaires) puissent influencer sur ce type de trouble « logico-mathématique » si elles sont dépistées tôt. Cependant, il n'est pas pertinent d'évaluer le niveau

global d'intelligence trop tôt dans le développement de l'enfant, en revanche, le travail de catégorisation est à entraîner spécifiquement.

Le déficit d'acquisition des compétences numériques peut donc relever :

- d'une déficience intellectuelle légère générale (cf. catégorisation/classification)
- d'une défaillance environnementale
- d'un trouble cognitif spécifique

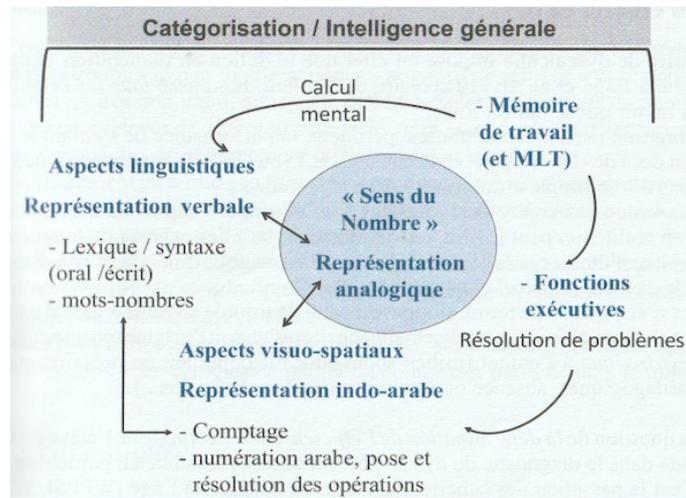
En plus des capacités de catégorisation plusieurs autres fonctions cognitives sont nécessaires pour construire, affiner, développer et coordonner les différentes représentations du nombre (figure 1). Un dysfonctionnement électif de l'une d'elles réalise une dyscalculie spécifique.

Il est possible de distinguer **cinq types de dyscalculies** réparties en deux groupes significatifs : **le trouble du sens du nombre (dyscalculie primaire) et les dyscalculies-symptômes secondaires à un trouble cognitif (il en existe 4).**

### **2.3.1 Le trouble du sens du nombre (dyscalculie primaire)**

L'hypothèse du déficit du sens du nombre suggère que la dyscalculie résulte d'un déficit du traitement des représentations non symboliques du nombre et d'une altération des représentations numériques mentales.

La *représentation analogique* des quantités (traitement des quantités représentées par des objets (doigts, jetons, bâchettes, billes...)) est supportée par le subitizing et l'estimation, au départ, elle serait innée. Ces capacités initiales évoluent avec l'acquisition du langage, les apprentissages scolaires pour prendre la forme d'une ligne numérique mentale virtuelle orientée dans l'espace. Ces notions se coordonnent avec une *représentation symbolique* secondaire linguistique (verbale) et visuo-spatiale (arabe), **ces liens donnent sens au nombre.**



**Figure 1** : Principales fonctions cognitives impliquées dans la construction et l'utilisation du nombre (Mazeau, 2017)

Cette dyscalculie correspond à un dysfonctionnement intrinsèque du système cérébral dédié à l'estimation de quantités (dont le subitizing), au placement des nombres sur une ligne numérique mentale et à leur représentation analogique. C'est une incapacité précoce et rebelle à acquérir, manipuler et utiliser les quantités puis les nombres ; l'estimation approximative et l'évaluation de la numérosité (taille ou cardinalité d'un ensemble d'objets) d'une quantité sont touchées. La capacité à mettre en relation représentations analogique et symbolique participe à ce trouble.

## 2.3.2 Les dyscalculies symptômes (secondaires)

### 2.3.2.1 Dyscalculie symptôme d'un trouble linguistique

L'enfant à cause des performances verbales très déficitaires ne peut apprendre ni automatiser la chaîne verbale des mots-nombres. Elle est particulièrement notable pour les « irréguliers » (de onze à seize, vingt, les séries soixante/soixante-dix et quatre-vingts/quatre-vingt-dix) perturbant le comptage et le dénombrement, puis le transcodage de la représentation symbolique du nombre (nombre oral/nombre arabe écrit). Le trouble du langage peut être déjà connu ou la dyscalculie peut être inaugurale d'une dysphasie d'expression particulière touchant un lexique fermé numérique, avec un manque du mot spécifique dans ce domaine.

### ***2.3.2.2 Dyscalculie symptôme d'un trouble visuo-spatial***

Les aspects spatiaux de la numération arabe (numération de position) sont touchés, c'est un symptôme fréquent dans le cadre d'une dyspraxie visuo-spatiale. L'enfant a des difficultés à lire et écrire des nombres en chiffres arabes, des difficultés de transcodage (nombre oral/nombre arabe écrit), à réaliser les opérations (erreurs de positionnement, de virgules, nombres en miroir).

### ***2.3.2.3 Dyscalculie symptôme d'un trouble mnésique***

On retrouve ici un déficit en mémoire de travail. Les petits calculs mentaux simples et les petits faits numériques sont impossibles. Dans plusieurs cas, ce trouble s'intègre dans un syndrome dysexécutif associant possiblement un déficit attentionnel, un trouble de la mise à jour de la mémoire de travail (administrateur central) et un déficit des fonctions d'inhibition et de planification.

### ***2.3.2.4 Dyscalculie symptôme d'un syndrome dysexécutif***

Dans ce syndrome, il est possible d'observer en ce qui concerne le calcul et le raisonnement : une rigidité mentale, des persévérations, la non-inhibition de la réponse dominante antérieurement apprise, des oublis (données, retenues), une logorrhée, des diffluences, des résultats médiocres et fluctuants dans les autres apprentissages ; le tout associé à un déficit en mémoire de travail. On peut être en présence ici d'un enfant présentant un TDAH (cas d'une comorbidité).

Dans le cas des dyscalculies secondaires, en clinique, il peut y avoir deux cas de figures : le trouble initial est déjà connu, ou bien c'est la plainte concernant le calcul qui conduit à la découverte d'un trouble cognitif. Cependant, il est important de ne pas considérer ces symptômes cognitifs comme des « multi-dys » et de se positionner sur un diagnostic excluant le terme de « comorbidités » pour un tel enfant et par là même sur la multiplication éventuelle des prises en charge.

Les descriptions et avis de Mazeau semblent être en décalage avec les préconisations de la HAS dans le domaine de la prise en charge de la dyscalculie secondaire, dans quelle mesure faut-il en tenir compte ? L'importance du rôle de ces troubles cognitifs nous conduit à nous questionner quant à leur évaluation précoce. La dyscalculie primaire relative à un défaut de l'estimation des quantités (sous-tendue par le subitizing) et de la mise en place de la

représentation analogique nous amène à chercher les pré-requis spécifiques à la construction de ces deux notions.

### 2.3.3 Le développement de l'enfant : la logique et le « raisonnement mathématique »

La psychologie du développement est l'étude scientifique des changements développementaux, de différents facteurs et de leur interaction qui interviennent dans l'évolution de l'individu au cours du temps. Elle s'intéresse aux changements cognitifs, moteurs, affectifs et sociaux. Elle met en évidence l'aspect dynamique du développement, elle peut être fondée sur des facteurs biologiques, sociaux et cognitifs. On considère que le développement est l'interaction de ces trois facteurs.

La psychologie cognitive est l'étude scientifique de la cognition humaine. La cognition regroupe l'ensemble des processus mentaux qui permettent à l'individu d'agir face à des situations plus ou moins complexes.

Ces deux pôles de la psychologie sont à prendre en compte pour appréhender la construction de la pensée numérique de l'enfant.

#### 2.3.3.1 Raisonnements logiques élémentaires (numériques)

J. Piaget dans sa théorie cognitivo-constructive s'est particulièrement intéressé à « l'intelligence logico-mathématique », ces épreuves concernent les quantités discontinues et conduisent au développement des notions de classe, relation et nombre.

Il a identifié deux principes qui déterminent le développement des compétences logiques : *l'adaptation et l'organisation* (Piaget & Inhelder, 1947). « Quelles compétences logiques le sujet doit-il maîtriser pour réellement comprendre le concept de nombre ? ». Pour lui, le nombre est construit par l'abstraction de l'organisation que l'individu est capable d'intégrer vis à vis des objets.

Cette organisation peut être **la réunion des objets, leur ordination ou leur mise en correspondance terme à terme.**

Piaget et Szeminska (Piaget & Szeminska, 1941) formulent l'hypothèse que « le nombre s'organise, étape après étape, en solidarité étroite avec l'élaboration graduelle des systèmes d'**inclusion** (hiérarchie des classes logiques) et de relations asymétriques (**sériations qualitatives**), la suite des nombres se constituant ainsi en tant que synthèse opératoire de la **classification (catégorisation)** et de la sériation ». En psychologie du développement, la catégorisation est envisagée comme « une conduite adaptative fondamentale qui permet à

l'intelligence humaine de réduire la complexité et la diversité de l'environnement physique et social en l'organisant »(Bideaud & Houdé, 1989).

**L'opération de sériation** consiste à ranger les objets selon leurs différences en fonction d'une ou de plusieurs variables (la taille, la quantité...). L'opération de sériation sous-tend la compréhension de la suite ordonnée des nombres : « 9 » est plus petit que « 11 », mais plus grand que « 5 ».

**L'opération de classification** consiste à ranger les objets par catégories, sur la base de qualités communes. La compréhension des nombres cardinaux est sous-tendue par l'opération de classification. Le nombre « 5 » correspond en effet à la classe de tous les ensembles qui contiennent cinq éléments, que ceux-ci soient des pommes, des enfants ou des jetons.

Au niveau numérique, la coordination des opérations de sériation et de classification va conduire à la compréhension du nombre comme ensemble de classes emboîtées de manière ordonnée. Cette compréhension opératoire du nombre permet à l'enfant d'accéder à des raisonnements complexes sur les nombres et de résoudre des problèmes arithmétiques qui font intervenir les relations entre le tout et ses parties.

**La conservation** joue aussi un rôle important dans l'ensemble de la théorie piagétienne elle fait référence à l'identité du nombre elle-même corrélée à la notion d'invariance. Cependant tout porte à croire que dans l'épreuve des jetons (« il y en a plus si c'est plus long »), on ne peut relier un échec de la part d'un enfant à la démonstration de la non-acquisition de la notion de nombre mais plutôt à une incapacité à inhiber une perception inadéquate. En réalité, certains néo-piagétiens (Dempster & Brainerd, 1995) considèrent que les tâches piagésiennes de conservation et d'inclusion des classes ont plus à voir avec la capacité à résister aux interférences qu'à celle de l'enfant à comprendre la logique qui s'y réfère. Ce fait a été vérifié en imagerie cérébrale chez des enfants de 5 à 10 ans. Il ne faut donc pas confondre un défaut d'inhibition avec un défaut numérique. Ces résultats sont en accord avec le modèle de Siegler sur la compétition entre stratégies cognitives, nous le détaillerons dans la partie II du mémoire.

Certains auteurs ont mis en évidence que des facteurs parfois minimes peuvent rendre les épreuves pré-citées plus ou moins difficiles et affecter notablement les réponses des enfants (la nature perceptive ou verbale du matériel utilisé, l'extension des sous-classes, la prégnance perceptive de la classe emboîtante...) (Barouillet & Camos, 2003). D'après eux, le modèle opératoire du nombre défendu par Piaget fournit une compréhension inexacte et incomplète du développement des compétences numériques de l'enfant ; le rôle du langage et du comptage dans le développement des compétences numériques étant sous-estimé. Par ailleurs, la description du développement de l'enfant en termes de stades n'est plus admise à l'heure

actuelle ; plus précisément, le synchronisme des opérations de classification, de sériation et de conservation du nombre n'a pas été confirmé.

Ceci étant, d'après Bideaud et Lehalle (2002), « la compréhension du nombre implique de se conformer aux contraintes inclusives et ordinales inhérentes au nombre. Autrement dit, une conceptualisation achevée du nombre comporte obligatoirement des propriétés logiques ».

Cette définition permet de soutenir les bases théoriques avancées par Piaget, si l'on aborde le domaine numérique comme un secteur autonome de structuration, elles sont toujours d'actualité et servent de modèle de référence tant dans les nouveaux programmes scolaires de 2020 (école maternelle) (les jeux d'exploration, les jeux symboliques à la maternelle, eduscol, 2015) que dans certaines épreuves de bilans orthophoniques (TEDIMATH, BLM-2, UDN-II).

In fine, les recherches de Piaget s'attèlent à expliciter le développement de la construction du nombre, cela n'implique pas qu'avant l'avènement des compétences logiques le nombre n'ait aucun sens pour l'enfant, ni que les aptitudes arithmétiques de ce dernier soient nulles.

Ainsi, il est possible que les enfants développent de concert des compétences de logique élémentaire et des capacités numériques (sans notion de stades chronologiques d'acquisition).

Comment et quand l'enfant s'approprie-t-il la classification et la sériation, quelles sont les variables intervenant dans cet apprentissage, quelle est notamment la place du langage et du comptage dans la réussite des opérations logiques ? La question majeure est alors la constitution des catégories, notamment, quelles caractéristiques sont prises en compte pour regrouper les objets, quelles relations entretiennent-ils entre eux, quelle unité linguistique est utilisée pour nommer la catégorie (données perceptives, lexicales). Quelles situations sont propices à cette acquisition progressive ?

Le rôle de l'inhibition dans le choix de stratégies plus adéquates à la résolution d'un problème est-il véritablement pris en compte dans l'évaluation de la cognition numérique. Est-ce que finalement l'inhibition de stratégies heuristiques (stratégies très rapides, très efficaces et donc économiques), mesurable en chronométrie mentale, ne serait pas un meilleur indicateur des compétences futures de l'enfant en matière de raisonnement logique. Cette observation fait écho à l'étude de Lafay et de ses collaborateurs (Lafay et al., 2014) qui pointe la variable « temps » comme un outil permettant d'avoir un indice supplémentaire pour envisager l'intégrité et l'automatisation ou au contraire le déficit des processus de traitement numérique en plus des simples scores de réussite. L'idée serait à l'inverse pour de jeunes enfants de rechercher des temps de latence avant une réponse donnée, comme un reflet de l'inhibition et donc de la

construction du raisonnement mathématique. Les enseignants pourraient, par exemple en jeu, demander à l'enfant par un signe gestuel (« temps-mort » ou autre) d'attendre avant de répondre à une question ; les incitant à entraîner cette capacité d'inhibition.

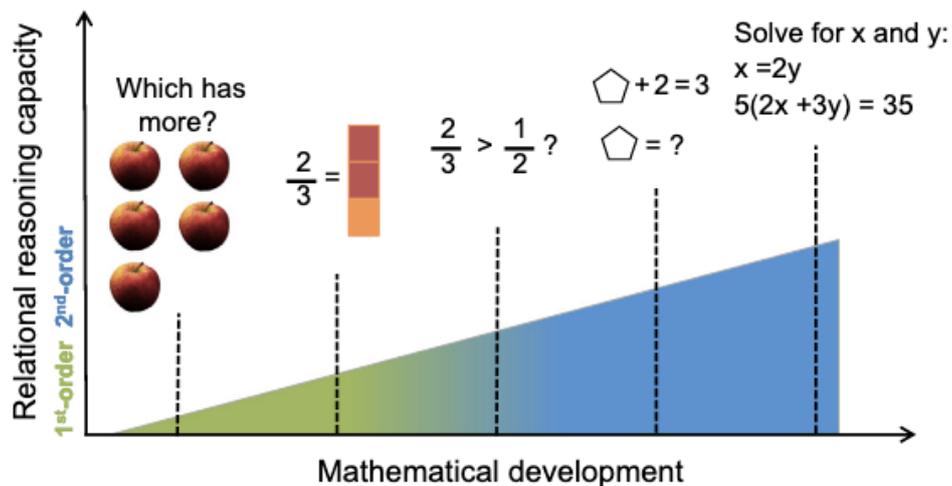
En tenant compte des observations cliniques de Piaget, l'évaluation des compétences logiques *en contexte numérique* est intéressante, des épreuves du TEDI-MATH illustrent ces données.

### ***2.3.3.2 Un autre mode de raisonnement mathématique : la comparaison***

Certaines données défendent l'idée d'un lien entre le « raisonnement relationnel » et les performances en mathématique. En effet ce composant de l'intelligence fluide fournit un socle sur lequel se construisent toutes les compétences spécifiques des différents domaines d'apprentissage. Le postulat ici est que les raisonnements mathématique et analogique requièrent les mêmes fonctions cognitives. Ainsi, pour apprendre le sens des mots-nombres, le jeune enfant doit saisir les différences de magnitudes et ordonner les mots-nombres en fonction de l'intégration de ces différences (Singley & Bunge, 2014 ).

Ils y parviennent grâce à un processus d'apprentissage qui leur permet de différencier « un » de « plus qu'un » et d'ajouter itérativement « 2 » et « 3 » à leur répertoire linguistique avant de saisir la mise en relation entre l'ordre des mots-nombres et les augmentations de magnitude. Apprendre la signification des mots-nombres demande d'abord une comparaison de premier ordre de chaque nombre avec le prochain dans la suite numérique.

Une comparaison de premier ordre décrit la relation entre deux représentations mentales individuelles, tandis qu'une comparaison de second ordre intègre deux (ou plus) séries de relations de premier ordre ; plus précisément il s'agit de la comparaison de la nature des relations qu'elles entretiennent entre elles. On comprend alors l'importance des épreuves de comparaison dans le raisonnement, les relations sémantiques et spatiales peuvent être structurées de manière similaire pour acquérir la compétence essentielle de raisonnement relationnel.



**Figure 2** : Développement mathématique en fonction de la capacité de raisonnement relationnel (Singley & Bunge, 2014).

Ainsi, la compréhension de ce type de relations à l'âge des enfants qui nous intéresse utilise des relations de premier ordre, il faut donc veiller à proposer des tâches respectant cette analyse.

Il semble qu'avant 6 ans, les enfants soient capables prioritairement de réaliser des comparaisons de premier ordre concernant : la magnitude, la classification, l'attention spatiale, les formes. Plus tard, la maturation cérébrale leur permet d'exercer un raisonnement relationnel de second ordre, grâce à l'élaboration d'un réseau impliquant le cortex préfrontal rostro-latéral. Pourtant, en IRMf chez l'enfant, les mesures d'activités cérébrales spécifiques aux deux types de raisonnement ne se distinguent pas. Les enfants engagent les mêmes réseaux corticaux que chez l'adulte, la sélectivité des tâches conduit à des structures matures par la suite surtout à l'adolescence. Les implications scolaires relatives à ces observations conduisent à des recommandations consistant à fournir le plus d'aide possible aux enfants apprenants pour construire ces relations de premier ordre.

Le « raisonnement relationnel » est testé dans des épreuves psychométriques. Le problème du raisonnement mathématique est qu'il fait référence au raisonnement princeps ; si on cherche à élaborer un outil de prévention de la cognition mathématique, faut-il inclure des tests de quotient intellectuel dans les épreuves ? Des épreuves de comparaisons semblent incontournables, ces tâches se révèlent plus complexes que celles de catégorisation. Au cours des apprentissages, le « un de plus » doit être entendu, repris et compris par l'enfant dans des situations répétitives, variées, guidantes pour asseoir les bases de l'accès au raisonnement de premier ordre. La sélectivité de tâches non numériques pourra participer aussi à cet ancrage.

Il apparaît que définir un trouble du raisonnement qu'il soit logique, mathématique ou verbal (cf. DSM-5) soit relativement complexe. Les modèles cognitifs en lien avec le raisonnement seront détaillés dans la deuxième partie, les domaines des fonctions exécutives et de la mémoire également. Il est essentiel de s'intéresser par ailleurs à la didactique des mathématiques puisque notre sujet d'étude est en lien avec l'apprentissage. Pour initier notre réflexion, nous avons proposé à des orthophonistes et à des professeurs des écoles exerçant leur activité en GS de maternelle un questionnaire concernant leurs observations et leurs pratiques.

## 2.4 Analyse des réponses des professeurs des écoles et des orthophonistes

### 2.4.1 Réponses des orthophonistes

QUESTIONS	REPONSES
Quel est l'âge (et la classe) des enfants consultant pour la première fois un orthophoniste pour des difficultés en mathématiques ?	Le plus souvent <b>entre le CE1 et le CM2</b> , quelques demandes précoces en CP En <b>CE2</b> et <b>au collège</b> (le plus fréquemment vers <b>8/9 ans</b> )
Qui oriente vers un orthophoniste pour des difficultés en cognition mathématique ?	La famille, le neuropédiatre, les professeurs (pas ou peu) Un(e) collègue qui suit l'enfant en LE, la maîtresse
Quelles difficultés sont observées ?	- <b>retard dans l'acquisition du comptage</b> , - <b>absence du sens du nombre, ou déficit d'accès à celui-ci</b> - <b>difficultés d'acquisition de la base 10</b> , - <b>difficultés dans l'apprentissage des faits arithmétiques</b> - <b>difficultés dans les techniques opératoires, et la résolution de problèmes</b> - <b>absence du sens des opérations</b> - <b>déficit au niveau de la ligne numérique mentale (fréquent)</b> - <b>trouble du raisonnement</b>
Quels troubles associés sont repérés ou diagnostiqués ?	Trouble du LO, TDAH Trouble du LE, dyschronie, dyspraxie Troubles visuo-spatiaux Trouble du raisonnement
Quels bilans sont utilisés ?	Examath 8-15, Zareki-R, EVAC, TEDI-MATH, épreuves du Gepalm, BLM-2
Quels outils sont utilisés pendant les prises en charge, quels pré-requis sont travaillés éventuellement ?	<b>Jeux</b> : dominos, frise, bataille, bornes, fabrication de calendriers ; travail du système numérique avec manipulations (espace de découverte libre pour un raisonnement mieux ancré) <b>Travail de la ligne numérique mentale, subitizing, estimation</b> <b>Manipulations</b> pour le calcul <b>Pré-requis : structures logiques (Piaget)</b>
Pourquoi peu d'orthophonistes investissent ce champ d'action ?	Formation initiale minimaliste, durée et prix des formations complémentaires importants

Combien d'années d'expérience avez-vous dans la prise en charge des troubles de la cognition mathématique ?	30 ans, 8 ans, 5 ans
Que pensez-vous de la pertinence du sujet ?	Sujet intéressant, exploration des compétences précoces comme le subitizing, les calculs simples

En observant les réponses données par des orthophonistes ayant des expériences professionnelles variées, nous pouvons noter plusieurs points importants :

- Les prises en charge initiales commencent généralement vers 8/9 ans et se poursuivent en cycle 4, **ce qui est tardif** en regard de celles relatives à la dyslexie par exemple.
- L'orientation vers un orthophoniste pour des difficultés en cognition mathématique a une origine plurimodale, **ce qui laisse supposer une méconnaissance spécifique de ces troubles**. Ceci conduit à une interrogation concernant la description du « degré de sévérité » qui nécessite une prise de contact avec un professionnel.
- Les difficultés observées sont multiples, celles relatives à la ligne numérique mentale sont fréquentes, ce qui est corrélé à l'estimation et au subitizing (également cités) ; avec le comptage (énumération et connaissance de la chaîne numérique), ces compétences participent à la perception de la numérosité. Le dénombrement, les opérations et la maîtrise de leur technique ainsi que le transcodage (à travers la base 10) sont pointés aussi. Les professionnels notent des difficultés de mémorisation (faits arithmétiques) et de raisonnement. Ce dernier n'est pas détaillé. Les difficultés de résolution de problèmes peuvent faire référence à celles décrites plus haut mais aussi à des aptitudes comme : les fonctions exécutives (planification, inhibition) ou la lecture-compréhension. Ces difficultés sont nombreuses et touchent des compétences plurielles nécessaires à la construction du concept de nombre et de son utilisation, **ce constat confirme à quel point ces notions sont liées entre elles mais aussi que leur variété constitue par là même un apprentissage complexe**.
- Différents troubles peuvent être associés aux difficultés en cognition mathématique, parfois c'est par cette plainte initiale que les MLD peuvent être repérés. S'agit-il alors de « dyscalculie symptôme » ? Ces difficultés correspondent aux troubles des langages oral et écrit, à la dyspraxie, à des troubles visuo-spatiaux. La dyschronie, également citée, est un trouble d'apprentissage rare jamais isolé, il correspond à une difficulté à appréhender toute notion du temps ou organisation temporelle. On peut se questionner sur l'impact de ces compétences sur l'élaboration de la cognition numérique. On peut noter **qu'une orthophoniste classe le « trouble du raisonnement » dans les troubles associés, contrairement aux autres professionnels**, rejoignant ainsi la définition du DSM-5 qui mentionne « déficience avec *difficulté supplémentaire éventuelle* » pour

parler du trouble du raisonnement dans la définition de la déficience. Cette observation peut être importante pour la suite de notre travail car elle pose la question de savoir, en tant que professionnel, si le diagnostic se fonde préférentiellement sur le DSM-5 ou sur la CIM-10 ; ces deux classifications internationales faisant office de référence dans ce domaine. Par ailleurs, cela renvoie à nouveau à **la description plus précise du trouble du raisonnement.**

- Les bilans utilisés sont les suivants (fondement théorique associé) :
  - ✓ Examath, (2016, enfants entre 8 et 15 ans), modèles du triple code de Dehaene et modèle développemental de Von Aster et Shalev/informatisée.
  - ✓ Zareki-R, (2006, enfants de 6 à 11 ans), basé sur le modèle modulaire de Mac Closkey/papier-crayon
  - ✓ TEDI-MATH, (2001, enfants entre 4 et 9 ans), théorie piagétienne et sciences cognitives/papier-crayon.
  - ✓ EVAC, (2003, enfants entre 8 et 14 ans), basé sur la théorie de Luria : organisation fonctionnelle du cerveau (exploration de l'attention, des FE dont la mémoire de travail, compétences linguistiques, rapports spatiaux...).
  - ✓ BLM-2 (2004, enfants entre 5 et 8,5 ans), théorie piagétienne/papier-crayon-manipulation.
  - ✓ Epreuves du GEPALM (qualitatif), théorie piagétienne/papier-crayon-manipulation.

Ainsi, les bilans ont des fondements théoriques variés, plus ou moins récents. Nous pouvons citer également d'autres outils existants rattachés à ce champ disciplinaire : MathEval, UDN-II, ECPN, petite EVAC (évaluation neuropsychologique), ERLA. La N-EEL et l'Exalang 3-6 contiennent des épreuves de vocabulaire mathématique.

- Dans les prises en charge, **le jeu et la manipulation sont des appuis forts** dans la rééducation ainsi que le temps laissé à l'enfant pour construire son propre raisonnement en étant acteur d'une trace écrite par exemple. En ce qui concerne les **pré-requis**, la terminologie « **structures logiques** » est mentionnée. Il semble que cette dénomination fasse référence **au système de logique décrit par Piaget, cette hypothèse est à confirmer.**
- Les orthophonistes prêts à investir ce domaine de compétences paraissent peu nombreux, la raison évoquée est celle de la formation initiale moins étayée que pour leurs autres champs d'action. Un sentiment de moindre expertise peut les conduire à éviter ces prises en charge, qui du coup sont moins documentées. L'organisation du cursus ces dernières années semble favorable à infirmer ce sentiment.
- L'intérêt de notre étude est recevable d'après les professionnels, ils mentionnent comme voie d'investigation première **le subitizing et les calculs simples**, il est à noter que le

raisonnement n'est pas indiqué. Nous chercherons quels autres domaines de compétence peuvent être proposés dans notre outil.

## 2.4.2 Réponses des professeurs des écoles de GS

QUESTIONS	REPONSES
Combien d'élèves environ dans une classe ont des difficultés en cognition mathématique ?	5/6 élèves (sur une classe de 25 à 31 élèves) <b>5/30</b>
Quelles sont leurs principales difficultés ?	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>reconnaissance et production des différentes écritures chiffrées, mémoire visuelle et auditive, codage</b></li> <li>- <b>dénombrément d'une collection importante (&gt;10)</b></li> <li>- <b>organisation du comptage</b></li> <li>- <b>décomposition des quantités au-delà de 5</b></li> <li>- <b>résolution de problèmes de partages et de quantités</b></li> <li>- <b>comparaison de collections</b></li> <li>- <b>difficultés de surcomptage</b></li> <li>- <b>estimation d'une quantité</b></li> <li>- <b>tri (peu rencontré)</b> (une occurrence)</li> <li>- reproduction des assemblages de formes et de solides</li> <li>- suivi d'un parcours codé</li> <li>- repérage dans le temps, sur un quadrillage</li> </ul>
Quelles difficultés peuvent y être associées ?	Réaliser un puzzle Problèmes de mémoire en prélecture Reconnaissance des lettres Latéralisation Difficultés spatio-temporelles
Utilisez-vous des tests spécifiques pour évaluer ce domaine mathématique ? Si oui lesquels ?	Non
Après évaluation, que mettez-vous en place pour les élèves en difficulté ?	Aide personnalisée, <b>jeux</b> pour que l'élève s'entraîne, APC (activités pédagogiques complémentaires) Demande d'un bilan orthophonique
Quels supports utilisez-vous ?	<b>Jeux de manipulation, matériel</b> « Vers les maths GS » Accès éditions (2009) Ateliers autonomes Jeux éducatifs : mystero, logico (nathan), versologic, spatial spots, architek
Orientez-vous les élèves vers un orthophoniste	<b>Oui</b> « Cela dépend du niveau de difficulté : si j'estime que les difficultés ne sont pas trop lourdes ; non. Si j'observe des difficultés à mémoriser, reconnaître les chiffres écrits, les petites quantités <b>et s'il n'y a pas d'amélioration</b> , je propose aux parents de prendre RV pour un bilan orthophonique ».
Depuis combien de temps exercez-vous en école maternelle ?	2 ans, 38 ans, 30 ans

Parallèlement au questionnaire en direction des orthophonistes, nous avons donc mené une enquête sommaire auprès de professeurs des écoles exerçant depuis plus ou moins longtemps en grande section de maternelle (entre 2 et 38 ans). L'analyse fait ressortir quelques remarques :

- La proportion d'élèves en difficulté en cognition mathématique dans la classe de GS est d'environ 16% ce qui est nettement plus élevé que la prévalence actuelle de la dyscalculie qui serait de 1% d'après Fischer (Fischer, 2007) ; alors que l'INSERM la même année fait état d'un taux allant de 3,6 à 7,7%. De telles fluctuations sont dues d'après cet auteur à des imprécisions méthodologiques notamment en ce qui concerne les définitions des critères d'inclusion et d'exclusion de la population test ; ceci peut donc engendrer un biais analytique. Par ailleurs ces résultats hétérogènes peuvent être corrélés à la diversité des critères diagnostics utilisés en cognition mathématique. Ils peuvent enfin signifier, inversement, que pour certains enfants, au fil de la scolarité et du développement, les difficultés s'estompent ; alors que pour d'autres, certaines d'entre elles s'ancrent plus durablement. Ceci pose le problème de l'appréciation de notions plus difficiles que d'autres à appréhender par les élèves et, donc pour les professeurs, celui de s'employer à intensifier certains apprentissages.
- **Il faut noter que le terme « cognition mathématique » pour les enseignants englobe le domaine numérique mais aussi ce qui relève des compétences spatio-temporelles, de la découverte des formes et des grandeurs, une seule enseignante mentionne la pensée logique piagétienne (tri).** Ce constat conduit à nouveau à l'importance de s'intéresser aux pré-requis pointés précédemment mais aussi aux aptitudes complémentaires impliquées dans la construction du concept de nombre. Nous sommes face à un repérage global mais précis des compétences mathématiques de la part des professeurs sondés alors que les programmes scolaires de l'école maternelle mentionnent cinq domaines distincts à l'intérieur desquels les notions sont disséminées. Les divers aspects de l'élaboration de ces habiletés sont bien discernés ici. En effet, les documents *eduscol* distinguent plusieurs domaines au service de cette compétence étendue qu'est la cognition mathématique : - **construire les premiers outils pour structurer sa pensée** (construire le nombre pour exprimer des quantités, stabiliser la connaissance des petits nombres, utiliser le nombre pour désigner un rang, une position, construire des premiers savoirs et savoir-faire avec rigueur, explorer des formes, des grandeurs, des suites organisées), - **explorer le monde** (se repérer dans le temps et l'espace), - **mobiliser le langage dans toutes ses dimensions (l'oral : comprendre et apprendre** (décrire, expliquer, nommer, comparer, classer, catégoriser...). Les

spécificités à l'intérieur des chapitres seront décrites plus bas (paragraphe 2.5). **Un risque existe toutefois peut-être pour les maîtres moins expérimentés : associer tous les savoir-faire relatifs à l'enseignement des mathématiques malgré un manque de clarté décelé dans les documents institutionnels.** Les enseignants notent des difficultés comparables à celles observées par les orthophonistes.

- Ils remarquent pour ces élèves certaines difficultés associées : signes spatio-temporels, mnésiques, et des obstacles en langage écrit (pré-lecture). Le langage oral n'est pas mentionné, ni le raisonnement, peut-être précisément à cause du cloisonnement des cinq domaines d'apprentissage de l'école maternelle, conduisant à un découpage diffus des notions mathématiques. **L'intérêt de la combinaison de ces dernières entre elles n'est pas formulée de manière explicite dans les programmes scolaires même si on suppose qu'elle est sous-entendue.**
- Les professeurs n'ont pas d'outil d'évaluations spécifique de la cognition mathématique ; ils utilisent des livrets d'évaluation propres à chaque établissement et construits par l'équipe pédagogique en fonction des compétences attendues en fin d'école maternelle. Pourtant il existe un document officiel émanant du ministère de l'éducation nationale paru en 2010 intitulé : « *aide à l'évaluation des acquis des élèves en fin d'école maternelle : s'approprier le langage, découvrir l'écrit, découvrir le monde, devenir élève* ». Il est antérieur aux nouveaux programmes de 2015, c'est peut-être pour cela qu'il n'est pas investi. *Dans ce dossier comportant des fiches-papier, il s'agit de repérer des objets d'après un critère (donné) : trier (comparaison) ; de dénombrer des collections inférieures à 10, entre 10 et 20, puis entre 20 et 30 ; de transcoder par désignation (plusieurs propositions) : 5, 13, 11, 7, 14, 17, 28, 20, 25, 29 ; de réaliser des comparaisons de collections (plus ou moins) ; de réaliser des problèmes en utilisant le comptage.*
- Globalement, les enseignants d'école maternelle utilisent le jeu comme support d'étayage de la même manière que les rééducateurs. Ils conseillent aux parents des élèves en difficulté en mathématiques de contacter un orthophoniste quand leur pédagogie différenciée échoue notamment en ce qui concerne les compétences spécifiques de la reconnaissance des petites quantités, de la mémorisation, de la reconnaissance des chiffres écrits. Autrement dit, les principaux signes d'alerte pour les professeurs sont : **le transcodage, le subitizing, les capacités mnésiques** des élèves. Leur jugement final, après évaluation, peut parfois être subjectif « si j'estime que les difficultés ne sont pas trop lourdes ». Cette dernière remarque rejoint la discussion quant à la complexité de l'objectivation des troubles de la cognition mathématique.

Les données recueillies grâce aux questionnaires des orthophonistes et des professeurs des écoles exerçant leur activité professionnelle en GS de maternelle mettent en relief plusieurs points :

- ✓ Les évaluations et les prises en charge effectuées par les rééducateurs dans le domaine de la cognition mathématique ont lieu en cycles 2 (fin du cycle), et 3 et se poursuivent en cycle 4 alors que les professeurs des écoles du cycle 1 observent déjà des difficultés relatives à ce champ de compétences.
- ✓ Les diverses notions inhérentes aux mathématiques et à la construction du nombre répertoriées dans les programmes de l'école maternelle sont disséminées dans 3 domaines distincts d'apprentissage sur les 5 existants.
- ✓ Les deux groupes différents de professionnels observent les mêmes difficultés et utilisent majoritairement le jeu pour travailler avec les enfants.
- ✓ Les professeurs des écoles de GS ne sont pas toujours informés de l'ensemble des outils d'évaluation existants.
- ✓ Il est nécessaire de définir très précisément les termes de « structure logique » et de « raisonnement » afin de chercher s'il s'agit réellement de pré-requis à la construction de la pensée numérique.
- ✓ Dans la perspective d'un outil de repérage de la cognition numérique pour des enfants de 5 ans, il est important de proposer des épreuves simples reposant sur des concepts accessibles relatifs à la fois aux notions numériques et aux habiletés de raisonnement.

Pour cela, il faut prendre en compte les compétences fondamentales au développement mathématique décrites par Butterworth et Laurillard (Butterworth & Laurillard, 2010), à savoir :

- ***le traitement numérique (lecture et écriture de chiffres, de nombres, transcodage)***
- ***les compétences procédurales (maîtrise des algorithmes, mémorisation des faits arithmétiques, calcul écrit, calcul mental...) : pratiquement absentes au cycle 1***
- ***la quantification (dénombrement, estimation, comparaison, valeur de position...).***

Dans la perspective d'examiner les différences de compétences en mathématiques entre les cycles 1 et 2, nous proposons dans la suite de notre travail d'explorer les textes officiels du ministère de l'Education nationale. L'objet de cette observation est d'examiner en détail la progression préconisée et de la relier aux bases théoriques correspondantes. En effet, il est intéressant de se préoccuper des contenus des savoirs enseignés et de leur didactique puisqu'ils peuvent être au cœur de troubles d'apprentissage.

## **2.5 Analyse des documents officiels institutionnels**

### **2.5.1 Les programmes scolaires de 2015 et 2020 en GS et en CP**

Les nouveaux programmes de 2020 pour l'école maternelle comportent des modifications pour certaines compétences ; elles ont trait schématiquement à une sensibilisation au respect de l'environnement. Pour le cycle 2, cette thématique est renouvelée ; en mathématiques, les situations problèmes sont à privilégier et à relier au domaine « questionner le monde », ce qui renforce l'utilisation des nombres entiers pour « dénombrer, ordonner, comparer, repérer, estimer, mesurer » des grandeurs repérables. Des activités de représentations de ces valeurs sur un axe et des activités de calculs sont préconisées ; ces ajouts peuvent être un soutien pour comprendre l'intérêt de l'utilisation des nombres au plus près du monde qui entoure l'enfant. On peut donc corréler cet enseignement complémentaire à des capacités de représentations, d'estimations des quantités et de calculs simples (soustraction notamment). Mis à part ces modifications, le contenu est inchangé, nous nous baserons donc sur les programmes de 2015 pour notre analyse.

Les compétences attendues en fin de GS et de CP dans le domaine de la cognition mathématique sont consignées dans les tableaux 1 et 2 (j'enseigne au cycle 1, j'enseigne au cycle 2, éduscol, 2020).

Domaines	Compétences de fin de GS	Exemples de réussite	Analyse théorique
<p><b>Construire les premiers outils pour structurer sa pensée :</b></p> <p><b>1) Construire le nombre pour exprimer des quantités</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Évaluer et comparer des collections d'objets avec des procédures non numériques.</li> <li>• Mobiliser des symboles analogiques, verbaux pour communiquer des informations orales sur une quantité.</li> <li>• Avoir compris que le cardinal (ici la quantité) ne change pas si on modifie la disposition spatiale ou la nature des éléments.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Estimer des quantités de façon approximative. Ex : beaucoup/pas beaucoup... ;</li> <li>◆ Réaliser une correspondance terme à terme pour comparer.</li> <li>◆ Produire une collection de même cardinal qu'une autre.</li> <li>◆ Comparer des collections organisées de manière différente dans l'espace pour trouver celles qui sont équipotentes (qui ont le même cardinal), pour déterminer celles qui ont plus ou moins d'éléments qu'une collection donnée. <i>(situations de jeux, ou de résolutions de problèmes qui font sens, qui intègrent des variables comme la taille des collections, la nature des objets et leur organisation spatiale et qui visent à la construction et à l'entraînement de procédures en s'appuyant sur les interactions langagières ; manipulations ; construction de collections témoins : doigts, dés, objets...).</i></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>→ Estimation de petites quantités</li> <li>→ Perception visuo-spatiale des objets et variables didactiques</li> <li>→ Coordination oculo-motrice</li> <li>→ Principes de Gelman</li> <li>→ Langage oral (lexique, syntaxe)</li> <li>→ Constructivisme</li> <li>→ Représentations analogiques du nombre</li> <li>→ Raisonnement de premier ordre</li> <li>→ Catégorisation (classification)</li> <li>→ Sériation</li> <li>→ Conservation</li> <li>→ Configurations digitales canoniques</li> </ul>
<p><b>2) Stabiliser la connaissance des petits nombres jusqu'à dix</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Réaliser une collection dont le cardinal est donné.</li> <li>• Utiliser le dénombrement pour constituer une collection d'une taille donnée ou pour réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée.</li> <li>• Avoir compris que tout nombre s'obtient en ajoutant un au nombre précédent et que cela correspond à l'ajout d'une unité à la quantité précédente.</li> <li>• Quantifier des collections jusqu'à dix au moins ; les composer et les décomposer par manipulation effective</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Donner, montrer, prendre une quantité demandée d'éléments. <i>(perception spontanée des petites quantités jusqu'à trois ; constitution et appariement de collections (inférieures ou égales à 10) avec des quantités énoncées de différentes façons par l'enseignant (ex : 7 ou « 5 et encore 2 », ou « 6 et encore 1 » ou « 3 et encore 3 et encore 1 »).</i></li> <li>◆ Constituer des groupements afin de réaliser des collections en réponse à une demande. <i>(dire « un et encore un »).</i></li> <li>◆ Constituer une collection en utilisant le comptage <i>(collections jusqu'à cinq entre deux et quatre ans et jusqu'à dix après quatre ans).</i></li> <li>◆ Dire le mot-nombre correspondant au cardinal d'une collection proposée.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>→ Subitizing</li> <li>→ Concept d'addition</li> <li>→ Transcodage</li> <li>→ Représentation symbolique du nombre (verbale, écrite)</li> <li>→ Lexique</li> <li>→ Calculs simples (additions, soustractions)</li> <li>→ Dénombrement</li> <li>→ Comptage</li> <li>→ Mémoire de travail</li> </ul>

<p><b>3) Utiliser le nombre pour désigner un rang, une position</b></p> <p><b>4) Construire des premiers savoir-faire avec rigueur</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Acquérir la suite orale des mots-nombres.</li> <li>• Écrire les nombres avec les chiffres.</li> <li>• Dénombrer.</li> </ul>	<p>puis mentale. Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Parler des nombres à l'aide de leur décomposition.</li> <li>• Utiliser le nombre pour exprimer la position d'un objet ou d'une personne dans un jeu, dans une situation organisée, sur un rang ou pour comparer des positions.</li> <li>• Quantifier des collections jusqu'à 10 au moins.</li> <li>• Dire la suite des nombres jusqu'à trente.</li> <li>• Lire les nombres écrits en chiffres jusqu'à dix.</li> <li>• Mobiliser des symboles analogiques, verbaux ou écrits, conventionnels ou non conventionnels pour communiquer des informations orales et écrites sur une quantité.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Dire le mot-nombre correspondant au cardinal d'une collection (précédemment dénombrée) à laquelle, en présence de l'enfant, l'enseignant ajoute ou retire un ou plusieurs éléments.</li> <li>◆ Verbaliser la décomposition du nombre : Ex : « 5 c'est 3 et 2 ».</li> <li>◆ Construire une suite identique à une suite ordonnée proposée (<i>reproduction de suites</i>).</li> <li>◆ Placer un élément en connaissant sa position et en respectant le sens du parcours. (<i>travail sur les variables didactiques : nature des éléments dans la suite, rang demandé par l'enseignant, désignation des rangs par l'enseignant puis par l'enfant, distinction entre deux désignations différentes dans une même suite</i>).</li> <li>◆ Verbaliser le rang des éléments d'une suite ordonnée en respectant le sens de « lecture » : le premier, le deuxième...</li> <li>◆ Dire la suite orale des mots-nombres : de un en un, à partir de un puis d'un autre nombre ; en avançant de deux en deux ; en reculant pour les dix premiers nombres... (<i>comptines numériques ; mise en évidence des régularités à partir de dix-sept ; avant quatre ans, travail sur la suite numérique jusqu'à cinq ou six et jusqu'à trente ensuite pour les plus grands</i>).</li> <li>◆ Associer le chiffre correspondant à un mot nombre énoncé (jusqu'à 10). (<i>situations concrètes de la vie de la classe</i>.)</li> <li>◆ Tracer chacun des chiffres.</li> <li>◆ Associer une représentation figurée à une quantité dénombrée (constellations de dés, configurations de doigts, cartes à points...).</li> <li>◆ Associer le nombre écrit correspondant à une quantité dénombrée (jusqu'à 10).</li> <li>◆ Utiliser la perception globale pour quantifier (<i>les situations de dénombrement visent l'association d'une représentation à une quantité donnée au moins jusqu'à dix</i>).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>→ Mémoire sémantique</li> <li>→ Pré-requis à l'arithmétique</li> <li>→ Compléments à 10 (faits arithmétiques)</li> <li>→ Sériation</li> <li>→ Lexique</li> <li>→ Numéraux ordinaux</li> <li>→ Perception et organisation spatiale</li> <li>→ Mémoire à court terme (visuelle)</li> <li>→ Initiation (fonction exécutive)</li> <li>→ Transcodage</li> <li>→ Chaîne numérique verbale insécable et sécable</li> <li>→ Comptage à rebours</li> <li>→ Régularités morpho-syntaxiques</li> <li>→ Graphie reconnaissable</li> <li>→ Sensibilisation à plusieurs représentations analogiques</li> <li>→ Association des représentations symbolique et analogique</li> <li>→ Estimation globale de quantités</li> </ul>
---	---	--	--

<p><b>5) Explorer des formes, des grandeurs, des suites organisées</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Construire des connaissances et des repères sur quelques formes et grandeurs et sur des suites organisées.</li> </ul> <p><b>Explorer le monde</b></p> <p><b>1) Se repérer dans le temps (extraits)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Stabiliser les premiers repères temporels. Introduire les repères sociaux.</li> <li>• Consolider la notion de chronologie.</li> <li>• Sensibiliser à la notion de durée.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Classer des objets en fonction de caractéristiques liées à leur forme. (...)</li> <li>• Classer ou ranger des objets selon un critère de longueur ou de masse ou de contenance.</li> <li>• Reproduire un assemblage à partir d'un modèle (puzzle, pavage, assemblage de solides).</li> <li>• Reproduire, dessiner des formes planes.</li> <li>• Identifier le principe d'organisation d'un algorithme et poursuivre son application.</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Situer des événements vécus les uns par rapport aux autres et en les repérant (dans la journée, la semaine, le mois ou une saison).</li> <li>• Ordonner une suite de photographies ou d'images, pour rendre compte d'une situation vécue ou d'un récit fictif entendu, en marquant de manière exacte succession et simultanéité.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Enumérer : prendre en compte chaque unité d'une même collection sans en oublier ni pointer deux fois la même (<i>construction d'un trajet graphique ou mental</i>).</li> <li>◆ Utiliser le dernier mot nombre cité pour exprimer la quantité de la collection (mémoire de la quantité).</li> <li>◆ Dénombrer les quantités jusqu'à dix. (<i>varier la nature des collections et leur organisation spatiale, en prenant appui sur des dénombrements de collections d'objets déplaçables, d'objets fixes organisés spatialement, d'objets fixes éloignés ou non</i>).</li> <li>◆ Construire des collections. (<i>situations pour construire une collection de même cardinal qu'une collection témoin à l'aide des doigts, d'objets, de points, des mots-nombres énoncés</i>).</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Appréhender des objets selon un critère.</li> <li>◆ Comparer deux objets ;</li> <li>◆ Ranger, trier, choisir.</li> <li>◆ Appréhender la notion d'alignement ;</li> <li>◆ Organiser des suites d'objets.</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Associer les moments de la journée avec des activités régulières de la classe. (...).</li> <li>◆ Connaitre la suite des noms des jours, de la semaine et savoir dire « celui qui précède » et « celui qui suit » un jour donné.</li> <li>◆ Utiliser des marques temporelles dans le langage, notamment pour situer ce dont on parle par rapport au moment où l'on parle (hier, aujourd'hui, demain, plus tard...).</li> <li>◆ Utiliser les formes des verbes adaptées (présent, futur, passé) même si la conjugaison exacte fait encore défaut.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>→ Principes de Gelman (ordre stable, cardinalité)</li> <li>→ Flexibilité</li> <li>→ Initiation</li> <li>→ Conservation</li> <li>→ Perception visuo-spatiale</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>→ Raisonnement de premier ordre</li> <li>→ Catégorisation (formes)</li> <li>→ Flexibilité</li> <li>→ Initiation (trouver un critère)</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>→ Résolution de problèmes</li> <li>→ Compréhension d'énoncés</li> <li>→ Transfert : chaîne numérique (calendrier...)</li> <li>→ Syntaxe, lexique</li> </ul>
---	---	---	---

<p style="text-align: center;"><b>2) Se repérer dans l'espace (extraits)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Faire l'expérience de l'espace.</li> <li>• Représenter l'espace.</li> <li>• Découvrir différents milieux.</li> </ul> <p><b><u>Mobiliser le langage dans toutes ses dimensions</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• L'oral : comprendre et apprendre.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utiliser des marqueurs temporels adaptés (puis, pendant, avant, après...) dans des récits, descriptions ou explications.</li> <li>• Situer des objets par rapport à soi, entre eux, par rapport à des objets repères.</li> <li>• Se situer par rapport à d'autres, par rapport à des objets repères.</li> <li>• Dans un environnement bien connu, réaliser un trajet, un parcours à partir de sa représentation (dessin ou codage).</li> <li>• Élaborer des premiers essais de représentation plane, communicables (construction d'un code commun).</li> <li>• Orienter et utiliser correctement une feuille de papier, un livre ou autre support d'écrit, en fonction de consignes, d'un but ou d'un projet précis.</li> <li>• Utiliser des marqueurs spatiaux adaptés (devant, derrière, droite, gauche, dessus, dessous...) dans des récits, des descriptions ou explications.</li> <li>• Pratiquer divers usages du langage oral : raconter, décrire, évoquer, expliquer, questionner, proposer des solutions, discuter un point de vue.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Utiliser le vocabulaire adapté pour traduire une relation entre deux faits, deux moments : avant, après, pendant, bien avant, bien après, en même temps, plus tôt que, plus tard, dans deux jours...</li> <li>◆ Utiliser divers outils (comptage régulier, sablier, horloge...) pour comparer des durées. (<i>matérialisation du temps, comparaison de durées</i>).</li> <li>◆ Se déplacer en respectant des règles ou consignes.(...)</li> <li>◆ Utiliser des locutions spatiales en particulier celles fondées sur des oppositions : sur/sous, dedans/dehors, à côté de/loin de....</li> <li>◆ Reconnaître et utiliser des représentations d'espaces connus.</li> <li>◆ Coder des déplacements, des emplacements sur un « plan » connu ou une photographie d'un espace vécu (salle de classe, salle de jeux, cour de récréation...).</li> <li>◆ Repérer sa droite et sa gauche.</li> <li>◆ Décrire des positions dans l' espace : positions par rapport à soi ; positions relatives de deux objets ou deux personnes l'un(e) par rapport à l'autre.</li> <li>◆ Se repérer dans une page et utiliser le vocabulaire usuel (haut et bas notamment, gauche et droite). (...)</li> <li>◆ Décrire, énoncer, expliquer, interpréter, anticiper, relater une procédure, une technique, un déplacement. (<i>...pendant des activités numériques</i>).</li> <li>◆ Rapprocher par les points communs ou contraster par les points de différences.</li> <li>◆ Construire une image mentale en s'appuyant sur des photos, des dessins, des schématisations.</li> <li>◆ Enchaîner des phrases avec des connecteurs adaptés et variés, utiliser des adverbes, des prépositions, des adjectifs...</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>→ Syntaxe, lexicque</li> <li>→ Résolution de problèmes</li> <li>→ Orientation dans la page (quadrillage)</li> <li>→ Orientation et maîtrise de la reconnaissance et de l'écriture des chiffres</li> <li>→ Préparation à la pose des opérations et à la ligne numérique mentale</li> <li>→ Transfert : code symbolique (numération positionnelle)</li> <li>→ Latéralisation</li> <li>→ Démarche expérimentale</li> <li>→ Raisonnement de premier ordre (comparaison (par analogie))</li> <li>→ Résolution de problèmes</li> <li>→ Lexique précis</li> <li>→ Planification</li> </ul>
---	--	--	--

<ul style="list-style-type: none"> <li>• L'oral : échanger et réfléchir avec les autres.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• S'exprimer et se faire comprendre dans un langage syntaxiquement correct et précis.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Elaborer des phrases déclaratives, complexes (<i>débat, compte-rendu, synthèse</i>).</li> <li>◆ Corriger son propos.(...)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>→ Raisonnements par analogie, déductif,</li> <li>→ Schématisation (et initiation)</li> <li>→ Syntaxe</li> <li>→ Pragmatique</li> <li>→ Flexibilité</li> <li>→ Mémoire sémantique</li> <li>→ Initiation</li> </ul>
---	---	---	--

**Tableau 1 : compétences de fin de cycle 1 (école maternelle)**

*Principes de Gelman (comptage) : correspondance terme à terme, suite stable, indifférence de l'ordre, abstraction, cardinalité.*

Les domaines « explorer le monde » et « mobiliser le langage dans toutes ses dimensions » sont renseignés ici pour illustrer la transversalité de l'enseignement des mathématiques à l'école maternelle. Leur description permet de rendre compte de l'importance des compétences inhérentes au temps, à l'espace et au langage dans la construction du concept de nombre. On peut noter que les documents d'accompagnement des mathématiques pour l'école maternelle de 2012 contenaient un paragraphe entier dédié au développement de la pensée logique de l'enfant, cela n'a pas été repris certainement du fait de la transversalité de cet apprentissage. Si les notions de catégorisation, de sériation, de conservation sont explicitement mentionnées, l'inclusion des classes n'apparaît pas ; elle est certainement sous-tendue dans la notion de « comparaison ». La représentation analogique du nombre était explicitée sous le terme de « collection intermédiaire », constituant une composante de celle-ci avec l'estimation et le subitizing, clairement nommés.



<p><b>3) Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Il résout des problèmes du champ additif (addition et soustraction) en une ou deux étapes.</li> <li>• Il modélise ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écritures mathématiques.</li> <li>• Il connaît le sens des signes - et +.</li> </ul> <p><i>Les nombres en jeu sont tous inférieurs ou égaux à 30</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Il résout, en mobilisant ses connaissances du champ additif sur des petits nombres ou en s'aidant de manipulations, des problèmes du champ multiplicatif en une étape (recherche d'un produit ou recherche de la valeur d'une part ou du nombre de parts dans une situation d'un partage équitable). Les écritures mathématiques avec les symboles : et x ne sont pas attendues.</li> </ul> <p><i>Les nombres en jeu sont tous inférieurs ou égaux à 100</i></p> <p><i>Faits numériques mémorisés utiles pour tous les types de calcul</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Il connaît les compléments à 10.</li> <li>• Il connaît la décomposition additive des nombres inférieurs ou égaux à 10.</li> <li>• Il connaît le double des nombres inférieurs à 10.</li> <li>• Il connaît ou sait retrouver rapidement les doubles des dizaines entières (jusqu'à 50).</li> <li>• Il connaît ou sait retrouver rapidement la moitié des nombres pairs inférieurs à 20.</li> <li>• Il connaît ou sait retrouver rapidement la somme de deux nombres inférieurs ou égaux à 10.</li> </ul>	<p><i>Problèmes à 1 étape :</i> « Léa joue au jeu de l'Oie. Elle est sur la case 53 et doit reculer de 7 cases. Sur quelle case va-t-elle poser son pion ? »</p> <p><i>Problèmes à 2 étapes :</i> « Dans la bibliothèque de la classe, il y a 63 livres. Le professeur en apporte 25 de plus. Les élèves en empruntent 15. Combien y-a-t-il de livres dans la bibliothèque de la classe ? »</p> <p>« À la patinoire, l'entraîneur prépare 30 patins pour les enfants de son club de hockey. Combien y-a-t-il d'enfants dans le club ? »</p> <p><i>Ici les réponses peuvent être immédiates, rapides (moins de 10 secondes), très rapides (moins de 5 secondes), à l'oral ou à l'écrit. La variable « temps » est prise en considération.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Savoir compléter des additions à trous comme : <math>4 + \dots = 10</math>.</li> <li>◆ Savoir répondre à des questions comme : quel est le double de 20 ?</li> <li>◆ Savoir répondre à des questions comme : quelle est la moitié de 18 ?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>→ <b>Signes mathématiques + et - (sens)</b></li> <li>→ <b>Calculs</b></li> <li>→ <b>Chaîne numérique</b></li> <li>→ <b>Processus de représentation (images mentales)</b></li> <li>→ <b>Typologie des problèmes de Vergnaud</b></li> <li>→ Planification</li> <li>→ Mémorisation de « schémas de problème »</li> <li>→ Mémoire sémantique</li> <li>→ Mémoire de travail</li> <li>→ <b>Lecture-compréhension</b></li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>→ <b>Faits arithmétiques et automatisation (temps)</b></li> <li>→ <b>Calculs</b></li> <li>→ Mémoire sémantique</li> <li>→ Système décimal, <b>concept de dizaine, centaine</b></li> </ul>
<p><b>4) Calculer avec des nombres entiers</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Faits numériques mémorisés utiles pour tous les types de calcul</li> <li>• Procédure de calcul mental</li> <li>• Calcul en ligne</li> <li>• Calcul posé</li> </ul>			

<p><b>Grandeurs et mesures</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparer, estimer, mesurer des longueurs, des masses, des contenances, des durées</li> <li>• Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs (extraits)</li> </ul>	<p><b>Procédure de calcul mental</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Il calcule mentalement des sommes et des différences.</li> <li>• Il commence à savoir utiliser des procédures et des propriétés : mettre le plus grand nombre en premier, changer l'ordre des termes d'une somme, décomposer additivement un des termes pour calculer plus facilement, associer différemment les termes d'une somme.</li> </ul> <p><b>Calcul en ligne</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Mêmes compétences que pour le calcul mental mais avec le support de l'écrit, ce qui permet de proposer des nombres plus grands, ou des retenues, ou plus de deux nombres.</li> </ul> <p><b>Calcul posé</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Il pose et calcule des additions en colonnes avec ou sans retenue.</li> </ul> <p><b>Longueurs</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Il compare des objets selon leur longueur.</li> <li>• Il compare des segments selon leur longueur.</li> <li>• Il sait que le m et le cm mesurent des longueurs.</li> <li>• Il mesure des segments (...) dans une autre unité (définie par les carreaux d'une feuille par exemple).</li> <li>• Il utilise le lexique spécifique associé aux longueurs : plus long, plus court, plus près, plus loin, double, moitié.</li> </ul>	<p><i>Les calculs à effectuer sont dits oralement ou écrits (au tableau ou sur une feuille) ; les résultats sont donnés oralement ou écrits sur l'ardoise ou sur le cahier.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>♦ Calculer mentalement : des sommes sans retenue : <math>31 + 6</math> ; <math>32 + 21</math> ; des sommes d'un nombre à deux chiffres et d'un nombre à un chiffre, avec franchissement de la dizaine : <math>43 + 7</math> ; <math>32 + 9</math> ; des sommes d'un nombre à deux chiffres et de dizaines entières : <math>40 + 30</math> ; <math>45 + 30</math>.</li> <li>♦ Soustraire un nombre à un chiffre à un nombre à deux chiffres, lorsqu'il n'y a pas de franchissement de la dizaine : <math>15 - 5</math> ; <math>37 - 4</math>.</li> <li>♦ Soustraire des dizaines entières à un nombre : <math>68 - 30</math> ; <math>40 - 30</math>.</li> <li>♦ Regrouper par unités et par dizaines, comme dans : <math>37 + 52 = 30 + 50 + 7 + 2</math> ou <math>37 + 52 = 52 + 30 + 7</math> ou <math>37 + 52 = 37 + 50 + 2</math>.</li> <li>♦ Utiliser d'autres décompositions additives pour effectuer un calcul en ligne comme dans : <math>15 + 17 = 15 + 15 + 2 = 32</math>.</li> <li>♦ Savoir poser une addition de deux ou trois nombres à un ou deux chiffres (unités sous les unités, dizaines sous les dizaines) et la calculer.</li> </ul> <p><i>Les situations s'appuient toutes sur des manipulations.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>♦ Comparer et ordonner cinq baguettes ou cinq bandelettes selon leur longueur.</li> <li>♦ Comparer les longueurs de deux segments en utilisant un étalon ou une règle graduée.</li> <li>♦ Savoir estimer une longueur par rapport à quelques longueurs repères. Exemple : il sait dire si sa trousse mesure plutôt 2 cm, 20 cm ou 1 m.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>→ Mémoire de travail</li> <li>→ Planification</li> <li>→ <b>Sens des opérations</b></li> <li>→ <b>Calculs : additions, soustractions</b></li> <li>→ Système décimal</li> <li>→ Allègement de la mémoire de travail</li> <li>→ Catégorisation</li> <li>→ <b>Algorithmes opératoires</b></li> <li>→ Repérage visuo-spatial</li> <li>→ <u>Liens avec le concept de nombre</u></li> <li>→ Catégorisation</li> <li>→ Raisonnement de premier ordre</li> <li>→ Système décimal</li> <li>→ <b>Estimation des quantités (social)</b></li> <li>→ Lexique</li> </ul>
---	--	---	---

<p><b>Espace et géométrie</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• (Se) repérer et (se) déplacer en utilisant des repères et des représentations (extraits) (...)</li> <li>• Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, construire quelques figures géométriques</li> <li>• Reconnaître et utiliser les notions d'alignement, d'angle droit, d'égalité de longueurs, de milieu, de symétrie</li> </ul>	<p><i>Masses, dates et durées</i></p> <p><b>Résolution de problèmes</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Il résout des problèmes en une ou deux étapes impliquant des longueurs, des durées ou des prix.</li> <li>• Il utilise le lexique spécifique associé aux prix (...).</li> </ul> <p>• Il situe les uns par rapport aux autres des objets ou des personnes qui se trouvent dans la classe ou dans l'école en utilisant un vocabulaire spatial précis : à gauche, à droite, sur, sous, entre, devant, derrière, au-dessus, en-dessous.</p> <p>• Il utilise ou il produit une suite d'instructions qui codent un déplacement sur un tapis quadrillé, dans la classe ou dans l'école en utilisant un vocabulaire spatial précis : avancer, reculer, tourner à droite, tourner à gauche, monter, descendre. (...)</p> <p>• Il repère visuellement des alignements. (...)</p>	<p><i>Problèmes impliquant des manipulations de monnaie (notamment dans des situations de jeu)</i></p> <p><i>Problèmes non numériques</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>♦ Classer selon leur longueur trois objets longs situés à différents endroits de la classe.</li> <li>♦ Classer quatre objets selon leur masse en utilisant une balance type Roberval (par comparaison deux à deux).</li> </ul> <p><i>Problèmes du champ additif</i></p> <p><i>Problèmes du champ multiplicatif (recherche d'un produit ou recherche de la valeur d'une part ou du nombre de parts dans une situation d'un partage équitable) sur des nombres inférieurs à 30, que l'élève peut résoudre en mobilisant ses connaissances du champ additif ou en s'aidant de manipulations. Les écritures mathématiques avec les symboles : et <math>\times</math> ne sont pas attendues.</i></p> <p><b>Liens avec l'EPS</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>→ <b>Repérage dans la feuille quadrillée (pose des opérations)</b></li> <li>→ <b>Système sexagésimal</b></li> <li>→ Planification</li> <li>→ Lexique</li> <li>→ <b>Typologie de Vergnaud (problèmes)</b></li> <li>→ Catégorisation</li> <li>→ <b>Sens des opérations</b></li> <li>→ <b>Signe mathématique : +</b></li> <li>→ Lexique précis</li> <li>→ Perception visuo-spatiale</li> <li>→ Latéralisation</li> <li>→ <b>Codage : passer d'un espace 3D à un plan 2D (en lien avec la technique des opérations posées)</b></li> <li>→ Aligner (pour organisation des nombres : calcul</li> </ul>
---	--	---	---

			mental écrit, opérations)
--	--	--	------------------------------

**Tableau 2 : compétences mathématiques de fin de CP**

Le texte écrit en gras dans la colonne « analyse théorique » fait référence aux nouveaux apprentissages de CP en regard de la GS.

Aux attendus de CP sont associés des exemples de réussite particulièrement intéressants. Nous pouvons noter que les compétences sur les grandeurs et les mesures sont également conséquentes en termes de contenus et font référence à de nombreuses notions mathématiques. Ces apprentissages s'appuient en outre souvent sur des situations-problèmes visualisables ce qui facilite la compréhension de l'utilisation des nombres. D'après l'ensemble des données, on remarque que de nombreuses notions fondamentales inédites doivent être assimilées en numération alors même que la lecture se construit. La charge cognitive pour l'enfant durant l'année de CP est extrêmement conséquente, c'est un paramètre à prendre en compte. Par ailleurs, on peut observer que le volume horaire hebdomadaire affecté à l'apprentissage des mathématiques en CP est de 5 heures contre 10 heures pour celui du français.

## 2.5.2 Les bulletins officiels (2019) et la conférence de consensus du CNEC

- **La GS de maternelle**

Le bulletin officiel de l'éducation nationale du 29 mai 2019 (Bulletin officiel n°22 du 29 mai 2019, 2019) fournit des recommandations pédagogiques pour l'école maternelle dans un paragraphe : « ***un apprentissage fondamental à l'école maternelle : découvrir les nombres et leurs utilisations*** ». L'école maternelle est renforcée et le développement affectif et intellectuel de l'enfant est davantage pris en considération : « *En mathématiques, les résultats de la recherche montrent que les années de l'école maternelle sont déterminantes pour découvrir et intégrer les concepts essentiels de nombre, d'espace et de calcul. Le rapport Villani-Torossian l'a rappelé. Approfondir les stratégies d'enseignement de ces premiers apprentissages mathématiques est donc une priorité pour tous, en équipe et dans le cadre de la formation continue, avec l'appui des référents mathématiques. Dans les pratiques de classe, la place accordée au jeu et à la manipulation est prépondérante.* ».

En fin de grande section, les élèves doivent avoir appris à réaliser, à comparer ou à quantifier des collections, à lire l'écriture chiffrée des nombres au moins jusqu'à dix, à ordonner les nombres et à dire combien il faut ajouter ou soustraire pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix. La construction de ces compétences est liée à la découverte du concept de nombre et à l'appropriation des compositions et décompositions des quantités jusqu'à dix, sans exclure un travail de comparaison sur des collections plus grandes.

« ***En fin d'école maternelle, les élèves doivent aussi savoir utiliser le nombre pour exprimer et comparer un rang, pouvoir dire la suite orale des nombres jusqu'à trente et positionner des nombres sur une ligne numérique*** ». Le développement de ces capacités doit être assuré à l'école maternelle, tout au long du cycle, à travers le jeu et la résolution de problèmes concrets.

- **Le CP (début du cycle 2)**

En cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2 : CP, CE1, CE2), l'enseignement est organisé selon un socle commun pour lequel des « **contributions essentielles** » sont associées aux enseignements spécifiques des différentes matières (J'enseigne au cycle 2, eduscol 2020). Ces dernières sont découpées en 5 domaines et sont les suivantes :

- Domaine 1 : *les langages pour penser et communiquer* (le maître-mot ici est comprendre) « Les mathématiques participent à l'acquisition des langages scientifiques : compréhension du système de numération, pratique du calcul, connaissance des grandeurs. Les représentations symboliques transcrivent l'observation, l'exploration et le questionnement des objets et de la réalité du monde. Dans l'enseignement « Questionner le monde », les activités de manipulation, de mesures, de calcul, à partir d'expériences simples utilisent pleinement les langages scientifiques. La familiarisation avec un lexique approprié et précis, permet la lecture, l'exploitation et la communication de résultats à partir de représentations variées d'objets, de phénomènes et d'expériences simples (tableaux, graphiques simples, cartes, schémas, frises chronologiques...) ».
- Domaine 2 : *les méthodes et outils pour apprendre* « En mathématiques, mémoriser, utiliser des outils de référence, essayer, proposer une réponse, argumenter, vérifier sont des composantes de la résolution de problèmes simples de la vie quotidienne ».
- Domaine 3 : *La formation de la personne et du citoyen* « ... Débattre, argumenter rationnellement, émettre des conjectures et des réfutations simples, s'interroger sur les objets de la connaissance commencer à résoudre des problèmes notamment en mathématiques en formulant et en justifiant ses choix développent le jugement et la confiance en soi ».
- Domaine 4 : *Les systèmes naturels et les systèmes techniques* « La pratique du calcul, l'acquisition du sens des opérations et la résolution de problèmes élémentaires en mathématiques permettent l'observation, suscitent des questionnements et la recherche de réponses, donnent du sens aux notions abordées et participent à la compréhension de quelques éléments du monde »
- Domaine 5 : *Les représentations du monde et l'activité humaine* (fait référence au repérage dans le temps et l'espace).

Les mathématiques sont évoquées dans chacun des domaines définis attribuant à cette discipline une transversalité dans les apprentissages. Ce principe est précisé de façon explicite à la fin des paragraphes décrivant le contenu de l'enseignement des mathématiques : « croisements entre enseignements ». Les programmes scolaires de 2015 énoncent les compétences travaillées de manière significative : *chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer*. La résolution de problèmes est la situation d'apprentissage de choix, elle se veut ludique, fondée sur la démarche scientifique. Le texte insiste sur le fait de la relier au langage et au vocabulaire, eux-mêmes devant être en relation avec l'utilisation des symboles mathématiques. Le transcodage, la décomposition des nombres, le calcul mental, les quatre opérations doivent être enseignés.

La ligne numérique mentale apparaît dans le programme de l'école maternelle en 2019, la transversalité des domaines enseignés en CP inclut les mathématiques et le raisonnement ainsi que le lien avec des situations concrètes et vécues. L'aspect plus « social » des mathématiques est mis en exergue.

- **La conférence de consensus du CNESCO (novembre 2015)**

Le conseil national d'évaluation du système scolaire (CNESCO) mis en place de manière effective en 2014, est aujourd'hui reconnu pour sa double expertise, celle d'une institution capable de mener une évaluation scientifique et indépendante du système scolaire, mais aussi celle d'une institution ouverte sur l'école. Les conférences organisées à destination des politiques et des acteurs du terrain sont désormais exportées à l'étranger où elles proposent une analyse étayée des décisions et dispositifs scolaires mis en œuvre à l'international. Grâce à ce conseil national, il est possible d'envisager l'existence d'une réelle passerelle entre les théories scientifiques et la pratique des professionnels enseignants auprès des élèves.

En ce qui concerne les mathématiques, les résultats de l'enquête internationale TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) effectuée en 2015 avec des élèves de CM1 (et de 4ème) placent la France à l'avant-dernier rang des pays de l'OCDE. Les évaluations nationales montrent que 42 % des élèves ont une maîtrise fragile des mathématiques, et de grandes difficultés à l'issue de l'école primaire. Par ailleurs, en CE2, la place accordée au domaine « Nombres et calcul » peut varier de 37 % du contenu total à 67 % selon le manuel scolaire choisi (Conférence de consensus : Cnesco, 2015). Une conférence de consensus a été organisée en novembre 2015 par le CNESCO (*« nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire »*), les observations présentées dans un « rapport d'activité de 2018 » ont été publiées en même temps que les nouveaux programmes scolaires de 2015 en ce qui concerne l'école primaire ; pour la maternelle, les programmes scolaires avaient été diffusés en mars 2015 c'est-à-dire avant la notification de la synthèse des experts. Des préconisations précises ont été établies, elles sont énoncées comme suit :

- **Faire évoluer les pratiques quotidiennes des enseignants**

- Développer la manipulation d'objets tout au long du primaire, et pas seulement en maternelle
- S'appuyer sur l'oral avant de passer à des écritures symboliques
- Ne pas attendre la maîtrise parfaite d'une notion pour en aborder une nouvelle avec les élèves
- Insister davantage sur l'apprentissage des tables d'addition et de multiplication
- Privilégier le calcul mental par rapport au calcul posé (à l'écrit)
- Faire dire à l'élève comment il a fait pour arriver à son résultat
- Associer l'apprentissage des techniques opératoires à la compréhension des nombres

- **Partager avec les parents des occasions d'apprentissage**

- Encourager les parents à proposer à leurs enfants des situations ludiques contribuant à l'apprentissage des nombres (jeux de société, mettre le couvert, faire un gâteau, utiliser la monnaie, regarder le calendrier, lire l'heure)

- Indiquer aux familles des ressources en ligne qui peuvent être utilisées dans le cadre familial en continuité avec le travail conduit à l'école
- **Offrir des ressources pédagogiques de qualité, facilement accessibles et adaptatives** (alternatif à l'utilisation des manuels et des fichiers, des textes précisant « ce qu'il faut retenir » et des outils pour l'évaluation)
- **Adapter la formation initiale des enseignants et les accompagner**
  - Adapter la formation initiale des enseignants du premier degré à leur profil et aux enjeux du métier
  - Encourager le travail en commun d'acteurs de profil différents (chercheurs, formateurs et enseignants)
  - Les enseignants doivent avoir les éléments de compréhension des fondements et de la logique des programmes et des documents d'accompagnement
  - Permettre d'identifier les différents cheminements que peuvent avoir les élèves
- **Intégrer les résultats de la recherche dans les programmes et évaluer leur mise en œuvre**
  - Les programmes relatifs aux nombres et au calcul doivent contenir des éléments explicitant les intentions et justifiant les choix qui les fondent
  - Une évaluation systématique des programmes doit être mise en place

Le CNESCO précise aussi la nécessité de mettre en place un grand plan de formation en « calcul mental » et « stratégies de résolution de problèmes » et d'en évaluer les effets ; de nommer, dans chaque circonscription, des conseillers pédagogiques en mathématiques ; d'implanter, dans chaque école ou réseau d'écoles, un « enseignant ressource » en mathématiques.

On peut noter que la transversalité des différents domaines d'apprentissage au service des mathématiques apparaît dans les programmes scolaires de l'école maternelle ; réciproquement, celle de la cognition mathématique et du raisonnement au travers des autres disciplines est davantage décrite à partir de l'école primaire. Les mathématiques se révèlent des outils répondant à des besoins concrets ; leur importance en est d'autant plus établie. L'organisation de la progression des élèves en mathématiques à travers les classes de GS et de CP s'appuie sur le modèle du triple code (S. Dehaene). *A partir du CP, de nouvelles notions spécifiques nombreuses et complexes apparaissent en numération : les systèmes décimal (et la dizaine) et sexagésimal, l'estimation pragmatique des quantités, le sens des opérations, la syntaxe des nombres, le calcul (jusqu'à 100), les signes mathématiques et les algorithmes opératoires (addition), la résolution de problèmes (avec différentes typologies), les faits arithmétiques, la ligne numérique mentale (depuis 2019 elle doit être abordée en école maternelle) ainsi que l'utilisation de processus de symbolisation (aide au raisonnement mathématique).*

Les recommandations récentes mettent l'accent sur la formation des enseignants, le lien théorie-pratique pour une plus grande clarté des programmes scolaires.

Par ailleurs les points forts de l'école maternelle à savoir le jeu, la manipulation et le langage oral sont mis en relief ; ce dernier étant considéré comme un pré-requis à l'acquisition des écritures symboliques mais également à la conscientisation des procédures mathématiques. La connaissance des faits arithmétiques doit être renforcée (importance de la mémorisation pour une facilitation des procédures) ; l'entraînement privilégié du calcul mental oral permet d'exercer la mémoire de travail, de s'affranchir de difficultés visuo-spatiales ou graphomotrices éventuelles ; ceci pour façonner la notion de sens des opérations. L'apprentissage des techniques opératoires doit être corrélée à la compréhension des nombres, dans un but toujours constant de faire du lien pour construire la pensée numérique.

*La pratique orthophonique concernant les techniques de rééducation de la cognition mathématique est en congruence avec certaines des préconisations ciblées pour l'enseignement ; cela vaut aussi pour celle de conseiller les parents dans ce domaine pendant les moments de la vie quotidienne avec leur enfant. Par ailleurs, la spécificité de caractérisation des troubles d'apprentissage incombant à l'orthophoniste, il est légitime d'envisager que ce professionnel peut jouer un rôle dans la formation des enseignants en établissant un partenariat précieux. Pour le projet de réalisation d'un outil de repérage des troubles mathématiques à la fin des apprentissages premiers (cycle 1), il faudra examiner plus avant les bases scientifiques du développement de la cognition numérique chez l'enfant entre 3 et 6 ans et s'intéresser aux projets de recherche en cours en France dans cette politique didacticienne « mathématicienne » en gardant à l'esprit le caractère obligatoire récent (2019) de l'école maternelle.*

## PARTIE II : REVUES DE LA LITTÉRATURE

Les revues de la littérature présentées concerneront les apports de la cognition numérique à la question de la construction du nombre à l'école maternelle et au début de l'école élémentaire mais aussi de la place des fonctions cognitives sous-jacentes. Nous décrirons d'abord les modèles de traitement du nombre les plus utilisés et les plus récents en cognition numérique ainsi que les étapes de l'acquisition du nombre dans la tranche d'âge étudiée (3/6 ans). Nous aborderons ensuite la question du raisonnement logique (mathématique), des fonctions exécutives et de la participation de la mémoire et de l'attention dans les compétences numériques.

### 1. COGNITION NUMERIQUE

#### 1.1 Les modèles de la construction de la pensée mathématique

##### 1.1.1 Le modèle du triple code de Dehaene

Le modèle du triple code (Dehaene & Cohen, 1995) postule l'existence de trois systèmes de représentation mentale des nombres :

- le code auditivo-verbal
- le code visuel arabe
- le code analogique

Nous le détaillons ici car c'est le modèle qui fait consensus à l'heure actuelle.

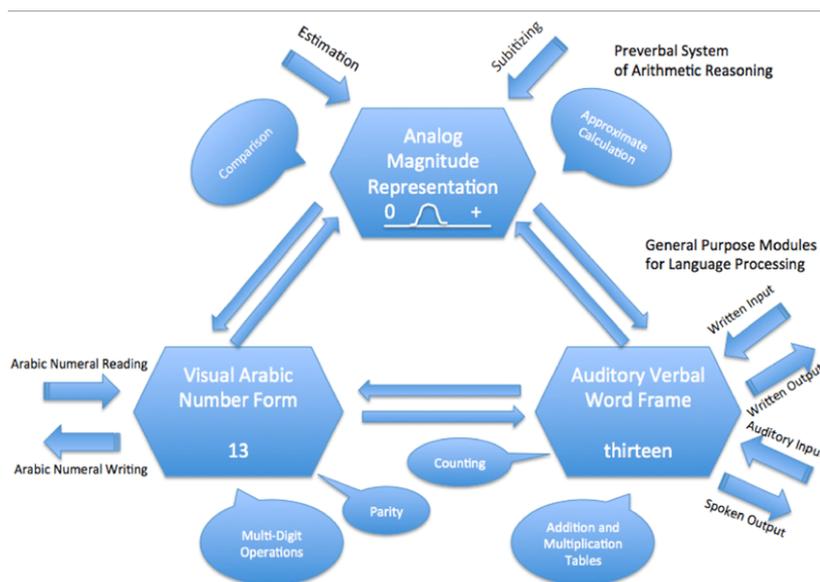


Figure 3 : Modèle du triple code (Dehaene & Cohen, 1995)

**Le code auditivo-verbal (« trois »)** correspond à la représentation verbale des nombres. Il renvoie également à la forme écrite des nombres en lettres. D'après le modèle, ce module permet les activités de comptage, le calcul mental simple, la dénomination des quantités, la lecture et l'écriture des formes écrites en lettres, la mémorisation symbolique verbale et le stockage en mémoire des faits arithmétiques (tables d'additions et de multiplications).

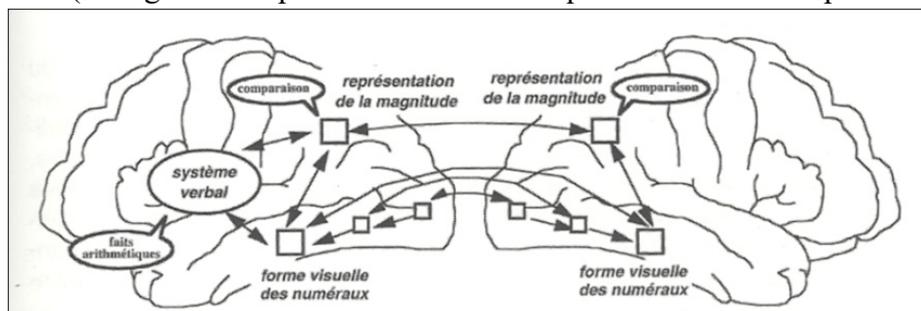
**Le code visuel arabe (« 3 »)** correspond à la forme écrite en chiffres des nombres, il renvoie à un système logographique visuo-spatial. Il permet de résoudre des opérations complexes à plusieurs chiffres et d'effectuer des activités de jugement de parité.

**Le code analogique** est sous-tendu par un système préverbal de raisonnement arithmétique. Il permet de réaliser des activités de comparaison et des calculs approximatifs. Il se construit par le subitizing (reconnaissance exacte de petites quantités grâce à l'Object Tracking System, OTS) et l'estimation (avec l'Approximate Number System, ANS). Dans le modèle de Dehaene et Cohen, la place accordée à la représentation analogique est centrale puisque c'est elle qui donne sens aux nombres.

Contrairement aux représentations verbales et arabes spécifiques aux adultes (appries), la représentation abstraite des quantités serait présente à la naissance et représentée sous la forme d'une ligne numérique mentale orientée de gauche à droite (dans les cultures écrivant de cette manière). C'est elle qui permettrait notamment l'estimation ou la comparaison de quantités.

*Dehaene ajoute aux modèles plus anciens un nouvel ensemble modulaire qui tient compte des activités numériques de quantification reposant sur la comparaison des nombres, l'appréhension immédiate (subitizing) et les approximations.*

Chaque tâche peut impliquer un ou plusieurs codes ; diverses procédures de transcoding permettent le passage d'un code à l'autre (sans nécessairement passer par la représentation sémantique). De plus, chaque type de représentation peut être associé à des structures cérébrales correspondantes (il s'agit de l'implémentation anatomique du modèle du triple code).



**Figure 4 :** Implémentation anatomique du modèle du triple code (Dehaene & Cohen, 1995)

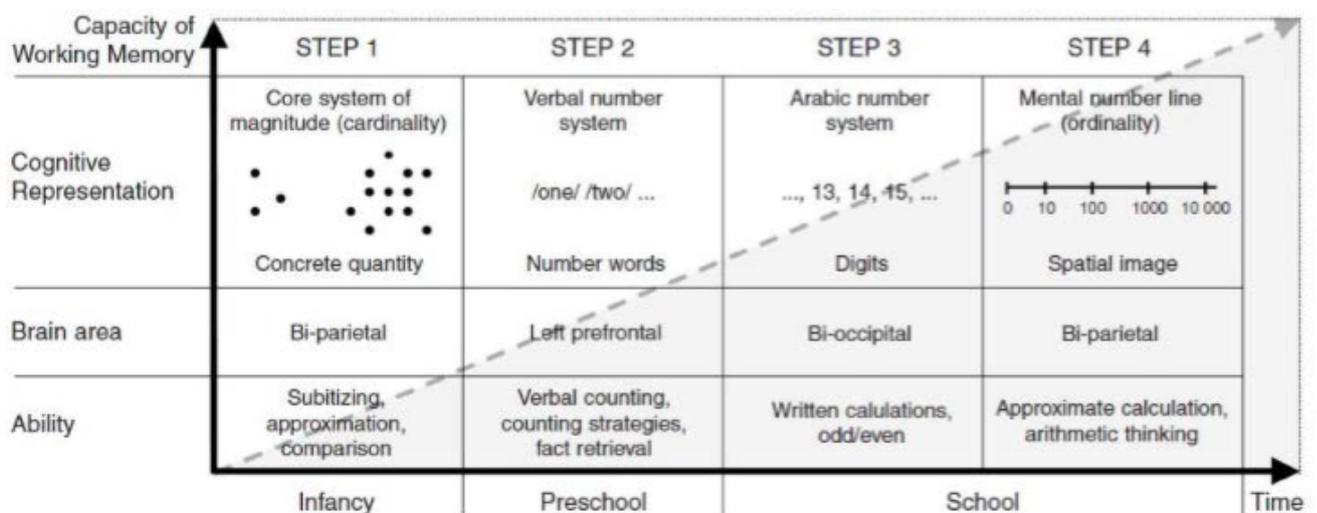
Selon Dehaene et Cohen (Dehaene & Cohen, 1995), le traitement des représentations visuelles et analogiques s'effectue dans les deux hémisphères, respectivement au niveau des régions occipito-temporales et de la jonction pariéto-occipito-temporale. Les représentations verbales sont, quant à elles, traitées uniquement dans l'hémisphère gauche, dans les aires dédiées au langage. Ce modèle possède néanmoins des limites car il ne tient pas compte de l'évolution de l'acquisition des nombres et du calcul d'un point de vue développemental. C'est pour pallier ce manque que Von Aster et Shalev (Von Aster & Shalev, 2007) ont proposé un modèle développemental de l'acquisition des nombres.

### 1.1.2. Le modèle développemental de Von Aster et Shalev

Le modèle développemental de Von Aster et Shalev s'organise hiérarchiquement en quatre étapes (voir Figure 5). La première étape se fonde sur l'existence d'un système inné de représentation analogique des quantités permettant l'estimation de grandes quantités et le subitizing. Elle constitue un pré-requis qui va permettre à l'enfant d'associer des mots-nombres et des symboles écrits.

Succède à cette étape l'acquisition de la chaîne numérique verbale (deuxième étape) et du système symbolique d'écriture en chiffres arabes (troisième étape) qui vont se greffer sur les représentations analogiques existantes ; ces étapes constituent un pré-requis pour l'élaboration de la ligne numérique mentale .

Ce n'est qu'à l'issue de ces trois étapes que celle-ci se développe (représentation spatiale et ordinale des nombres), élaborée et organisée par la propriété d'ordinalité .



**Figure 5 :** Modèle développemental de la cognition numérique (Von Aster & Shalev, 2007)

Le terme « school » fait référence à l'entrée en GS de maternelle en France, la « preschool » s'arrête à 5 ans (fin de moyenne section).

Ce modèle hiérarchique a l'intérêt de proposer plusieurs causes possibles aux troubles de la cognition mathématique.

Par exemple, si la première étape est défectueuse, l'enfant aura beau mémoriser tous les mots-nombres par cœur, il ne saura pas à quelle réalité concrète ils renvoient, car il n'acquiert pas la signification des grandeurs cardinales.

Si la difficulté se localise dans la deuxième étape, les grandeurs analogiques peuvent être appréhendées mais le développement du langage peut être atteint. De ce fait, les associations entre grandeurs et représentations symboliques verbales seront perturbées, aboutissant à terme à un retard des stratégies de comptage, de calcul et de récupération des faits arithmétiques, souvent en association avec des perturbations du langage écrit.

### **1.1.3 Proposition d'un modèle intégré du traitement du calcul**

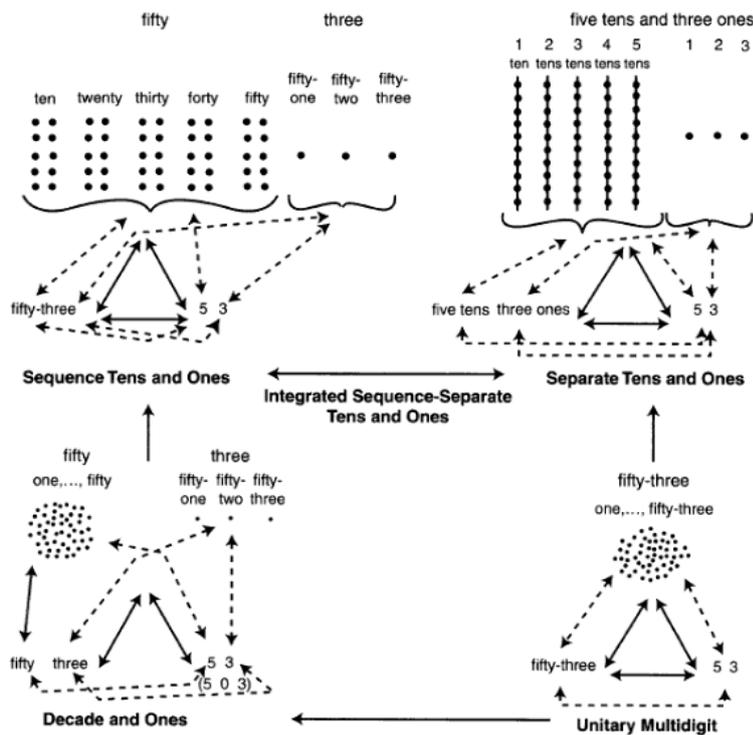
Ce modèle est celui de Lussier et Flessas (Lussier & Flessas, 2009), il intègre à la fois les modèles de Sokol et Mc Closkey (1988) et celui de Dehaene tout en y incorporant plusieurs composantes telles que la fonction sensori-motrice, le raisonnement, la mémoire (visuo-spatiale, kinesthésique, verbale), l'attention et les fonctions exécutives. Il se fonde sur des modèles qui ont permis d'expliquer la dysphasie et la dyspraxie. Le choix de la démarche cognitive dans la résolution de problèmes reposerait tout d'abord sur les fonctions stratégiques (raisonnement, mémoire, attention et fonctions exécutives). Puis les fonctions associatives seraient impliquées dans le traitement numérique, les fonctions instrumentales permettant l'exactitude des mécanismes de calcul.

L'expérience clinique a montré l'importance de la mémoire de travail visuo-spatiale dans les capacités de traitement du nombre et dans celles de l'apprentissage des procédures ou algorithmes opératoires. Cette aptitude permet aussi la compréhension des nombres fractionnaires et des nombres relatifs.

Outre le fait de l'appréhension immédiate (subitizing) de petites quantités, il y a tout le domaine de l'approximation ou de l'estimation qui s'effectuent grâce aux fonctions visuo-spatiales. S'il est vrai que la maîtrise des faits arithmétiques s'effectue par l'apprentissage par cœur d'une séquence verbale qui s'automatise et n'a besoin d'aucune représentation spatiale, c'est pourtant grâce à cette représentation qu'on peut en comprendre l'origine. En effet, c'est par la stratégie de la représentation de la surface d'un rectangle que certains enfants entrent dans l'apprentissage des tables de multiplication ; celui des tables d'addition se réalise par ailleurs par l'entremise de tableaux à double entrée.

### 1.1.4 Modèle de développement des nombres à 2 chiffres

Des résultats ont montré qu'une représentation dizaine/unités intervient dans la comparaison des nombres (Nuerk et al., 2001). Une modélisation du développement de ces représentations a été proposée par Fuson et son équipe (Fuson et al., 1997). Ce modèle propose cinq conceptions différentes des nombres à deux chiffres (voir Figure 6).



**Figure 6 :** Modèle conceptuel développemental des nombres à deux chiffres (Fuson et al., 1997)

La conception primaire consiste à associer au nombre la quantité correspondante comme pour les nombres inférieurs à dix. Avec l'apprentissage des mots-nombres et de leurs lois de composition, l'enfant parvient peu à peu à identifier deux parties dans le nombre (partie décimale et unités).

Une seconde conception apparaît : la composition « dizaines et unités ». C'est cette dernière qui serait à l'origine d'erreurs de transcoding du type « 503 » pour « cinquante-trois » (les nombres 50 et 3 sont associés comme le sont les mots correspondants).

Les dizaines sont ensuite perçues comme des groupes de dix (conception « dizaines et unités séparées »). Cette conception n'est pas facilitée par notre système de numération orale car la base dix n'y est pas toujours explicite.

A un niveau d'abstraction plus élevé, la dizaine ne sera plus vue comme un groupe de dix mais comme une unité d'ordre supérieur. Les représentations diverses de la dizaine peuvent être investies par les jeunes enfants en leur proposant des présentations variées.

Des résultats (Yuan et al., 2019) révèlent que des enfants de maternelle sont capables de caractériser en les reliant entre eux les mots-nombres énoncés (forme verbale) à leur forme écrite et de comparer les magnitudes de nombres écrits à plusieurs chiffres.

Pour construire des épreuves de repérage à destination des élèves de 5/6 ans, il faudra prendre en compte plusieurs éléments grâce à l'analyse des modèles présentés :

- ✓ la mémoire de travail visuo-spatiale et la manipulation, l'attention, le raisonnement
- ✓ le choix préférentiel d'exercices de comparaisons, de subitizing, d'estimation des quantités
- ✓ l'apprentissage des mots-nombres (oral, écrit) et de la chaîne numérique verbale
- ✓ l'entraînement de la cardinalité sur des quantités concrètes
- ✓ les stratégies de comptage
- ✓ la mise en correspondance de différentes représentations du nombre
- ✓ la perception de la dizaine
- ✓ les premiers petits calculs (« transformations concrètes » et non arithmétiques)

Ces points seront affinés grâce aux analyses suivantes.

## **1.2 Le concept de nombre, son utilisation**

### **1.2.1 L'apparition des nombres**

Il y a 30 000 ans, au Paléolithique, les premières traces de dénombrement voient le jour. La découverte d'os entaillés permet de conclure que l'Homme a d'abord utilisé le principe de correspondance terme à terme pour représenter un ensemble d'éléments (représentation analogique).

Plus tard, cette technique permettait au berger de faire le compte de ses moutons en mettant un caillou dans un panier à chaque fois qu'un mouton sortait de sa bergerie. D'autres civilisations (dont les Mayas) utilisaient les doigts de la main ou d'autres parties du corps pour dénombrer.

Par la suite, en Mésopotamie, des cailloux différents ont été utilisés pour matérialiser différentes valeurs, et recourir à un « comptage par paquets » (les « bases ») et donc à un système numérique spécifique (base 10 pour nous).

Diverses numérations utilisant des bases différentes sont apparues dans plusieurs civilisations, c'est vers le 6<sup>ème</sup> siècle en Inde que fut inventée la numération que nous utilisons aujourd'hui (code indo-arabe logographique, symbolique). Les Indiens ont combiné le principe de position (valeur du symbole déterminé par sa position) et l'invention du zéro (utilisé pour marquer les quantités nulles) ; le résultat fut repris par les Arabes qui feront évoluer les signes graphiques jusqu'aux « chiffres arabes » que nous connaissons.

Les éléments à quantifier le sont d'abord avec des gestes, en correspondance terme à terme, puis les mots s'y associent pour finalement les remplacer par un symbole. L'analyse de ce parcours historique permet de pointer le besoin d'un ancrage initial dans des situations concrètes corrélées au contexte social et aux besoins des époques.

## 1.2.2 Les codes

### 1.2.2.1 « Codes analogiques »

Les codes sont des systèmes de signes ou de symboles par lesquels on traduit des informations. En numération, un élément du code ne doit correspondre qu'à une seule quantité afin d'éviter les confusions que ce soit en manipulation ou en mise en mémoire. Les codes présentent une organisation logique sous-jacente invariante respectant les contraintes de relations de classes et d'ordres. Leur efficacité dépend de la coordination entre les représentations externes (perceptibles par nos sens et manipulables) et les représentations et procédures internes (accessibles en mémoire à long terme ou de travail).

Les codes analogiques comportent des représentations en une seule dimension, ils nécessitent déjà une capacité d'abstraction puisque ce qui est représenté est mis en correspondance avec des entités réelles. Les aptitudes de description et de figuration peuvent se révéler importantes pour atteindre cet objectif.

Des travaux se sont intéressés à l'**usage des doigts** dans les pratiques numériques. Le recours à ce code correspondrait à l'intériorisation d'activités apprises par observation et imitation (Crollen et al., 2011). Des auteurs ont montré que le lien entre représentations digitales et numériques est fonctionnel. Une interdépendance attribuable à la proximité spatiale de leurs régions cérébrales n'a pas été confirmée (Spellacy & Peter, 1978).

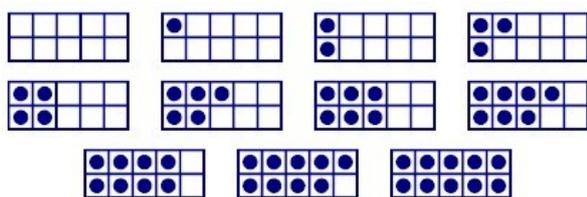
D'autres résultats avec des élèves de maternelle rapportent l'importance du recours à cette procédure dans des épreuves arithmétiques. Les chercheurs ont ainsi montré que les

compétences en gnosies digitales à 5 ans constituaient un bon prédicteur des performances arithmétiques entre 5 et 6 ans indépendamment du niveau de développement (QI).

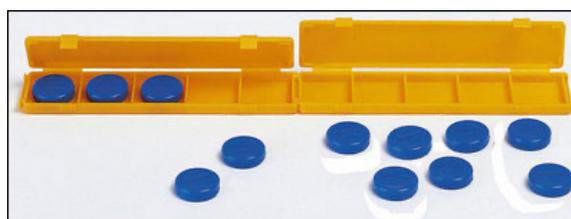
Les doigts peuvent être mobilisés au travers de plusieurs tâches numériques. En plus d'être impliqués dans la représentation analogique de la cardinalité, ils permettent également le dénombrement, le soulagement de la mémoire de travail et bien sûr, le pointage (Noël, 2005). L'effet du pointage est d'ailleurs reconnu dans le développement du langage et par conséquent de la verbalisation des numéraux (Morgenstern, 2008).

Pour Di Luca et ses collaborateurs, les observations faites au cours des différentes études justifieraient une inclusion « des doigts » dans le modèle de Dehaene. Cependant, ils précisent que les configurations digitales ne constituent pas seulement un « code symbolique » parmi d'autres mais aideraient aussi à construire la représentation du nombre (Di Luca & Pesenti, 2011).

Dans son ouvrage de référence : « Comment les enfants apprennent à calculer », R. Brissiaud insiste sur l'idée que faire élaborer ces représentations digitales par les enfants avec leurs mains en même temps qu'ils dénombrent et les entrainer au moyen de comptines numériques spécifiques (voir annexes) permet d'éviter le processus de comptage-numérotage. En effet l'enfant comprend alors que la représentation digitale correspond à un cardinal avec le dernier mot-nombre prononcé. Il est important de noter également que les doigts des deux mains servent de référence aux représentations utilisées pour le matériel pédagogique retrouvé dans certains manuels scolaires de CP : les cartapoints, les boîtes de « picbille » par exemple ; ou dans certaines classes de maternelle (numicons, matériel anglo-saxon inspiré des plaquettes de Suzanne Herbinière-Lebert).



cartapoints



boîtes de « picbille »



numicons

Des représentations variées des chiffres s’y trouvent d’ailleurs très souvent associées dans les affichages des classes de maternelle. En effet, l’emploi des doigts pourrait même avoir conduit aux débuts de l’utilisation des bases 5 et 10.

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
				
				
				

Leur importance est également mise en évidence dans une étude rapportant que les configurations canoniques c’est à dire avec des doigts levés selon les habitudes culturelles de la population testée, sont mieux reconnues que celles avec des doigts levés de manière incongrue (non canoniques) (Di Luca et al., 2010).

Au cours du développement de la cognition numérique, la représentation des quantités doit passer d’une représentation par sommation d’entités à une représentation par place (de gauche à droite). Les doigts constitueraient l’outil idéal pour permettre cette transition. Nous retrouvons justement le premier processus de sommation dans les activités de dénombrement un à un par pointage digital pour progressivement donner du sens aux quantités.

Grâce à ces activités, les quantités pourront peu à peu être traitées par un processus de codage par place où les nombres seront en soi porteurs du sens du nombre.

Dans certaines cultures, des abaques sont utilisés, les experts dans leur utilisation disent se référer à une image mentale de l’instrument, des difficultés de transfert à d’autres abaques par manque de flexibilité sont notées. L’expertise est corrélée à un empan visuo-spatial plus étendu pour les chiffres que pour les lettres, mais reste limitée aux calculs simples. L’automatisation de la pratique manipulative s’intériorise au travers de diverses configurations opérées sur ces images mentales. On peut faire un parallèle avec la manipulation fréquente de diverses représentations analogiques du nombre (constellations, jetons, doigts, baguettes...) ; cet usage peut préparer au « calcul pensé » par l’intermédiaire de collections-témoins organisées. Ces codes analogiques seraient finalement transformés en codage symbolique par la répétition de leurs usages. Cette étape d’apprentissage s’appuie également sur la décomposition et la recomposition des nombres.

Le programme de recherche ACE arithmEcole expérimenté en CP propose un matériel qui s’appuie sur des collections témoins. Ainsi, en début d’année scolaire, des modules de compétences permettent la manipulation d’un matériel simple (cubes pour représenter un train)

conduisant à une représentation dessinée codée (carrés) associée au matériau « doigt » pour la validation de l'équipotence de la collection. L'enfant comprend l'intérêt de la représentation analogique en participant à sa construction. En parallèle, un jeu d'annonces se fonde sur les productions des élèves, ceux-ci vont s'appuyer sur la connaissance culturelle des configurations de points (dé) et de doigts visualisables directement sans avoir recours au dénombrement. L'objectif ici n'est pas de « compter » mais de « proposer un nombre » ; le jeu permet de construire et de mémoriser les compléments à 6. Ce type d'activités peut être proposé à de plus jeunes enfants avec une adaptation (Morellato, 2017).

### ***1.2.2.2 « Codes symboliques »***

Ces codes sont arbitraires. Excepté la forme préverbale de représentation des quantités chez les bébés et de nombreux animaux, la première forme de représentation symbolique acquise par les enfants est la forme verbale variable d'une culture à l'autre. Elle est acquise avant les formes en chiffres arabes.

- ***Le code verbal***

L'utilisation du langage nécessite que les noms des nombres évoquent les numérosités de manière précise et automatique, or cela ne va pas de soi. Il faut apprendre l'organisation linguistique du système de dénomination verbale des quantités, avec un lexique précis et une syntaxe traduisant des relations additives (vingt-quatre) puis multiplicatives (deux cents). En français, le lexique comprend les unités de un à neuf, les dizaines de dix à quatre-vingt-dix et les particuliers de onze à seize ainsi que cent, mille, million, milliard.

En France, la base dix n'apparaît pas immédiatement après la première dizaine, il faut apprendre par cœur la suite des dénominations. De nouvelles difficultés surviennent à partir de soixante avec les formes : soixante-dix et quatre-vingts.

Les enfants découvrent les nombres naturels en quatre étapes (Spelke, 2017), d'abord ils construisent un système avec diverses sortes d'objets en maîtrisant des phrases-noms qui sont composées de noms et de déterminants singuliers en nommant les types d'objets appartenant à une catégorie : « un, le, ta, ton ».

Ensuite, ils utilisent des expressions qui contiennent des termes s'opposant au sein des catégories : ceci fait émerger la notion d'identités qui se combinent. Ces expressions supportent l'apprentissage de la signification des mots-nombres : « Lucie a trois animaux : un chien, un chat et un hamster ».

Dans un troisième temps, les enfants maîtrisent les trois premiers mots-nombres. Ils mettent en parallèle les chiffres et les représentations des séries de trois objets avec les représentations de la magnitude (délivrées par le SAN : système numérique approximatif).

Les limites attentionnelles et de mémoire de travail impliquent que cette corrélation ait lieu pour 3 ou 4 éléments.

Dans une dernière étape, les enfants apprennent les règles grammaticales et syntaxiques pour former des expressions se référant à deux ou trois individus : « ce chien et celui-là ; (deux chiens) ». Ils élaborent ensuite des expressions se rapportant à deux ou trois collections d'individus : « trois vaches et une de plus ; deux poules et trois canards ; deux groupes de trois poupées ». Puis, les nombres plus grands sont construits à partir de représentations plus petites (maximum 3), au travers des opérations mentales d'addition et de multiplications. En formant et en interprétant ces expressions, il comprend que les nombres peuvent être additionnés et multipliés entre eux : « trois paires, trois douzaines, trois cents ».

Ces compétences dépendent des capacités des enfants à mémoriser des mots, à comprendre des mots-phrases, à apprendre à combiner des phrases courtes pour en produire des plus longues. Une étude a d'ailleurs montré que la maîtrise du lexique, du singulier et du pluriel est un meilleur prédicteur de la maîtrise des mots-nombres que l'âge de l'enfant (Negen & Sarnecka, 2012).

Des auteurs, (Jara-Ettinger et al., 2017) ont rapporté également que la connaissance des mots-nombres était un bon prédicteur de la compréhension du nombre naturel alors que la maîtrise de la procédure de comptage n'est ni suffisante ni nécessaire à la réussite de cette compréhension.

Une autre étude a montré que les habiletés arithmétiques formelles précoces mobiliseraient une connaissance relativement perfectionnée de la structure des nombres arabes et que les signaux de cette structure seraient fournis par les formes parlées des nombres à plusieurs chiffres et non par les représentations de leurs magnitudes (Habermann et al., 2020).

Il serait alors envisageable que les jeunes élèves de maternelle soient sensibilisés à l'oral aux morphèmes spécifiques du système numérique : au repérage d'analogies, ou au contraire d'irrégularités verbales. Comme on détaillerait en phonologie les associations sons/lettres en les mémorisant et en comprenant le code phonologique, un focus sur l'association « son (nombre énoncé à l'oral)/nombre indo-arabe » basé sur la compréhension de la structure du nombre arabe (unité, dizaines) pourrait être proposé.

- ***Le code indo-arabe***

Lorsque l'apprentissage du code en chiffres arabes débute, les enfants disposent déjà de connaissances sur la structure des nombres.

Le système décimal écrit est simple, il ne compte que dix éléments de 0 à 9 et il est soumis à un principe de notation positionnelle. Ce système fait l'objet d'un enseignement systématique mais les enfants par le biais de la généralisation d'affichages numériques notamment ont accès plus précocément à l'acquisition des formes et des significations ordinales et cardinales des nombres. La distinction des chiffres parmi d'autres caractères se ferait à 5 ans.

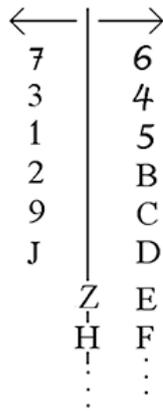
Habermann et ses collaborateurs (Habermann et al., 2020) ont montré que la connaissance précoce (4 ans) des chiffres arabes était un bon prédicteur des compétences arithmétiques à 5 ans.

En ce qui concerne l'écriture des chiffres en GS, certains auteurs (Fischer, 2011) rapportent l'absence d'effet de la main d'écriture, mais celui de l'âge ou, plus précisément, de l'expérience acquise en écriture, sur l'écriture en miroir des chiffres 3 (le plus fréquemment produit en miroir sous dictée), 5, 6, 9. L'écriture des chiffres est meilleure en copie.

Comme l'explique Dehaene (Dehaene, 2007), cela tient vraisemblablement au fait qu'il n'y a pas de pression forte à distinguer la gauche de la droite précocément alors qu'elle existe pour distinguer le haut du bas dans toutes les cultures. La lecture des chiffres ne fait pas appel aux mêmes voies anatomiques que la lecture des lettres et des mots, on peut penser que cette distinction neuronale des chiffres et des lettres ne se fait pas tout de suite, en début d'apprentissage, quand les chiffres comme les lettres sont essentiellement des graphismes.

Même si l'écriture en miroir tend à diminuer considérablement en CP, il est possible de sensibiliser les jeunes enfants aux contraintes de latéralité propres aussi à la transcription des chiffres et d'utiliser différentes modalités sensorielles. Il semble que l'orientation que l'enfant donne à un chiffre est déterminée par le geste moteur qui le précède (effet d'amorçage) (Fischer, 2011). Il faudra être vigilant à ne pas proposer immédiatement consécutivement l'écriture du chiffre 6 par exemple puis celle du chiffre 3. Les scripteurs suivent la règle implicite d'orientation vers la droite, celle-ci peut provenir de l'insistance (dans notre culture) sur l'écriture de gauche à droite pour les lettres majuscules apprises en premier.

Il est possible de rendre explicite l'orientation de l'écriture des chiffres en catégorisant différents caractères en fonction de leur orientation (Fischer, 2011).



Les enfants de 4/5 ans parviennent à associer les chiffres, 0 compris, à des quantités d'objets, les obstacles surviennent quand s'effectue le passage de 10. La valeur positionnelle des nombres doit se mettre en place ; ceci implique la compréhension de la valeur d'un chiffre par rapport à sa place précise ; cette valeur croît de droite à gauche par puissances de 10 ; la valeur d'un nombre égale la somme des valeurs représentées par chaque chiffre. Cela exige la manipulation et la mise en relation de dénominations orales et de séquences écrites. Le traitement de ces données correspond aux capacités de transcodage.

- ***Le transcodage***

Le transcodage est le passage d'un code à un autre. Ici il concerne le va-et-vient entre les représentations orales/écrites ou inversement ; il se met en place entre 5 et 9 ans. Le transcodage des unités simples semble acquis à 6 ans, celui des nombres à deux chiffres autour de 7 ans.

Les performances de transcodage peuvent être prédites par la prise en compte du nombre de chiffres à transcrire et du nombre de syllabes du nom verbal correspondant. Elles sont associées à des capacités mnésiques avec des effets de longueur et de complexité phonologiques. Les erreurs de transcodage sont fréquentes avec l'utilisation de zéros.

Plusieurs modèles du transcodage existent. Nous pouvons citer un modèle sémantique dont la représentation capture les relations multiplicatives (règle de concaténation) et additives (règle de sur-écriture ou recouvrement), à celle-ci sont appliquées des règles de transformation (Power & Dal Martello, 1990).

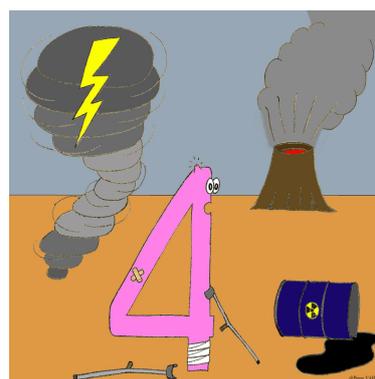
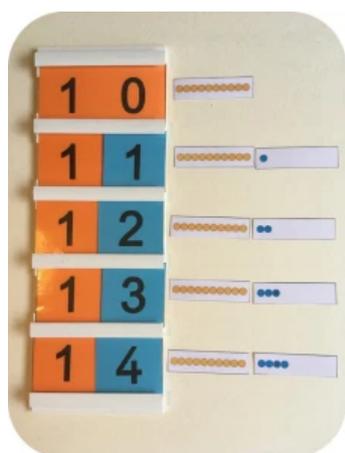
A l'inverse, le modèle asémantique le plus récent est le modèle ADAPT (Barouillet et al., 2004). La forme verbale est stockée sous forme phonologique, découpée en segments dans un analyseur grammatical (parser), de la gauche vers la droite pour produire les formes écrites. Plusieurs études ont mis en évidence les rôles déterminants de la mémoire de travail et des capacités linguistiques.

Ainsi, une faible capacité en mémoire de travail compromet le maintien de la chaîne orale en cours de construction en même temps que les règles syntaxiques la modifient et que la trace phonologique des items lexicaux encore à transcoder est maintenue. Par ailleurs, concernant les facteurs linguistiques, il apparaît que la conscience phonologique affecte le transcodage.

Enfin, un effet de taille a été démontré avec des enfants de 7 à 8 ans présentant des erreurs de transcodage pour les nombres à trois chiffres avec des magnitudes croissantes. Ceci révèle un traitement sémantique des nombres. Le recours au sens du nombre (représentation de la quantité) pour transcoder serait le reflet d'une difficulté d'acquisition avec un moindre recours à la récupération de faits en mémoire. Il est possible d'évoquer un défaut de consolidation d'entrée dans la mémoire à long terme de ces éléments.

Pour les enfants de GS, les travaux de Saad ont pointé que la performance de transcodage sur la catégorie « unités » (de 1 à 9 et le 10) est meilleure que celle des autres catégories comme les « dizaines-unités simples » (22) ou les « dizaines simples » (20). Par ailleurs, il apparaît que le transcodage des « dizaines-unités simples » est significativement plus difficile que celui des « dizaines simples », ce qui n'est pas le cas chez les élèves de CP (Saad, 2010). À ce stade de leur développement, les élèves de GS n'ont pas encore stocké en mémoire à long terme les « dizaines-unités simples » (35) comme des unités représentationnelles pouvant être récupérées directement en mémoire à long terme. L'étape pour ces enfants est celle de l'encodage, ils ont besoin de comprendre la signification de ces nombres pour le favoriser. Les formes lexicales des différentes dizaines, elles, sont apprises par cœur (en les sensibilisant potentiellement à certains morphèmes). Des outils intéressants de compréhension et de facilitation d'encodage (par l'originalité et l'association phonologique) pourraient être respectivement utilisés comme l'adaptation des **tables de Seguin** ou celle des « **numéroïdes** » élargis aux nombres à deux chiffres (inspirés des Alphas) (Pierre Vaslin).

### 1.2.3 La quantification



Il existe trois procédures différentes de quantification : l'estimation qui permet la quantification rapide de grandes quantités mais de façon approximative, le subitizing qui permet une quantification extrêmement rapide mais limitée à de très petites quantités, et le dénombrement (comptage), qui est utilisé pour déterminer une grande quantité de façon exacte.

### *1.2.3.1 L'estimation*

L'estimation globale est le processus utilisé lorsque la collection à quantifier comporte un nombre d'éléments au-delà de 4 ou encore lorsque celle-ci est présentée de façon trop brève pour que soit mise en place une stratégie de dénombrement (Rousselle & Pesenti, 2005). Cette tâche est soumise à une représentation mentale analogique des quantités continues ou discrètes : *le système approximatif du nombre (SAN)*.

Le SAN peut traiter la comparaison de deux quantités ; il est caractérisé par deux effets :

- l'effet de distance : plus les quantités sont proches, plus elles sont difficiles à comparer (il sera plus facile de comparer des collections de 2 et 7 éléments que des collections de 6 et 7 éléments).

- l'effet de taille : il est plus facile de comparer des collections de petite taille (de 5 et 6 éléments) que de grande taille (de 125 et 126 éléments).

Une étude (Halberda & Feigenson, 2008) a permis de montrer que l'acuité numérique va devenir de plus en plus fine au cours du développement de l'enfant. En effet, un enfant de 3 ans peut distinguer des quantités dont le rapport est de  $\frac{3}{4}$  alors qu'à 6 ans, ce rapport passe à  $\frac{5}{6}$ . Le ratio de discrimination de l'adulte étant d'environ  $\frac{10}{11}$ . Une hypothèse principale concernant les difficultés observées auprès d'enfants dyscalculiques dans des épreuves de comparaison non symboliques serait le défaut de « matching » (association) entre symboles numériques (verbaux ou indo-arabes) et quantités évoquées ou décrites.

Un autre type de tâche est utilisé pour évaluer la précision des estimations ; elle se base sur la conception analogique des représentations du nombre : il s'agit du placement d'une quantité sur une ligne numérique. Les études utilisant ces tâches (Siegler & Booth, 2004) rapportent que les enfants passent d'une organisation logarithmique (surévaluation des petites quantités par rapport aux grandes) à une organisation linéaire et donc une représentation plus précise entre 6 et 8 ans. L'accès aux représentations linéaires jouerait un rôle dans le développement de la connaissance numérique ; des jeux de plateau avec une organisation linéaire sont préconisés ainsi qu'un travail de sériation.

La capacité d'approximation des grandes quantités serait innée ; pourtant au cours du développement de l'enfant, ces estimations vont se préciser ; cette évolution serait également le fruit de l'éducation (Piazza et al., 2013).

Toutes ces dimensions partagent une perception de correspondance basée sur les notions de « plus et moins ». Chez les humains, cette capacité de traitement non numérique des quantités est attestée avant 4 ans (Cantlon et al., 2006).

D'autre part, la signification des codes symboliques se fonde sur la relation entretenue avec le SAN et l'effet de distance existe aussi pour les données symboliques. Les représentations des deux modalités diffèrent. La présentation d'une quantité en format non symbolique active les quantités inférieures ou égales à celle-ci alors que sous format symbolique (par exemple : « 6 » écrit ou entendu), la position correspondante mais aussi les positions voisines, antérieures et postérieures sont activées (4, 5, 7, 8) (Roggeman et al., 2007). Certains auteurs (Shusterman et al., 2016 ; Geary et al., 2018) ont montré que le déficit du SAN chez des enfants avec un trouble de la cognition mathématique serait secondaire à une compréhension spécialement appauvrie de la cardinalité des mots-nombres.

Nous pouvons prendre ce paramètre en compte pour appuyer l'intérêt de la corrélation entre les deux représentations dans la construction de la ligne numérique mentale.

Enfin, la disposition des éléments dans l'espace va également influencer notre jugement de la numérosité. Ainsi, des points dispersés vont paraître plus nombreux que des points groupés, un arrangement régulier sera surestimé contrairement à un arrangement irrégulier mais induira moins d'erreurs (Rousselle & Pesenti, 2005). Le système perceptif semble donc jouer un rôle primordial dans l'estimation de quantités, la surface totale occupée par une collection a un impact sur la quantification par l'estimation, court-circuitant l'évaluation de la numérosité. Le rôle de l'inhibition apparaît important dans ces tâches de jugement ; la variable spatiale sera donc à prendre en compte dans les exercices proposés en sachant que l'empan visuo-spatial augmente fortement au cours de la PS de maternelle (Pouch & Hauville, 2013).

L'estimation de quantités en contexte est également importante à appréhender au cours des apprentissages, en effet une étude a montré que des élèves à partir de 9 ans se focalisent sur la valeur absolue du nombre et son cardinal sans se représenter véritablement la situation pour adapter ses réponses (épreuve correspondante du ZAREKI-R) (Polledri, 2015).

### ***1.2.3.2 Le subitizing***

Le subitizing est l'estimation précise et rapide de petites quantités. Il désigne un processus de perception quasi-instantanée et adéquate de la numérosité de petites collections. On considère (Rousselle & Pesenti, 2005) que la limite du subitizing se situe à 3 ou 4 éléments. Au-delà de cette limite, pour les collections supérieures à 4, on observe un autre processus de quantification : le dénombrement. Ce phénomène est observé à la fois chez les adultes et chez les enfants à partir de 5-6 ans, ces derniers étant un peu plus lents à effectuer la tâche. Chez les

enfants, il apparaît quand ils sont capable d'associer les mots-nombres aux quantités correspondantes (Lecointre et al., 2011).

Dans le subitizing, les objets perçus seraient temporairement mémorisés et individuellement tracés en parallèle par un mécanisme impliquant la mémoire de travail visuelle dont la capacité est de trois ou quatre items via le « système de traçage des objets »: le STO (Piazza, 2011). Ce système s'apparente à celui des adultes dès l'âge de 1 an, alors que la mémoire de travail spatiale continue à se développer jusqu'à 6 ou 7 ans (Cowan et al., 2010).

Certains auteurs suggèrent que les scores précoces en subitizing pourraient prédire en partie des acquisitions mathématiques telles que la notion de cardinal avant que le dénombrement verbal devienne possible (Soto calvo et al., 2015). En revanche, une étude récente ne montre aucune corrélation entre le subitizing et certaines tâches mathématiques, parfois il ne s'avère donc pas essentiel (Anobile et al., 2019). Des résultats laissent supposer une origine commune de deux types de subitizing (simultanés et séquentiels) chez des enfants au-dessous de 7 ans. Ces auteurs précisent qu'il est possible que le SAN et le système du subitizing se chevauchent ; pour les très faibles numérosités, la précision serait renforcée et obtenue par les ressources attentionnelles.

Le subitizing pourrait être un support de l'association des quantités 0, 1, 2, 3, 4 aux chiffres arabes correspondants. D'autre part, lors de tâches de subitizing il serait possible de demander à de jeunes enfants : « combien il y a d'objets ? » (sans qu'il n'y ait de comptage), puis de rajouter : « peux-tu me les montrer, les compter ? » ; cette deuxième question permettant la prise de conscience de la coïncidence d'emploi du mot-nombre avec la quantité globale d'une cardinalité si petite soit elle (Brissiaud, 2005).

Une étude récente a d'ailleurs montré que pour des élèves de PS de maternelle, une augmentation de la performance à des épreuves de cardinalité pour des quantités entre 1 et 3 est corrélée à leur capacité à mettre en relation subitizing et numéraux verbaux plutôt qu'à l'amélioration du subitizing lui-même (Pouch & Hauville, 2013). C'est donc préférentiellement une épreuve de mise en relation entre diverses représentations des petites quantités et l'énonciation du numéral qu'il serait pertinent de proposer.

Des travaux soulèvent la question du mécanisme de traitement de ces quantités, en effet, il est possible que précocément, les enfants traitent les objets comme des quantités continues dont les caractéristiques comme la surface, le volume, la brillance, la couleur peuvent être néanmoins corrélées à la numérosité. Un modèle mental serait créé et mémorisé avec

l'implication de l'attention. Ce mécanisme non spécifique au nombre peut être exploité comme s'il l'était puisque les objets sont représentés séparément.

Pour les psychologues développementaux (Peterson & Simon, 2000) c'est justement le dénombrement qui va permettre de renforcer la trace mnésique entre configuration spatiale et quantité rejoignant la réflexion de Brissiaud.

### ***1.2.3.3 Le dénombrement***

Le dénombrement est une quantification exacte et explicite de la taille d'une collection d'objets. Ce procédé englobe le concept de désignation (pointage) et nécessite une compétence particulière : l'énumération. Cette tâche d'inventaire peut être décomposée en plusieurs étapes pour parvenir au comptage (marquage itératif) des éléments d'une collection finie. Briand appelle cette stratégie : « rangement de la collection ». Les étapes sont les suivantes :

- 1° Etre capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.
- 2° Choisir un élément d'une collection pour initier le comptage.
- 3° Enoncer un mot nombre. (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mots nombres).
- 4° Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis.
- 5° Concevoir la collection des objets non encore choisis.
- 6° Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) 2-3-4-5 tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide.
- 7° Savoir que l'on a choisi le dernier élément.
- 8° Enoncer le dernier mot-nombre (Briand, 1999).

Il est donc important de travailler les diverses procédures d'exploration d'une collection lors d'un dénombrement. La vision binoculaire constitue un raffinement fondamental de la fonction visuelle permettant au système nerveux central d'utiliser et d'intégrer les images provenant de chaque œil ainsi que de localiser des objets dans l'espace. Elle n'atteint des valeurs stables et de profil « adulte » qu'après 6 ans. D'autre part, la vision des contrastes est toujours immature (mature vers 10 ans), l'acuité visuelle correspond à 9/10 à 5 ans. Les réponses à l'acuité de résolution spatiale pour des objets avec détails fins s'améliorent progressivement jusque vers l'âge de 5 ans (Grégoire, 2015).

Entre 5 et 7 ans on sait que les fonctions de base des zones sensorielles précoces du cortex sont efficaces ; cependant, le développement fonctionnel des substrats du cerveau pour la perception de scènes visuelles complexes prend plus de temps, l'enfant de cet âge pourra avoir des difficultés à dénombrer des objets dans ces conditions.

Par ailleurs, il est reconnu que la procédure du dénombrement est gouvernée par 5 principes (Gelman & Gallistel, 1986) :

- Correspondance terme à terme : à chaque élément correspond une seule étiquette, qu'elle soit conventionnelle (mot-nombre) ou non
- Ordre stable : la séquence des étiquettes employée est la même pour chaque dénombrement
- Cardinalité : l'étiquette correspondant au dernier élément compté représente la cardinalité de la collection
- Abstraction : la procédure peut être utilisée indépendamment de la nature des éléments constituant la collection
- Non pertinence de l'ordre : le résultat du dénombrement ne dépend pas de l'ordre du comptage

Pour les auteurs, les trois premiers principes seraient innés, pour Fuson (Fuson, 2012), les principes du dénombrement résulteraient des apprentissages. C'est en répétant des procédures de dénombrement (dans un premier temps, acquises par imitation), que l'enfant va en découvrir les règles. Ce moyen de quantification fait donc intervenir deux composantes : l'une verbale (énonciation de la chaîne numérique) et l'autre visuelle ou manuelle (pointage) ; ces dernières sont sous-tendues par la correspondance terme à terme. Ces deux paramètres sont coordonnés afin de réaliser un dénombrement correct. Des difficultés de coordination visuo-motrice ou une maîtrise insuffisante de la chaîne numérique verbale peuvent expliquer des erreurs lors du dénombrement de collections.

Ce même auteur décrit les étapes de la construction de la chaîne numérique. C'est d'abord un « chapelet », une comptine dénuée de sens numérique, dans laquelle les mots ne se distinguent pas.

Puis, la chaîne devient « insécable », les mots s'individualisent, elle peut être arrêtée à une borne mais elle démarre obligatoirement à « 1 ».

Lorsque la chaîne devient sécable, elle peut démarrer au-delà de « 1 » à partir de n'importe quel chiffre ou nombre, et s'interrompre à une borne, le comptage à rebours devient possible. Ces compétences permettent la résolution de petits calculs.

Dans la chaîne terminale, le comptage à rebours est maîtrisé, et l'enfant peut compter le nombre d'éléments entre deux limites. Il peut donc résoudre des problèmes plus complexes grâce à ce savoir-faire. Pour être fonctionnelle, la chaîne numérique doit aussi devenir stable (les nombres sont toujours récités dans le même ordre), et conventionnelle (les mots récités respectent l'ordre de la liste des mots numériques). Cette acquisition implique de bonnes capacités de mémoire à court terme verbale.

D'après Noël (Noël, 2005), la maîtrise de la suite des nombres de 1 à 20 ne serait assurée que vers 6 ans.

Concernant les stratégies de résolution de tâches de dénombrement, on observe une évolution au cours du développement de l'enfant. Selon Camos (Camos, 2003), 6 stratégies peuvent être utilisées par les enfants :

- **un par un : utilisation de la chaîne numérique classique**
- n par n : comptage par pas de n, avec n compris entre 2 et 6
- addition : division de la collection en petits groupes et addition des cardinaux obtenus
- multiplication : division de la collection en groupes de même taille et multiplication du cardinal par le nombre de groupes
- estimation
- « je ne sais pas »

Les plus jeunes enfants vont utiliser le comptage de un en un. De nouvelles stratégies apparaîtront avec l'acquisition de nouvelles connaissances concernant le nombre. Le comptage par pas de n commence à être utilisé vers 7 ans mais ne deviendra la stratégie dominante qu'après 11 ans (temps nécessaire à l'automatisation des chaînes verbales). Les stratégies d'addition et de multiplications apparaissent plus tard. Une étude a évoqué le fait que la connaissance et la maturité de la chaîne des mots-nombres explosent au cours de la petite section de maternelle (Pouch & Hauville, 2013) :

- la chaîne moyenne passe de 4 à 18 entre le début de la petite section et le début de la moyenne section
- en fin de petite section, 43% des enfants parviennent déjà à compter à partir d'une borne inférieure donnée : la sécabilité de la chaîne commence donc à se mettre en place
- alors que la réversibilité de la chaîne n'est pas du tout présente avant la petite section, elle est réussie par 19% des enfants en fin de petite section

En GS, la plupart des enfants devraient être capables de réciter la chaîne numérique jusqu'à 20 voire au-delà mais aussi de l'utiliser dans sa forme sécable. Il faudra être très attentif à cette compétence car il a été montré que les enfants qui comptent le plus loin reconnaissent mieux l'équivalence des ensembles hétérogènes (Johansson, 2005). D'autre part, il semble que les enfants apprennent d'abord à comparer les mots nombres à des collections, puis ils caractérisent les chiffres pour ces collections et finalement ils comparent les mots nombres aux chiffres (Benoit et al., 2013). Les tâches de dénombrement sont donc essentielles pour l'apprentissage graduel de la correspondance : code verbal, collection (code analogique), code symbolique.

Pour s'affranchir du comptage-numérotage, il apparaît plus approprié pour construire la signification de la cardinalité de proposer des tâches de type « donne N objets » à partir d'une collection plus nombreuse. Ainsi, le dénombrement résultera bien d'un aspect sériel mais aussi d'un aspect ensembliste.

Par ailleurs, le dénombrement n'aurait pas de sens sans la conception d'égalité numérique. Si rien n'est ajouté ni enlevé à une collection, sa valeur numérique reste invariante. La correspondance terme à terme est une procédure précoce d'égalisation, celle-ci est d'abord

qualitative et devient numérique seulement lorsque tous les éléments sont considérés comme équivalents, devenant des unités au sens strict.

D'après Villette (Villette, 1994), la construction de l'égalité entre 4 et 7 ans passe par la comparaison de deux collections égales, puis par la conservation de l'inégalité, ensuite seulement ils sont capables d'appréhender la conservation de l'égalisation à partir de deux collections inégales. Enfin, ils parviennent à réussir l'épreuve de conservation classique c'est-à-dire la conservation nécessaire d'une égalité établie au départ (épreuve des jetons de Piaget). Ces résultats révèlent une double liaison, d'une part entre la conservation de l'inégalité et la compréhension des effets des ajouts et des retraits ; d'autre part entre la conservation de l'égalité et la compréhension des effets inverses des précédents. Ils pointent également l'importance des indices perceptifs, numériques et verbaux dans ces liaisons. Ainsi, l'égalité apparaît comme le résultat de la mise en relation progressive des effets des transformations appliquées à la collection (ajouts et retraits).

Une étape essentielle a été identifiée vers 4,5 ans ; c'est la capacité de compter des catégories ou des regroupements d'objets, elle révèle la possibilité de concevoir des unités abstraites et elle ouvre la voie à la compréhension des systèmes numériques fondés sur des regroupements (dizaine, centaine...).

Une attention particulière doit être observée chez les enfants entre 4 et 6 ans, en effet, ceux-ci traitent les dimensions perceptives et numériques des collections de manière automatique en manifestant un effet de congruence pour ces deux variables (Rousselle & Noël, 2008). En fait, les numérosités interfèrent tôt (vers 3 ans) avec le traitement perceptif et la sensibilité aux indices numériques non pertinents augmente avec l'âge. Ces interférences s'observent chez des personnes ayant des difficultés en mathématique ; elles pourraient constituer un élément de diagnostic des troubles dyscalculiques (Bugden & Ansari, 2016).

#### ***1.2.3.4 Le « calcul » dans les petits problèmes***

Dès l'âge de trois ans les enfants manipulent des objets comme nous l'avons décrit précédemment en matérialisant chaque nombre pour deux collections d'objets, en réalisant physiquement la réunion de ces dernières et en dénombrant la collection résultante. Les enfants de 4/5 ans utilisent le comptage sur les doigts ou le comptage verbal pour résoudre la situation donnée. Entre 5 et 6 ans, ils recourent à leur mémoire pour retrouver le résultat sans effectuer de calcul en dénombrant (Carbonneau et al., 2013). Les enfants savent donc résoudre certains problèmes d'ajout, de retrait et de partage avant tout apprentissage du symbolisme arithmétique ; pour cela ils utilisent deux sortes de procédures. La première est celle du comptage (avec la manipulation d'objets) la seconde est celle du calcul c'est-à-dire la mise en

relation de représentations numériques des quantités. Pour parvenir au calcul, il faut souligner l'importance de l'usage de collections-témoins (constellations, configurations de doigts) organisées qui favorisent l'accès à des stratégies de décomposition-recomposition et à terme au calcul pensé. Dans le domaine numérique des 3 premiers chiffres, presque tous les élèves de GS sont capables de calcul mental. Avec de plus grandes quantités, à l'école maternelle, la résolution d'un calcul nécessite l'utilisation d'outils : calendrier, étiquettes-prénoms (calcul des absents).

Pour favoriser les progrès en calcul, il est possible d'améliorer les procédures de comptage de l'enfant en l'entraînant à la **première forme de surcomptage** (substitution des objets *de la quantité initiale* par un mot-nombre, avec nécessité de visualiser la totalité de la collection-témoin de la quantité à ajouter (doigts de la main) pour énoncer les autres mots nombres successivement) :

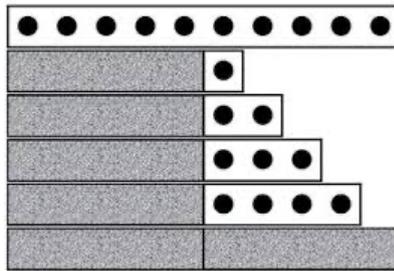


puis à la **seconde forme de surcomptage** (substitution des objets *de la quantité initiale* par un mot-nombre, avec énonciation de chaque mot-nombre pour chaque doigt supplémentaire levé) :



Cette stratégie très utilisée aux Etats-Unis nécessite par ailleurs l'apprentissage du calcul pensé car sa limite en est la conception des quantités. L'emploi de collections-témoins organisées y prépare complétant l'activité de comptage. Pour parvenir à cette utilisation, il paraît important de proposer un travail sur des représentations élaborées par les enfants. Celui-ci sera poursuivi en les confrontant à des représentations institutionnelles de référence.

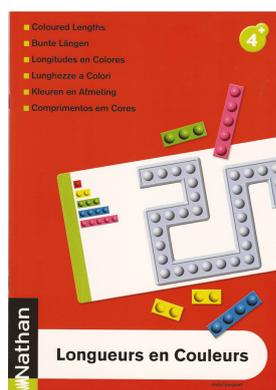
Un transfert de connaissances par généralisation des situations de calcul peut être alors envisagé (Fayol, 1985). Un matériel particulièrement intéressant pour investir ce domaine est celui des « réglettes avec caches » (Brissiaud, 2011).



L'ajout ou le retrait peuvent être entraînés. Il est légitime de s'intéresser au repérage de « transformations de collections » (prémices de l'arithmétique) par les jeunes élèves car certains auteurs ont repéré notamment que la plupart des enfants de GS sont en mesure de comprendre que chaque opérande de l'addition ne doit être utilisé qu'une fois et que leur ordre n'importe pas dans la résolution du problème (Barroody & Gannon, 1984).

Un matériel pédagogique concernant les mesures et longueurs (réglettes avec points espacés de manière homogène et réglettes sans points de différentes longueurs correspondantes) pourra être détourné pour encoder des images mentales des compléments à 5 et à 10 (ancrage des collections-témoins) en proposant en parallèle des exercices de différenciation de perceptions (voir paragraphe « estimation ») pour s'assurer de la compréhension du principe de conservation.

On peut noter que la ligne numérique mentale, comme les « **noums** » imaginés récemment (2019) par le chercheur Rémi Brissiaud s'appuient sur des représentations corrélées à une perception spatiale du système numérique ; horizontale ou verticale.



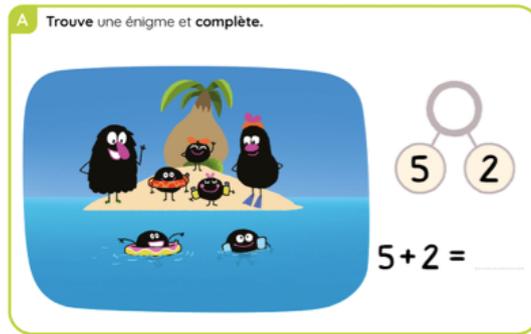
D'après Fuson (Fuson et al., 1983), l'organisation des collections-témoins rend possible leur dénomination de façon quasi-instantanée, comme s'il s'agissait de signes tels que les chiffres, étant de ce point de vue proches du nombre. Elles constituent un intermédiaire entre la collection-témoin et le nombre et donc entre le comptage et le calcul.

L'objectif du calcul est difficile à atteindre quand les enfants ont les collections sous les yeux, visualiser les objets est pourtant une étape incontournable pour ancrer les images mentales. Il est possible de masquer les collections pour inciter au calcul et de retirer les caches pour que l'enfant réalise l'auto-correction de ses prévisions.

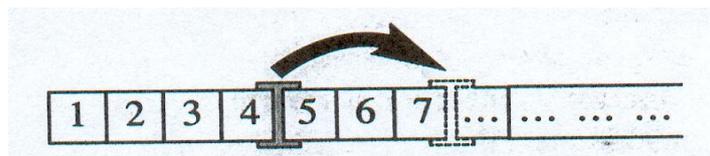
Les problèmes les plus simples (ajout ou retrait) doivent être énoncés le plus simplement possible ; le but étant d'investir le calcul plutôt que le comptage. A l'école maternelle, il est possible de proposer des petits problèmes à résolution pratique à partir d'objets physiques ou de représentations imagées pour préparer à la résolution d'énoncés purement verbaux (Brissiaud, 2011). La recherche d'un état final (transformation ou composition de mesures dans la classification de Vergnaud (Vergnaud, 1990)) ne produit, en maternelle, aucune difficulté. Les problèmes présentant des situations dont les enfants peuvent facilement construire une représentation mentale sont plus faciles à résoudre que ceux difficiles à modéliser en actes (recherche de l'état initial par exemple).

A ce sujet, nous pouvons évoquer la méthode de Singapour qui s'attache à faire comprendre aux élèves que les mathématiques font partie de notre environnement ; ces derniers sont amenés à développer leur métacognition. Un travail particulier est réalisé autour du raisonnement mathématique et de la résolution de problèmes dès le CP, ce qui rejoint les attentes des programmes de 2015 en France. Le dessin, puis la modélisation en schémas de lien et en barres ont pour but de rendre la résolution de problèmes plus efficace ; c'est une caractéristique de la méthode qui utilise la perception visuelle. Cependant, il est nécessaire de construire pas à pas « le saut » entre la phase de manipulation et celle de modélisation (Brissiaud, 2018).

A l'école maternelle, il serait intéressant de faire construire divers types de schémas propres à l'enfant pour entraîner l'abstraction, mais aussi d'inciter l'élève à inventer des devinettes simples comme cela est proposé dans le fichier de l'élève de CP (« méthode de maths les nouns » CP, Retz, 2020).



D'autre part, pour déterminer le résultat d'un ajout ou d'un retrait pour résoudre ces « devinettes », les élèves pourraient utiliser les cases d'une file numérique comportant un « curseur séparateur » plutôt qu'un « curseur fenêtre » en début d'apprentissage afin d'éviter de recompter la case de départ et pour favoriser une lecture cumulée de la bande numérique (Brissiaud, 2011).



Enfin, pour un tour d'horizon assez complet des capacités des jeunes enfants à manipuler et à investir les nombres en fonction de leur tranche d'âge, les professionnels de la petite enfance pourront se référer au tableau élaboré par l'équipe de Clements mis en annexe (Clements et al., 2004).

L'analyse de l'ensemble de ces données a permis d'identifier des aspects importants dans la construction de la pensée numérique de l'enfant entre 3 et 6 ans. Ainsi on peut noter l'impact de compétences linguistiques, de constructions par l'enfant de collections-témoins organisées. L'écriture des chiffres et les outils pour faciliter l'encodage des unités, dizaines simples et dizaines-unités peuvent être spécifiquement travaillés. Le transcodage sous dictée ne doit pas être proposé avant la GS. Les compétences d'estimation se fondent sur l'appréhension de « plus » et « moins », de la cardinalité ; elles peuvent être reliées à des contextes variés. Le subitizing doit être approfondi et la perception sensorielle maîtrisée. Le dénombrement peut être investi en explicitant l'ensemble des procédures associées. Les calculs simples sont possibles avec la manipulation de 3 unités, des petits problèmes simples et courts sous forme de devinettes peuvent être présentés aux élèves. Des ressources attentionnelles, mnésiques (mémoire de travail) ainsi que des capacités d'inhibition sont requises. Le détail précis des pré-

requis dans le domaine de la numération sera exposé dans les fiches d'accompagnement présentées dans la partie III du mémoire.

## **2. RAISONNEMENTS ET FONCTIONS EXECUTIVES**

Le raisonnement est un processus cognitif de niveau supérieur permettant, à partir de données (tirées des cognitions pré-existantes ou des perceptions) de déterminer une nouvelle cognition (nouveau résultat) ou de vérifier la validité d'un fait, en appliquant aux données, des lois de transformation. Il dénote ainsi une action intelligente.

### **2.1 Développement de la cognition**

Deux conceptions parallèles et complémentaires, l'une phénoménologique avec Piaget, l'autre de considération neurologique chez Luria, apportent un éclairage sur le développement cognitif de l'enfant.

#### **2.1.1 Le développement de l'enfant entre Piaget et Luria**

Pour Piaget, le cerveau de l'enfant est un processeur actif et adaptatif des expériences vécues. Celles-ci varient en fonction du niveau de maturation cérébrale et s'inscrivent dans le cadre de stades que le sujet parcourra au cours de son développement. Un stade doit avoir lieu avant qu'un autre puisse se mettre en place. Les stades vont se dérouler dans le même ordre pour tous les enfants mais pas forcément au même âge (certains enfants seront en avance ou en retard à un certain âge dans leur développement cognitif). Ils sont en étroite corrélation avec l'environnement. Ainsi Piaget distingue 4 stades :

- ***Le stade sensori-moteur (de la naissance à environ 2 ans)***

Il correspond au développement et à la coordination des capacités sensorielles et motrices du bébé. A cet âge, l'intelligence du bébé est liée à l'action : le bébé touche les objets, les met à la bouche, il apprend peu à peu à comprendre le fonctionnement de son corps et à faire la différence entre celui-ci et les objets. A la fin de ce stade, il commence à effectuer des « combinaisons mentales ». Il peut penser à un objet, à une personne en son absence ; il acquiert la permanence de l'objet.

- ***Le stade pré-opératoire (de 2 à 7 ans)***

***A ce stade, les acquisitions de l'enfant au niveau de la fonction sémiotique sont nombreuses (imitation différée, jeu symbolique, dessin, langage). C'est aussi l'âge d'une plus grande intériorisation de l'action (l'enfant peut penser à ses gestes sans avoir besoin de les réaliser). Ici, l'enfant est « égocentrique ». Il a du mal à comprendre que d'autres puissent ne pas avoir les mêmes pensées que lui. Il a, par exemple des difficultés à garder un secret***

*(de ce point de vue, l'apparition du mensonge est un progrès de l'intelligence...). Peu à peu, va se mettre en place la théorie de l'esprit. Le raisonnement est intuitif, basé sur la perception ; marqué par la réversibilité des opérations, il n'y a pas de réelle logique.*

Deux stades succèdent aux précédents. On retrouve *le stade des opérations concrètes (de 7 à 11 ans)* pour lequel Piaget évoque la théorie de l'esprit, le calcul mental simple ainsi que l'accès aux structures logico-mathématiques (classification, sériation, conservation). A l'adolescence, le raisonnement sur l'abstrait apparaît ainsi que la pensée hypothético-déductive, c'est *le stade des opérations formelles (de 11 à 16 ans)* (Piaget, 1967).

Pour Luria (Luria, 1970), la maturation cérébrale s'effectue au travers de sites neuronaux spécifiques conduisant à l'élaboration de réseaux de connexions neurales permettant l'intégration progressive d'informations sensorielles de plus en plus complexes. Le développement décrit est parallèle aux observations de Piaget. Selon lui, cinq stades successifs correspondent aux progrès de la myélinisation et à l'évolution de la neurodensité.

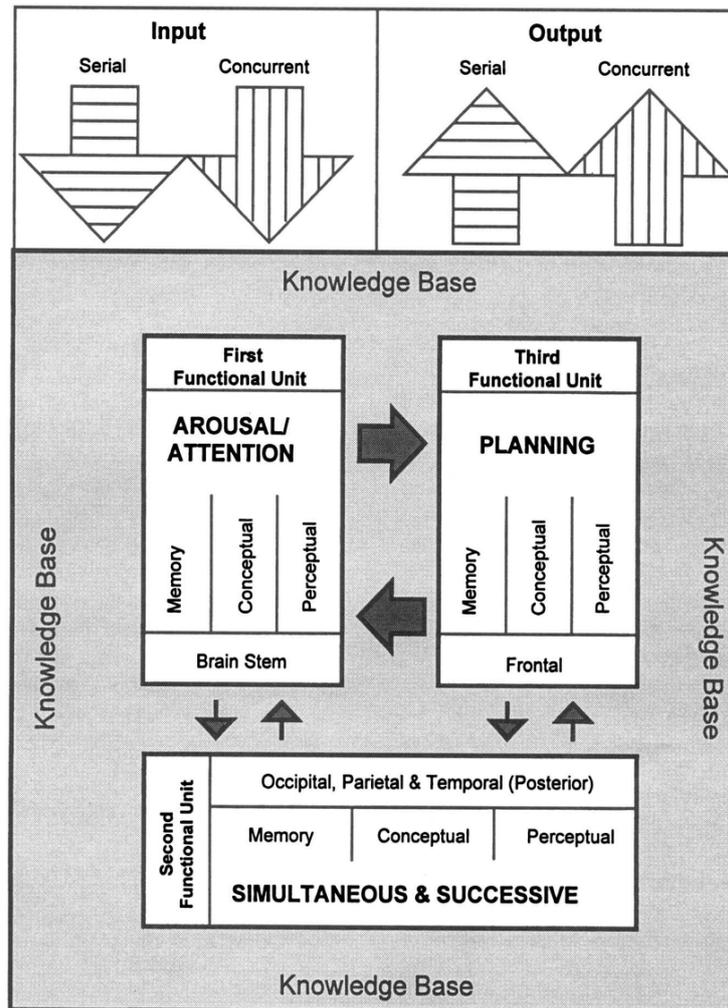
Les deux premiers stades avec le développement de la formation réticulée et celui des réseaux neuronaux entre les aires motrices et sensorielles primaires décrivent *le stade sensori-moteur* (Piaget).

Le stade 3 résulte du développement accru de ces zones avec un affinement des perceptions et de la mise en mémoire ainsi que la latéralisation des fonctions langagières. Luria évoque ici la pensée symbolique et représentationnelle. Cette description correspond à la fois au *stade pré-opératoire* mais également au *stade des opérations concrètes*.

Le stade 4 avec la maturation des aires tertiaires des lobes pariétaux, temporaux et occipitaux explique l'intégration inter-modale des informations, c'est aussi le *stade des opérations concrètes* de Piaget.

Le dernier stade (5) expliquerait l'accès au *stade opératoire formel* par la maturation progressive des aires préfrontales impliquées dans les processus de la pensée hypothético-déductive et d'auto-régulation des comportements.

Kirby et Das (Kirby & Das, 1990) ont élaboré un modèle de l'intelligence (« style cognitif ») fondé sur la conception de Luria, il s'agit du modèle PASS pour : processus de planification, attention, traitement de l'information séquentielle ou simultanée incluant également les connaissances disponibles en mémoire à long terme représentées en gris sur la figure 7.



The PASS Model of Cognitive Processes

**Figure 7:** Modèle des processus cognitifs (Kirby & Das, 1990)

L'intérêt particulier de ce modèle est qu'il pointe l'importance des processus de planification et également celle du traitement des données requis au cours des apprentissages scolaires dans la manifestation de l'intelligence. L'objectif des auteurs est de pouvoir mettre en évidence des particularités individuelles dans la manière de traiter l'information afin d'élaborer un programme de remédiation cognitive.

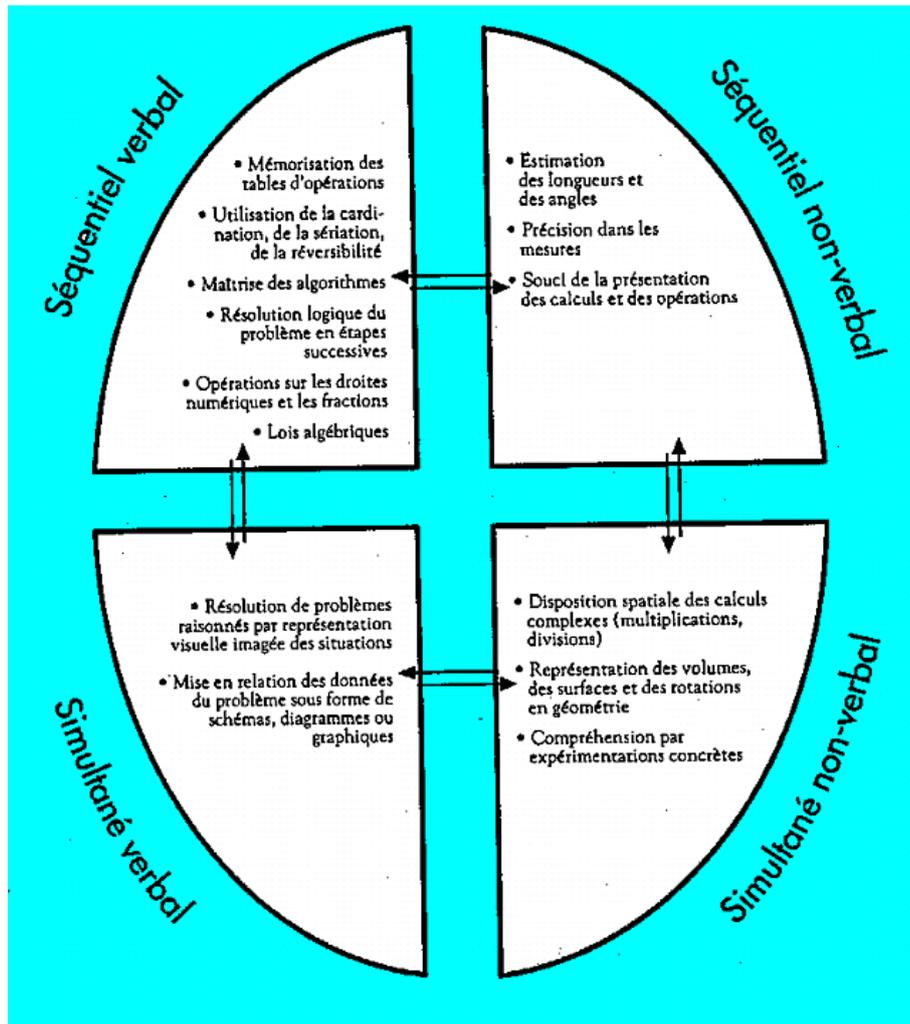
Le traitement des données peut correspondre à un « style d'apprentissage » spécifique dont le modèle de Flessas-Lussier, fondateurs de l'EVAC, rend compte de manière précise (Flessas, 1997). En effet, ces auteurs ont élaboré un modèle des styles d'apprentissages en 4 quadrants.

*Le processus séquentiel verbal* permet de percevoir et de conserver en mémoire de travail un certain nombre d'éléments verbaux (syllabes, mots, chiffres, etc.) en respectant l'ordre chronologique de leur présentation. Lorsque cette habileté s'exerce dans le registre du raisonnement et de la pensée, elle permet d'opérer des relations de causalité, de concevoir des enchaînements logiques entre les phases successives d'un discours et d'atteindre une maîtrise croissante dans le maniement du lexique et des structures syntaxiques et grammaticales. Ce traitement cognitif s'exerce donc à travers un langage parlé ou intériorisé.

*Le processus séquentiel non verbal*, met en jeu une activité d'analyse interne des stimuli tant visuels que sonores (suites musicales) ou gestuels (enchaînements de mouvements ou de postures). Il permet de découper un tout en divers composants pour analyser par exemple la forme, la couleur, la position de chaque élément. Il permet d'obtenir un déroulement précis, mémorisant le rythme voulu et la séquence des étapes requises dans l'exécution d'une tâche. Le langage intériorisé peut s'avérer nécessaire lors de l'apprentissage de telles habiletés non verbales tant que ces dernières ne seront pas automatisées. L'observation rigoureuse du modèle proposé par l'enseignant permettra à l'enfant d'accéder à la connaissance du déroulement temporel de l'activité ; mieux que la simple écoute des consignes verbales (reproduction par imitation).

*Le processus simultané non verbal* permet de percevoir les stimuli de façon synthétique et de tenir compte des positions qu'ils occupent dans l'espace. Il est responsable de la mémoire de localisation spatiale et il permet la réorganisation d'éléments morcelés en un tout complexe, de même que l'établissement de relations analogiques à travers des matrices de nature non verbale. C'est donc un processus cognitif d'ordre essentiellement visuo-spatial, qui permet de concevoir des modèles complexes bi- ou tridimensionnels mais qui ouvre également la voie à des constructions hypothétiques totalement intuitives. Ce processus est indispensable à la création et à l'invention.

Enfin, *le processus simultané verbal* permet d'extraire le sens général d'une information de nature linguistique en opérant des liens avec les connaissances antérieures et en effectuant une synthèse entre les différentes idées exposées et également de comprendre des métaphores. Ce sera donc le processus à travers lequel se construiront les inférences qui permettent de dépasser le sens littéral de l'énoncé, de mettre en relation les éléments linguistiques entre eux et enfin d'élaborer une imagerie mentale qui se constitue à partir des contenus verbaux d'un texte.



**Figure 8:** Modèle des styles d'apprentissage pour les mathématiques (Flessas, 1997)

D'après les quatre modes d'apprentissage décrits il est possible de relier, en référence au cadre pédagogique, des notions mathématiques précises aux divers processus mentaux exposés par les auteurs.

	Séquentiel verbal	Séquentiel non verbal	Simultané verbal	Simultané non verbal
<b>Nombres et calculs</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Chaîne numérique verbale</li> <li>* Cardinalité des nombres (jugement et comparaison)</li> <li>* Règles sémantiques graphophonologiques régissant la numération</li> <li>* Mémorisation des faits arithmétiques</li> <li>* Transcodage (dictée)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Chaîne numérique écrite</li> <li>* Règles d'écriture et de lecture des nombres (transcodage)</li> <li>* Mémoire des étapes successives graphomotrices dans l'exécution des calculs</li> <li>* Coordination visuo-motrice (pointage et dénomination)</li> <li>* Coordination graphomotrice dans l'exécution des chiffres</li> <li>* Placement d'un nombre sur une ligne</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Relativité des nombres permettant leur sériation</li> <li>* Concepts numériques et visuospatiaux (entre, à droite, premier, au centre...)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Mémoire de la disposition spatiale propre aux opérations simples et complexes (soustraction, multiplication, division, nombres décimaux)</li> </ul>
				<ul style="list-style-type: none"> <li>* Appréhension visuo-spatiale iconographique (dés, dominos, cartes)</li> <li>* Transposition sur une droite numérique (additions et soustractions)</li> </ul>
<b>Résolution de problèmes</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Précision du lexique (somme, différence, produit...)</li> <li>* Connaissance des règles algébriques</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Symboles graphiques correspondants (+, -, x, =...)</li> <li>* Mémoire des étapes successives dans la résolution (référence à un modèle)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Evocation visuelle imagée (énoncé)</li> <li>* Représentation symbolique et schématique de la situation en fonction des mots clés (autant, tiers, ensemble...)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Rappel de situations concrètes analogiques</li> <li>* Représentation visuospatiale de l'ensemble des données</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Relations de causalité</li> <li>* Mémoire des données numériques et des énoncés (étapes)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Estimation et utilisation des quantités visualisées dans l'espace</li> <li>* Modelage et/ou construction de schémas</li> </ul>		
<b>Géométrie</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Précision du lexique (vertical, à la jonction, losange, trapèze...)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Maîtrise des instruments de mesure (règle, équerre...)</li> <li>* Représentations visuelles de figures correspondantes</li> <li>* Précision des mesures et des schémas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Evocation visuelle imagée (énoncé)</li> <li>* Représentation symbolique et schématique de la situation en fonction des mots clés (rapports spatiaux)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Translations, rotations...</li> <li>* Reproduction graphique des interrelations visuospatiales</li> </ul>

**Tableau 3:** Correspondance entre les modes d'apprentissages et les compétences mathématiques

Si un enfant en difficulté d'apprentissage continue d'utiliser de façon non efficace des stratégies contraires à son style cognitif préférentiel, il est alors possible de lui faire prendre conscience de son mode particulier de fonctionnement pour qu'il parvienne à investir progressivement d'autres habitudes de traitement de l'information tout en perfectionnant son mode d'évocation préférentiel.

Pour la population et le sujet d'étude qui nous intéressent, il faudra s'attacher à observer précisément chez l'enfant les items des cases colorées dans le tableau 3.

### **2.1.2 La logique : de Piaget à Moshman**

L'idée centrale du développement chez Piaget est celle d'une opération. Comprendre un objet n'est pas seulement s'en faire une image mentale, mais c'est interagir avec lui. Connaître, c'est modifier pour comprendre le processus de la transformation. Une opération mentale est une action intériorisée et réversible faisant partie d'une structure qui regroupe les entités d'une même propriété comme on le retrouve dans les mathématiques ou la logique.

Selon l'auteur, la logique comprend la coordination des actions. L'expérience logico-mathématique, c'est l'expérience que le sujet a de ses actions. Celle-ci est nécessaire pour que les opérations soient bien intégrées. Une fois que les opérations sont acquises, l'expérience réelle de l'opération n'est plus nécessaire et la coordination peut alors se faire sous forme de déductions et de constructions à propos de structures abstraites. C'est bien le passage de la manipulation des objets à la construction de « logiques de représentations » chez l'enfant qui nous intéresse dans ce travail.

Certaines études empiriques qui ont succédé aux travaux de Piaget ont montré que les enfants ont des capacités logiques avant l'âge qu'il avait estimé (Braine, 1990, Hawkins et al., 1984; Markovits et al., 1989). De plus, d'autres travaux ont révélé que les adultes, qui devraient avoir atteint le stade le plus élevé de maturation, ne parviennent pas à accomplir certaines tâches logiques (Evans, 1982, Wason & Johnson-Laird, 1972). Ces observations témoignent du caractère variable de la réussite à des activités dites de logique et ce à tout âge.

Des données récentes de l'imagerie du raisonnement plaident en faveur de la théorie de la logique mentale de Braine, à savoir une mobilisation de réseaux neuronaux logico-linguistique (régions cérébrales frontales et temporales). Parallèlement, Evans a défini les biais de raisonnement comme des tendances systématiques à considérer des facteurs non pertinents pour la tâche à résoudre et à ignorer des facteurs pertinents. C'est l'apparition de la théorie de l'inhibition de la stratégie perceptive d'appariement dont l'entraînement aboutit à une

amélioration considérable des résultats aux cours de tâches de déduction (Houdé & Moutier, 1996). Il est possible alors de corrélérer l'importance de l'inhibition déjà évoquée précédemment dans la perception des quantités à celle nécessaire à une bonne compréhension linguistique ainsi qu'à une meilleure construction de représentations mentales.

D'autre part, l'apprentissage de l'inhibition correspond à une activation cérébrale du cortex préfrontal ventro médian droit proche du système limbique considéré comme « le cerveau des émotions ». On peut noter que des études confirment le rôle de l'émotion en rapportant le lien entre la prise de conscience de ses erreurs et le plaisir associé à découvrir la solution (Houdé et al., 2003).

Il existe des formes précoces de raisonnement logique accessibles à des enfants d'âge préscolaire comme les syllogismes (si...alors). Il semble que ce n'est pas tant le contenu sémantique des prémisses que le contexte de présentation qui favorise la réussite du raisonnement.

Dias et Harris (Dias & Harris, 1988) ont démontré que des enfants de quatre à six ans parviennent à se détacher progressivement de leurs connaissances empiriques sur le monde et à adopter une attitude analytique logique témoignant de compétences d'abstraction jusque là réfutées dans la littérature en psychologie pour cette période du développement. Ce détachement est progressif, il semble lié à la capacité de l'enfant à s'approprier un type particulier d'étayage : l'incitation à faire semblant et à prendre en compte des indices extraits de l'imaginaire. Il est nécessaire d'amener l'enfant à accéder aux conditions suffisantes qui expliquent le lien causal entre l'action d'un personnage et son intention de faire semblant (Sobel et al., 2010). Cette acquisition peut avoir lieu vers 5-6 ans.

Des études en psychologie du développement montrent en effet que l'enfant fait preuve de capacités explicites de raisonnement logique dès lors qu'il se met à faire semblant au travers du jeu (18-24 mois) (Harris, 2002). Bruner (Bruner, 2010) met l'accent sur les aspects culturels de la construction des connaissances. La culture transmise par l'oral et le monde imaginaire des contes permet au sujet d'envisager le monde sous différentes logiques possibles et élargit l'éventail de ses capacités représentatives en participant à la construction du monde mental.

Le point de vue de Moshman est par ailleurs notable, il ajoute à la théorie de Piaget l'aspect métacognitif de la construction du « savoir raisonner ». Ainsi l'auteur a défini quatre stades de compréhension métalogue :

- un stade d'inférence implicite à propos du contenu (stade 1)
- un stade d'inférence explicite basée sur une logique implicite (stade 2)

- un stade où la nécessité logique est explicitement comprise sur la base d'une conscience métalogue implicite (stade 3 )

- un stade impliquant des réflexions explicites sur la métalogue (stade 4).

D'après lui, si les enfants de 4-5 ans parviennent à faire des inférences, leurs conclusions s'approchent plus d'une devinette que d'un processus inférentiel (Moshman, 2004). Ils sont au premier stade de compréhension logique dans lequel ils possèdent une compréhension explicite du contenu, mais sans conscience explicite de l'inférence. C'est seulement vers 5-6 ans que l'enfant commence à faire des inférences valides. L'enfant de 6 ans parvient à distinguer un argument qui a une nécessité logique de celui qui est probable ou possible. À cet âge, il reconnaît les inférences comme étant sources potentielles de connaissances et commence à prendre conscience que certaines sont meilleures que d'autres. Il comprend les notions de possibilités et d'impossibilités (Moshman, 2004).

Concernant les petits problèmes simples, la pensée mathématique (« mathematical thinking ») peut entrer dans les apprentissages des jeunes enfants. On peut noter qu'elle requiert certaines compétences spécifiques (Stacey, 2006) :

- une connaissance mathématique
- des capacités générales de raisonnement
- la connaissance de stratégies heuristiques (solution rapidement trouvée)
- la compréhension que les mathématiques peuvent être utiles
- des caractéristiques personnelles comme la confiance, la persévérance, l'organisation
- des aptitudes pour la communication de la solution

Quatre processus fondamentaux y sont associés :

- la spécialisation (essais spécifiques, observations d'exemples)
- la généralisation (recherche de caractéristiques et de leurs relations)
- la conjecture (prédiction de relations et résultats)
- la réponse argumentée (la solution et l'explication des raisons pour lesquelles une chose est vraie)

Ces éléments indiquent que le jeune enfant est capable de raisonner et que cette aptitude est sous-tendue par le jeu de faire semblant, les émotions positives, l'imaginaire et l'inhibition mentale (verbale) ; cette compétence peut être spécifiquement entraînée à l'école maternelle au travers des activités langagières orales et nourrie par les contes. Cela présente un intérêt particulier notamment pour la compréhension de problèmes mathématiques simples. Il semble pertinent dès cet âge de spécifier ce qui est utile à prendre en compte ou à l'inverse ce qui est inutile pour trouver la solution d'une « devinette » additive ou soustractive en proposant des petits problèmes permettant d'entraîner cette aptitude.

La pensée mathématique peut être investie de manière simple, elle peut permettre notamment l'anticipation, le choix de stratégies efficaces tant pour résoudre le problème que pour expliciter la solution dans des situations au plus proche de la vie de l'enfant.

## 2.2 Les compétences logico-mathématiques et la numération

Dès l'instant où l'enfant observe le monde physique composé d'objets, il peut les traiter quantitativement, c'est le nombre : ce que nous avons décrit auparavant ; mais aussi les traiter qualitativement en les catégorisant, les classifiant. Pour Piaget les opérations logico-mathématiques permettent l'organisation des objets discontinus (ou discrets) ; elles sont fondées sur les différences entre éléments, leurs ressemblances ou leurs équivalences : classification, sériation et nombre. Les opérations portant sur les quantités continues sont elles de type infralogique.

Le développement des classifications chez l'enfant s'effectuerait selon un processus de différenciation et de coordination simultanées entre compréhension et extension des classes.

Vers 4 ans, l'enfant utilise un processus caractérisé par la *construction de collections non figurales (stade 2 de la classification)*. Il rassemble les éléments en petits tas selon les seuls critères de ressemblance et de différence : ces amas sont peu à peu subdivisés en sous-ensembles et témoignent d'une réelle différenciation des objets.

D'après l'auteur, il y a un troisième stade dans la classification s'opérant autour de 7 ans, les collections se différencient et se hiérarchisent parfois très subtilement (tableaux à double entrée) c'est le critère le plus fin de la classification : l'épreuve de quantification de l'inclusion. La réussite est interprétée à trois niveaux indissociables : logique, structural et fonctionnel (les deux derniers sous-tendent l'organisation additive des classes).

La sériation consiste à ordonner des éléments selon une grandeur croissante ou décroissante. Cette aptitude est testée par l'épreuve des baguettes dont les variations de longueur sont de 0,6 cm. Avant 5 ans, les enfants élaborent des petites séries et une sériation sans base (sans aligner les baguettes sur une ligne mentale horizontale permettant la comparaison de la taille). Vers 5 ans, l'enfant réussit la série en tâtonnant, en corrigeant ses propres erreurs après coup. A partir de 6 ans, il utilise une méthode systématique, soit en recherchant un extrême (par exemple, rechercher la plus grande, puis la plus grande de celles qui restent, etc.) soit en posant deux baguettes et en positionnant à leur place, par intercalation, la suite des baguettes restantes. C'est la réussite opératoire.

La conservation correspond à la construction d'invariants, elle fait référence aux quantités, à la correspondance terme à terme (étape intermédiaire). A 5 ans, la pensée est intuitive, à 7 ans l'enfant accepte l'équivalence de deux collections quelle que soit la

transformation opérée sur la première (notion de réversibilité), il devient capable de considérer ce qui reste inchangé (invariant).

Selon Piaget, on ne peut pas parler de nombre tant que l'enfant n'a pas acquis la conservation des ensembles numériques quels que soient les arrangements spatiaux. Le nombre résulte d'abord d'une abstraction qui permet de rendre chaque élément individuel équivalent à chacun des autres :  $1 = 1 = 1$  etc. Ces éléments sont classables ensuite selon des inclusions :  $1 < (1+1) < (1+1+1)$  : aspect cardinal du nombre. Le nombre est une synthèse de la sériation (1, puis 1, puis 1, etc : aspect ordinal du nombre) et de l'inclusion (1 inclus dans 2, 2 inclus dans 3, etc).

Certaines critiques à l'égard de la théorie piagétienne ont peu à peu vu le jour. Tout d'abord, le synchronisme des opérations de classification, de sériation et de conservation du nombre n'a pas été confirmé : les mêmes enfants ne réussissent pas nécessairement les trois tâches au même moment de leur développement (la dernière étant souvent réussie avant les deux premières). Pierre Gréco, un chercheur français collaborateur de Piaget dans les années 1960, avait ainsi découvert que dans la tâche de conservation des quantités discrètes, si on demande explicitement à l'enfant de compter les jetons des deux alignements avant de répondre, il réussit bien plus tôt. Ainsi, la quantité comptée est conservée avant la quantité non comptée ; c'est ce que Gréco a appelé la «quotité» (Gréco & Morf, 1962).

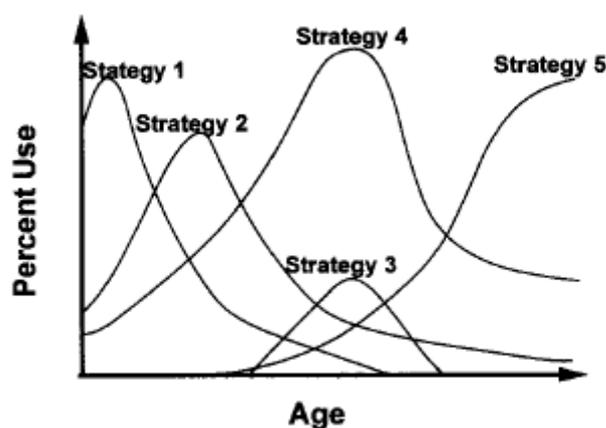
Sur la question du comptage, le changement radical de perspective, par rapport à Piaget, est venu des États-Unis dans les années 1970 avec les travaux de Rochel Gelman et la mise en évidence des 5 principes décrits dans le chapitre précédent.

Défendant l'idée que les principes (les compétences pré-requises) précèdent les habiletés (performances), Gelman suggère que les difficultés numériques des enfants d'âge préscolaire (avant 6 ans) relèvent essentiellement des composantes procédurale et d'utilisation. Ce ne serait donc pas des difficultés d'ordre conceptuel ou logique comme le pensait Piaget.

L'équipe de Hauser (Hauser et al., 1996) indique que le nombre vient aux animaux, dont l'Homme, bien avant l'apparition du langage, et qu'il s'inscrit dans des systèmes visuels et spatiaux, liés à l'action. Par ces systèmes, les bébés comme les singes sont déjà capables de créer des images mentales des manipulations d'objets et de mémoriser les résultats numériques attendus.

Avec l'apparition du langage vers 2 ans, le jeune enfant doit apprendre à faire des calculs en utilisant les mots correspondant aux nombres. En développant son intelligence linguistique, il gagne en capacité d'abstraction et de manipulation symbolique, mais cela provoque des perturbations et des erreurs qui n'existaient pas avant avec l'intelligence visuo-spatiale du bébé, plus rapide, plus fluide et plus économique (du point de vue du coût cognitif) (Houdé, 1997 ; Hodent et al., 2005).

Le modèle théorique actuel qui rend le mieux compte de la complexité du développement numérique chez l'enfant d'âge préscolaire (école maternelle) et scolaire (école élémentaire) est le modèle développemental à vagues superposées de Robert Siegler.



**Figure 9:** Modèle à vagues superposées (Shrager & Siegler, 1998)

Siegler propose de concevoir le développement numérique, qu'il s'agisse d'additions, de soustractions ou de multiplications, comme « des vagues qui se chevauchent ». Selon cette image, chaque stratégie cognitive reflète une vague qui approche d'un rivage, avec plusieurs vagues (ou façons de résoudre le problème arithmétique) susceptibles de se chevaucher à tout moment et, donc, d'entrer en compétition. Avec l'expérience et selon les situations, l'enfant apprend à choisir l'une ou l'autre façon de procéder. On le nomme également le SCADS (Strategy Choice And Discovery Simulation).

Si on revient sur l'épreuve de conservation, tout porte à croire que ce qui pose réellement problème à l'enfant d'école maternelle dans la tâche de Piaget, ce n'est pas d'avoir ou de ne pas avoir la notion de nombre mais c'est d'être incapable d'inhiber une stratégie perceptive inadéquate : « longueur = nombre ». La tâche de conservation du nombre ne teste pas l'activation de la notion de nombre véritablement, mais plutôt l'inhibition de la stratégie heuristique : longueur = nombre ; suractivée par le matériel expérimental (l'écartement des jetons).

En ce qui concerne la tâche d'inclusion, les recherches successives à celles de Piaget vont ici à l'inverse des autres analyses. Durant les décennies 1970 et 1980, plusieurs chercheurs comme Claude Voelin en Suisse, Ellen Markman aux États-Unis, Jacqueline Bideaud, Jacques Lautrey en France ont découvert que, au stade dit de « catégorisation logique » selon Piaget (entre 7 et 12 ans) les enfants n'étaient pas logiques du tout, commettant encore une grossière erreur d'inclusion (Bideaud & Lautrey, 1983). Sur ce point (contrairement au nombre), Piaget lui-même en a fait l'aveu dans l'ouvrage « Vers une logique des significations », publié de façon posthume en 1987 (Piaget & Garcia, 1987). Il reconnaît que l'erreur de l'enfant de moins de 6 ans, dans sa tâche classique d'inclusion où il y a un piège perceptif, ne veut pas dire que ce dernier n'a pas acquis la notion d'inclusion. Une fois de plus on peut retrouver ici l'impact de la capacité à inhiber des interférences.

L'étude de Clements (Clements, 1984) portant sur des entraînements à la logique piagétienne (classifications, sériations) et sur du dénombrement a montré plusieurs points. Les progrès obtenus par les groupes d'enfants de 4,5 ans entraînés à la logique et au dénombrement dépassaient ceux du groupe contrôle. L'entraînement est donc bénéfique dans les deux cas. Les autres résultats ont mis en évidence que le groupe entraîné à la logique améliorait ses performances en logique mais non en dénombrement. A l'inverse, les sujets du groupe « numération » obtenaient de meilleurs résultats dans les deux types d'activités. Les progrès dans l'organisation logique de la pensée sont liés à la pratique des activités numériques.

Il est possible que les structures logico-mathématiques constituent à la fois des composantes et des précurseurs de la conception du nombre ; toutefois le transfert de ces connaissances à la numération peut être incertain en pratique. Il est nécessaire que celles-ci soient explicitement décrites pour soutenir la construction du nombre. Nous pouvons conclure également à l'impact toujours prégnant de l'inhibition mentale dans les tâches de logique « logico-mathématiques ». D'autre part, lors d'évaluations des troubles de la cognition mathématique, il est impératif de garder à l'esprit que les compétences logico-mathématiques peuvent être acquises à des âges variés et que leur maintien dans le temps n'est pas assuré, il est plutôt fonction de variables contextuelles, perceptives, sémantiques. Si la conservation peut contribuer avec la classification aux caractères unitaires des objets et aux raisonnements qui y sont associés, les procédures de comptage ainsi que leurs principes sont aussi essentiels à investiguer.

Le raisonnement décrit par Piaget est essentiel pour la résolution de problèmes non numériques. L'enfant doit être particulièrement guidé pour la projection de ce dernier dans les activités de numération.

## 2.3 Les fonctions cognitives

### 2.3.1 Les fonctions exécutives

Les fonctions exécutives sont des fonctions cognitives supérieures qui se mobilisent dans des situations non-routinières, nouvelles, conflictuelles ou lors de la réalisation d'une tâche complexe (Diamond, 2016). Des chercheurs en neuropsychologie (Diamond et al., 1997) ont rapporté qu'elles sont régies par la maturation corticale des lobes préfrontaux (Miyake et al., 2000).

D'abord, la mémoire de travail est une pièce maîtresse du fonctionnement cognitif. Elle permet à l'enfant de retenir une information, et de l'utiliser d'une manière appropriée dans un autre contexte (Roberts & Pennington, 1996). La composante « inhibition » constitue la seconde fonction exécutive du modèle de Miyake, elle permet à l'enfant de traiter des informations inappropriées en vue d'atteindre un objectif (Simpson & Riggs, 2007). La flexibilité mentale est utile pour changer de tâche ou de stratégie afin de passer d'une opération cognitive à une autre (Chevalier, 2010). La planification consiste en l'identification et l'organisation des étapes et des éléments qui sont nécessaires pour atteindre un but.

La période préscolaire s'avère particulièrement sensible pour le développement des fonctions exécutives. Ainsi, les capacités de mémoire de travail progressent considérablement entre 3 et 5 ans, et entre 5 et 11 ans (Hongwanishkul et al., 2005). De même, une amélioration graduelle des habiletés d'inhibition est observable jusqu'à l'âge de 5 ans (Garon et al., 2008), tandis que la flexibilité mentale et la planification se développent très vite entre 3 et 5 ans (Atance & O'Neill, 2001).

Des études ont montré que la mémoire de travail, l'inhibition et la planification chez l'enfant sont associées à ses habiletés en littératie (Fricke, 2016) et en numératie (Clark et al., 2013).

Par ailleurs, la performance des enfants dans des tâches liées à l'inhibition est significativement corrélée avec la régulation des émotions (Masten et al., 2012). En effet Duval et ses collaborateurs (Duval et al., 2018) ont récemment montré un lien positif et significatif entre la qualité du soutien émotionnel offert par l'enseignant en maternelle (Québec) et le niveau d'inhibition chez l'enfant de 5 ans.

L'entraînement des fonctions exécutives est envisageable chez les jeunes enfants, leur importance est manifeste dans les apprentissages mathématiques, le rôle de l'inhibition a été

plusieurs fois mentionné, ainsi que celui des émotions, il est nécessaire d'en tenir compte pour soutenir les enfants dans leurs apprentissages.

### **2.3.2 L'attention et la mémoire**

L'attention et la mémoire sont des fonctions fortement impliquées dans les processus d'apprentissage. Elles se développent progressivement dès le plus jeune âge ; traversent des étapes pour parvenir à une pleine maturité vers l'adolescence.

Les composantes de l'attention peuvent être réparties sur deux grands axes : l'intensité et la sélectivité. L'axe d'intensité est composé de 3 aspects de l'attention :

- la vigilance : maintien de l'attention dans des situations peu stimulantes
- l'alerte : capacité à réagir aux situations extérieures
- l'attention soutenue : capacité à maintenir un niveau attentionnel continu sur une longue période de temps

L'axe de sélectivité regroupe également deux aspects attentionnels :

- l'attention sélective : capacité à focaliser l'attention sur un stimulus particulier
- l'attention divisée : capacité à traiter plusieurs tâches

D'après Meltzer et Krishnan (Meltzer & Krishnan, 2007), ce n'est que vers la fin de la deuxième année que le jeune enfant commence à mettre en place la stratégie requise pour capter l'information nécessaire à l'action qu'il est en train d'exécuter. L'attention sélective (visuelle) existe avant 3 ans mais cette habileté ne lui permet de repérer qu'un seul stimulus qui diffère clairement des distracteurs présents par une seule caractéristique. L'enfant atteindrait une bonne efficacité dans la mise en place de stratégie systématique d'exploration visuelle à partir de 9 ans (Lemoine-Lardennois et al., 2016). La pleine efficacité de l'attention sélective se situerait autour de 12 ans comme celle des saccades oculaires (Mazeau & Moret, 2013).

Pour l'attention soutenue, l'enfant de 4,5 ans parviendrait à se centrer facilement sur un problème qu'il rencontre (Ruff & Lawson, 1990). L'attention divisée suit elle une progression régulière entre 6 et 11 ans. La capacité attentionnelle avant 6 ans est de 4 éléments tant en modalité auditive que visuelle. D'autre part les enfants de maternelle sont capables de contrôle attentionnel et de flexibilité cognitive avec une progression rapide entre 5 et 8 ans (Dajani & Uddin, 2015).

Certaines recherches (Gathercole, 1998) concernent la nature des processus mnésiques chez l'enfant. Il semble qu'avant 7 ans, le cerveau ne conserve intactes les informations dans l'unité de stockage phonologique que pendant quelques secondes. Par contre, si des mots sont

représentés par leur illustration, le plus jeune enfant pourra les stocker grâce à son calepin visuo-spatial. Ces enfants sont sensibles à la similarité perceptuelle entre les images et leurs caractéristiques physiques, ils pourront avoir des difficultés à mémoriser des représentations assez ressemblantes. La vitesse d'articulation augmente entre 3 et 10 ans, la répétition subvocale (« oreille intérieure » : boucle phonologique) commence à se mettre en place. Le double encodage phonologique et visuel maximisera donc plus tard l'empan mnésique.

Ces éléments questionnent spécifiquement sur la mémoire dans les apprentissages scolaires. A ce propos Mazeau (Mazeau, 1997) a identifié certains paradigmes facilitateurs intéressants :

- la rétention est proportionnelle à la pertinence et à la profondeur du traitement, à la stratégie du codage et aux efforts cognitifs associés
- les répétitions sont fondamentales, un délai optimal entre elles est nécessaire pour l'efficacité de l'encodage
- le caractère nouveau anecdotique apporte un élément de contraste facilitateur
- la situation spatio-temporelle et affective (contexte, émotions) introduit un élément renforçateur
- la reconnaissance est souvent moins coûteuse que l'évocation

En ce qui concerne cette notion, Matheron (Matheron, 2000) a développé un modèle de la mémoire pour l'étude des mathématiques adapté au contexte de la classe. Il définit trois types de mémoires. **La mémoire pratique** est celle utilisée par une personne pour effectuer une tâche mathématique, qui permet de reproduire des gestes appris antérieurement.

Le savoir mathématique constitue un deuxième type de mémoire, collective cette fois : **la mémoire du savoir**. Chaque objet de savoir porte la trace des choix institutionnels qui ont marqué son histoire et au cours desquels se sont formés des consensus dans la communauté des mathématiciens.

**La mémoire ostensive** est donnée à voir de façon délibérée par un individu ou une institution. Sa manifestation peut être réalisée à l'aide de différents registres perceptifs (gestuel, langagier, graphique, ...) d'institutionnalisations et permet que soient mis en exergue, rappelés ou oubliés certains souvenirs afin de construire d'autres savoirs.

L'exploration attentionnelle sélective pourra être entraînée, elle est en construction pour l'âge des enfants qui nous concerne, il faut être vigilant à ne pas proposer trop de distracteurs en même temps. L'attention divisée ne peut être investie efficacement. Concernant la mémorisation, pour cette tranche d'âge, il est nécessaire de s'appuyer sur la mémoire visuelle,

de proposer des activités « en reconnaissance », de guider les enfants selon une interaction constante entre les trois mémoires relatives aux apprentissages en classe (mémoires ostensive, pratique et du savoir).

## **PARTIE III : EBAUCHE D'UN DISPOSITIF DE PREVENTION DES TROUBLES DE LA COGNITION MATHÉMATIQUE**

A la suite des revues de littérature, nous avons entrepris d'élaborer des fiches ressources pour les enseignants d'école maternelle et les orthophonistes. Ces dernières sont destinées au repérage et à l'entraînement de pré-requis reconnus importants dans le domaine de la recherche en neurosciences et en sciences cognitives et développementale en ce qui concerne la cognition mathématique. Etant donné l'existence des évaluations nationales de début de CP, il serait pertinent de les utiliser en GS en décembre/janvier comme outil d'évaluation diagnostique ou formative pour les exploiter par la suite comme activités d'entraînement. Cet outil pourrait parallèlement permettre aux orthophonistes d'investir davantage la rééducation de la cognition mathématique en devenant plus experts des pré-requis fondamentaux à l'acquisition des compétences numériques.

Les **fiches d'accompagnement** ci-après se veulent simples d'utilisation avec des exemples d'activités précis ; leurs supports théoriques ont été décrits dans le mémoire. L'idée serait de les exploiter à travers un jeu de plateau dont les cases correspondraient à des propositions d'activités (élaborées par l'enseignant ou l'orthophoniste) concordantes à une notion spécifique entraînée (le repérage grâce à un code couleur permettant d'identifier le domaine travaillé). En maternelle, l'organisation du groupe classe offre la possibilité d'investir le jeu au cours d'un atelier dirigé, les activités APC (activité pédagogique complémentaire) peuvent être également propices à ce type de fonctionnement.

### **1. PRECONISATIONS POUR L'ACQUISITION DE LA LA NUMERATION**

La classification des fiches d'accompagnement est réalisée à partir des trois représentations du nombre du triple code. Elles auront néanmoins des intitulés correspondant aux compétences attendues dans les programmes scolaires de 2015.

## 1.1 Fiche : représentation auditivo-verbale du nombre

### LES MOTS NOMBRES

- ✓ Congruence déterminant/nom (singulier/pluriel)
  - ✓ Maîtrise des trois premiers mots nombres
  - ✓ Utilisation de phrases à structures additives
    - « **Il y a 3 feutres : un bleu, un orange, un rouge** »
  - ✓ Compréhension d'expressions avec des déterminants démonstratifs, des conjonctions
    - « **Va chercher ce pot de ciseaux, ce feutre velleda et une règle** »
  - ✓ Capacité de mémorisation de mots, compréhension de mots-phrases, distinction entre le singulier et le pluriel
  - ✓ Mémorisation des numéraux
  - ✓ Énonciation de 3 ou 4 éléments au maximum pour le travail de la mémoire de travail auditivo-verbale
    - « **3, 6, 1** » énoncés : « **dis-moi le dernier chiffre que j'ai prononcé, le premier...** »  
(aide avec des jetons pour schématiser la place du mot énoncé)
  - ✓ Correspondance du code verbal de la dizaine à la conception dizaine et dizaine-unité en représentation arabe (sens du nombre) en sensibilisant aux morphèmes lexicaux (régularités ou au contraire particularités)
    - « **avec les cartes des numéraux de 1 à 30 (possible d'aller plus loin), prendre une carte, dire : je pense à un chiffre (ou un nombre), commencer à énoncer le début du mot-nombre, le gagnant est celui qui trouve le plus vite possible le nombre mystère.** »
- |              |               |               |                 |                   |             |              |
|--------------|---------------|---------------|-----------------|-------------------|-------------|--------------|
| <b>3</b>     | <b>30</b>     | <b>13</b>     | <b>17....</b>   | <b>22</b>         | <b>2</b>    | <b>12</b>    |
| <b>trois</b> | <b>trente</b> | <b>treize</b> | <b>dix-sept</b> | <b>vingt-deux</b> | <b>deux</b> | <b>douze</b> |

## 1.2 Fiche : la représentation indo-arabe du nombre

### LES CHIFFRES ET LES NOMBRES ECRITS

- ✓ Distinction de chiffres parmi d'autres caractères

1 A # % 5 b 9

! 8 w i ^ » 3 +

- ✓ Connaissance des chiffres arabes à 4 ans
- ✓ Entraînement à l'écriture des chiffres en prenant soin d'éviter l'écriture en miroir (surtout pour 3, 5, 6, et 9), métacognition sur la latéralité propre à chaque chiffre (« orientation » par rapport à un axe vertical qui traverse le chiffre)

ε

- ✓ Association de la représentation arabe à la cardinalité (deuxième étape de la mise en place du dénombrement)

5



- ✓ Meilleure réussite en copie
- ✓ Facilitation de l'encodage pour faciliter le stockage dans la mémoire à long terme (répétition, utilisation, incongruités : numéroïdes)

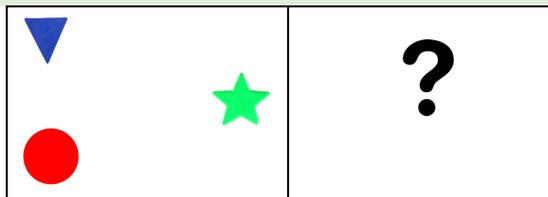
3

- ✓ Activation de la cardinalité correspondant au chiffre lui-même mais aussi de celles inférieures ou supérieures au chiffre observé (construction de la chaîne numérique)  
« 6 active 6 mais aussi 4, 5 et 7, 8 : montrer un chiffre (cartes) demander celui qui vient avant et celui d'après, le désigner, le nommer »

### 1.3 Fiche : le transcodage (entre les deux représentations précédentes)

#### PASSAGE DU NOMBRE ENONCE AU NOMBRE ECRIT

- ✓ Vérification de la conscience phonologique (hors occlusives)
- ✓ Prise en compte de la complexité phonologique et du nombre de syllabes énoncées à transcrire (capacités de mémoire à court terme et de travail)  
« **essaie de répéter ce que je vais dire : 4, 3, 7, 2** » (mémoire à court terme)
- ✓ Entraînement de la mémoire de travail : faire mémoriser 2, 3, (ou 4) chiffres écrits (ou nombres), les faire énoncer ou écrire en leur faisant subir une « manipulation »  
« **12, 3, 8 écrits sur des cartes : (les retirer), écris le nombre qui contient le 1** »



« **Observe les objets, (laisser observer 4 secondes puis retirer les formes de l'ardoise, donner les objets et l'ardoise blanche) mets le triangle bleu à la place du cercle rouge, l'étoile à la place du triangle bleu** »

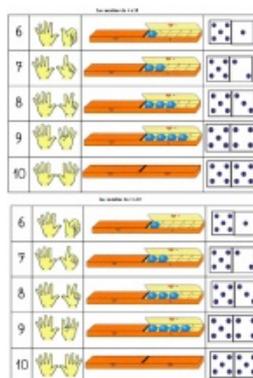
- ✓ Transcodage de l'oral vers l'écrit et inversement  
« **dire 4** » : faire écrire le chiffre ; montrer un chiffre (ou un nombre) écrit : le faire énoncer
- ✓ Acquis entre 5 et 9 ans, nombres à deux chiffres autour de 7 ans
- ✓ Prise en compte de l'effet d'amorçage : le sens d'écriture imposé par le chiffre précédemment écrit est utilisé à l'identique pour initier l'écriture du prochain chiffre à transcrire

## 1.4 Fiches : la représentation analogique du nombre

### LES COLLECTIONS DE REFERENCE

#### **Construction de collections-témoins :**

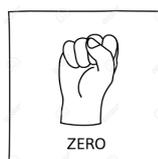
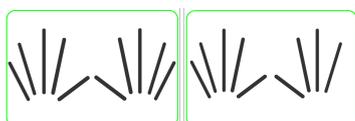
- ✓ Manipulation d'objets simples (jetons, cubes, formes simples)
- ✓ Aptitudes de représentations par l'enfant (boules en pâte à modeler, dessins ou peinture de cercles, de formes géométriques simples...), description puis figuration, observation de similitudes (apprentissage du symbolisme)
- ✓ Reconnaissance de représentations communes validées et utilisées par l'enseignant en classe (constellation, dé, doigts, boîtes à compter...)
- ✓ Manipulation du dé : s'arrêter à la constellation « 5 » pour mimer et anticiper les décompositions travaillées en CP avec l'association des deux bases 5



#### **Collections-témoins de doigts :**

- ✓ Reconnaissances immédiates (subitizing : jusqu'à 4) : jeu de rapidité
- ✓ Associations de doigts levés avec le mot nombre et/ou le chiffre en code arabe (avec des cartes à montrer rapidement : travail des trois représentations de concert)
- ✓ Utilisation de comptines avec jeux de doigts (association de l'énonciation d'un mot-nombre avec la configuration de doigts correspondante (*celles concernant les quantités*)) (voir annexe)
- ✓ Utilisation des représentations canoniques en commençant par la main gauche puis la droite
- ✓ Elaboration de la collection-doigts en même temps que le dénombrement d'une collection d'objets progresse (un doigt après l'autre pour chaque objet dénombré)
- ✓ « le jeu des annonces » (recherche ACE) adapté à la GS : travail des compléments à 5, à 10, avec un ou deux dés (<http://blog.espe-bretagne.fr>)
- ✓ Coder le zéro par le poing fermé et un dé vide (aucune unité)

#### Doigts de Baruk

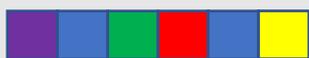


## L'ESTIMATION

- ✓ Pour des quantités  $> 4$
- ✓ Effet de distance : discrimination plus facile entre 2 et 7 qu'entre 6 et 7
- ✓ Effet de taille : discrimination plus facile entre 10 et 15 qu'entre 30 et 31
- ✓ Acuité numérique à 6 ans : ratio de 5/6 (comparaison de quantités)  
(fait la différence entre 40 et 33)
- ✓ Entraînement de la correspondance numéraux verbaux, arabes/cardinalité (représentation de la magnitude numérique à partir de codes symboliques)  
« montrer des objets, demander de lever la carte qui comporte le nombre arabe correspondant le plus rapidement possible (prévoir une sélection de cartes) »
- ✓ Entraînement au placement des nombres (arabes) sur une ligne numérique (l'itération de l'unité étant un pré-requis) pour comprendre et mentaliser la signification future de la graduation



- ✓ Existence d'une surévaluation des petites quantités
- ✓ Proposition de plateaux de jeux avec pistes linéaires (pliantes)



I ♥  
maths

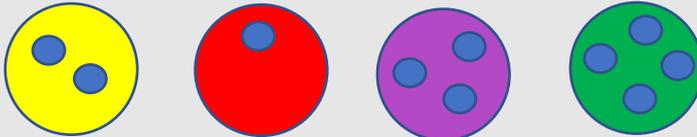
- ✓ Comparaisons récurrentes du « plus » et du « moins »
- ✓ Prise en compte de la variable perceptive : des points dispersés ou un arrangement régulier entraînent une impression de quantité plus importante



- ✓ Estimation de quantités en fonction du contexte  
« combien d'élèves dans une classe, combien de voitures dans une famille, combien de légos dans le bac de la classe ?... »
- ✓ Entraînement de l'inhibition pour estimer la quantité d'objets dans l'espace (positions variables)  
« avec des feutres de couleur : dis moi une autre couleur que celle du feutre que je te montre »
- ✓ Observation des exercices du logiciel « L'estimateur » (cycle 2) : adaptations pour le cycle 1. Dans le parcours « estimateur » adapté du logiciel du même nom ; en CP, quelle que soit l'activité (collection, nombre, addition, soustraction), les élèves sont amenés à faire correspondre un nombre et sa grandeur de la manière la plus précise possible, et sur des nombres de plus en plus grands.

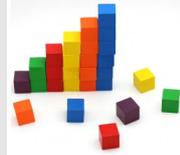
## LE SUBITIZING

- ✓ Pour des quantités de 4 objets au maximum (si plus : reconnaissance automatique de collections témoins)
- ✓ Travail de la mémoire de travail visuelle (3 à 4 items)

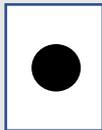


« Observe les cercles, je les enlève, quand je te dis jaune, vert, rouge, toi tu me dis le nombre de points qui étaient dans chacun de ces cercles » (commencer par deux cercles)

- ✓ Énonciation du numéral immédiatement après la visualisation ou l'écoute de la quantité à discriminer
- ✓ Dénombrement de ces petites quantités (= ancrage de la magnitude)
- ✓ Propositions de différentes représentations des petites quantités avec variations de volume, de couleur, de brillance dans diverses configurations spatiales



- ✓ Entraînement du subitizing simultané et séquentiel, auditif et visuel



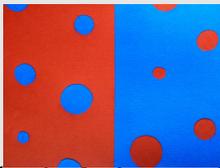
- ✓ Observation des aptitudes attentionnelles

## LE DENOMBREMENT (1)

- ✓ Travail des procédures d'exploration spatiale d'une collection : indiçage



- ✓ Capacités de coordination visuo-motrice (pointage)
- ✓ Vérification des stratégies de Briand :
  - distinction de deux éléments différents d'un ensemble donné.
  - choix d'un élément d'une collection pour initier le comptage.
  - énonciation d'un mot nombre. (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mots nombres).
  - conservation en mémoire de la collection des éléments déjà choisis.
  - conception de la collection des objets non encore choisis.
  - dénombrement des objets non encore choisis (2-3-4-5) tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide.
  - conscientisation du choix du dernier élément.
  - énonciation du dernier mot-nombre
- ✓ Dire « et **un** de plus » ou « et **un** de moins » au cours du dénombrement
- ✓ Présentation de contrastes visuels forts



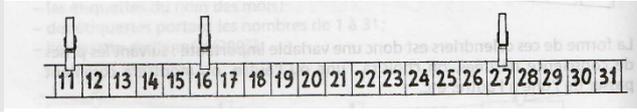
- ✓ Entraînement de l'acuité de résolution spatiale pour des objets avec détails fins



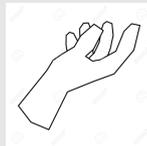
- ✓ Vérification des 5 principes de Gelman :
  - correspondance terme à terme : à chaque élément correspond une seule étiquette, qu'elle soit conventionnelle (mot-nombre) ou non.
  - ordre stable : la séquence des étiquettes employée est la même pour chaque dénombrement.
  - cardinalité : l'étiquette correspondant au dernier élément compté représente la cardinalité de la collection.
  - abstraction : la procédure peut être utilisée indépendamment de la nature des éléments constituant la collection.
  - non pertinence de l'ordre : le résultat du dénombrement ne dépend pas de l'ordre du comptage.

## LE DENOMBREMENT (2)

- ✓ Maitrise de la chaîne numérique verbale (sécable) jusqu'à 20 : mémoire à court terme  
« récite la chaîne à partir de 4, de 10, de 12... »
- ✓ Capacité de sécabilité de la chaîne (comptage à rebours)  
Idem à partir de 20, 15, 9...
- ✓ Travail de la file numérique écrite (curseur fenêtre ou épingle)



- ✓ Travail de la mémoire verbale à court terme  
« Ecoute de plusieurs bruits présentés tour à tour, l'élève prend les photos ou images correspondantes parmi plusieurs ; rythmes à reproduire ; sons à reproduire »
- ✓ Comptage de 1 en 1 (comptage par pas de « n » vers 7 ans)
- ✓ Elaboration d'une collection selon la procédure : « donne N objets » à partir d'une collection plus grande



- ✓ Déplacement des objets au cours du comptage
- ✓ Apprentissage en suivant les étapes : mots-nombres/collection ; chiffres arabes (ou nombre)/collection ; mots-nombres/chiffres (ou nombre)



3

« trois »

3

« trois/3 »

- ✓ Comparaison de collections dans l'ordre suivant : deux collections égales ; deux collections inégales ; égalisation à partir de deux collections inégales ; tâche de conservation (Piaget)
- ✓ Comparaison de l'écart entre deux objets (invariance de l'espace entre eux)
- ✓ Dissociation perception et numérosité
- ✓ Regroupement d'objets possibles (appréhension de la dizaine ou de la sous-base 5 : comme on trie des objets, on trie les unités)



- ✓ Mise en place du « 0 » dans les affichages et les outils ressources

## LES PETITS PROBLEMES

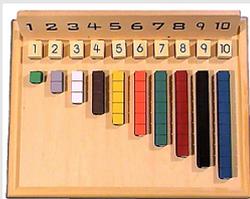
- ✓ Calcul mental possible (jusqu'à 3 unités maximum)  
« Emma a 8 gommettes, elle en donne 2 à Basile, combien lui en reste-t-il ? »
- ✓ Entraînement aux **deux formes de surcomptage** et de décomptage (connaissance de la suite numérique et de sa sécabilité) en substituant aux objets un mot-nombre de départ (première cardinalité)  
« Lucie a 7 chocolats, Marc lui en donne 5, combien Lucie a-t-elle de chocolats ? »  
Utilisation de collections témoins (doigts, constellations) ; l'enfant lève l'ensemble des doigts de la main correspondant à la quantité à ajouter (ou à enlever) et énonce chaque unité surcomptée, ou il lève les doigts un à un.

\*Doigts pliés, gants de latex remplis de riz

\*Comptines (typologie : ajout ou retrait d'éléments)



- ✓ Détachement progressif de l'utilisation dynamique des doigts
- ✓ Travail des décompositions et recompositions à 5 et à 10 (perception au service de l'image mentale)



« number blocks »



« nombres en couleur »



« la buchette d'or »

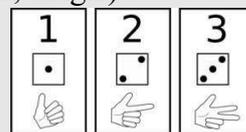
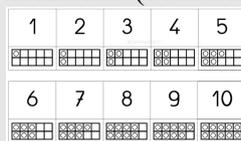


« les réglettes avec cache »



« longueurs en couleur »

- ✓ Proposition de problèmes simples (addition, soustraction) avec résolution manipulatoire et présentation verbale associée, de jeux de rôle, d'images : recherche de l'état final (construction de dessins, de schémas) : **typologie de Vergnaud (composition de mesures ou transformation d'une mesure)**
- ✓ Lien explicite entre les représentations élaborées par les enfants et les représentations institutionnelles (constellations, cartapoints, doigts)



- ✓ Problèmes avec collections masquées
- ✓ Utilisation d'une file numérique avec curseur-séparateur : favorisation d'une lecture « cumulée » de la bande numérique (lien avec les quantités)



## **2. PRECONISATIONS POUR LE RAISONNEMENT ET LES FONCTIONS COGNITIVES**

Les domaines des fiches suivantes font partie des compétences cognitives mises en jeu dans les apprentissages. Celle concernant le raisonnement a trait aux épreuves piagésiennes, aux styles cognitifs et à la pensée mathématique.

## 2.1 Fiche : le raisonnement

### LE RAISONNEMENT

- ✓ Connaissance des 4 styles d'apprentissage et correspondances avec les notions mathématiques appréhendées à l'école maternelle
  - Processus séquentiel verbal
  - Processus séquentiel non verbal
  - Processus simultané verbal
  - Processus simultané non verbal
- ✓ Entraînement à l'inhibition lors de la formation d'images mentales de problèmes simples (recherche d'intrus verbaux, visuels ou mimo-gestuels) : laisser du temps pour chercher et répondre
- ✓ Recherche de lien causal dans le jeu de faire-semblant (émotions au service de la compréhension)
- ✓ Place de l'imaginaire (contes)
- ✓ Tris d'informations utiles ou non à la résolution de devinettes additives ou soustractives
- ✓ Travail de la pensée mathématique dans des situations écologiques :
  - la spécialisation (essais spécifiques, observations d'exemples)
  - la généralisation (recherche de caractéristiques et de leurs relations)
  - la conjecture (prédiction de relations et résultats)
  - la réponse argumentée (la solution et l'explication des raisons pour lesquelles une chose est vraie)
- ✓ Prise en compte du fait que classification, sériation, conservation sont des notions pouvant être acquises à des âges différents
- ✓ Travail explicite du lien entre acquisition des structures logico-mathématiques (Piagésiennes) et concept de nombre
- ✓ Association des procédures de comptage à celles de conservation et de classification (conscience de l'unité, émergence du concept de dizaine, prise de conscience de la conservation de l'écart spatial entre deux objets)

## 2.2 Fiche : les fonctions cognitives

### LES FONCTIONS COGNITIVES

- ✓ Entraînement à la planification
- ✓ Progression de la mémoire de travail entre 3 et 5 ans
- ✓ Augmentation des capacités d'inhibition à 5 ans (possible de l'exercer en amont)
- ✓ Entraînement à la flexibilité mentale possible
- ✓ Pas de proposition d'activités nécessitant l'attention divisée
- ✓ Attention sélective : proposition de stimuli très différents à 3 ans, progression importante jusqu'à 9 ans
- ✓ Capacité attentionnelle avant 6 ans : 4 éléments (sur les modalités auditives ou visuelles)
- ✓ Prise en compte de la difficulté à mémoriser des représentations ressemblantes
- ✓ Connaissance des paradigmes facilitateurs de mémorisation
  - la rétention est proportionnelle à la pertinence et à la profondeur du traitement, à la stratégie du codage et aux efforts cognitifs associés
  - les répétitions sont fondamentales, un délai optimal entre elles est nécessaire pour l'efficacité de l'encodage
  - le caractère nouveau anecdotique apporte un élément de contraste facilitateur
  - la situation spatio-temporelle et affective (contexte, émotions) introduit un élément renforçateur
  - la reconnaissance est souvent moins coûteuse que l'évocation
- ✓ Prise en compte de la mémoire pratique, de la mémoire du savoir, de la mémoire ostensive

## **PARTIE IV : DISCUSSION**

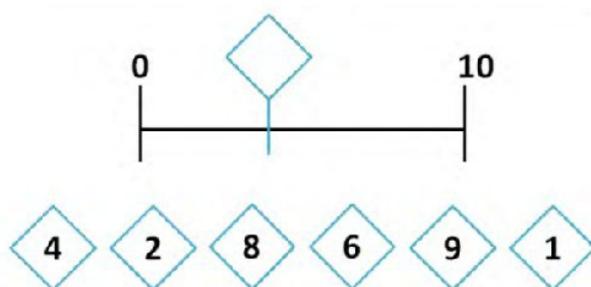
Notre entreprise au cours de ce mémoire a été de relier les mondes de la recherche et de la pédagogie dans le domaine de la cognition mathématique pour les élèves de cycle 1. Ce travail en orthophonie est en réalité un va-et-vient incessant entre ces deux thématiques finalement indissociables quand on se questionne sur les troubles de l'apprentissage. Le sujet s'inscrit dans les recommandations du CNESECO et fait écho à la mission du Conseil scientifique de l'éducation nationale mis en place en 2018 par le ministère concerné. L'idée initiale était d'effectuer un travail pour répertorier les éventuels pré-requis à une entrée fluide dans les mathématiques (pôle numérique) mais également dans le raisonnement pour aborder facilement ces compétences en classe de CP, sans que ces dernières soient troublées. L'objectif en est la prévention en orthophonie, c'est pourquoi nous avons construit des fiches d'accompagnement à destination des enseignants en école maternelle.

Tout d'abord, il faut souligner que bon nombres d'études citées dans ce mémoire font référence à des organisations d'épreuves et de tests bien loin de celles qui peuvent être mises en place dans la réalité de la classe. Ce paramètre est à juste titre important du point de vue des didacticiens. Néanmoins, les résultats de la recherche fondamentale ne peuvent être négligés et ils peuvent constituer quelquefois le point de départ d'une belle alliance comme dans le dispositif de recherche appliquée : ACE-Arithmécole. Quatre laboratoires universitaires en didactique des mathématiques et sciences cognitives y ont participé. Un travail coopératif entre ces chercheurs et des professeurs des écoles, des formateurs, des inspecteurs a permis la constitution de ressources innovantes. Plus de 400 classes réparties sur cinq académies l'ont mis en place depuis 2012-2013. Le fondement théorique scientifique de la pratique orthophonique peut donc jouer un rôle dans les projets éducatifs. D'ailleurs, la recherche MathPlay vient aussi appuyer ce postulat, ici les auteurs ont développé une série de jeux mathématiques qui ont été introduits huit semaines dans plusieurs classes issues des quatre pays participants (France, Belgique, Suisse, Luxembourg). Les effets de cette intervention ont été mesurés par un instrument de mesure à visée pédagogique. Ce test est inspiré du TEDI-MATH petits et du TEMA-3 (tests américain, troisième édition de 2003) qui sont des bilans orthophoniques et « orthopédagogiques » (Poncelet et al., 2020).

La plupart des chercheurs explorent les mécanismes fondamentaux explicatifs des compétences, les enseignants cherchent à améliorer directement ces compétences de façon fonctionnelle. Il apparaît plus efficace d'améliorer les aptitudes d'un enfant en comprenant les bases théoriques sous-jacentes ; le rôle de notre étude est de participer à cette interaction.

L'observation des programmes scolaires montre une progression à peu près régulière chez l'enfant tout-venant entre 3 et 6 ans. Le modèle du triple code de Dehaene est la référence en la matière. La stabilisation des connaissances de la numérosité de 10 unités, les décompositions associées, et les transcodages respectifs des trois représentations du nombre sont remarquablement mis en relief pour l'école maternelle. Toutefois, pour le cycle 1, nous avons pu montrer que les fondations de certaines compétences pourraient être davantage détaillées et que d'autres inexistantes pourraient y avoir leur place, comme par exemple le raisonnement, l'estimation (en contexte) ou les fonctions cognitives. Comme nous l'avons vu, il serait pertinent de tenir compte du modèle de Von Aster et Shalev (2007) qui décrit une hiérarchisation des aptitudes de l'enfant en fonction de son développement pour proposer certaines tâches aux jeunes élèves. De ce point de vue, le récapitulatif objectif de ces habiletés par Clements (Clements et al., 2003) pourrait également être utile aux enseignants.

L'analyse des programmes révèle un contraste d'exigences et d'organisation entre les classes de GS et de CP. En effet, si les mathématiques sont englobées dans tous les domaines d'apprentissage en maternelle, elles restent davantage cloisonnées en CP et l'importance de leur contenu ainsi que leur complexité graduelle est notable en regard de la GS. Une épreuve spécifique incluse dans les évaluations nationales d'entrée en CP a d'ailleurs été accueillie de manière très surprenante par les professeurs des écoles de cette classe en 2018. Les élèves devaient écrire le chiffre correspondant à la position donnée par le curseur surmonté d'un losange. C'est seulement en mesurant et en se livrant à un petit calcul de proportionnalité qu'ils

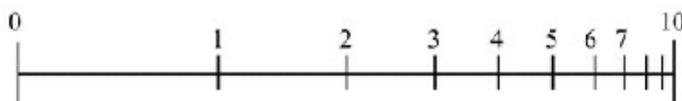


peuvent trouver la réponse, ou en s'étant entraînés à utiliser des règles graduées et à transposer l'image mentale de celle-ci sur un segment borné sans graduation, ou en ayant une très bonne approche de l'estimation de la numérosité en faisant correspondre un chiffre symbolique à l'estimation d'une longueur, ce qui nécessite une excellente représentation analogique, une compréhension de la sériation, une appréhension correcte de l'invariance des écarts entre deux unités. Cet enseignement n'est pas proposé en maternelle à notre connaissance. Il est donc nécessaire comme nous pouvons le voir au travers de cet exemple de coordonner à la fois théorie

neurocognitive, place dans les programmes et pratique didactique, d'autant qu'il n'y a pas d'évaluation nationale à la fin du cycle 1.

Cette tâche de « la ligne numérique » constitue l'activité d'estimation la plus « pure » pour Booth et Siegler (Booth & Siegler, 2006), c'est certainement pour cette raison que cette épreuve a été sélectionnée par les scientifiques français pour les évaluations nationales.

En ce qui concerne la ligne numérique mentale et l'idée d'innéisme de sa représentation façonnée ensuite par l'apprentissage académique ; les avis divergent. Il est possible que le traitement inné des collections par les bébés ne porte ni sur des quantités, ni sur des nombres, mais sur des ordres de grandeur (impliquant le SAN). Le SAN pourrait les traiter en définitive comme des grandeurs continues.



Cette figure illustre la représentation logarithmique des nombres de 0 à 10 entre 4 et 6 ans (petits nombres surreprésentés). Pendant la même période, elle passe à une représentation linéaire (les distances entre les nombres deviennent identiques) (Dehaene, (2012).

La théorie selon laquelle les connaissances numériques se développent en s'appuyant sur le système approximatif des ordres de grandeur, est remise en cause aujourd'hui. En effet, l'équipe de Lyons (Lyons et al., 2018) a montré que, chez des enfants de 5 ans, les progrès observés au niveau du système approximatif résultent des progrès de leur connaissances numériques alors que, en revanche, rien n'indique un effet inverse. En bref, ce serait l'apprentissage et l'enseignement des nombres qui permettraient la consolidation du SAN.

Le travail de l'estimation au plus jeune âge se révèle particulièrement intéressant, le logiciel « l'Estimateur » développé en 2008 (Villette, 2009) a permis d'entraîner depuis 2012 des élèves de CP et CE1 avec des effets probants. La version EXPE qui est la plus élaborée est destinée à un usage professionnel de rééducation des troubles du calcul (orthophonistes). L'intérêt ici est que les activités portent sur des jugements de : collections, nombres symboliques, additions, soustractions... présentées à l'oral et/ou à l'écrit. Certaines activités d'appréciation peuvent être effectuées en mode inverse. La portée de cet outil vise aussi les progrès en calcul. Les auteurs précisent que les interactions entre l'estimation, la récupération des faits numériques et la mobilisation des procédures de calcul sont complexes et méritent une analyse précise en tenant compte des étapes développementales de l'enfant . En maternelle, nous pensons qu'il est possible d'adapter un tel outil, en construisant des activités manipulatoires et écologiques.

L'objectif de proposer l'épreuve évoquée précédemment lors des évaluations de CP était de vérifier que la ligne numérique mentale est en train de se structurer ; pourtant cet apprentissage qui fait référence aux longueurs est complexe à acquérir même en cycle 3, d'où la suggestion de le travailler en amont. Toutefois, le positionnement de chiffres (ou nombres) sur une ligne horizontale peut rappeler le comptage-numérotage, ce qui finalement risque d'aller à l'encontre du but recherché induisant l'appréhension d'une estimation quantitative à partir d'une image mentale inappropriée, il faudra s'en prémunir.

D'autres constats nous ont amenés à nous questionner sur les capacités des enfants à transférer certaines notions, présentées comme des pré-requis, à des compétences numériques. Ainsi, les épreuves piagétienne de classification, sériation et inclusion des classes, capitales dans la construction du raisonnement et du nombre, ne trouvent pas forcément d'écho explicite auprès des enfants dans les tâches numériques. Cette question a été soulevée dans un autre domaine de compétence : l'échec du passage du graphisme à l'écriture (Zerbato-Poudoux, 1994). Il semble que la compartimentation de l'enseignement de certaines « matières » puisse empêcher les enfants à « transporter » certaines connaissances vers d'autres dont les interactions entre elles semblent pourtant triviales. C'est ce à quoi doivent s'attacher enseignants et rééducateurs. Cette observation pose le problème de l'efficacité d'une évaluation et d'une rééducation purement piagétienne pour répondre à un trouble de la cognition numérique. Comme il est possible de s'appuyer sur la notion de mesure pour représenter l'itération des unités (jetons les uns à la suite des autres uniformément espacés : bande ou règle), on pourrait envisager d'utiliser de la pâte à modeler pour illustrer l'inclusion des classes et comprendre que 1 est inclus dans 2, 4 dans 5...en s'appuyant sur la taille ou le poids, variant ainsi les associations : nombres/unités de mesure.



En situation écologique, les enfants appréhendent d'ailleurs très bien que si on fait une omelette avec 6 œufs, elle sera plus grande que si on réalise le même plat avec 3, si on utilise 2 verres de farine pour préparer un gâteau au chocolat, on obtiendra un plus petit gâteau que si l'on en met 4 dans le saladier... c'est évident...encore faut-il le verbaliser, le faire remarquer... En bref, il faut amener l'enfant à conscientiser que les nombres entretiennent entre eux des

relations et que leur signification découle d'opérations mentales fondées sur des manipulations réelles, il faut le leur prouver... La catégorisation en est un préalable nécessaire mais pas suffisant.

Pour le calcul, utilisé dans les devinettes simples, des travaux récents ont nuancé le caractère indispensable du recours aux doigts chez des enfants ordinaires (Lafay et al., 2013) ou des enfants avec un trouble sensoriel ou moteur (Crollen et al., 2011 ; Thevenot et al., 2014). Il est possible d'envisager que l'utilisation de la suite numérique mentalisée puisse conduire aux mêmes performances que l'utilisation digitale lors de procédures nécessitant le comptage pour résoudre un problème. L'importance des capacités d'utilisation de la bande numérique en classe dépendra aussi de la vigilance à expliciter le lien entre ordinal et cardinal. La surcharge cognitive lors de ces procédures est fréquente et chargée en contrôle inhibiteur. Pour les élèves qui peinent dans ces tâches, il est nécessaire de proposer dans un premier temps d'autres outils de résolution arithmétique pour mieux les accompagner (collections témoins). Une ancienne manière d'enseigner le comptage peut également être intéressante, elle élimine l'usage de « numéros » pour désigner une quantité, l'enfant entrant d'emblée dans le calcul : « 1 et 1 : 2 ; et 1 : 3 ; et 1 : 4... », l'énonciation du « et 1 » peut être remplacée par « plus 1 » (Penneçot & al., 1962).

Aujourd'hui, même si le calcul mental est préconisé dans les recommandations du CNECSO (2015) en CP pour gagner du temps et se défaire de la manipulation, il faut penser que cette évolution n'est possible que si l'élève a trouvé au cours des apprentissages premiers un support qu'il a réussi à investir pour mentaliser les images numériques et les procédures opérées sur elles.

Parallèlement, notre étude a montré l'importance de favoriser les liens entre les différentes représentations du nombre. D'après Chazoule et Thevenot (Chazoule & Thevenot, 2018) à trois ans, l'enfant réussit le mieux les épreuves analogiques, puis un an après, les symboles verbaux sont mieux connus.

Kolkman et ses collaborateurs (Kolkman et al., 2013) observent qu'à 4 et 5 ans, les trois systèmes de traitement numérique se développent séparément, puis ils se coordonnent vers 6 ans à travers un système de traitement global. après 6 ans, les enfants mettraient systématiquement en correspondance les représentations.

Ces interactions restent donc fondamentales pour leurs usages à l'école élémentaire. Au cycle 1, ces associations se coordonnent pour servir de base à la construction du sens du nombre.

Apprendre de la manière la plus pertinente possible à manipuler les symboles numériques peut être un axe privilégié pour les enseignants de l'école maternelle.

Notre travail a permis de relever le rôle de la représentation sous la forme de dessins ou de schémas pour illustrer des situations problèmes ; à 5 ans, les enfants sont capables de réaliser des dessins très simples. Il peut être bénéfique de proposer des devinettes comportant des objets faciles à dessiner pour réaliser ces représentations. Pour passer du dessin au schéma, la verbalisation par l'enseignant (ou les pairs) de l'efficacité de la résolution du problème (par exemple gain de temps) grâce au schéma peut être utile. L'enfant réalise alors que l'utilisation d'un système symbolique peut être un facilitateur, il s'en empare (traits, formes géométriques) pour représenter des objets. Cette étape est très intéressante mais demande un apprentissage à part entière. A cet égard, il n'est pas vraiment pertinent de demander à l'enfant « d'inventer ses propres systèmes symboliques » sous peine d'en retarder l'enseignement (Douady, 1984). A cet âge, il semble en outre que la réussite aux résolutions de petits problèmes soit corrélée à la réalisation de dessins au plus près de la réalité, la difficulté majeure résiderait davantage à représenter des images cinétiques ou des transformations (Jardin-Mathe, 2015). L'influence de la modalité de présentation du problème, verbale ou visuelle, est également une variable à considérer à l'école.

Il existe un cadre de référence à toute situation d'apprentissage (contenu, déroulement, enjeux). L'élève peut appréhender ce contexte en terme d'agréabilité, de pertinence et de ressources pour y entrer. Ce processus d'analyse génère des émotions et s'accompagne de régulations (inhibition ou contrôle plus ou moins forts) susceptibles de modifier le processus émotionnel et d'orienter l'activité d'apprentissage. Les émotions sont fonction des disciplines, des activités réalisées et de leur complexité, l'influence de ces dernières a été plusieurs fois mentionnée dans notre étude. De plus, on sait qu'elles peuvent jouer un rôle sur les fonctions exécutives (Cuisinier et al., 2015). C'est pourquoi, nous avons souhaité proposer un outil de repérage par le jeu, activité menée par une personne de référence au plus près du jeune élève à savoir son enseignant. Nous pensons que ce dispositif peut éviter un sentiment d'inquiétude durant une évaluation et favoriser des sensations plaisantes. Contrairement à la pratique orthophonique, le fait d'évaluer l'élève et de l'entraîner avec le même matériel est adapté aux activités scolaires.

Au cours de notre étude, nous avons pu pointer l'importance de facteurs cognitifs généraux dans les apprentissages. Les enseignants en sont certainement informés, mais ces

dernières n'ont pas de réelle place formelle dans les programmes scolaires. Pourtant l'impact des différentes mémoires, de l'attention et des fonctions exécutives sont indispensables aux compétences orales ou écrites et à leur manipulation (suite numérique ordinaire, faits arithmétiques, calculs simples). Le rôle de l'inhibition a été plusieurs fois mentionné, il semble par ailleurs qu'une grande sensibilité à l'interférence peut être liée à une difficulté à encoder les faits arithmétiques en mémoire à long terme (Noël et al., 2013).

Nous avons donc constaté que les capacités de mémoire à court terme et de mémoire de travail croissent très fortement entre 2 et 6 ans. Pour certains auteurs (Simon, 1997), le subitizing reposerait sur la comparaison de stimuli visuels avec des représentations mentales préexistantes, grâce à un processus de terme à terme qui sollicite la mémoire de travail. Pour Klein et Bisanz (Klein & Bisanz, 2000), l'impact des performances en mémoire de travail est plus faible vis-à-vis de la compréhension conceptuelle des mathématiques. En revanche son rôle est confirmé dans le calcul mental et la résolution de problèmes ou encore dans la capacité à retenir l'ordre des éléments d'une série verbale (suite numérique).

Les aptitudes visuo-spatiales, les capacités linguistiques mais également des situations socio-économiques précaires ou des erreurs pédagogiques peuvent aussi faire partie des facteurs mis en cause dans l'émergence des troubles de la cognition mathématique, il est important que les éducateurs en soient informés.

Par ailleurs, des travaux de thèse ont révélé un lien étroit entre le raisonnement déductif (transitif de type syllogisme : « si...alors ») et les capacités numériques des enfants. En effet les problèmes transitifs, et surtout ceux impliquant des relations linéaires, seraient représentés sous forme d'un continuum (Goodwin & Johnson-Laird, 2005). Les éléments des prémisses seraient positionnés sur une ligne mentale et la relation entre les éléments serait déduite par le balayage de cette ligne, révélant l'implication de mécanismes visuo-spatiaux. Les enfants dyscalculiques auraient une difficulté à se représenter les relations transitives catégoriques de façon spatiale, mais aussi des difficultés à former une représentation verbale. L'atteinte résiderait dans un déficit du traitement de l'ordinalité en mémoire de travail (informations ordinales de nature verbale et visuo-spatiale) (Schwartz, 2017).

Nous avons détaillé précédemment les capacités des jeunes enfants à investir des problèmes mettant en jeu le raisonnement, cette dernière étude souligne en outre l'importance du lien entre cette activité et les aptitudes mathématiques.

En ce qui concerne la cognition, quatre processus spécifiques ont été évoqués dans le mémoire. Pour chacun d'eux, *l'acquisition en est graduelle sur deux niveaux*. Le premier est considéré comme l'équipement neurophysiologique de base. Il prend naissance spontanément au cours du développement chez la plupart des enfants avant même l'entrée à l'école. Le second niveau est moins « inné » et plus dépendant des facteurs de l'environnement, *son accès nécessite un enseignement à travers une démarche explicite d'apprentissage à l'école*. Les tableaux suivants résument les aptitudes corrélées aux divers processus.

<b>Mise en place du processus séquentiel verbal : <u>savoir comment dire</u></b>	
<i>Permet d'apprendre par cœur l'alphabet, les mois de l'année, les tables d'opérations...</i>	
NIVEAU 1	NIVEAU 2
Vocabulaire de plus en plus étendu	Habiletés métaphonologiques
Echange factuel d'informations	Plaisir dans l'utilisation du langage
Maîtrise de la grammaire orale	Accès à une pensée logique
Mémoire de séquences verbales	Communication des idées
<b>Se développe en écoutant parler autour de soi, en lisant...</b>	

<b>Mise en place du processus séquentiel non verbal : <u>savoir comment faire</u></b>	
<i>Permet d'apprendre par cœur l'ordre des étapes requises pour effectuer une tâche...</i>	
NIVEAU 1	NIVEAU 2
Compétences en motricité fine	Repérage visuel analytique
Contrôle des gestes	Décomposition en séquences d'images
Maniement d'instruments	Réalisation de l'action par étapes
Posture corporelle	Raffinement de l'exécution
<b>Se développe à travers l'observation des gens qui agissent autour de nous et à travers sa pratique ...</b>	

<b>Mise en place du processus simultané verbal : <u>savoir organiser et créer à travers le langage</u></b>	
<i>Permet d'être sensible aux images, aux métaphores, aux émotions que véhicule un message oral ou écrit...</i>	
NIVEAU 1	NIVEAU 2
Transformation des mots de la langue en images mentales évocatrices de scènes colorées et vivantes.	Construction d'images symboliques et synthétiques à partir des idées
	Evocation spatiale
Evocations photographiques	Synthèse d'idées
	Résolution de problèmes raisonnés
	Emission d'inférences
	Conceptualisation
<b>Se développe en écoutant contes et récits fantastiques, en inventant ses propres histoires...</b>	

<b>Mise en place du processus simultané non verbal : <u>savoir organiser et créer à travers l'expérience</u></b>	
<i>Permet de s'organiser dans l'espace, de structurer son environnement, de mémoriser en gestalt, etc...</i>	
NIVEAU 1	NIVEAU 2
Perception des situations dans leur ensemble	Conscience de sa richesse intérieure
	Créativité
Intégration de la disposition spatiale des choses et des êtres	Originalité
	Découvertes et inventions
<b>Se développe par l'exposition à des stimulations riches et variées par la conquête de son autonomie physique, etc....</b>	

Les élèves s'appuieront sur ces stratégies cognitives avec plus ou moins de facilités, or les auteurs précisent qu'en réalité il est souvent plus rentable, pour augmenter les résultats scolaires d'un enfant, de développer chez lui des moyens compensatoires, plutôt que d'essayer

à tout prix de rééduquer les fonctions qui paraissent les moins efficaces chez lui. Ainsi, il est important que les enseignants connaissent les procédures d'étayages associées aux processus qui sont proposées par les neuropsychologues s'intéressant précisément aux troubles des apprentissages (Lussier & Flessas, 2009).

<b>Pédagogie préconisée pour augmenter l'efficacité</b>		
	<b>Des processus séquentiels</b>	<b>Des processus simultanés</b>
1	<b>Proposer préalablement au sujet un matériel à manipuler ou une situation concrète lui permettant de concevoir une relation entre le nouvel apprentissage proposé et ses expériences antérieures.</b>	<b>Décomposer pour lui le matériel en étapes successives. Proposer à chaque niveau des unités progressives dont la complexité dépendra du niveau de maîtrise de l'enfant et attirer son attention sur leur déroulement temporel.</b>
2	<b>Lui présenter une vue générale de l'activité à entreprendre, mettant l'accent sur l'objectif final ou sur le but qu'il doit viser dans sa réalisation.</b>	<b>L'amener à verbaliser ce qu'il doit retenir du déroulement de l'activité, en numérotant l'ordre des étapes à parcourir. S'aider au besoin de pictogrammes disposés de façon linéaire et illustrant chacun un détail visuel pertinent pour faciliter le rappel ordonné des étapes de déroulement en mobilisant la mémoire visuo-séquentielle.</b>
3	<b>Attirer son attention sur les détails importants qu'il ne doit pas négliger, ainsi que sur les étapes dont l'enchaînement est indispensable à la cohérence du produit final.</b>	<b>Répéter la démarche à partir de situations similaires jusqu'à ce que le sujet semble avoir bien automatisé le déroulement de l'activité et attirer son attention sur la similitude des situations, afin qu'il développe une capacité de généralisation.</b>
4	<b>L'engager à prendre le temps nécessaire pour se faire un plan de travail qui respecte toutes les exigences de la tâche et à le vérifier pour finaliser sa production.</b>	<b>L'amener à avoir une vue d'ensemble de la procédure acquise et à générer par lui-même des situations similaires.</b>
<i>L'étape initiale (1) et les étapes intermédiaires (2 et 3) visent à adapter le matériel et la matière en tenant compte des habiletés préférentielles propres au profil type de chacun. La dernière étape (4) vise, en revanche, la mise en place progressive des stratégies considérées comme initialement moins efficaces.</i>		

Au cours de ces deux dernières décennies, de nombreuses études ont visé à analyser les parcours des performances mathématiques à l'interface de l'école maternelle et de la scolarité élémentaire. Une période reste encore mal explorée, celle qui s'étale entre l'âge de 3 et 5 ans. Les données ont montré globalement que les scores des enfants en début de scolarité élémentaire (additions, soustractions, suites de nombres...) dépendent des performances antérieures aux épreuves non symboliques et de la connaissance symbolique des chiffres (Libertus et al., 2016 ; Hornung et al., 2014). Néanmoins, un grand nombre d'épreuves très hétérogènes avec des variables très diverses ont été analysées, et des disparités interindividuelles ont été rapportées.

Pagani et ses collaborateurs (Pagani et al., 2011) ont réalisé une étude longitudinale sur plus de mille enfants, ils ont montré que les scores en arithmétique évalués en GS sont ceux qui

prédissent le mieux les performances académiques ultérieures en CE1 dans tous les domaines d'apprentissage. Ils sont suivis de ceux de l'attention, des habiletés langagières et des habiletés motrices fines. Ces conclusions sont valables tant pour les populations francophones qu'anglophones.

Une méta-analyse américaine (Nelson et McMaster, 2019) a récemment été publiée, elle a porté sur 34 études s'intéressant à la prévention de l'apparition de troubles de la cognition mathématique. L'ensemble des analyses indique comme attendu que le développement des compétences en numératie dans les premières années de la scolarité est une période critique pour la réussite des enfants en mathématiques. Plusieurs conclusions émergent : il semble que les interventions testées soient plus efficaces chez les enfants présentant déjà des difficultés en mathématiques que chez les normo-apprenants. Pourtant dans la plupart des études, des effets importants à modérés sont repérables pour toutes les populations testées, les interventions pour les élèves de CP sont moins significatives.

Les composants clés de la contribution à la réussite des performances sont des *enseignements systématique et explicite (modélage de la part de l'enseignant, pratique guidée et feed-back correctif)* et ce, principalement chez des enfants présentant des troubles de l'apprentissage ou de simples difficultés. La majorité des recherches s'intéresse aux compétences numériques et aux relations que les nombres entretiennent entre eux, on en retrouve moins en ce qui concerne les aptitudes sur les opérations (le calcul). Ici, c'est sans doute parce que sur les 34 analyses, 7 seulement se rapportent à la classe de CP et également que *peu de recommandations relatives à ce domaine sont caractérisées dans les programmes institutionnels de l'école maternelle. Les pré-requis majeurs qui ressortent de cette méta-analyse sont le comptage terme à terme et la connaissance de la suite ordinale des nombres.* Ces résultats sont quelque peu inattendus et les auteurs précisent que si les compétences telles que le comptage, la connaissance des nombres, l'identification de nombres manquants, la discrimination des quantités, ne sont pas sur le devant de la scène, c'est que les informations ne sont pas suffisamment étayées pour en tirer des conclusions. Finalement, les résultats sont cohérents avec le fait que ces pré-requis phares sont considérés comme un préalable à toutes les autres activités citées par ailleurs. Les auteurs soulignent aussi que les actions sur le subitizing, les numéraux ordinaux ou l'estimation grâce à la ligne numérique ont des effets considérables sur les aptitudes mathématiques ultérieures.

L'accès à l'ensemble de ces informations dans la formation initiale et continue des professeurs des écoles est nécessaire. Intuitivement et avec professionnalisme, depuis longtemps déjà, les enseignants investissent certains domaines plébiscités par la communauté scientifique et utilisent des activités de choix (créées par eux ou retenues dans des manuels

appropriés). Avec l'obligation de scolarisation des enfants à l'école maternelle, la légitimité de leur enseignement est enfin attestée. Si la didactique peut mimer la recherche appliquée issue de la recherche fondamentale des neurosciences et de la psychologie cognitive, ce sont bien les décisions et les pratiques pédagogiques du maître qui vont conditionner la meilleure entrée possible dans les apprentissages de leurs élèves.

Ainsi, la réalisation des fiches d'accompagnement vise cet objectif. Ces dernières comportent un versant théorique et une partie pratique avec des exemples d'activités préconisées en direction des élèves de maternelle. Elles ont été élaborées à partir des revues de la littérature effectuées au cours de notre travail. Les bases scientifiques incluent les résultats obtenus par des équipes de chercheurs dans les domaines des neurosciences cognitives, de la psychologie cognitive développementale et de la didactique des mathématiques. Les enseignants y retrouveront des notions déjà abordées dans les classes, ce qui atteste de la congruence entre les programmes scolaires et le monde scientifique, mais également des remarques plus innovantes sur lesquelles ils pourront s'appuyer pour construire leur pédagogie. L'objectif est de sensibiliser les éducateurs à la prévention des troubles de la cognition mathématique, cette thématique étant largement questionnée dans la littérature.

En effet, comme nous l'avons vu dans la première partie du mémoire, les prises en charge dans ce domaine en orthophonie sont tardives, et enseignants et rééducateurs utilisent des outils « professionnels » communs principalement investis à l'école maternelle, à savoir les jeux. Ici, le jeu réel n'a pas été finalisé, il serait pourtant facile à mettre en place : il suffit d'utiliser les activités proposées dans les fiches d'accompagnement en jouant avec un jeu de plateau linéaire (pour 4 enfants) et un dé classique. La piste comporterait des cases colorées, les couleurs correspondant à celles des diverses fiches. L'enseignant peut ainsi se repérer, grâce au code couleur, dans les activités des domaines de la cognition mathématique numérique et du raisonnement qu'il souhaite travailler avec son groupe d'élèves. Le choix de ce jeu à composantes variées permet des activités de manipulation.

Cet outil fait écho aux fiches ressources pour les enseignants de la classe de CP retrouvées sur le site officiel du ministère de l'Éducation nationale : éducol. Celles-ci ont été élaborées dans le but de justifier le choix des épreuves sélectionnées pour les évaluations nationales de CP. Nous envisageons actuellement de contacter une conseillère pédagogique d'une équipe de circonscription (Éducation nationale) de Marseille pour proposer la diffusion de ce dispositif.

## PARTIE V : CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressées à la place de l'orthophonie dans la prévention des troubles de la cognition mathématique. Pour cela, il a été nécessaire de concilier les approches en neurocognition et en didactique pour ce domaine d'étude.

Nous avons traité les questions de recherche suivantes :

Q1 : Quels sont les points de convergence et de divergence éventuels entre cognition numérique et didactique des mathématiques en ce qui concerne la construction du nombre et le raisonnement à l'école maternelle ?

Q2 : Quel outil pourrait être utilisé par l'enseignant dans la recherche de difficultés et dans la mise en place de remédiations, mais aussi par l'orthophoniste dans le cas de difficultés persistantes ?

L'analyse des résultats a révélé un grand nombre de corrélations entre la théorie et la pratique, en effet les apprentissages ainsi que les sujets de recherche en didactique des mathématiques, se fondent sur les modèles théoriques actuels. Cependant, de nombreuses études portant sur les capacités des enfants entre 3 et 6 ans dans ce domaine montrent que l'on peut affiner les préconisations pédagogiques.

Ainsi, la revue de littérature nous a permis d'identifier des éléments clés de la construction du nombre et du raisonnement, nous nous sommes basés sur ces données pour élaborer cet outil qui a pris la forme de fiches d'accompagnement en direction des professeurs des écoles de grande section de maternelle. Les fiches balayent les domaines suivants : *les mots-nombres, les chiffres et les nombres écrits, le passage du nombre énoncé au nombre écrit, les collections de référence, le subitizing, l'estimation, le dénombrement, les petits problèmes, le raisonnement ((logico)-mathématique), les fonctions cognitives.*

En pratique, le dispositif est destiné, en premier lieu, à l'enseignant afin de lui permettre de définir un profil de compétence de l'élève en cognition mathématique. Il pourra alors mettre en place des aménagements ou des remédiations (dans le cadre de groupes de besoins ou lors des activités pédagogiques complémentaires, par exemple) si des difficultés apparaissent. Cette première utilisation permettrait de renforcer les habiletés des élèves pour initier plus facilement les apprentissages mathématiques du cycle 2. Parallèlement, les orthophonistes pourraient s'en saisir pour travailler les pré-requis à la numération et/ou au raisonnement en rééducation.

Ce travail s'inscrit à l'interface entre orthophonie et didactique de la cognition numérique. Il nous paraît important de développer des recherches interdisciplinaires incluant les professeurs des écoles de l'école maternelle pour envisager un partenariat et effectuer une étude sur les compétences socles de cette discipline.

L'hypothèse d'envisager la construction d'un bilan de prévention à partir de notre étude pourrait être retenue. Par analogie avec la mallette DPL3, située sur le versant du langage oral, il serait alors possible d'investiguer les pré-requis à la cognition mathématique. Par ailleurs, les éléments décrits pourraient avoir leur place dans la formation des enseignants et des rééducateurs.

Afin de faciliter les échanges entre ces professionnels et pour soutenir au mieux les élèves en difficulté, il serait bon de définir un corpus de connaissances et de compétences commun pour la formation initiale et continue des enseignants et des orthophonistes. Ce référentiel serait fondé à la fois sur la didactique des mathématiques et la cognition numérique.

## BIBLIOGRAPHIE

- Amalric, M., & Dehaene, S. (2018). Cortical circuits for mathematical knowledge : Evidence for a major subdivision within the brain's semantic networks. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 373(1740), 20160515.
- Anobile, G., Arrighi, R., & Burr, D. C. (2019). Simultaneous and sequential subitizing are separate systems, and neither predicts math abilities. *Journal of Experimental Child Psychology*, 178, 86-103. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2018.09.017>
- Atance, C. M., & O'Neill, D. K. (2001). Episodic future thinking. *Trends in cognitive sciences*, 5(12), 533-539.
- Baroody, A. J., & Gannon, K. E. (1984). The development of the commutativity principle and economical addition strategies. *Cognition and Instruction*, 1(3), 321-339.
- Barrouillet, P., & Camos, V. (2003). Savoirs, savoir-faire arithmétiques et leurs déficiences. In M. Kail et M. Fayol (Eds). In *Les sciences cognitives et l'école. La question des apprentissages* (PUF, p. 307-351). Presses Universitaires de France. <https://www.cairn.info/les-sciences-cognitives-et-l-ecole--9782130534976-page-305.htm>
- Barrouillet, P., Camos, V., Perruchet, P., & Seron, X. (2004). ADAPT : A developmental, asemantic, and procedural model for transcoding from verbal to Arabic numerals. *Psychological review*, 111(2), 368.
- Benoit, L., Lehalle, H., Molina, M., Tijus, C., & Jouen, F. (2013). Young children's mapping between arrays, number words, and digits. *Cognition*, 129(1), 95-101.
- Bideaud, J., & Houdé, O. (1989). Le développement des catégorisations :« capture » logique ou « capture » écologique des propriétés des objets? *L'Année psychologique*, 89(1), 87-123.
- Bideaud, J., & Lautrey, J. (1983). De la résolution empirique à la résolution logique du problème d'inclusion : Évolution des réponses en fonction de l'âge et des situations expérimentales. *Cahiers de Psychologie Cognitive/Current Psychology of Cognition*, 3(3), 295-326.
- Bideaud, J., & Lehalle, H. (2002). *Le développement des activités numériques chez l'enfant— Jacqueline Bideaud, Henri Lehalle* (Hermes Science Publications). <https://www.decitre.fr/livres/le-developpement-des-activites-numeriques-chez-l-enfant-9782746204003.html>
- Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental psychology*, 42(1), 189.
- Braine, M. D. (1990). *Reasoning, necessity and logic : Developmental perspectives* (Vol. 133157). Willis F. Overton.

- Briand, J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 41-76.
- Brissiaud, R. (2011). *Comment les enfants apprennent à calculer*. Retz.
- Brissiaud, R. (2018). Retrouver de bonnes performances en calcul une occasion ratée? *Revue politique et parlementaire*, 1089, 50-58.
- Bruner, J. S. (2010). *Pourquoi nous racontons-nous des histoires? : Le récit, au fondement de la culture et de l'identité*. Retz.
- Bugden, S., & Ansari, D. (2016). Probing the nature of deficits in the 'approximate number system' in children with persistent developmental dyscalculia. *Developmental science*, 19(5), 817-833.
- Bulletin officiel n°22 du 29 mai 2019*. (2019). Ministère de l'Éducation Nationale de la Jeunesse et des Sports.
- Butterworth, B., & Laurillard, D. (2010). Low numeracy and dyscalculia : Identification and intervention. *ZDM Mathematics Education*, 42(6), 527-539.
- Butterworth, B., Varma, S., & Laurillard, D. (2011). Dyscalculia : From brain to education. *science*, 332(6033), 1049-1053.
- Camos, V. (2003). Counting strategies from 5 years to adulthood : Adaptation to structural features. *European journal of psychology of education*, 18(3), 251-265.
- Cantlon, J. F., Brannon, E. M., Carter, E. J., & Pelphrey, K. A. (2006). Functional imaging of numerical processing in adults and 4-y-old children. *PLoS Biol*, 4(5), e125.
- Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380.
- Chazoule, G., & Thevenot, C. (2018). Apprendre à manipuler les symboles numériques In L. Ferrand, B. Lété, C. Thevenot. *Psychologie cognitive des apprentissages scolaires : Apprendre à lire, écrire, compter* (p. 265-278). Dunod.
- Chevalier, N. (2010). Les fonctions exécutives chez l'enfant : Concepts et développement. *Canadian Psychology/Psychologie Canadienne*, 51(3), 149.
- Clark, C. A., Sheffield, T. D., Wiebe, S. A., & Espy, K. A. (2013). Longitudinal associations between executive control and developing mathematical competence in preschool boys and girls. *Child development*, 84(2), 662-677.
- Clements, D. H. (1984). Training effects on the development and generalization of Piagetian logical operations and knowledge of number. *Journal of educational psychology*, 76(5), 766.
- Clements, D. H., Sarama, J., & DiBiase, A.-M. (2003). *Engaging young children in mathematics : Standards for early childhood mathematics education*. Routledge.

- Cowan, N., Morey, C. C., AuBuchon, A. M., Zwillig, C. E., & Gilchrist, A. L. (2010). Seven-year-olds allocate attention like adults unless working memory is overloaded. *Developmental science*, *13*(1), 120-133.
- Crollen, V., Mahe, R., Collignon, O., & Seron, X. (2011). The role of vision in the development of finger–number interactions : Finger-counting and finger-montring in blind children. *Journal of experimental child psychology*, *109*(4), 525-539.
- Crollen, V., Seron, X., & Noël, M.-P. (2011). Is finger-counting necessary for the development of arithmetic abilities? *Frontiers in Psychology*, *2*, 242.
- Cuisinier, F., Tornare, E., & Pons, F. (2015). Les émotions dans les apprentissages scolaires : Un domaine de recherche en émergence. *Revue de l'ANAE*, *139*, 527-536.
- Dajani, D. R., & Uddin, L. Q. (2015). Demystifying cognitive flexibility : Implications for clinical and developmental neuroscience. *Trends in neurosciences*, *38*(9), 571-578.
- Dehaene, S. (2012). Intuition en mathématiques et les démarches algorithmiques que sait-on en neurosciences? *Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège*, *8*.
- Dehaene, Stanislas. (2007). *Neurones de la lecture (Les) : La nouvelle science de la lecture et de son apprentissage*. Odile jacob.
- Dehaene, Stanislas, & Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical cognition*, *1*(1), 83-120.
- Dempster, F. N., & Brainerd, C. J. (1995). New perspectives on interference and inhibition in cognition : Final comments. In *Interference and inhibition in cognition* (p. 401-407). Elsevier.
- Di Luca, S., Lefèvre, N., & Pesenti, M. (2010). Place and summation coding for canonical and non-canonical finger numeral representations. *Cognition*, *117*(1), 95-100.
- Di Luca, S., & Pesenti, M. (2011). Finger numeral representations : More than just another symbolic code. *Frontiers in Psychology*, *2*, 272.
- Diamond, ADELE. (2016). Why improving and assessing executive functions early in life is critical. In J. A. Griffin, P. McCardle, & L. S. Freund (Eds.) (p.11-43). In *Executive function in preschool-age children : Integrating measurement, neurodevelopment, and translational research* (American Psychological Association.). American Psychological Association.
- Diamond, Adele, Prevor, M. B., Callender, G., & Druin, D. P. (1997). Prefrontal cortex cognitive deficits in children treated early and continuously for PKU. *Monographs of the society for research in child development*, i-206.
- Dias, M. de G., & Harris, P. L. (1988). The effect of make-believe play on deductive reasoning. *British journal of developmental psychology*, *6*(3), 207-221.

- Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire*. [PhD Thesis]. Université Paris VII.
- Duval, S., Montminy, N., & Gaudette-Leblanc, A. (2018). *Perspectives théoriques à l'égard des fonctions exécutives en contexte éducatif chez les enfants d'âge préscolaire*. Neuroeducation.
- Evans, J. S. B. (1982). *The psychology of deductive reasoning*. Law Book Co of Australasia.
- Fayol Michel, M. (1985). Nombre, numération et dénombrement : Que sait-on de leur acquisition? *Revue française de pédagogie*, 59-77.
- Fischer, J.-P. (2007). ANAE N° 102—La Dyscalculie. *A.N.A.E.* [http://anae-revue.over-blog.com/pages/ANAE\\_N\\_102\\_La\\_Dyscalculie-2695637.html](http://anae-revue.over-blog.com/pages/ANAE_N_102_La_Dyscalculie-2695637.html)
- Fischer, J.-P. (2011). Nouveaux éclairages sur l'écriture en miroir des enfants de l'école maternelle. *Revue française de pédagogie. Recherches en éducation*, 175, 99-112.
- Flessas, J. (1997). L'impact du style cognitif sur les apprentissages. *Les difficultés d'apprentissage, Revue ACELF*, 25(2), 25-2.
- Fricke, S. (2016). *Boosting Early Language as a Foundation for Literacy—Essential but neither Simple nor Easy*.
- Fuson, K. C. (2012). *Children's counting and concepts of number*. Springer Science & Business Media.
- Fuson, K. C., Secada, W. G., & Hall, J. W. (1983). Matching, counting, and conservation of numerical equivalence. *Child Development*, 91-97.
- Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, 28(2), 130-162.
- Garon, N., Bryson, S. E., & Smith, I. M. (2008). Executive function in preschoolers : A review using an integrative framework. *Psychological bulletin*, 134(1), 31.
- Gathercole, S. E. (1998). The development of memory. *Journal of child psychology and psychiatry*, 39(1), 3-27.
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Bailey, D. H. (2012). Mathematical cognition deficits in children with learning disabilities and persistent low achievement : A five-year prospective study. *Journal of educational psychology*, 104(1), 206.
- Geary, D. C., vanMarle, K., Chu, F. W., Rouder, J., Hoard, M. K., & Nugent, L. (2018). Early conceptual understanding of cardinality predicts superior school-entry number-system knowledge. *Psychological science*, 29(2), 191-205.

- Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1986). *The child's understanding of number*. Harvard University Press.
- Goodwin, G. P., & Johnson-Laird, P. N. (2005). Reasoning about relations. *Psychological review*, 112(2), 468.
- Gréco, Pierre, & Morf, Albert. (1962). *Structures numériques élémentaires* (Vol. 13). Presses Universitaires de France.
- Grégoire, M., G. (2015). *Le développement de la fonction visuelle chez l'enfant : Étude bibliographique* [Mémoire d'orthoptie]. Université d'Auvergne.
- Habermann, S., Donlan, C., Göbel, S. M., & Hulme, C. (2020). The critical role of Arabic numeral knowledge as a longitudinal predictor of arithmetic development. *Journal of Experimental Child Psychology*, 193, 104794. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2019.104794>
- Halberda, J., & Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the "Number Sense": The Approximate Number System in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental psychology*, 44(5), 1457.
- Harris, P. L. (2002). Penser à ce qui aurait pu arriver si... *Enfance*, 54(3), 223-239.
- Hauser, M. D., MacNeilage, P., & Ware, M. (1996). Numerical representations in primates. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 93(4), 1514-1517.
- Haute Autorité de santé. (2017). Comment améliorer le parcours de santé d'un enfant avec troubles spécifiques du langage et des apprentissages. Consulté à l'adresse [https://webzine.has-sante.fr/portail/upload/docs/application/pdf/2018-01/guide\\_tsla\\_vf.pdf](https://webzine.has-sante.fr/portail/upload/docs/application/pdf/2018-01/guide_tsla_vf.pdf).
- Hawkins, J., Pea, R. D., Glick, J., & Scribner, S. (1984). « Merds that laugh don't like mushrooms »: Evidence for deductive reasoning by preschoolers. *Developmental Psychology*, 20(4), 584.
- Hodent, C., Bryant, P., & Houde, O. (2005). Language-specific effects on number computation in toddlers. *Developmental Science*, 8(5), 420-423.
- Hongwanishkul, D., Happaney, K. R., Lee, W. S., & Zelazo, P. D. (2005). Assessment of hot and cool executive function in young children: Age-related changes and individual differences. *Developmental neuropsychology*, 28(2), 617-644.
- Hornung, C., Schiltz, C., Brunner, M., & Martin, R. (2014). Predicting first-grade mathematics achievement: The contributions of domain-general cognitive abilities, nonverbal number sense, and early number competence. *Frontiers in psychology*, 5, 272.
- Houdé, O., Zago, L., Moutier, S., Crivello, F., Mellet, E., Pineau, A., Mazoyer, B., & Tzourio-Mazoyer, N. (2003). 42. Can emotions help us reason? Two positron emission tomography studies using a training paradigm. *Brain and Cognition*, 51(2), 233-234.

- Houdé, Olivier. (1997). Numerical development : From the infant to the child. Wynn's (1992) paradigm in 2-and 3-year olds. *Cognitive Development*, 12(3), 373-391.
- Houdé, Olivier, & Moutier, S. (1996). Deductive reasoning and experimental inhibition training : The case of the matching bias. *Cahiers de Psychologie Cognitive/Current Psychology of Cognition*, 15(4), 409-434.
- Jara-Ettinger, J., Piantadosi, S., Spelke, E. S., Levy, R., & Gibson, E. (2017). Mastery of the logic of natural numbers is not the result of mastery of counting : Evidence from late counters. *Developmental science*, 20(6), e12459.
- Jardin-Mathe, J. (2015). *La schématisation dans la résolution des problèmes arithmétiques en Grande Section de Maternelle*. ESPE Académie de Lille.
- J'enseigne au cycle 1*. (2020). éducol | Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports - Direction générale de l'enseignement scolaire. <https://eduscol.education.fr/83/j-enseigne-au-cycle-1>
- J'enseigne au cycle 2*. (2020). éducol | Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports - Direction générale de l'enseignement scolaire. <https://eduscol.education.fr/84/j-enseigne-au-cycle-2>
- Johansson, B. S. (2005). Number-word sequence skill and arithmetic performance. *Scandinavian Journal of Psychology*, 46(2), 157-167.
- Kirby, J. R., & Das, J. P. (1990). A cognitive approach to intelligence : Attention, coding and planning. *Canadian Psychology/Psychologie canadienne*, 31(4), 320.
- Klein, J. S., & Bisanz, J. (2000). Preschoolers doing arithmetic : The concepts are willing but the working memory is weak. *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale*, 54(2), 105.
- Kolkman, M. E., Kroesbergen, E. H., & Leseman, P. P. (2013). Early numerical development and the role of non-symbolic and symbolic skills. *Learning and instruction*, 25, 95-103.
- Lafay, A., Saint-Pierre, M.-C., & Macoir, J. (2014). *L'évaluation des habiletés mathématiques de l'enfant : Inventaire critique des outils disponibles*. 116.
- Lafay, A., Thevenot, C., Castel, C., & Fayol, M. (2013). The role of fingers in number processing in young children. *Frontiers in psychology*, 4, 488.
- Lecointre, A. S., Lépine, R., & Camos, V. (2011). Développement et troubles des processus de quantification. In M. Habib, M. P. Noël, F. George-Poracchia, & V. Brun. In *Calcul et dyscalculies. Des modèles à la rééducation* (p. 17-28). Elsevier Masson.
- Lemoine-Lardennois, C., Doré-Mazars, K., & Alahyane, N. (2016). La mise en place des fonctions visuelles et oculomotrices chez le jeune enfant. *Contraste*, 1, 17-37.
- Lewis, K. E., & Fisher, M. B. (2016). Taking Stock of 40 Years of Research on Mathematical Learning Disability : Methodological Issues and Future Directions. *Journal for Research*

- Libertus, M. E., Odic, D., Feigenson, L., & Halberda, J. (2016). The precision of mapping between number words and the approximate number system predicts children's formal math abilities. *Journal of Experimental Child Psychology*, 150, 207-226.
- Luria, A. R. (1970). The functional organization of the brain. *Scientific American*, 222(3), 66-79.
- Lussier, F., & Flessas, J. (2009). *Neuropsychologie de l'enfant-Troubles développementaux et de l'apprentissage Paris* (Dunod).
- Lyons, I. M., Bugden, S., Zheng, S., De Jesus, S., & Ansari, D. (2018). Symbolic number skills predict growth in nonsymbolic number skills in kindergarteners. *Developmental psychology*, 54(3), 440.
- Markovits, H., Schleifer, M., & Fortier, L. (1989). Development of elementary deductive reasoning in young children. *Developmental Psychology*, 25(5), 787.
- Masten, A. S., Herbers, J. E., Desjardins, C. D., Cutuli, J. J., McCormick, C. M., Sapienza, J. K., Long, J. D., & Zelazo, P. D. (2012). Executive function skills and school success in young children experiencing homelessness. *Educational Researcher*, 41(9), 375-384.
- Matheron, Y. (2000). *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée : Quelques exemples* [PhD Thesis]. Aix-Marseille 1.
- Mazeau, M. (2017). Du logico-mathématique aux dyscalculies : Quelles implications pratiques. *Rééducation orthophonique*, 270.
- Mazeau, Michèle. (1997). *Dysphasies, troubles mnésiques, syndrome frontal chez l'enfant atteint de lésions cérébrales précoces : Du trouble à la rééducation*. Masson.
- Mazeau, Michèle, & Moret, A.-C. (2013). *Le syndrome dys-exécutif chez l'enfant et l'adolescent : Répercussions scolaires et comportementales*. Elsevier Masson.
- McGregor, K. K., Langenfeld, N., Van Horne, S., Oleson, J., Anson, M., & Jacobson, W. (2016). The university experiences of students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 31(2), 90-102.
- Meltzer, L., & Krishnan, K. (2007). Executive function difficulties and learning disabilities. In *Executive function in education : From theory to practice* (Guilford Press, p. 77-105). The Guilford Press New York, NY.
- Miyake, A., Friedman, N. P., Emerson, M. J., Witzki, A. H., Howerter, A., & Wager, T. D. (2000). The unity and diversity of executive functions and their contributions to complex "frontal lobe" tasks : A latent variable analysis. *Cognitive psychology*, 41(1), 49-100.

- Morellato, M. (2017). *Travail coopératif entre professeurs et chercheurs dans le cadre d'une ingénierie didactique sur la construction des nombres : Conditions de la constitution de l'expérience collective* [PhD Thesis]. Université Bretagne Loire.
- Morgenstern, A., Leroy, M., & Mathiot, E. (2008). Le pointage chez l'enfant : Du gestuel au linguistique. *Congrès Mondial de Linguistique Française*, 164.
- Moshman, D. (2004). : From inference to reasoning : The construction of rationality. *Thinking & Reasoning*, 10(2), 221-239.
- Negen, J., & Sarnecka, B. W. (2012). Number-concept acquisition and general vocabulary development. *Child development*, 83(6), 2019-2027.
- Nelson, G., & McMaster, K. L. (2019). The effects of early numeracy interventions for students in preschool and early elementary : A meta-analysis. *Journal of Educational Psychology*, 111(6), 1001.
- Noël, Marie-Pascale, Rousselle, L., & De Visscher, A. (2013). La dyscalculie développementale : À la croisée de facteurs numériques spécifiques et de facteurs cognitifs généraux. *Développements*, 2, 24-31.
- Noël, M.-P. (2005). Déficits cognitifs de base dans la dyscalculie développementale. *ANAE Approche Neuropsychologique des Apprentissages chez l'Enfant*.
- Nuerk, H.-C., Weger, U., & Willmes, K. (2001). Decade breaks in the mental number line? Putting the tens and units back in different bins. *Cognition*, 82(1), B25-B33.
- Pagani, L. S., Fitzpatrick, C., Belleau, L., & Janosz, M. (2011). Prédire la réussite scolaire des enfants en quatrième année à partir de leurs habiletés cognitives, comportementales et motrices à la maternelle. *Étude longitudinale du développement des enfants du Québec (ÉLDEQ 1998-2010)–De la naissance à 10 ans*, 1-12.
- Penneçot, R., Brandicourt, R., & Brandicourt, S. (1962). *Problèmes et calculs, arithmétique, cours moyen* (Bourrelrier).
- Peterson, S. A., & Simon, T. J. (2000). Computational evidence for the subitizing phenomenon as an emergent property of the human cognitive architecture. *Cognitive Science*, 24(1), 93-122.
- Piaget, J. (1967). *La psychologie de l'intelligence* (Armand Colin).
- Piaget, J., & García, R. (1987). *Hacia una lógica de significaciones*. Gedisa.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1947). Diagnosis of mental operations and theory of the intelligence. *American Journal of mental deficiency*, 51(3), 401-406.
- Piaget, J., & Szeminska, A. (1941). *La genèse du nombre chez l'enfant*. (Delachaux et Niestlé). Delachaux, Niestlé.
- Piazza, M. (2011). Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations. *Space, time and number in the brain*, 267-285.

- Piazza, M., Pica, P., Izard, V., Spelke, E. S., & Dehaene, S. (2013). Education enhances the acuity of the nonverbal approximate number system. *Psychological science*, 24(6), 1037-1043.
- Polledri, C. (2015). *Intérêt d'un entraînement de l'estimation numérique dans les troubles logico-mathématiques* [Université de Nice Sophia Antipolis]. <https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01498912>
- Poncelet, D., de Chambrier, A.-F., Tinnes-Vigne, M., Baye, A., Tazouti, Y., & Dierendonck, C. (2020). Pratiques éducatives parentales et premières compétences en numération des enfants d'âge préscolaire selon le niveau socio-économique et culturel des familles. *La revue internationale de l'éducation familiale*, 1, 119-149.
- Pouch, F. B., & Hauville, M.-A. C. (2013). *Habiletés numériques à l'entrée en maternelle et facteurs prédictifs de leur évolution* [PhD Thesis]. Paris VI Pierre et Marie Curie.
- Power, R. J. D., & Dal Martello, M. F. (1990). The dictation of Italian numerals. *Language and Cognitive processes*, 5(3), 237-254.
- Recommandations-du-jury.pdf*. (s. d.). Consulté 3 mai 2021, à l'adresse <http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/11/Recommandations-du-jury.pdf>
- Ress\_c1\_jouer\_exploration\_474564.pdf*. (s. d.). Consulté 3 mai 2021, à l'adresse [https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Apprendre/56/4/Ress\\_c1\\_jouer\\_exploration\\_474564.pdf](https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Apprendre/56/4/Ress_c1_jouer_exploration_474564.pdf)
- Roberts Jr, R. J., & Pennington, B. F. (1996). An interactive framework for examining prefrontal cognitive processes. *Developmental neuropsychology*, 12(1), 105-126.
- Roggeman, C., Verguts, T., & Fias, W. (2007). Priming reveals differential coding of symbolic and non-symbolic quantities. *Cognition*, 105(2), 380-394.
- Rousselle, L., & Noël, M.-P. (2008). The development of automatic numerosity processing in preschoolers: Evidence for numerosity-perceptual interference. *Developmental psychology*, 44(2), 544.
- Rousselle, L., & Pesenti, M. (2005). Les procédures de quantification chez l'enfant. In « *Troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant.* »- p. 91-108 A. Van Hout, C. Meljac & J.P. Fischer (Eds.) (Elsevier Masson).
- Ruff, H. A., & Lawson, K. R. (1990). Development of sustained, focused attention in young children during free play. *Developmental psychology*, 26(1), 85.
- Saad, L. (2010). *Transcodage des nombres chez l'enfant : Approche développementale, inter-linguistique et différentielle* [PhD Thesis]. Université de Bourgogne.
- Schwartz, F. (2017). *Raisonnement transitif et dyscalculie : Étude par IRMf chez l'enfant* [PhD Thesis]. Université de Lyon.
- Seron, X., & Deloche, G. (1994). Les troubles du calcul et du traitement des nombres. *Seron X, Jeannerod M, eds. Neuropsychologie Humaine. Liège: Mardaga*, 439-451.

- Shrager, J., & Siegler, R. S. (1998). SCADS : A model of children's strategy choices and strategy discoveries. *Psychological science*, 9(5), 405-410.
- Shusterman, A., Slusser, E., Halberda, J., & Odic, D. (2016). Acquisition of the Cardinal Principle Coincides with Improvement in Approximate Number System Acuity in Preschoolers. *PloS One*, 11(4), e0153072. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0153072>
- Simon, T. J. (1997). Reconceptualizing the origins of number knowledge : A “non-numerical” account. *Cognitive development*, 12(3), 349-372.
- Simpson, A., & Riggs, K. J. (2007). Under what conditions do young children have difficulty inhibiting manual actions? *Developmental Psychology*, 43(2), 417.
- Singley, A. T. M., & Bunge, S. A. (2014). Neurodevelopment of relational reasoning : Implications for mathematical pedagogy. *Trends in Neuroscience and Education*, 3(2), 33-37.
- Sobel, D. M., Buchanan, D. W., Butterfield, J., & Jenkins, O. C. (2010). Interactions between causal models, theories, and social cognitive development. *Neural Networks*, 23(8-9), 1060-1071.
- Soto-Calvo, E., Simmons, F. R., Willis, C., & Adams, A.-M. (2015). Identifying the cognitive predictors of early counting and calculation skills : Evidence from a longitudinal study. *Journal of Experimental Child Psychology*, 140, 16-37. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2015.06.011>
- Spelke, E. S. (2017). Core knowledge, language, and number. *Language Learning and Development*, 13(2), 147-170.
- Spellacy, F., & Peter, B. (1978). Dyscalculia and elements of the developmental Gerstmann syndrome in school children. *Cortex*, 14(2), 197-206.
- Stacey, K. (2006). *What is mathematical thinking and why is it important*. Citeseer.
- Szűcs, D., & Goswami, U. (2013). *Developmental dyscalculia : Fresh perspectives*. Elsevier.
- Thevenot, C. (2014). La relation entre doigts et nombres : Que peuvent nous apprendre les enfants présentant une hémiplégié? *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, 128.
- Vergnaud, G. (1990). Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives. *Développement et fonctionnement cognitifs*, 261-277.
- Vilette, B. (2009). L'Estimateur : Un programme de remédiation des troubles du calcul: La dyscalculie développementale. *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, 102, 165-170.
- Vilette, Bruno. (1994). *Des processus de comparaison aux processus de transformation. Etude développementale de la conservation des quantités discrètes* [PhD Thesis]. Lille 3.

- Von Aster, M. G., & Shalev, R. S. (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Developmental medicine & child neurology*, 49(11), 868-873.
- Wason, P. C., & Johnson-Laird, P. N. (1972). *Psychology of reasoning : Structure and content* (Vol. 86). Harvard University Press.
- Yuan, L., Prather, R. W., Mix, K. S., & Smith, L. B. (2019). Preschoolers and multi-digit numbers : A path to mathematics through the symbols themselves. *Cognition*, 189, 89-104.
- Zerbato-Poudou, M.-T. (1994). *De la trace au sens : Rôle de la médiation sociale dans l'apprentissage de l'écriture chez de jeunes enfants de maternelle* [PhD Thesis]. Aix-Marseille 1.

## ANNEXES

### Typologie des comptines (chaîne numérique orale)

Répétitives sans segmentation	J'ai fait une pirouette, [undeuxtroisquatrecinqsixsept],
Segmentation par 3	[undeuxtrois] nous irons au bois
Segmentation par 2	[undeux] voilà les œufs
Segmentation par 1	[un] nez, [deux] nez, [trois] nez
Cumulative	[un] elle a un œil brun [undeux] elle a des plumes bleues
Anti-cumulative	[undeuxtroisquatrecinqsixsept] j'ai des trous à mes chaussettes, [undeuxtroisquatrecinqsix] j'ai mangé l'écrevisse
À l'envers	Dans la forêt du dolmen vert, il y a [dix] ours qui marchent à l'envers, [neuf] petits daims plein de lumière [...] et [zéro] sorcière
Segmentation par dix	Qui compte jusqu'à dix? C'est Alice ; qui compte jusqu'à vingt? C'est Germain
Augmentation par ajout de plusieurs éléments	J'ai une main, elle a cinq doigts, en voici deux, en voici trois.

**Traduction du tableau extrait du livre : « Engaging young children in mathematics : Standards for early childhood education » (Clements, Sarama, & Dibiase, 2004, p. 178-183).**

Compétences	Ages													
	2	*	3	*	4	*	5	*	6	*	7	*		
<b>Représente et dénombre de petites collections de 1 à 4 items sans comptage</b>														
1	Subitise sans verbalisation 1 ou 2 items	x	x	x										
2	Subitise en verbalisant, reconnaît en distinguant (pointe) des collections de 1 et 2 items, utilise les mots nombres un et deux	x	x	x										
3	Idem jusqu'à quatre		x	x	x									
<b>Représente et crée de petites collections de 1 à 4 items sans comptage</b>														
4	Produit un ou deux items sans verbalisation	x	x	x										
5	Répond à une réponse verbale en donnant deux objets, en levant deux doigts	x	x	x										
6	Idem jusqu'à 4 objets		x	x	x									
<b>Enchaîne les mots nombres ensemble pour créer la chaîne numérique</b>														
7	Utilise une chaîne non standardisée	x	x											
8	Commence la chaîne par « un »	x	x											
9	Cite les nombres dans l'ordre correct jusqu'à 10	x	x	x	x	x								
10	Récite jusqu'à 19			x	x	x	x	x						
11	Utilise des patterns répétitifs pour réciter la chaîne jusqu'à 29				x	x	x	x	x					

<b>Utilise la chaîne numérique pour énumérer des collections (identification du nombre d'objets)</b>														
12	Associe un mot nombre de la chaîne numérique avec chaque objet d'une petite collection	x	x											
13	Construit le concept de cardinalité en comprenant que le dernier mot nombre énoncé représente le total		x	x	x									
14	Enumère correctement jusqu'à 5 objets				x	x	x	x						
15	Reconnaît la conservation				x	x	x	x						
16	Reconnaît le principe de non pertinence de l'ordre					x	x	x	x					
17	Enumère les collections jusqu'à 10						x	x	x					
18	Enumère les collections jusqu'à 20							x	x	x				
<b>Utilise la chaîne numérique pour élaborer des collections d'une taille spécifique</b>														
19	Construit le concept de cardinal en comptant		x	x	x									
20	Produit une collection d'objets jusqu'à 5 sur demande verbale			x	x	x								
21	Jusqu'à 10						x	x	x					
22	Jusqu'à 20							x	x	x				
23	Appréhende la sécabilité de la chaîne numérique en commençant par un autre nombre que « un »					x	x	x						
<b>Cite le nombre spécifique venant après un mot nombre précis dans la chaîne numérique</b>														
24	Chaîne de 1 à 9 en commençant par 1 (1, 2, 3, 4, 5, ?)				x	x	x							
25	Dans une partie de la chaîne abrégée (3, 4, 5,?)				x	x	x							
26	A n'importe quelle place (entre 1 et 9)					x	x	x						
27	Entre 10 et 28						x	x	x					
<b>Cite le nombre qui précède un nombre précis dans la chaîne numérique</b>														
28	Entre 2 et 10					x								
29	Entre 11 et 29					x	x	x						
<b>Compte à rebours</b>														
30	A partir de 5					x	x	x						
31	A partir de 10						x	x	x	x				
32	A partir de 20							x	x	x				



# Typologie des problèmes de Vergnaud (addition et soustraction)

Typologie des problèmes additifs et soustractifs (classification de Gérard Vergnaud)

			Exemples
<b>Composition de deux états</b> On considère les situations qui portent sur 3 grandeurs où 2 d'entre elles se composent pour donner la 3ème.	<b>Recherche du composé</b>		Problèmes ternaires A midi, j'ai bu 2 verres d'eau et 1 verre de jus d'orange. Combien de verres ai-je bu en tout ?  Dans notre cour, nous avons 5 bancs. Pendant la récréation, 3 bancs sont occupés par des enfants. Combien de bancs sont vides ?
	<b>Recherche d'1 partie</b>		
<b>Transformation d'un état</b> Un état initial subit une transformation pour aboutir à un état final.	<b>Recherche de l'état final</b>		Problèmes ternaires Tu avais 2 petites voitures. Je t'en donne encore une. Combien en as-tu maintenant ?  Pose 5 cubes sur la table. Que dois-tu faire pour en avoir 7 ?  J'ajoute 3 bonbons dans la boîte. Maintenant j'en ai 5. Combien la boîte contenait-elle déjà de bonbons ?
	<b>Recherche de la transformation</b>		
	<b>Recherche de l'état initial</b>		
<b>Comparaison d'états</b> On compare 2 états. Dans ce type de problème, on trouve presque toujours les expressions « de plus/de moins »	<b>Recherche de l'un des états</b>		Problèmes ternaires Alexis a 3 ans. Il a 1 an de plus (ou de moins) que sa sœur. Quel est l'âge de sa sœur ?  Sur une assiette, il y a 2 gâteaux. Sur une autre, il y en a 5. Combien y a-t-il de gâteaux de plus sur la 2ème assiette ?
	<b>Recherche de la comparaison</b>		

## RESUME

L'approche dominante de la dyscalculie est fondée sur le fonctionnement cognitif de l'individu. Pourtant, la recherche en cognition mathématique révèle encore des incertitudes vis-à-vis de cette terminologie car aucune définition ne fait réellement consensus. Un tel trouble spécifique des apprentissages semble être dépisté par les orthophonistes tardivement dans la scolarité de l'enfant. D'autre part, même si un trouble n'est pas diagnostiqué, il est possible d'être face à des difficultés en mathématiques dont l'issue pourrait être défavorable. L'enjeu de la prévention orthophonique dans ce champ d'action est donc important. Ainsi, nous avons investigué la question de l'existence de pré-requis nécessaires à la meilleure entrée possible dans le monde de la numération et du raisonnement pour des enfants de 5 ans. La double revue de la littérature investissant ces deux thèmes a permis d'articuler les données issues des fondements de la pratique orthophonique et celles résultant de la didactique des mathématiques. Nous avons ainsi développé un dispositif de repérage des difficultés en mathématiques pour des enfants scolarisés en grande section de maternelle. Cet outil prend la forme de fiches d'accompagnement, il est en premier lieu destiné aux enseignants et vise l'observation des compétences de l'élève pour élaborer un plan de remédiation. Il s'inscrit dans une démarche d'évaluation formative par le jeu. Parallèlement, les orthophonistes pourraient l'utiliser comme support pour travailler les bases de la construction du nombre et du raisonnement mathématique en rééducation. Cette étude a permis d'établir des critères spécifiques propices à la réussite des jeunes élèves en cognition mathématique ; ces derniers pourraient être ultérieurement partagés et diffusés dans les formations des professionnels en charge de l'élève.

**Mots-clefs :** cognition mathématique, troubles des apprentissages, prévention, orthophonie, pré-requis, école maternelle