



**HAL**  
open science

# La manipulation en résolution de problèmes additifs de fractions au cycle 3

Laurane François

► **To cite this version:**

Laurane François. La manipulation en résolution de problèmes additifs de fractions au cycle 3. Education. 2021. dumas-03353925

**HAL Id: dumas-03353925**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-03353925v1>**

Submitted on 11 Apr 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **La manipulation en résolution de problèmes additifs de fractions au cycle 3**

*François Laurane*

# MASTER 2 MEEF

Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation

Mention **Premier degré**

*Année universitaire 2020 - 2021*

**MÉMOIRE  
UE3 - UE5  
SEMESTRE 4  
SESSION 1**

Nom et prénom de l'étudiant : FRANÇOIS Laurane

Site de formation : Arras

Section : 7

Séminaire suivi : Enseigner et apprendre les mathématiques à l'école

Directeur de mémoire (nom et prénom) : CHENEVOTOT Françoise

## **REMERCIEMENTS**

Je tiens à remercier l'ensemble des personnes ayant contribué à l'élaboration de ce mémoire de recherche.

Je souhaite avant tout remercier ma directrice de mémoire, Madame Françoise CHENEVOTOT, qui m'a aidée, conseillée et suivie durant la rédaction de ce mémoire. Je la remercie de m'avoir accordé des entretiens et d'avoir répondu à mes questions avec bienveillance et gentillesse. Je tiens également à exprimer toute ma reconnaissance à Madame Antonietta DEMURO qui m'a apporté de précieux conseils et m'a orientée dans mes recherches.

Je remercie également toute l'équipe pédagogique de l'INSPE d'Arras ainsi que les intervenants professionnels qui m'ont apporté de nombreuses connaissances théoriques. Un grand merci à ma maître de stage qui m'a accueillie avec bienveillance dans sa classe et m'a accordé sa confiance afin de réaliser diverses séances d'enseignement.

Enfin, je présente mes remerciements à ma famille et mes amis pour leurs encouragements et leur soutien tout au long de ma démarche.

# Table des matières

INTRODUCTION.....	1
I – LE CADRE THÉORIQUE.....	2
I. 1 – La manipulation.....	2
a) Définition.....	2
b) Les enjeux de la manipulation.....	2
c) Le matériel à utiliser.....	3
d) Les limites.....	4
I.2 – La résolution de problèmes.....	5
a) Les instructions officielles.....	5
b) Les types de problèmes.....	5
c) Les stratégies de résolution.....	6
I. 3 – Les fractions.....	7
a) Définition.....	7
b) Les instructions officielles.....	8
c) L’enseignement des fractions.....	8
d) Les difficultés rencontrées.....	9
II – PROBLÉMATISATION.....	9
III – L’EXPÉRIMENTATION.....	11
III.1 – La séquence d’enseignement.....	11
a) Le dispositif général.....	11
b) Le matériel utilisé lors des séances.....	12
c) L’analyse a priori.....	14
Les problèmes comportant deux questions : type A.....	14
Les problèmes à question unique : type B.....	15
Les problèmes oraux.....	15
L’analyse des problèmes.....	15
III.2 – Recueil de données.....	17
a) Les productions d’élèves.....	18
b) Interview des élèves.....	18
c) L’utilisation volontaire de la manipulation.....	19
IV – ANALYSE DES DONNÉES.....	20
IV. 1 – Les résultats des productions d’élèves.....	20
a) Les procédures correctes.....	20
b) Les procédures erronées ou incomplètes.....	25

IV.2 – Le comportement des élèves.....	27
a) La séance 4 en atelier.....	27
b) La séance 5.....	29
c) La coopération et l'autonomie des élèves.....	30
IV.3 – Les limites des résultats.....	30
CONCLUSION.....	30
BIBLIOGRAPHIE.....	33
ANNEXES.....	34

## INTRODUCTION

Au cours de la scolarité d'un élève, celui-ci sera confronté à diverses activités susceptibles d'évoluer. Lors des stages réalisés au sein du Master Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation, j'ai pu constater l'utilisation de la manipulation en mathématiques dans les différents cycles. Afin d'élaborer ce mémoire, j'ai donc choisi d'aborder le thème de « La manipulation pour la résolution de problèmes de fraction au cycle 3 ». En effet, cette thématique m'intéresse particulièrement au vu de mon parcours en tant qu'élève. J'ai toujours été à l'aise au sein de la discipline des mathématiques. Cependant, durant ma scolarité à l'école élémentaire, beaucoup de séances se présentaient sous forme de fiches à compléter ou d'exercices d'application. Cela était particulièrement ennuyant et non formateur pour les élèves en difficulté. Les séances étaient toujours présentées de la même manière ; une leçon était faite, puis des exercices d'application étaient donnés. Je me suis alors demandée si les élèves étaient davantage investis et cherchaient réellement lors de la résolution de problèmes si la manipulation était présente.

Lors de mon premier stage en cycle 2 dans une classe de CP, j'ai eu la chance d'observer de la manipulation en mathématiques lors d'une activité de résolution de problèmes. Chaque élève avait à disposition des cubes afin de résoudre un problème donné oralement. Le fait que les élèves manipulent les cubes était, je le pense, bénéfique pour l'apprentissage car chacun les disposait comme il le souhaitait. La séance était vivante et les interactions professeur / élèves très présentes. Les élèves ne se rendaient pas compte que la résolution d'un problème était l'objectif visé car il n'y avait pas d'énoncé écrit ou de fiche photocopiée. Ces pratiques m'ont beaucoup interpellée pendant ce stage car je n'avais jamais été confrontée à cela dans mon passé. J'ai alors découvert une nouvelle façon d'aborder les mathématiques qui m'a paru très intéressante. Mon choix s'est donc porté de toute évidence vers « La manipulation pour la résolution de problèmes en cycle 3 » pour le mémoire de master. Par la suite, j'ai ciblé mon travail sur l'apprentissage des fractions.

Mes principales questions portent sur l'organisation de la classe lors des séances manipulatoires mais également sur la différenciation possible à effectuer. Comment mettre

en place la manipulation pour qu'elle soit bénéfique pour toute la classe ? Que signifie vraiment manipuler et quels sont les différents types de manipulations possibles ? Je m'interroge également sur l'efficacité de la manipulation. Les élèves réussissent-ils mieux les problèmes additifs de fractions avec manipulation ? Le comportement des élèves peut aussi être sujet d'interrogations. Sont-ils plus investis lors de la manipulation ? L'autonomie et la coopération peuvent-elles s'améliorer pendant ce type de séance ? De même, des questions concernant la résolution de problèmes m'interpellent. En effet, comment un problème peut-il être proposé à une classe sans la démotiver par avance ? Quels sont les différents types de problèmes et comment aider les élèves à les résoudre ? Quelles procédures les élèves utilisent-ils pour résoudre un problème ? Dans un premier temps nous verrons le cadre théorique de cette recherche, puis l'expérimentation choisie afin de répondre à la problématique sera présentée. Pour finir, le recueil de données ainsi que son analyse seront mis en évidence.

## **I – LE CADRE THÉORIQUE**

### **I. 1 – La manipulation**

#### a) Définition

Pour commencer, il est impératif de définir ce que signifie « *La manipulation en mathématiques* ». La manipulation est l'action ou la manière de manipuler un objet, du matériel. D'après Catherine BERDONNEAU (2006) la manipulation désigne une action que l'élève peut réaliser en utilisant du matériel de petite taille, cette action est réfléchie et permet un apprentissage. Ce n'est pas un simple déplacement d'objets, une réelle finalité est présente. En effet, afin d'acquérir un concept mathématique, une phase d'action et une phase de représentation mentale sont nécessaires. La manipulation permet des apprentissages si le matériel est adapté et choisi en fonction de l'objectif visé. Le geste va alors aider l'élève à mémoriser et à conceptualiser.

#### b) Les enjeux de la manipulation

Dans son article (Berdonneau 2006, p.1-2), l'auteure démontre également la nécessité de la manipulation pour l'élève, pour le professeur et même pour la classe. En effet, elle va permettre à l'enfant de se représenter les différents concepts tout en répondant

à son besoin de sensorialité. L'élève va pouvoir déplacer, toucher, palper des objets afin d'essayer, de tester et de vérifier des hypothèses lors de la résolution de problèmes. L'attention de l'élève sera davantage mobilisée, ce qui constituera un apprentissage plus efficace car il aura conscience du travail effectué. De nombreuses actions peuvent être menées car la manipulation des objets est relativement rapide. Ainsi, l'élève peut réaliser diverses expériences dans le but de donner son résultat. Il peut effectuer des actions de mimétisme ou observer ses camarades manipuler les divers objets. Cela est bénéfique pour lui car il va avoir une représentation mentale plus claire de la tâche à accomplir et va s'assurer de la faisabilité de celle-ci. En outre, l'élève observateur ne pourra en aucun cas « copier » son camarade car il n'y a pas de traces laissées. Il devra alors effectuer les différents gestes observés au préalable. Pour ce qui est du professeur, la manipulation reste une méthode appropriée car elle permet de mettre facilement les élèves au travail et de les motiver. Pour finir, selon elle, la manipulation permet aussi de gérer l'hétérogénéité d'une classe. Pouvant s'adapter à tous les profils d'élèves, elle peut également être bénéfique pour ceux ayant des difficultés de langage.

Parmi les questions évoquées précédemment, certaines portaient sur l'organisation, la durée et surtout les bénéfices que peut apporter la manipulation au sein d'une classe. Certains avantages ont déjà été cités grâce à l'article de Catherine BERDONNEAU (2006). Cependant Thierry DIAS (2012) nous fait part dans son livre de diverses informations qui m'ont éclairée tout au long de mes lectures. Il me semble donc important de les souligner. En effet, le chercheur explique au sein de son ouvrage qu'il suffit d'adapter le temps et la fréquence d'une phase manipulatoire. Elle peut seulement s'adresser à une partie des élèves qui en ressent le besoin. Pour cela, l'observation de la part du professeur est indispensable afin de s'adapter à la classe. La perte de temps apparaît comme une réelle peur de la part des enseignants. Afin d'utiliser de la manipulation à bon escient il est alors primordial de la ritualiser, l'organiser, l'adapter et certainement la réserver aux élèves qui en ont besoin.

### c) Le matériel à utiliser

Concernant le matériel à utiliser, Thierry DIAS (2012) explique qu'il reste coûteux et que toutes les classes ne peuvent pas se le procurer. Certains critères sont cités afin de

connaître le matériel à privilégier. Par exemple, du matériel adapté aux apprentissages en cours qui se présente sous forme de jeux, des supports diversifiés où l'on peut faire de la différenciation ou encore des outils pratiques, peu coûteux sont conseillés. L'achat de jetons, de cartes, de cubes, de bâchettes ou de pions reste le plus fréquent. Pour les supports, des feuilles cartonnées A3 et A4, des tableaux ou quadrillages, du calque peuvent être utilisés. À propos des outils, ils restent assez simples comme des surligneurs, des ciseaux, des feutres, règles ou crayons. Ce matériel peut être exploité de différentes manières, tout dépend des compétences et connaissances que l'enseignant souhaite développer chez l'élève. D'après l'article de Catherine BERDONNEAU (2006), les supports peuvent être utilisés soit individuellement soit collectivement, certains ne nécessitent pas une explication verbale alors que pour d'autres il est indispensable de poser les règles d'utilisation. Il est alors indispensable de s'adapter en fonction des objectifs de la séance et des profils d'élèves. Pour finir, elle évoque dans son article que « *les erreurs restent confidentielles, à la fois privées et éphémères* » (Berdonneau 2006, p.2), ce qui limite la frustration. Si l'élève n'a pas réussi du premier coup, d'autres tentatives sont disponibles et rien ne prouve son hésitation. L'autonomie peut également être développée grâce à la manipulation au sein d'une séance.

#### d) Les limites

La manipulation reste donc essentielle au sein de l'apprentissage dans l'ensemble du cursus scolaire de l'élève. Cependant son utilisation se doit d'être complétée afin d'acquérir un concept mathématique. En effet, selon Catherine BERDONNEAU, deux phases sont nécessaires, une phase d'action et une phase de représentation mentale, sans cela, le concept enseigné ne sera pas assimilé et compris. Nous avons recours à un phénomène concret, qui est la manipulation afin de comprendre un phénomène abstrait, les mathématiques. Il semble alors évident qu'une explication doit être donnée afin d'éclaircir les zones d'ombres des élèves. Pour Catherine BERDONNEAU « *Le support de manipulation ne contient pas le savoir* » (Berdonneau 2006, p.2). La manipulation ne peut donc pas être utilisée seule, sans explication. Un temps dédié à la structuration des connaissances, soit l'institutionnalisation des connaissances, est indispensable en fin de séance s'il s'agit notamment de résoudre des problèmes.

Le rôle de la manipulation, le matériel pouvant être utilisé ainsi que les limites viennent d'être explicités. Intéressons nous maintenant à la résolution de problèmes : les instructions officielles afférentes, les différents types de problèmes ainsi que les stratégies de résolution seront précisés dans la partie suivante.

## **I.2 – La résolution de problèmes**

### a) Les instructions officielles

Une certaine évolution est présente dans les programmes de l'Education Nationale concernant « la résolution de problèmes ». Cela devient une activité centrale ; d'ailleurs dans les instructions officielles de 1980 la dénomination de « situations problèmes » apparaît. Depuis 2002, quatre types de problèmes peuvent se distinguer dans les instructions officielles : les problèmes pour construire de nouvelles connaissances, les problèmes de réinvestissement, les problèmes complexes et les problèmes pour chercher. Il est important de proposer des situations issues de la vie courante et connues des élèves. Certaines compétences majeures inscrites dans les instructions officielles vont être développées (MEN, 2020). On peut citer par exemple la compétence « *Chercher* » car les élèves vont être amenés à prélever et sélectionner certaines informations pour résoudre un problème. De plus, ils devront se questionner et s'investir dans une démarche en mobilisant leurs connaissances et en testant leurs hypothèses. La compétence « *Modéliser* » sera aussi traitée lors de la résolution de problèmes sur les fractions, les élèves devront reconnaître les problèmes faisant appel à des situations additives. Pour finir, les compétences « *Raisonner* » et « *Calculer* » (MEN 2020, p.91-92) seront aussi abordées afin d'aboutir au résultat. En fin de cycle 3, les élèves devront savoir utiliser et manipuler les fractions dans la résolution de problèmes.

### b) Les types de problèmes

Comme expliqué ci-dessus, quatre types de problèmes peuvent être proposés aux élèves. Un problème peut être présenté sous différentes formes à l'école élémentaire. En effet, le problème avec un énoncé écrit suivi d'une question reste dominant. Cependant, il peut être présenté oralement à la classe. Roland CHARNAY (2018) définit dans son ouvrage ce que signifie un problème en mathématiques. D'après l'auteur, un problème est « *une situation constituée d'informations qui peuvent être fournies sous des formes*

*diverses [...] avec un questionnement et dont la résolution nécessite une recherche, une investigation.* » (Charnay 2018, p.51). De plus, un cheminement à suivre est explicité par l'auteur pour résoudre un problème à l'école élémentaire. En premier lieu, le problème doit se trouver dans un contexte connu et identifiable par l'élève. D'ailleurs le BOEN n°31 du 30 juillet 2020 du cycle 3 le préconise : « *Les situations sur lesquelles portent les problèmes sont, le plus souvent, issues de la vie de classe, de la vie courante* » (MEN 2020, p.90). Puis, il faut comprendre les attentes de l'exercice et se faire une représentation correcte de ce qui est demandé.

### c) Les stratégies de résolution

De multiples difficultés sont susceptibles d'apparaître lors de la résolution de problème de réinvestissement. Les concepts mathématiques peuvent ne pas être maîtrisés, l'élève n'est donc pas en capacité de résoudre un problème de réinvestissement s'il ne connaît pas les concepts en jeu. Parfois, l'élève pense qu'il suffit de trouver l'opération correcte afin de réussir le problème, il ne connaît donc pas d'autre stratégie possible. Roland CHARNAY (2018) explique dans son ouvrage que l'enseignement des stratégies ne figure pas dans les programmes et donc qu'il n'est pas assez traité avec les élèves, ce qui peut leur porter préjudice. Plusieurs stratégies sont citées au sein de son ouvrage, il semble important de les relever afin de savoir comment un élève procède lors d'un tel exercice.

Pour résoudre un problème, un élève peut :

- Utiliser une **série d'essais** plus ou moins organisés. Il va alors émettre une hypothèse pertinente selon lui et essayer de la vérifier.
- Dresser un **inventaire des cas envisageables**, cela demande certes de l'organisation et du temps mais il est plus sûr d'aboutir à la solution qu'en utilisant la première stratégie.
- Se baser sur **des déductions** en fonction de l'énoncé donné. Dans ce cas, un schéma peut être utilisé.
- Utiliser **une stratégie mixte** qui consiste à regrouper deux des précédentes stratégies. Par exemple, il peut utiliser la stratégie de déduction et celle de l'inventaire des cas possibles.

Lors de la résolution d'un problème, ces différentes stratégies peuvent donc être utilisées. Il demeure important de les enseigner aux élèves afin qu'ils disposent du libre choix de la stratégie qu'ils souhaitent utiliser. Ces stratégies sont normalement acquises en fin de cycle 2, donc en CM1 les élèves doivent les connaître. Le professeur se doit de faire comprendre aux élèves qu'il n'y a pas une seule stratégie pour parvenir à un résultat correct. Deux élèves peuvent alors utiliser une stratégie différente et obtenir la même solution. La différenciation paraît ici intéressante, ainsi chaque élève est autorisé à opérer avec la stratégie de son choix pour répondre au problème posé. L'utilisation de brouillon ou d'un espace de recherche est préconisée par Roland CHARNAY (2018) pour permettre à l'élève de pouvoir se tromper, de recommencer et de chercher sans pour autant trouver la solution correcte au problème du premier coup. Puis, le travail en groupe, la recherche avec ses pairs, permet d'avancer et d'améliorer la coopération au sein de la classe. Si bien que même si l'objectif final est de réussir seul, le travail en équipe reste une solution pour y parvenir.

Pour résoudre un problème, un élève peut utiliser différentes procédures :

- *La solution experte*
- *Une solution personnelle*

Pour un problème de réinvestissement sur les fractions simples en CM2, une solution personnelle peut être basée sur un schéma ou un calcul comme une addition itérée de fractions simples. La solution experte est la stratégie mise en œuvre par une personne experte comme par exemple une multiplication à la place de l'addition itérée. Le résultat au problème peut être correct en utilisant différentes procédures. Un apprentissage est donc nécessaire afin de passer d'une solution personnelle à la solution experte.

### **I. 3 – Les fractions**

#### a) Définition

Une fraction est un ratio, un moyen d'écrire mathématiquement un nombre rationnel sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers. Une fraction se compose d'un numérateur indiquant « *le nombre d'unités de comptage que l'on considère* » et d'un dénominateur qui détermine « *le nombre de parts en lequel on partage l'unité* » (MEN Documents d'accompagnement des programmes, 2016, p.8).

En mathématiques, il existe plusieurs familles de nombres :

- Les nombres entiers naturels  $\mathbb{N}$
- Les nombres entiers relatifs  $\mathbb{Z}$
- Les nombres décimaux  $D$
- Les nombres rationnels  $\mathbb{Q}$
- Les nombres réels  $\mathbb{R}$
- Les nombres complexes  $\mathbb{C}$

D'autres familles existent comme les hypercomplexes ou quaternions, les octavions et les  $p$ -adiques. Ici, les fractions correspondent à l'ensemble des nombres rationnels. À l'école primaire seront étudiés uniquement les nombres positifs. Les entiers naturels, les nombres rationnels et les décimaux sont donc les familles de nombres utilisées jusqu'en CM2.

#### b) Les instructions officielles

L'introduction des fractions au cycle 3 permet de pallier l'insuffisance des nombres entiers. Ainsi, plusieurs compétences vont être traitées concernant l'utilisation des fractions. Les compétences « *Représenter* » et « *Calculer* » (MEN 2020, p.91-92) sont les principales. Les élèves devront s'approprier, utiliser différentes représentations des fractions et effectuer des calculs simples en utilisant une stratégie adaptée. Les désignations orale et écrite ainsi que les décompositions additive et multiplicative devront être abordées avec les élèves. De plus, la comparaison de fractions, l'encadrement par deux entiers consécutifs et l'utilisation d'une demi-droite (par rapport à laquelle les fractions seront situées) devront être traités en cycle 3.

#### c) L'enseignement des fractions

Les nombres entiers naturels sont abordés dès le cycle 1 en maternelle avec le dénombrement de collections. Les fractions simples, elles, sont introduites au début du cycle 3. Il est alors important de montrer aux élèves que les nombres entiers ne suffisent pas et que l'on doit parfois fractionner une unité. Au début de l'apprentissage des fractions, l'oral ainsi que la manipulation sont privilégiés. On aborde ensuite progressivement l'écriture fractionnaire avec les élèves. L'enseignement des fractions décimales s'effectue à la suite des fractions simples. Par la suite, on intègre le nombre décimal avec une écriture

présentant une virgule. L'écriture des nombres décimaux avec la présence de la virgule ne supprime en aucun cas les écritures fractionnaires. Il est important de conserver ces différentes écritures et de les utiliser avec les élèves durant le cycle 3. Afin d'éviter toute confusion consistant à associer une fraction uniquement à un nombre inférieur à 1, il est nécessaire d'aborder assez tôt en classe des fractions supérieures à l'unité. Cela facilitera par la suite la décomposition d'une fraction. Selon DIAS Thierry (2012) il est important de présenter aux élèves diverses représentations des fractions, il ne faut donc pas se limiter à l'utilisation de « parts de tarte ».

#### d) Les difficultés rencontrées

L'apprentissage des fractions au cycle 3 présente plusieurs difficultés pour les élèves. Tout d'abord, l'écriture fractionnaire peut-être une difficulté pour certains élèves. En effet, les élèves utilisent le système de numération écrite décimale et positionnelle pour écrire un nombre entier. L'écriture sous la forme d'une fraction est donc une nouveauté à assimiler. La signification des nombres de part et d'autre du trait de la fraction doit être comprise. Il peut être difficile pour les élèves de comprendre qu'une fraction désigne un nombre et non deux nombres entiers l'un au-dessus de l'autre. Une autre difficulté qui peut être soulignée est la difficulté liée aux différences pour les algorithmes de calcul. Si l'on procède à une addition de deux fractions avec des dénominateurs différents, il est impossible d'additionner les numérateurs et les dénominateurs entre eux. La procédure pour additionner des fractions n'est donc pas identique à celle pour additionner des entiers naturels. Cependant, cette procédure qui n'est pas correcte pour l'addition de fractions peut être effectuée pour une multiplication de fractions. Les élèves vont alors découvrir qu'il est plus simple de multiplier des fractions entre elles plutôt que d'additionner deux fractions de dénominateurs différents. Cela entraîne une modification remarquable au sujet des acquis des élèves concernant les procédures de calcul.

## II – PROBLÉMATISATION

Pour ce travail de recherche, j'ai essayé de repérer quelles étaient les conditions optimales afin que la manipulation soit bénéfique dans la résolution de problèmes au cycle 3. Celle-ci étant préconisée dans les programmes d'enseignement pour l'apprentissage des

fractions, j'ai voulu expérimenter cette démarche et la mettre en place dans ma classe pour ainsi constater si elle avait un réel impact sur les élèves. La liberté pédagogique laisse le choix au professeur d'utiliser la manipulation ou non dans sa classe. Cependant, pour des professeurs des écoles débutants, il peut être difficile d'organiser ce type de séances tout en ayant un bénéfice pour la classe entière. Je m'interroge donc sur l'importance et la mise en place de l'utilisation de la manipulation en résolution de problèmes. **Quels sont les effets de la manipulation en résolution de problèmes additifs de fractions au cycle 3 ?** Je me questionne également sur la formulation d'un problème. La manipulation peut-elle permettre de faciliter la résolution d'un problème qui comporte une unique question alors que plusieurs étapes sont nécessaires afin d'obtenir le résultat ?

Plusieurs hypothèses peuvent être données à la suite de cette problématique. Ma première hypothèse, qui reste bien entendu à vérifier dans ce mémoire, concerne le travail et les connaissances mathématiques des élèves. En effet, je pense que la manipulation lors des résolutions de problèmes additifs sur les fractions favorise la réussite des élèves et le développement des procédures. Il me paraît plus facile pour un élève de cycle 3 de répondre à des problèmes sur les fractions en manipulant plutôt que d'écrire un calcul sans manipulation au préalable. Afin de tester cette hypothèse, je souhaite donner des problèmes additifs sans manipulation puis avec manipulation. À la suite des différentes séances, le nombre de productions correctes et incorrectes sera relevé. Ma deuxième hypothèse est plus particulièrement basée sur le comportement de l'élève. D'après moi, l'introduction de la manipulation lors des séances de mathématiques favorise l'autonomie, la coopération des élèves ainsi que la lucidité concernant leurs besoins. Pour vérifier cette hypothèse, l'observation de la part du professeur me semble essentielle. Il serait également bénéfique d'avoir le ressenti de l'élève en lui posant des questions ciblées et préparées, une interview des élèves est donc envisageable. Afin de vérifier la lucidité des élèves sur leurs besoins, lors d'une séance, la manipulation sera proposée mais non obligatoire. Les élèves qui ont selon eux besoin de la manipulation afin de réaliser les problèmes pourront alors manipuler les blocs mosaïques mis à disposition. Pour finir, ma troisième hypothèse concerne la formulation des problèmes. D'après moi, les problèmes à question unique où plusieurs étapes doivent être réalisées afin d'obtenir le résultat seront mieux réussis en présence de manipulation. La visualisation, le déplacement des pièces peuvent permettre une meilleure compréhension de ce qui est attendu dans le problème. Afin de vérifier cette dernière

hypothèse, le nombre de productions correctes et incorrectes sera relevé en fonction de la formulation des questions du problème de réinvestissement.

### III – L'EXPÉRIMENTATION

Lors de la deuxième année de Master Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation, j'ai eu l'opportunité de réaliser un stage d'octobre à février au sein d'une école rurale composée de six classes. Je suis intervenue dans une classe flexible de CM2 se composant de dix-huit élèves avec un niveau assez hétérogène. Dès les premières semaines de stage, j'ai pris en charge plusieurs séances. J'ai alors pu réaliser mon travail sur « La manipulation en résolution de problèmes additifs de fractions ».

#### III.1 – La séquence d'enseignement

##### a) Le dispositif général

Afin de répondre à mes diverses questions et vérifier mes hypothèses de travail, j'ai élaboré une séquence d'enseignement sur les fractions simples en CM2 ; celle-ci se compose de 6 séances. Ci-dessous, un tableau synthétique présente les séances réalisées en classe avec l'objectif mathématique et l'activité de l'élève.

Séquence : Les fractions simples		
Séance	Objectifs mathématiques	Activité de l'élève
<b>Séance 1</b> <b>Le 05/11</b> Découverte	Connaître le vocabulaire spécifique : unité, demi, tiers, quart, dénominateur, numérateur	- Manipulation de bandes unité, de disques, pour aborder les fractions simples : $1/2$ , $1/3$ , $1/4$ - Trace écrite élaborée avec les élèves
<b>Séance 2</b> <b>Le 06/11</b> Recherche et appropriation	S'approprier et utiliser le vocabulaire spécifique Connaître diverses désignations	- Lecture de la leçon - 2 exercices sur les fractions simples : colorier les parts correspondantes, comparer deux fractions - Problème 1 sans manipulation
<b>Séance 3</b> <b>Le 12/11</b> Approfondissement	Résoudre des calculs simples avec les fractions	- 2 exercices sur le calcul - Problème 2 sans manipulation

<p align="center"><b>Séance 4</b> <b>Le 13/11</b> Entraînement 4 Ateliers de 20'</p>	<p align="center">Résoudre un problème avec ou sans manipulation Associer une fraction ou un calcul à sa représentation Comparer deux fractions avec un dénominateur commun</p>	<p>- Atelier 1 : 2 exercices + problème 3 en autonomie sans manipulation - Atelier 2 : Résolution de problèmes oraux avec manipulation en groupe Problèmes 4 et 5 avec manipulation en individuel - Atelier 3 : Les paires de fractions : associer la fraction ou le calcul au dessin correspondant - Atelier 4 : Jeu des dominos en groupe</p>
<p align="center"><b>Séance 5</b> <b>Le 19/11</b> Réinvestissement</p>	<p align="center">Résoudre un problème avec des fractions simples Additionner des fractions simples</p>	<p>- Problèmes 6 et 7. Manipulation possible mais non obligatoire</p>
<p align="center"><b>Séance 6</b> <b>Evaluation</b></p>	<p align="center">Comparer et calculer avec des fractions Résoudre un problème</p>	<p>- 2 exercices et 2 problèmes écrits en individuel - Activité autonome</p>

Au sein de cette séquence, plusieurs compétences vont être travaillées avec les élèves. Tout d'abord, la comparaison de deux fractions avec le même dénominateur ainsi que l'égalité entre les fractions seront traitées. La compétence « *Calculer* » sera également abordée grâce à l'addition de fractions. Puis, les élèves devront connaître diverses désignations de fractions orales ou écrites ainsi que des décompositions.

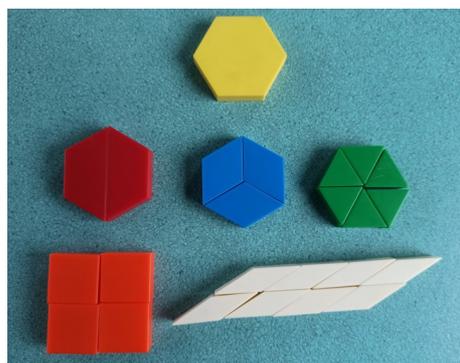
b) Le matériel utilisé lors des séances

Durant les cinq séances d'enseignement, du matériel a été utilisé et a été mis à disposition pour les élèves. Tout d'abord le matériel de manipulation utilisé lors des exercices ou ateliers concernant les fractions sera présenté. Puis, le matériel utilisé spécifiquement pour la résolution de problèmes additifs de fractions sera explicité. En effet, certains outils ont été manipulés par les élèves pour la compréhension des fractions et le partage d'unité. Cependant, ils ne relèvent pas spécifiquement de la résolution de problèmes de réinvestissement.

En séance 1, j'ai choisi de faire manipuler aux élèves des bandes unité et des disques en papier lors d'un problème de recherche. La situation de départ est inspirée de la

vidéo « *Fractions : partage équitable* » des fondamentaux (Réseau Canopé : <https://lesfondamentaux.reseau-canope.fr/video/fractions-partage-equitable.html>). Lors de cette séance, les élèves devaient alors partager le trésor des pirates en parts égales. Certaines variables comme le nombre de pirates ou la forme du trésor ont évolué au fur et à mesure de la séance. Ici, la forme du trésor est importante car le partage en parts égales ne sera pas effectué de la même manière selon la forme du trésor. De plus, il est important de présenter aux élèves diverses formes et ne pas se limiter à une seule représentation. Ce choix de matériel a été très spontané et logique car je voulais un support facilement pliable où les élèves pouvaient colorier la part correspondante pour un pirate. De plus, le matériel de manipulation a pu servir pour la trace écrite de la séance (Cf. Annexe 1). Lors de la séance 4, de la manipulation était également présente pendant l'atelier 3. J'ai élaboré l'activité « Les paires de fractions » qui contient 7 grilles de 12 représentations imagées des fractions. L'élève devait alors choisir une grille et placer sur la représentation imagière la fraction ou le calcul correspondant (Cf. Annexe 2). Ainsi, la différenciation était présente, pour les élèves en difficulté concernant le calcul de fractions ; des grilles sans calcul étaient à disposition.

Présentons maintenant le matériel de manipulation spécifiquement mis à disposition pour la résolution de problèmes additifs de fractions. La séance 4 (atelier 2) et la séance 5 nécessitent des lots de blocs mosaïques pour les élèves.



Chaque lot contient des blocs mosaïques de différentes couleurs représentant l'unité, le demi, le tiers, le sixième sous forme d'hexagones, puis les quarts et huitièmes sous une autre forme géométrique. Ici, mon choix s'est porté sur la manipulation des blocs mosaïques de couleurs très attrayantes pour les élèves et permettant de comprendre facilement l'égalité de fractions grâce à la superposition des pièces.



Pour finir, lors des corrections en classe entière des problèmes de réinvestissement, je faisais intervenir différents élèves afin qu'ils puissent manipuler un autre support : des disques en mousse représentant les fractions jusqu'aux douzièmes.

Les élèves ont donc pu manipuler du matériel pour la résolution de problèmes sous différentes formes géométriques : des hexagones et des disques. J'ai alors suivi les recommandations de DIAS Thierry (2012) en ne me concentrant pas exclusivement sur l'utilisation de « parts de tarte » pour représenter les fractions. Il est important que les élèves manipulent avec différentes formes et non uniquement avec un disque.

#### c) L'analyse a priori

Dans la séquence proposée, plusieurs problèmes vont être traités avec les élèves. Les problèmes peuvent être présentés sous différentes formes :

- Un problème comportant deux questions (Cf. Annexe 3) : appelé ici problème de type A<sup>1</sup>
- Un problème à question unique (Cf. Annexe 4) : appelé problème de type B
- Un problème oral

#### **Les problèmes comportant deux questions : type A**

Au sein de cette séquence sur les fractions simples, les problèmes 1, 4 et 6 sont des problèmes comportant deux questions. Il s'agit de problèmes additifs de fractions simples. En effet, dans les trois problèmes proposés, il faut trouver la fraction correspondante à ce qui a été mangé, pris par plusieurs personnes ou ce qui a été vendu à la fin de la journée. Pour la première question de chaque problème, il faut alors additionner des fractions entre elles. Pour la seconde question de chaque problème, il faut ensuite trouver la fraction qui représente ce qu'il reste de l'unité entière.

<sup>1</sup> Afin de faciliter la rédaction de ce travail de recherche, les problèmes seront cités sous le nom de « problème de type A », « problème de type B ».

### Les problèmes à question unique : type B

Les problèmes 2, 3, 5 et 7 sont des problèmes à question unique. Ce sont également des problèmes additifs. Dans ces problèmes, la question posée demande d'indiquer la fraction qui représente ce qu'il reste de l'unité complète. Il s'agit alors du même type de question que la question 2 des problèmes 1, 4 et 6. J'ai souhaité intégrer des problèmes de ce type afin de pouvoir comparer les résultats des élèves entre un problème guidé avec deux questions et un problème à question unique.

### Les problèmes oraux

Lors de la séance 4, pendant l'atelier 2, des problèmes oraux vont être effectués avec les élèves. En groupe de 5 élèves, j'ai alors commencé l'atelier en expliquant le matériel de manipulation. Puis, j'ai réalisé environ trois problèmes oraux avec les élèves pour les laisser par la suite effectuer en autonomie les problèmes 4 et 5. Lors des problèmes oraux, j'ai fait le choix d'effectuer des problèmes à question unique en utilisant les prénoms des élèves présents dans le groupe afin de les investir davantage dans la tâche.

### L'analyse des problèmes

Ayant expliqué les différents problèmes présents dans la séquence, intéressons-nous maintenant à l'analyse a priori de ces différents problèmes. Nous verrons alors les variables didactiques, les procédures correctes possibles des élèves ainsi que les erreurs et difficultés pouvant apparaître chez les élèves.

Les variables didactiques sont les suivantes :

- Les **fractions** de l'énoncé sont différentes. En effet, j'ai varié les fractions en incluant dans les différents problèmes les quarts, les sixièmes, les huitièmes, les dixièmes. J'ai choisi de garder des fractions avec un dénominateur commun au sein d'un problème car nous étions au début de l'apprentissage des fractions pour les élèves.
- **L'écriture des fractions** peut être différente. Dans le problème 3, l'écriture des fractions est en lettres, il n'y a alors aucun chiffre ou écriture fractionnaire dans l'énoncé.

- Le **contexte du problème** est différent à chaque fois mais connu et issu de la vie quotidienne des élèves. Ce choix a été stratégique afin de ne pas proposer systématiquement aux élèves un énoncé faisant référence aux disques pour la représentation de fractions. Différents contextes sont donc présents allant d'un partage de gâteau ou de pizza à un partage de bonbons, d'un champ ou d'un roman.
- La **manipulation** est une variable didactique. J'ai choisi de commencer avec le problème 1 sans manipulation puis de poursuivre ce type de problème avec de la manipulation (problème 4). Pour finir, lors des problèmes 6 et 7, la manipulation est à disposition pour les élèves mais non obligatoire. Mon choix s'est porté sur l'introduction de la manipulation des blocs mosaïques au milieu de la séquence et non au début pour ainsi effectuer une comparaison des résultats des élèves et voir si une évolution était présente.

Nous allons maintenant voir les procédures correctes qui peuvent être effectuées par les élèves lors de la résolution de ces problèmes. En effet, plusieurs solutions peuvent être utilisées par les élèves. Des procédures différentes peuvent aboutir à un résultat identique. La connaissance et la maîtrise de l'opération sous-jacente (solution experte) n'est pas forcément obligatoire afin de répondre au problème. L'élève peut résoudre un problème additif en utilisant une solution personnelle.

- La solution experte attendue est un calcul de fractions.
  - Pour les problèmes de type A : La première question peut être résolue par **une addition** effectuée en ajoutant les fractions données dans l'énoncé. Pour la seconde question, il s'agit d'**une soustraction** entre l'unité entière et le résultat de la question 1.
  - Pour les problèmes de type B : **une addition et une soustraction** sont également attendues.
- Une solution personnelle peut être utilisée par l'élève.
  - L'élève peut effectuer **un schéma** afin de répondre au problème. Il peut dessiner une unité entière et la partager en parts égales selon l'énoncé.
  - **Une addition à trou** peut être effectuée pour la seconde question des problèmes de type A ou pour les problèmes de type B.

Les procédures correctes possibles étant explicitées, intéressons-nous maintenant aux procédures erronées ou incomplètes pouvant être effectuées par les élèves.

- Les problèmes additifs portant exclusivement sur les fractions, notion abordée récemment avec les élèves, il semble alors évident que des erreurs apparaîtront au sujet des fractions. En effet, certains élèves vont certainement **utiliser des nombres entiers** dans la rédaction de leur réponse ou dans la présentation de leur calcul.
- Il est également envisageable d'obtenir **un mélange de nombres entiers et de fractions** dans la notation de leur résultat. N'étant pas encore assez familiarisés avec l'écriture fractionnaire, les élèves pourront mélanger les notations. L'écriture du calcul sous forme de nombre entier et le résultat en fraction est une procédure erronée envisageable.
- Une autre difficulté pouvant se présenter aux élèves de cycle 3 est **l'écriture d'une fraction en chiffres** lorsque l'on dispose de l'écriture en lettres. En effet, le problème 3 ne contient pas de fraction en écriture fractionnaire mais en lettres, cela peut mettre en difficulté certains élèves.
- La compréhension du contexte ou des questions posées peut être un frein quant à la résolution du problème. On peut imaginer une procédure basée sur **la soustraction des fractions fournies dans l'énoncé**.
- Pour finir, une simple **erreur de calcul** peut être une procédure erronée de la part de l'élève.

### III.2 – Recueil de données

Afin de vérifier mes diverses hypothèses, un dispositif de recueil de données semble indispensable. J'ai alors choisi de m'intéresser à deux données : les productions des élèves et les interviews des élèves. Ces données qui seront par la suite analysées me semblent essentielles afin de répondre à ma problématique. En effet, les productions des élèves vont permettre de voir l'évolution et la réussite des élèves en fonction du problème et de la manipulation qui est proposée (ou non) au cours de la séquence. Les interviews ainsi que le nombre d'élèves ayant volontairement manipulé permettront de voir si la manipulation est nécessaire à l'apprentissage et peut mettre en confiance l'élève.

#### a) Les productions d'élèves

Pour chaque problème effectué dans ma séquence, les productions des élèves seront analysées selon plusieurs critères. Ici, nous effectuerons donc une analyse quantitative en se basant sur les productions des élèves de toute la classe.

Les critères à relever puis à analyser seront les suivants :

- Le nombre de réponses correctes avec et sans manipulation
- Le nombre de réponses incorrectes ou incomplètes avec et sans manipulation
- La procédure utilisée : une procédure personnelle ou la procédure experte
- La présence d'une phrase réponse

Grâce à ces différents critères, nous pourrions voir si des différences sont présentes au niveau du nombre de réponses correctes avec et sans manipulation. Puis, nous pourrions également voir si la procédure utilisée de la part de l'élève tend à devenir la solution experte grâce à la manipulation.

#### b) Interview des élèves

Lors de l'atelier 2 de la séance 4, la manipulation est présente en groupe de 5 élèves. Pendant cet atelier, j'ai alors présenté le matériel de manipulation aux élèves et effectué quelques problèmes oraux avec eux. Pendant cette phase, ils pouvaient alors s'entraider afin d'obtenir le résultat au problème. Puis, j'ai ensuite donné deux problèmes (problème de type A et de type B) à résoudre individuellement. À la fin de l'atelier, j'ai procédé à une interview des élèves afin d'obtenir leur ressenti sur l'activité proposée. Il me paraissait évident et primordial d'avoir l'avis des élèves sur l'utilisation de la manipulation en classe. J'ai ciblé cette interview sur quelques questions principales afin de ne pas les perdre dans leurs explications. Ayant l'autorisation du professeur m'accueillant dans sa classe, j'ai effectué un enregistrement des réponses des élèves pour reprendre les éléments essentiels et en effectuer une synthèse.

Voici les questions sélectionnées posées aux élèves de CM2 :

- As-tu compris l'utilisation du matériel ?
- As-tu aimé l'atelier ? Pourquoi ?
- Le matériel t'a-t-il aidé à répondre aux problèmes ?
- As-tu préféré résoudre les problèmes avec ou sans manipulation ?

- D'après toi quels problèmes as-tu le mieux réussis ? Les problèmes 1 et 2 de la semaine dernière ou ces problèmes ci ?
- Veux-tu refaire des séances du même type ? En atelier avec manipulation ? Pourquoi ?

Lors des enregistrements, chaque élève prendra la parole pour chaque question afin d'obtenir le ressenti de tous. Pour les plus timides, des exemples de diverses réponses seront cités par le professeur. Une fois les enregistrements terminés, les principales réponses des élèves seront notées dans un tableau. Ce recueil de données permettra ainsi d'avoir le ressenti de l'élève face à l'activité, de savoir s'il a aimé et s'il pense que cela est bénéfique pour lui. Grâce aux productions d'élèves analysées nous pourrons ainsi voir s'il y a une correspondance entre ce qu'ils pensent avoir réalisé et ce qui a été réalisé.

#### c) L'utilisation volontaire de la manipulation

La séance 5 de ma séquence pédagogique sur les fractions simples consiste à faire résoudre aux élèves deux problèmes (un problème de type A et un problème de type B). Ici, il s'agit d'une séance de résolution de problèmes en individuel. Les élèves auront quelques minutes pour prendre connaissance de ces problèmes et les résoudre sur la feuille mise à disposition. Une fois de plus la stratégie à utiliser est libre et au choix de l'élève. Les élèves sont laissés en autonomie un certain temps, le professeur passe dans les rangs afin de voir la progression pour les deux problèmes. Quelques élèves ont déjà fini de résoudre ces problèmes pendant que certains ont à peine commencé. La manipulation des blocs mosaïques est alors proposée à la classe en veillant à expliquer qu'elle doit être utilisée uniquement en cas de besoin. Les élèves voulant manipuler se sont manifestés en levant le bras, j'ai alors vérifié l'avancement de leur travail afin de ne donner le matériel de manipulation uniquement aux élèves ayant un intérêt à manipuler. Des différences de rythme entre élèves étant présentes, un travail supplémentaire en autonomie est prévu. Lorsqu'un élève demandera les blocs mosaïques, je regarderai son avancement dans les problèmes à résoudre. Le nombre d'élèves ayant eu le besoin de manipuler les blocs mosaïques lors de cette séance sera relevé et figurera comme une donnée essentielle au sein de ce travail de recherche.

## IV – ANALYSE DES DONNÉES

### IV. 1 – Les résultats des productions d’élèves

#### a) Les procédures correctes

Grâce aux différentes données recueillies lors de cette séquence, une analyse peut alors être dressée. Tout d’abord intéressons-nous aux productions des élèves élaborées pour les problèmes sans manipulation. Les différents critères expliqués dans la partie antérieure ont alors permis de compléter le tableau ci-dessous. La date de réalisation des problèmes est précisée au sein des tableaux afin de voir l’évolution des compétences de l’élève dans le temps.

Sans manipulation	Problème 1 6 novembre	Problème 2 12 novembre	Problème 3 13 novembre
Contexte	- Type A	- Type B	- Type B - Écriture des fractions en lettres dans l’énoncé
Effectif	17	17	18
Résultats corrects	Q1 et Q2 : 8 Q1 ou Q2 : 5 ni Q1 ni Q2 : 4	8	9
<b>Les procédures utilisées</b>			
Addition	3	5	10
Addition à trou	1	3	5
Soustraction : procédure experte	1	4	3
Schéma	3	1	0
Autre	10	7	6
Bilan des séances sans manipulation	- La moitié de la classe arrive à résoudre les problèmes sans manipulation cependant la solution experte est peu présente. Des calculs incorrects apparaissent sur les productions des élèves. - Certains élèves combinent plusieurs procédures afin de résoudre le problème.		

Concernant les problèmes 1 et 2, l’effectif d’élèves présents était de 17 contrairement au reste des problèmes où l’ensemble de la classe était présent (soit 18 élèves). Pour les problèmes avec manipulation, voici les résultats obtenus dans un second

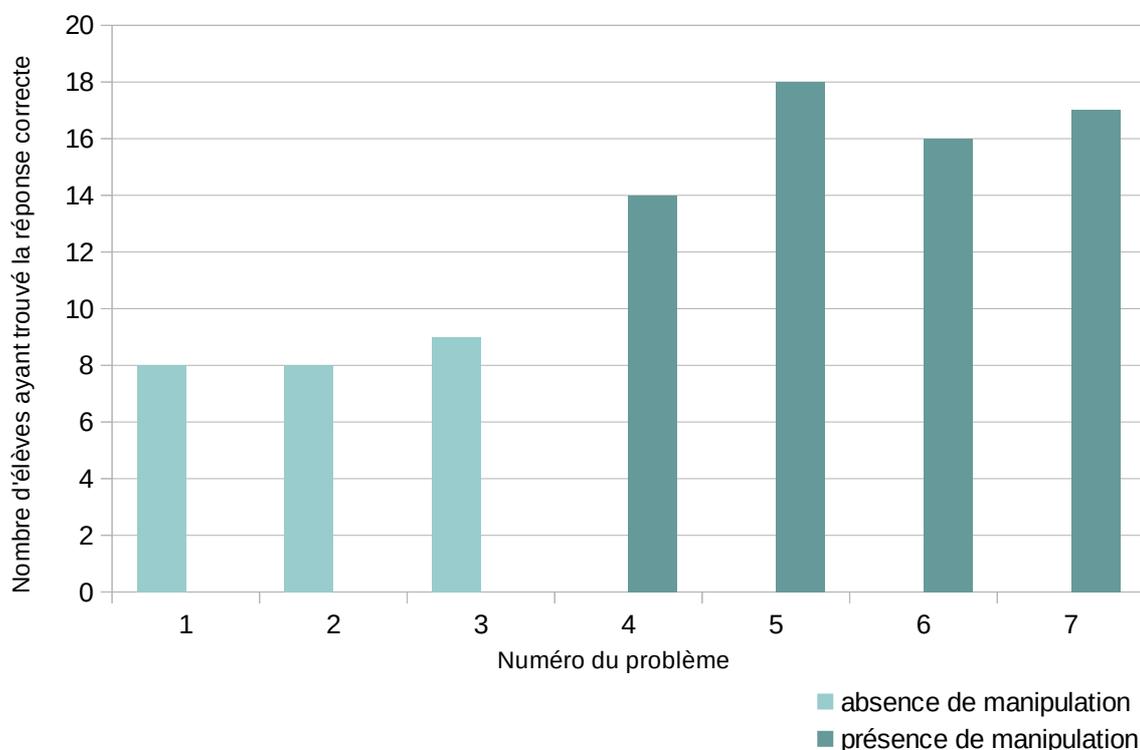
tableau présenté sous la même forme que le premier afin d'opérer une comparaison des résultats.

Avec manipulation	Problème 4 13 novembre	Problème 5 13 novembre	Problème 6 19 novembre	Problème 7 19 novembre
Contexte	- Type A	- Type B	- Type A	- Type B
Effectif	18	18	18	18
Résultats corrects	Q1 et Q2 : 14 Q1 ou Q2 : 4	18	Q1 et Q2 : 16 Q1 ou Q2 : 1 ni Q1 ni Q2 : 1	17
<b>Les procédures utilisées</b>				
Addition	11	8	13	8
Addition à trou	6	5	7	7
Soustraction : procédure experte	5	8	9	8
Schéma	0	0	0	0
Autre	3	2	1	1
Bilan des séances avec manipulation	- La quasi totalité de la classe fournit un résultat correct aux problèmes avec manipulation. - 9 élèves sur 18 ont souhaité manipuler les blocs mosaïques pour les problèmes 6 et 7.			

Dans les tableaux ci-dessus, au sein des procédures utilisées, une ligne indique une procédure « Autre ». Ici, le nombre de productions où la procédure n'est pas concluante ni explicitée, ou présente des calculs erronés sera relevé. Au sein des problèmes sans manipulation, on peut voir que cette catégorie englobe un nombre de productions d'élèves plus important que pour les problèmes avec manipulation. En effet, concernant le premier problème sans manipulation, 6 élèves sur les 10 n'ont pas explicité leur procédure et se sont contentés d'inscrire le résultat avec une phrase. Durant les corrections, les diverses procédures ont été expliquées. Par la suite, les élèves les ont mises à profit.

Afin de comparer les résultats aux problèmes avec et sans manipulation, nous pouvons dresser un diagramme en utilisant le nombre de bonnes réponses fournies par les élèves. Ici, on ne s'intéresse pas à la procédure utilisée mais uniquement à la réponse donnée. Ainsi, dans nos tableaux présentés ci-dessus, on se concentrera sur la ligne

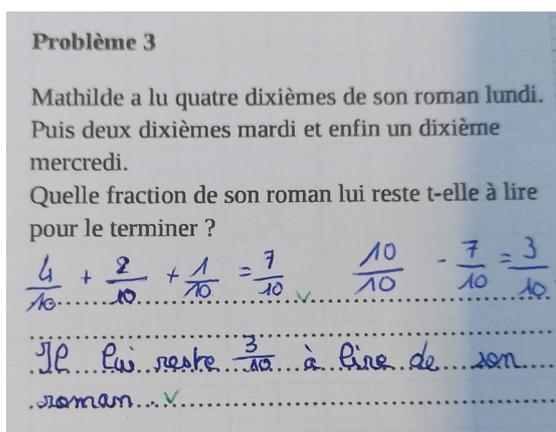
« résultats corrects » concernant les deux questions du problème si c'est un problème de type A. On obtient alors le diagramme ci-dessous.



Grâce à ce diagramme, nous pouvons voir une considérable amélioration des résultats des élèves entre des problèmes sans manipulation et des problèmes avec manipulation. Le problème 2 a été réalisé le 12 novembre, le problème 3 le 13 novembre, soit le lendemain. Pour ces deux problèmes, il y a eu respectivement 8 et 9 réponses correctes sur 18 données. Pour les problèmes 4 et 5 réalisés le même jour (le 13 novembre), les résultats sont nettement différents. Ici, 14 élèves sur 18 ont répondu juste aux deux questions, 4 élèves sur 18 n'ont répondu correctement qu'à une seule des deux questions pour le problème 4. Pour le problème 5, il n'y a que des bonnes réponses. Les problèmes sont formulés de la même manière et font appel aux mêmes compétences, pourtant une grande différence est présente entre les résultats. On ne peut guère faire l'hypothèse que les élèves ont progressé pour réaliser cette même tâche sur une période aussi courte. Au vu des données recueillies, la manipulation semble être un facteur permettant d'améliorer les résultats des élèves pour la résolution de problèmes additifs de

fractions. Néanmoins le type de problème<sup>2</sup> ne semble pas être un facteur déterminant pour la réussite de l'élève. En effet, les données recueillies pour les problèmes de type A sans manipulation sont assez similaires à celles pour les problèmes de type B sans manipulation. La même constatation peut être faite pour les problèmes de type A et B avec manipulation.

Concernant les procédures utilisées par les élèves, celles-ci ont tendance à évoluer dans le temps. En effet, pour les trois premiers problèmes sans manipulation, l'addition et la soustraction (solution experte) sont peu utilisées au sein de ces trois problèmes, l'utilisation de schéma reste minimale. Pour les problèmes avec manipulation, la présence de calcul est plus significative, environ 14 élèves sur 18 si l'on effectue une moyenne pour les 4 problèmes. La procédure experte est également plus utilisée lors des problèmes avec manipulation, cependant la procédure personnelle du schéma est totalement abandonnée. Les élèves ayant le matériel de manipulation, il n'est plus forcément nécessaire pour eux de réaliser un schéma. Durant les corrections collectives, la réponse sous forme de schéma était tout de même expliquée. La procédure experte n'est que très peu utilisée lors des problèmes sans manipulation. Cependant, certains élèves l'ont utilisé et ont abouti à un résultat correct. Ci-dessous la production d'une élève ayant utilisée la procédure experte pour le problème 3 sans manipulation. L'élève a tout d'abord effectué une addition afin de comptabiliser ce qui a été lu du roman. Puis, elle a ensuite effectué une soustraction (solution experte) entre l'unité entière et la fraction du roman déjà lu par Mathilde.

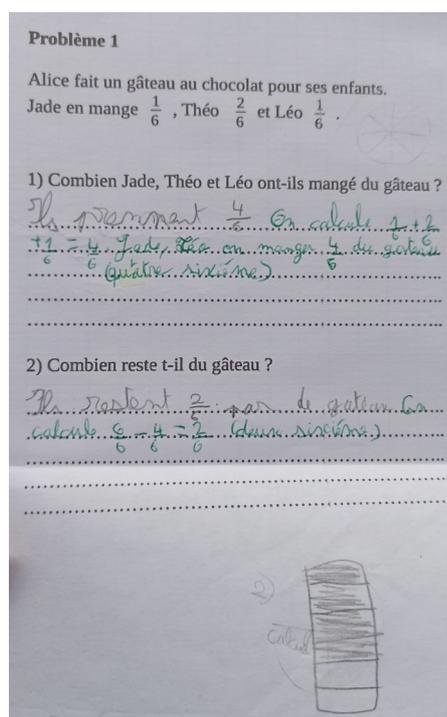
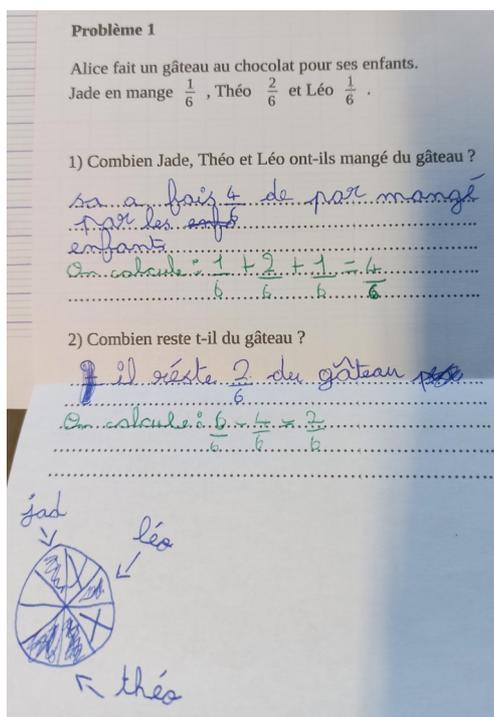


La manipulation semble être un facteur de l'évolution des procédures de résolution au cours de cette séquence. L'entraînement à la résolution de calcul de fractions ainsi que

2 Ici, le type de problème fait référence au type A comportant deux questions ou au type B comportant une question unique où plusieurs étapes sont nécessaires pour aboutir à la résolution du problème.

la familiarisation avec les fractions peuvent également être des facteurs d'évolution. Ici, les problèmes 2 et 3, 4, 5 ont été réalisés à une journée d'intervalle sans pratique supplémentaire ou exercice complémentaire à la résolution de calcul avec des fractions. Dans notre cas, ce facteur est donc écarté et ne semble pas être significatif pour mettre en évidence l'évolution des procédures des élèves.

Les élèves ont utilisé les trois procédures énoncées dans notre analyse a priori afin de répondre au problème : l'addition, la soustraction et l'utilisation d'un schéma. Cependant, certains ont utilisé deux de ces procédures pour répondre à une question unique, comme l'utilisation d'un schéma et d'une addition. Les élèves ayant utilisée la procédure personnelle du schéma ne sont pas nombreux. Il s'agit de trois d'entre eux pour le problème 1 et uniquement d'un élève pour le problème 2. Pour le premier problème, le schéma s'est parfois appuyé sur un disque ou sur une bande unité. Voici les productions de deux élèves ayant réalisé un schéma comme procédure personnelle afin de répondre au premier problème.



- Le premier schéma représente un disque. L'élève a pris soin d'annoter le schéma avec les parts correspondantes pour chaque individu. Cependant, le disque est partagé en huit parts égales au lieu de six. L'élève a par la suite supprimé deux huitièmes en plaçant des croix.

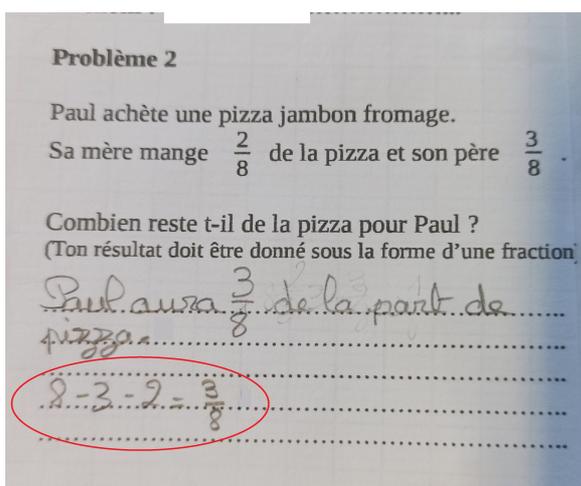
- Le second schéma représente une bande unité partagée en six parts égales. L'élève n'a ici pas annoté son schéma et s'est contenté d'un dessin.

Au sein des productions d'élèves du premier problème, les calculs (toutes procédures confondues) n'ont pas été beaucoup présents. Selon moi, il ne s'agit pas d'une méconnaissance du calcul à résoudre mais plutôt d'une maladresse et d'une méconnaissance de la structuration d'une réponse à un problème. À la suite du problème 1, nous avons rappelé la démarche à suivre concernant la rédaction de la réponse à un problème.

#### b) Les procédures erronées ou incomplètes

Les procédures ayant conduit à la réussite des élèves étant mises en avant dans la partie précédente, nous allons maintenant nous intéresser aux procédures erronées ou incomplètes pour ainsi voir la correspondance avec notre analyse a priori.

Pour les problèmes 1, 2 et 3 la majorité des erreurs était au sein de la formulation du calcul. En effet, les élèves ont eu tendance à utiliser des entiers ou un mélange d'entiers et de fractions dans le même calcul. Ces erreurs avaient été prédites dans notre analyse a priori, étant au début de l'apprentissage des fractions, il est normal de rencontrer ce type d'erreurs. En effet, à cause du contexte sanitaire, il s'agissait pour certains élèves d'une première approche avec le calcul fractionnaire. Une majorité d'élèves a donc effectué un calcul erroné avec des nombres entiers tout en trouvant le résultat attendu au problème.



Ci- contre la production d'un élève pour le problème 2 (premier problème de type B). Si l'on regarde le calcul effectué, l'élève utilise des nombres entiers puis note le résultat en fraction. L'élève utilise donc 8 pour  $\frac{8}{8}$ , 3 pour  $\frac{3}{8}$  et 2 pour  $\frac{2}{8}$ . L'égalité est fausse.

Le résultat à trouver,  $\frac{3}{8}$ , est correctement noté avec l'écriture fractionnaire. Cependant, au sein de la phrase réponse, on peut relever qu'il s'agit pour l'élève de trois huitièmes « de la part de pizza » alors qu'en réalité il reste trois huitièmes de la pizza entière et non d'une part. Cette erreur a été plusieurs fois relevée au sein des diverses productions et n'était pas présente dans notre analyse a priori.

Le problème 3 a été difficile pour certains à cause de l'absence de l'écriture fractionnaire. Trois élèves n'ont pas réalisé le problème car selon eux il n'y avait pas de fraction dans l'énoncé. L'hypothèse est donc confirmée : l'absence d'écriture fractionnaire au sein d'un problème peut mettre en difficulté certains élèves. Une minorité d'élèves a réalisé un schéma accompagné parfois d'un calcul afin de répondre aux problèmes. Grâce aux tableaux présentés précédemment, on peut voir que l'utilisation de la solution personnelle du schéma n'apparaît qu'au début de la séquence (pour les problèmes 1 et 2). Dès lors que la manipulation intervient, cette solution n'est plus du tout utilisée par les élèves. Dans notre analyse a priori, au sein des procédures erronées, figure « l'erreur de calcul ». Avec ces problèmes, je n'ai pas forcément relevé de procédure erronée de ce type. En revanche, dans quelques productions, le calcul effectué n'était pas correct.

Des élèves ont additionné ou soustrait les fractions de l'énoncé entre elles sans forcément répondre à la question posée. Dans ce cas, le calcul réalisé n'était pas celui attendu mais le résultat du calcul était correct, sans erreur de calcul. Voici les productions d'une élève ayant réalisé cette erreur.

**Problème 4**  
 Élise achète un sachet de bonbons.  
 Lucie mange  $\frac{1}{6}$  des bonbons et Noah  $\frac{3}{6}$  du sachet.

1) Combien Lucie et Noah ont-ils pris du sachet de bonbons ?  
 (Ton résultat doit être donné sous la forme d'une fraction)

*Ils ont pris  $\frac{4}{6}$  du sachet de bonbons.*

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6}$$

2) Combien reste-t-il du sachet pour Élise ?

*Il lui reste  $\frac{2}{6}$  du sachet de bonbons.*

$$\frac{1}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2}{6}$$

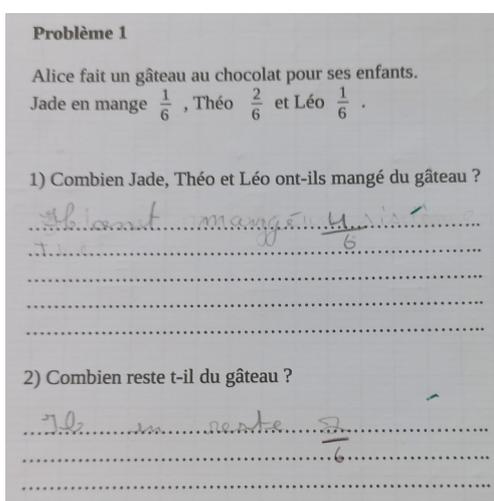
**Problème 5**  
 Un agriculteur possède un champ. Il décide de planter  $\frac{4}{8}$  de son champ avec des haricots.  $\frac{1}{8}$  avec des betteraves.

Combien reste-t-il du champ pour planter du blé ?

*Il lui reste  $\frac{3}{8}$  pour planter du blé.*

$$\frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Pour la question 2 du problème 4, l'élève opère de la même manière qu'au problème 5. Celle-ci effectue une soustraction avec les fractions présentes dans l'énoncé. Dans ces deux problèmes, les résultats à trouver sont bien  $\frac{2}{6}$  et  $\frac{3}{8}$ . Cependant la correspondance entre le résultat attendu et le résultat de la soustraction entre les fractions de l'énoncé est uniquement une coïncidence. Ces productions sont placées dans la catégorie de procédure « non identifiée » car la réponse donnée par l'élève à la question 2 du problème 4 n'a pas de sens avec la question posée. La première production est également placée dans la catégorie « addition » au sein des procédures utilisées.



D'autres élèves ont simplement répondu à la question posée par une phrase. Dans la production ci-dessous, l'élève trouve le résultat correct. Cependant elle ne note aucun calcul ou explication concernant la procédure utilisée. Cette production est incomplète et est placée au sein de la catégorie « Autre » dans les tableaux précédents.

## IV.2 – Le comportement des élèves

### a) La séance 4 en atelier

Lors de la séance 4 de cette séquence d'enseignement, les élèves ont été amenés à travailler en ateliers rotatifs. Chaque atelier avait une durée d'environ 15-20 minutes. Au début de l'atelier 2, la présence du professeur était nécessaire quelques instants. Puis, les élèves étaient en autonomie. La fin de l'atelier consistait à obtenir un retour de la part des élèves grâce à une interview enregistrée comme expliqué précédemment. Lors de ces enregistrements, diverses réponses ont été obtenues. J'ai alors pu dresser un tableau afin d'organiser mon travail. Au sein de ce tableau figure les réponses des élèves avec leur formulation initiale.

Questions	Réponses des élèves
As-tu compris l'utilisation du matériel ?	- « Oui » - Chaque élève a répondu oui, tout le monde a compris l'utilisation du matériel.
As-tu aimé l'atelier ? Pourquoi ?	- « C'était bien » - « Oui parce qu'on manipule pas souvent sinon » - « <b>J'ai aimé parce qu'au moins on travaille avec vous en petits groupes</b> » - « <b>On a travaillé en groupes, j'aime bien</b> » - « C'était marrant et original » - « J'aime pas les mathématiques mais j'aime faire des fractions comme ça. » - « J'aime bien avec les formes parce que quand on trouve pas on a des petites aides avec les formes » - « Ça occupe les mains » - « C'était amusant avec les pièces on pouvait enlever et remettre » - « J'aime bien manipuler des trucs et déplacer les pièces »
Le matériel t'a-t-il aidé à répondre aux problèmes ?	- « Un peu » - « Les pièces m'ont aidé » - « C'était plus simple avec le matériel » - « Oui à la fin quand le problème était dur » - « Oui tout le temps » - « C'est grâce à ça que j'ai réussi les problèmes » - « Je pense que sans les petites pièces j'aurais pas réussi » - « Je ne m'en suis pas trop servi mais si j'avais eu plus de mal à faire les fractions je m'aurais bien servi quand même » - « Non le matériel ne m'a pas aidé »
As-tu préféré résoudre les problèmes avec ou sans manipulation ?	- « Les deux mais aujourd'hui c'était plus marrant et facile » - « <b>Avec parce que là on travaille ensemble</b> »
D'après toi quels problèmes as-tu le mieux réussi ? Les problèmes 1 et 2 de la semaine dernière ou ces problèmes ci ?	- Pour cette question tout le monde a répondu : « les problèmes de cette séance »
Veux-tu refaire des séances du même type ? En atelier avec manipulation ? Pourquoi ?	- « Ouais même aujourd'hui si c'est possible » - « Oui c'est amusant et en même temps ça apprend » - « Ça aide si on a du mal à partager on peut vraiment ... parce que des fois on peut pas les

	partager du coup on doit le faire de tête. On doit s'imaginer un truc qu'on doit partager et là on n'est pas obligé de l'imaginer parce qu'on l'a devant nous » - « Oui parce que c'est trop bien »
--	--

Grâce à cette interview, des interactions intéressantes avec les élèves ont été créées. Toute la classe a aimé l'atelier manipulateur pour diverses raisons : certains ont relevé le fait d'avoir travaillé en groupes et d'autres l'aspect pratique de la manipulation des blocs mosaïques. Des élèves m'ont fait part de leur besoin d'avoir les mains occupées ainsi que l'aide apportée par les pièces. Ils sont donc conscients qu'il s'agit d'une aide pour la résolution de problèmes et non uniquement un déplacement d'objets. Deux élèves m'ont expliqué que les blocs mosaïques ne leur ont pas apporté d'aide afin de répondre aux problèmes. En effet, ces deux élèves ne présentaient pas de difficulté majeure et ont répondu correctement aux problèmes dès le début de la séance. Pour finir, la classe était ravie de ce fonctionnement en atelier qui n'est pas habituel. Beaucoup d'entre eux, souhaitent effectuer des séances similaires où la manipulation est présente car celle-ci les a beaucoup aidés lors des problèmes.

#### b) La séance 5

Lors de la séance 5, la manipulation était à disposition mais non obligatoire pour les élèves. Durant cette séance, neuf élèves sur dix-huit ont souhaité manipuler les pièces mosaïques déjà utilisées en séance 4. Cela représente la moitié de la classe ; il n'est donc pas négligeable de proposer la manipulation aux élèves en difficulté. Parmi ces neuf élèves, un élève souhaitait manipuler pour vérifier ses résultats, tandis que les huit autres voulaient mieux se représenter le calcul à effectuer. Pendant cette séance, l'observation par le professeur était indispensable. En effet, j'ai pu constater que les élèves manipulaient les blocs mosaïques avec un certain objectif à atteindre, il ne s'agissait pas de demander les pièces afin de s'amuser ou manipuler inutilement. Regardons les résultats des problèmes effectués lors de cette séance. Pour le problème 6, un seul élève sur dix-huit n'a trouvé aucune réponse correcte, celui-ci n'a pas souhaité utiliser la manipulation. Pour le problème 7, dix-sept élèves sur dix-huit ont répondu correctement dont quinze avec un

calcul correct. Une amélioration considérable des résultats est donc observée lorsqu'il y a la manipulation.

#### c) La coopération et l'autonomie des élèves

Durant cette séquence d'enseignement sur les fractions, les élèves ont fait part de coopération à plusieurs reprises. Pendant la séance 4, le travail fourni en atelier de la part des élèves m'a paru très intéressant. J'ai observé à plusieurs reprises une entraide au sein du groupe. Une réelle coopération était présente et le climat de classe était propice aux apprentissages. Un certain niveau sonore était bien sûr atteint mais sans jamais être excessif. Les élèves sont également devenus peu à peu autonomes grâce au matériel de manipulation et aux modalités de travail. De plus, nous pouvons voir grâce à l'interview réalisée que les élèves ont particulièrement aimé le travail en groupe et la coopération lors des ateliers.

### **IV.3 – Les limites des résultats**

Certaines limites peuvent être citées à la suite des différents résultats obtenus durant cette expérimentation. En effet, il faut être vigilant concernant le temps de l'expérimentation ainsi que la pratique répétitive des problèmes. Pour réaliser ce travail de mémoire, j'ai été contrainte de réaliser une expérimentation sur un temps très court. Ainsi, la répétition quotidienne de problèmes relativement similaires intervient certainement dans la réussite des élèves. De plus, la modalité de travail utilisée au sein de la séance 4 peut biaiser en partie l'analyse car l'appréciation des élèves semble davantage porter sur le travail de groupe que sur l'intérêt de la manipulation. Pour finir, une dernière limite peut être identifiée et concerne la date de réalisation des problèmes de type A et de type B au sein de la classe de CM2. Les deux types de problèmes étant très similaires et proposés de manière très rapprochée, les élèves ont certainement mémorisé la question intermédiaire pour traiter les problèmes de type B.

## **CONCLUSION**

Ce travail de recherche sur la résolution de problèmes additifs de fractions m'a éclairée en répondant à diverses questions. En effet, je m'interrogeais sur l'importance de

la manipulation au sein de la résolution de problèmes additifs de fractions en CM2. Ma problématique était donc : **Quels sont les effets de la manipulation en résolution de problèmes additifs de fractions au cycle 3 ?** Je me demandais donc si la manipulation avait un impact sur le résultat donné par l'élève au problème, sur le comportement et la lucidité des élèves. Ici, la lucidité de l'élève correspond au fait d'avoir conscience que la manipulation puisse aider à résoudre le problème. Les élèves qui ressentent le besoin de manipuler peuvent utiliser le matériel. Je me suis également questionnée sur la réussite de l'élève en fonction de la formulation du problème donné. Mon travail de mémoire résulte d'une démarche à court terme au sein de ma classe de CM2. En effet, l'expérimentation a été réalisée dans un temps très court, il aurait pu être intéressant de voir les résultats au long terme. Cependant, je n'ai pas eu l'opportunité de pouvoir tester les effets sur un temps plus long en raison de la contrainte du nombre d'heures de stage.

J'ai alors mis en place une séquence d'enseignement sur les fractions simples au sein de ma classe de CM2 en variant les modalités de travail entre chaque séance. Le début de la séquence consistait à introduire les fractions simples et à effectuer quelques problèmes sans manipulation. Puis, la manipulation a été introduite au fur et à mesure des séances afin d'opérer une comparaison des résultats obtenus. Pour répondre à mes questions, j'ai donc utilisé les productions des élèves ainsi qu'une interview réalisée avec chacun d'eux.

Les résultats obtenus montrent le réel bénéfice à manipuler en classe. En effet, les élèves demandent à manipuler car ils sont conscients de l'aide apportée par la manipulation. Ils deviennent alors, dans cette situation précise, autonomes et coopératifs en réalisant des problèmes additifs de fractions en manipulant. Cependant la formulation du problème ne semble pas être un facteur clé de la réussite des élèves. Nos résultats obtenus entre les problèmes de type A et de type B ne sont pas significativement différents.

Certaines hypothèses émises au début de ce travail semblent donc être vérifiées. La première hypothèse reposait sur le fait que la manipulation lors de la résolution de problèmes additifs sur les fractions favorise la réussite des élèves et le développement des procédures. Cette hypothèse est en partie vérifiée au vu des résultats que nous avons obtenus. Cependant le développement des procédures peut aussi être dû à la pratique et l'entraînement sur différents problèmes. Pour ce qui est de la coopération entre élèves ainsi que l'autonomie, la manipulation lors de ces ateliers est un facteur clé mais il en existe encore bien d'autres. Pour finir, la troisième hypothèse émise ne semble pas être totalement

vérifiée car les différences de résultats entre les problèmes de type A et de type B avec ou sans manipulation ne sont pas significatives.

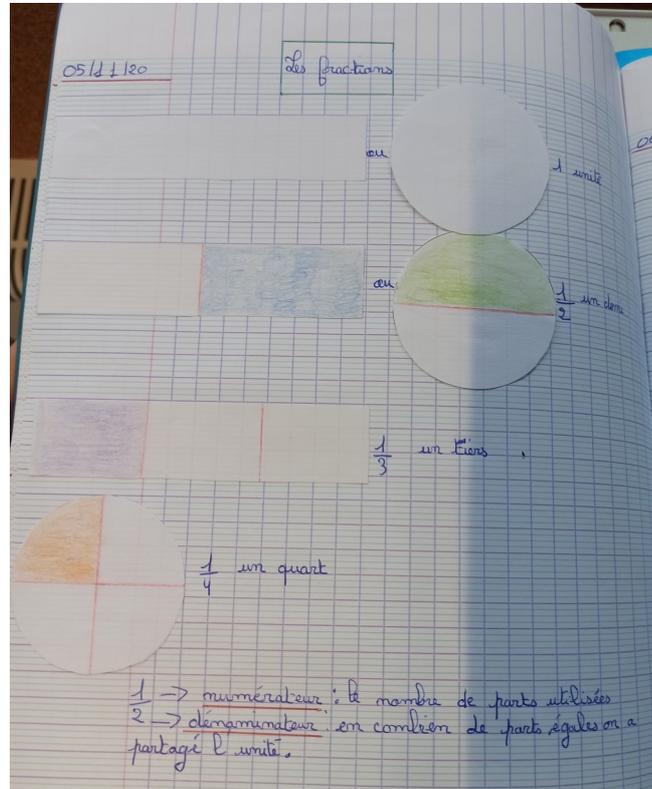
Grâce à cette recherche et l'expérimentation réalisée en classe, j'ai appris à concevoir et mettre en place des séances d'enseignement incluant la manipulation, à gérer un groupe classe en ateliers rotatifs. J'ai également appris la progression préconisée par les programmes d'enseignement afin d'introduire les fractions simples à l'école primaire. J'ai découvert grâce aux productions d'élèves analysées, qu'il existait une multitude d'erreurs possibles sur l'enseignement des fractions et sur la résolution de problèmes. Je me suis alors familiarisée avec la résolution de problèmes en CM2, en découvrant les différents types de problèmes et les procédures possibles afin d'obtenir le résultat souhaité. Cette recherche me conforte dans l'idée que la manipulation est bénéfique pour les élèves si celle-ci est organisée et bien pensée. Je m'interroge maintenant sur la manipulation possible sur d'autres séquences d'enseignement notamment dans le domaine « *Espace et géométrie* ».

## BIBLIOGRAPHIE

- BERDONNEAU C. (2006). *De l'importance des gestes pour l'apprentissage des concepts mathématiques*. Conférence pédagogique au CRDP de Rouen, 7 juin 2006.
- CHARNAY R. (2018). *Réussir en maths à l'école c'est possible !*, Hatier, 2018, p.51-62, Chapitre 7 : « Apprendre à chercher : Peut-on apprendre à résoudre des problèmes ? ».
- DIAS T. (2012). *Manipuler et expérimenter en mathématiques*, Magnard, 2012, p.17-38, chapitre 1 « « Faire » des mathématiques ».
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE. (2002). Documents d'accompagnement des programmes de 2002. *Résolution de problèmes et apprentissage ; des solutions personnelles vers les solutions expertes*, 2002. [en ligne], <http://www.arpeme.fr/documents/23426F3D7143AF66FB30.pdf>. Consulté le 7 novembre 2020.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE. (2012). *Le nombre au cycle 3*, SCEREN CNDP-CRDP, 2012. [en ligne], [http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/44/9/NombreCycle3\\_web\\_VD\\_227449.pdf](http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/44/9/NombreCycle3_web_VD_227449.pdf). Consulté le 20 février 2021.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE. (2016). Documents d'accompagnement des programmes de 2016. *Fractions et nombres décimaux au cycle 3*, 2016. [en ligne], [https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Fractions\\_et\\_decimaux/60/1/RA16\\_C3\\_MAT\\_H\\_frac\\_dec\\_doc\\_maitre\\_V2\\_681601.pdf](https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Fractions_et_decimaux/60/1/RA16_C3_MAT_H_frac_dec_doc_maitre_V2_681601.pdf). Consulté le 20 février 2021.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE. (2020). *Programme du cycle 3*, 2020.
- RESEAU CANOPÉ. Les fondamentaux, *Fractions : partage équitable*. [en ligne]. <https://lesfondamentaux.reseau-canope.fr/video/fractions-partage-equitable.html>

## ANNEXES

### Annexe 1 : Trace écrite de la séance 1



### Annexe 2 : Activité « Les paires de fractions »



### Annexe 3 : Les problèmes de type A

**Problème 1**

Alice fait un gâteau au chocolat pour ses enfants.  
Jade en mange  $\frac{1}{6}$ , Théo  $\frac{2}{6}$  et Léo  $\frac{1}{6}$ .

1) Combien Jade, Théo et Léo ont-ils mangé du gâteau?

.....  
 .....  
 .....

2) Combien reste-t-il du gâteau?

.....  
 .....  
 .....

**Problème 4**

Élise achète un sachet de bonbons.  
Lucie mange  $\frac{1}{6}$  des bonbons et Noah  $\frac{3}{6}$  du sachet.

1) Combien Lucie et Noah ont-ils pris du sachet de bonbons?  
(Ton résultat doit être donné sous la forme d'une fraction)

.....  
 .....  
 .....

2) Combien reste-t-il du sachet pour Élise?

.....  
 .....  
 .....

**Problème 6**

Un fleuriste a vendu  $\frac{1}{4}$  de ses bouquets le matin  
et  $\frac{2}{4}$  l'après-midi.

1) Combien de ses bouquets a-t-il vendu à la fin de la journée?

.....  
 .....  
 .....

2) Combien lui en reste-t-il le soir?

.....  
 .....  
 .....

### Annexe 4 : Les problèmes de type B

**Problème 2**

Paul achète une pizza jambon fromage.  
Sa mère mange  $\frac{2}{8}$  de la pizza et son père  $\frac{3}{8}$ .

Combien reste-t-il de la pizza pour Paul?  
(Ton résultat doit être donné sous la forme d'une fraction)

**Problème 5**

Un agriculteur possède un champ. Il décide de planter  $\frac{4}{8}$  de son  
champ avec des haricots.  $\frac{1}{8}$  avec des betteraves.  
Combien reste-t-il du champ pour planter du blé ?

**Problème 7**

Léa achète une galette. Astrid en mange  $\frac{1}{6}$ , Emma  $\frac{2}{6}$   
et Martin  $\frac{2}{6}$ .

Combien reste-t-il de la galette pour Léa?

**Problème 3**

Mathilde a lu quatre dixièmes de son roman lundi.  
Puis deux dixièmes mardi et enfin un dixième  
mercredi.

Quelle fraction de son roman lui reste-t-elle à lire  
pour le terminer?