



HAL
open science

Excursion en base ternaire pour renouer avec le sens de la numération décimale

Thomas Roux

► **To cite this version:**

Thomas Roux. Excursion en base ternaire pour renouer avec le sens de la numération décimale. Education. 2021. dumas-03602812

HAL Id: dumas-03602812

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-03602812v1>

Submitted on 24 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année universitaire 2020-2021

Diplôme universitaire *Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation*

Mention *Premier degré*

Excursion en base ternaire pour renouer avec le sens de la numération décimale

Présenté par Thomas ROUX

Première partie rédigée en collaboration avec Pierre FERRAZZI

Écrit scientifique réflexif encadré par Marie BUSSE

Sommaire

1	Partie théorique	1
1.1	Introduction	1
1.2	Etat de l'art	1
1.2.1	Le système de numération décimale	1
1.2.1.1	Histoire de la numération	1
1.2.1.2	Les principes de la numération décimale	3
1.2.1.3	Les difficultés rencontrées dans l'apprentissage de la numération décimale	4
1.2.1.4	Les préconisations pour entrer dans la numération décimale	6
1.2.2	La manipulation et le jeu en mathématiques	8
1.2.2.1	Apports théoriques de la recherche concernant la manipulation	8
1.2.2.2	La manipulation dans les documents institutionnels	10
1.2.2.3	La place du jeu dans l'enseignement mathématique	11
1.2.3	Le jeu et la manipulation en lien avec l'apprentissage de la numération décimale	12
2	Problématique	13
3	Méthode	14
3.1	Participants	14
3.2	Conception et mise en œuvre matérielle	14
3.2.1	Principes de conception de l'étude	14
3.2.1.1	Phase 1 : manipulation de groupements et d'échanges en base ternaire	15
3.2.1.2	Phase 2 : transfert vers la base décimale et analogie avec le matériel de numération	16
3.2.1.3	Phase 3 : Compréhension de la constitution du nombre en chiffres	16
3.2.1.4	Evaluations	17
3.2.2	Les variables	17
3.2.3	Les indicateurs	18
3.3	Déroulement	18
3.3.1	Structure de la séquence	19
3.3.2	Evaluations	20
3.3.2.1	Les évaluations écrites EE1 et EE2	20
3.3.2.2	Les évaluations de manipulation EP1 et EP2	21
4	Résultats / Méthode d'analyse des données	22
4.1	Organisation de la collecte des données	22
4.2	Synthèse et traitement des données collectées	24
4.2.1	Evaluations EP1 et EP2	24
4.2.1.1	Synthèse des données collectées	24
4.2.1.2	Traitement des données et description des résultats	24
4.2.2	Evaluations EE1 et EE2	25
4.2.2.1	Synthèse des données collectées	25
4.2.2.2	Traitement des données et description des résultats	25
4.2.3	Observations effectuées lors du jeu	27
5	Discussion	28
5.1	Re-contextualisation	28
5.2	Mise en lien avec les recherches antérieures	29
5.2.1	Lien entre données récoltées et hypothèses	29

5.2.2	Analyse des observations au regard de l'hypothèse n°1	30
5.2.3	Analyse des observations au regard de l'hypothèse n°2	31
5.2.4	Analyse des résultats au regard de l'hypothèse n°3	31
5.2.5	Analyse des observations au regard de l'hypothèse n°4	32
5.2.6	Analyse globale des résultats au regard des recherches antérieures	32
5.3	Limites et perspectives	33
5.3.1	Trois limites principales pour cette étude.....	33
5.3.2	Perspectives	34
6	Conclusion	35

1 Partie théorique

1.1 Introduction

Les concepts fondamentaux de la numération décimale sont enseignés au Cycle 2. Dès le début du CE1, des écarts importants entre élèves sont constatés en ce qui concerne la compréhension du fonctionnement de notre système de numération. La persistance de l'enseignant et la persévérance de l'élève en difficulté ne semblent pas toujours porter leurs fruits si les situations d'apprentissages proposées ne varient pas, ou très peu. Cette étude propose d'expérimenter un jeu de manipulation permettant d'aborder « autrement » un concept essentiel de notre système de numération, celui des groupements et des échanges. Pour cela, et afin d'éloigner les élèves de leurs conceptions parfois erronées, les manipulations s'effectueront dans un premier temps en base ternaire, pour revenir ensuite en base décimale et faire le lien avec le principe décimal de notre système de numération.

Cette étude a ainsi pour objectif de montrer en quoi un jeu de manipulation peut aider les élèves de milieu de cycle 2 les plus en difficulté à accéder à la compréhension de la numération décimale. La restitution de ce travail est exposée en cinq parties. Tout d'abord, les éléments de la recherche qui ont alimenté la réflexion seront détaillés. C'est ensuite sur cette base que seront listées les hypothèses qui ont été posées au regard de la problématique indiquée ci-dessus. La démarche méthodologique ayant conduit à proposer une nouvelle situation d'apprentissage sera alors explicitée, puis les résultats seront présentés. Enfin, les données recueillies seront analysées et discutées afin de porter un regard critique en mettant les résultats en perspectives des hypothèses qui avaient été émises.

1.2 Etat de l'art

Cette étude concerne les fondements de notre système de numération et vise à expérimenter une approche par la manipulation et le jeu. L'état de l'art présenté ci-après porte donc sur ces deux aspects.

1.2.1 Le système de numération décimale

1.2.1.1 Histoire de la numération

Le système de numération que nous utilisons quotidiennement est apparu il y a moins de deux-mille ans (IV^{ème} siècle), en Inde¹. Son élaboration est le fruit d'une longue série

¹ <http://e.guimberteau.free.fr/Site/MPI/Info/11.%20histoire/histoire.htm>

d'améliorations et d'optimisations qui ont été mises au point par l'humanité depuis le premier usage des dénombrements, à la fin de la Préhistoire. Les évolutions majeures se sont toutefois concentrées durant les six derniers millénaires. La connaissance de cette série d'améliorations et des raisons pour lesquelles elles ont été initiées permet de prendre conscience de la puissance de notre système de numération, et de lui donner du sens.

Les objets qui pourraient montrer les premiers usages du dénombrement sont des morceaux de bois ou d'os présentant des encoches. Ils datent de la fin du Paléolithique, il y a plus de 30 000 ans et ont été retrouvés en Mésopotamie. Les encoches ont certainement permis d'effectuer des dénombrements un à un, par exemple dans le but de faire le point sur le résultat d'une chasse. Une évolution majeure est apparue vers 8 000 ans av. J.C., avec l'avènement de l'agriculture et donc de l'intensification des échanges, avec des quantités en jeu de plus en plus importantes. Des systèmes plus évolués ont fait leur apparition pour faciliter les dénombrements et leurs vérifications :

- vers 3500 ans av. J.C., toujours en Mésopotamie, des peuples tels que les Sumériens et les Akkadiens vont utiliser des jetons d'argile pour mémoriser des quantités : les jetons-calculi². En fonction de leur forme, les jetons avaient une valeur différente. On observe ici la première utilisation du principe de « groupements ». Les jetons, qui représentaient des quantités différentes, pouvaient donc être additionnés pour constituer le nombre souhaité : il s'agit du principe additif.

ROSS (2002) indique que « Dans une telle représentation, le nombre se dissocie graduellement des objets dénombrés et développe une existence propre ».

- afin de s'affranchir du transport de jetons pour le commerce, l'idée d'en représenter la valeur sur une plaque d'argile a émergé. La réalisation de simples empreintes des jetons a été remplacée par des représentations symboliques avec l'apparition de l'écriture cunéiforme (Figure 1, Ross, 2002) : il s'agit de la numération babylonienne.

Des calculis à la numération cunéiforme

Jetons-calculi en terre Numération concrète	Numération en écriture cunéiforme	Valeur numérique
Petit cône 		1
Bille 		10
Grand cône 		$10 \times 6 = 60$
Grand cône perforé 		$10 \times 6 \times 10 = 600 = 60 \times 10$
Sphère 		$10 \times 6 \times 10 \times 6 = 3\,600 = 60^2$
Sphère perforée 		$10 \times 6 \times 10 \times 6 \times 10 = 36\,000 = 60^2 \times 10$
		$10 \times 6 \times 10 \times 6 \times 10 \times 6 = 216\,000 = 60^3$
Milieu de IV ^e millénaire	Vers -2650	

Figure 1 : Des calculis à la numération cunéiforme, d'après Ross (2002)

² <http://histoiredechiffres.free.fr/numeration/sumeriens.htm>

- De nombreux systèmes de numération ont coexisté : le système égyptien (additif, non positionnel, en base décimale, avec sept symboles), le système romain (additif, non positionnel, sans base stable, avec cinq symboles), le système grec (additif, non positionnel, avec vingt-sept lettres).
- Le principe de position associé à une base stable et à l'utilisation de dix chiffres (dont le zéro), est survenu en Inde au V^{ème} siècle. Ce système de numération a été repris puis diffusé par la civilisation arabe, pour devenir le système de numération mondialement utilisé depuis le XII^{ème} siècle, date à laquelle le commerce s'est internationalisé.

Le système de numération décimale présente l'avantage de permettre d'écrire de grands nombres avec peu de symboles. Il est :

- Symbolique : utilisation de chiffres.
- Décimal : la base 10 est utilisée.
- Positionnel : la valeur associée à un chiffre est fonction de sa position dans le nombre.

1.2.1.2 Les principes de la numération décimale

La numération décimale écrite chiffrée repose sur deux principes, encore dénommés aspects :

- L'aspect positionnel permet de désigner l'unité de numération concernée par un chiffre en fonction de sa position dans le nombre écrit. Cette position s'appelle le rang, ou encore l'ordre. Les unités simples sont au premier ordre, les dizaines d'unités au deuxième ordre, etc.

Cet aspect est mis en avant lors de l'utilisation du tableau de numération (Tableau 1), pour représenter par exemple le nombre 17450 :

Classe des mille			Classe des unités simples		
C	D	U	C	D	U
0	1	7	4	5	0

Tableau 1 : le tableau de numération où U représente les unités, D les dizaines et C les centaines

En lisant le tableau, nous voyons à quel « ordre » appartient chaque chiffre. Dans l'exemple ci-dessus, nous savons que le chiffre 4 concerne l'ordre des centaines d'unités, ou encore que le chiffre 7 concerne l'ordre des milliers (quantité d'unités de milliers).

- L'aspect décimal lie les unités de numérations entre elles par des groupements de dix : la valeur d'une unité de numération est dix fois supérieure à la valeur de l'unité de numération qui la précède.

Ainsi, une dizaine d'unités simples correspond à dix unités simples. Une centaine d'unités simples correspond à dix dizaines d'unités simples. Et ainsi de suite.

Dès qu'il y a dix éléments qui appartiennent à une même unité de numération, ils sont regroupés pour être remplacés par un élément de l'unité de numération supérieure. Pour chaque ordre, le nombre d'unités est donc strictement inférieur à dix. Ces quantités sont représentées par des symboles : ce sont les chiffres de 0 à 9. Le chiffre 0 permet d'indiquer l'absence de groupe à un certain ordre.

Pour interpréter un nombre écrit en numération chiffrée, il « suffit » donc de comprendre les deux régularités qui régissent son fonctionnement : le principe décimal, et le principe positionnel. Si je lis « 75 », je sais que le chiffre « 5 » correspond à cinq unités, et que le chiffre « 7 » correspond à sept dizaines.

La numération décimale orale s'appuie quant à elle sur une structure (Figure 2, Mounier, 2010) faisant appel aux noms des dizaines (« vingt » – « trente » – « quarante » – « cinquante » – « soixante » – « quatre-vingts ») puis aux noms « cent » et « mille ». Ces noms sont ensuite associés à une petite comptine allant de un à neuf ou à une grande comptine allant de un à dix-neuf.

Grande comptine de un à dix-neuf	vingt	Petite comptine de un à neuf	trente	Petite comptine de un à neuf	quarante	Petite comptine de un à neuf	cinquante	Petite comptine de un à neuf	soixante	Grande comptine de un à dix-neuf	quatre-vingts	Grande comptine de un à dix-neuf	cent
----------------------------------	-------	------------------------------	--------	------------------------------	----------	------------------------------	-----------	------------------------------	----------	----------------------------------	---------------	----------------------------------	------

Figure 2: structure de la numération orale à partir de la petite et de la grande comptine, d'après Mounier (2010)

La numération orale est donc régie par des régularités qui lui sont propres. Mounier (2020) écrit que « la numération écrite chiffrée n'est pas une version écrite de la numération orale ». Ainsi en numération orale, si j'entends « soixante-quinze » je m'appuie sur le nom de la dizaine « soixante » et sur le nom « quinze » appartenant à la grande comptine. Je peux ainsi comprendre le nombre sans passer par l'écriture chiffrée.

1.2.1.3 Les difficultés rencontrées dans l'apprentissage de la numération décimale

Le fait que la numération décimale soit régie par des règles qui ne se répondent pas entre l'oral et l'écrit est une difficulté majeure. En effet, les élèves sont tout d'abord imprégnés par la numération orale, dès la maternelle, mais ne peuvent pas prendre entièrement appui sur celle-ci lorsqu'il s'agit d'accéder à la connaissance de la numération écrite. C'est ainsi que Mounier,

Grapin et Pfaff (2020) ont mis en évidence, en analysant des évaluations proposées en 2013 et 2014 à des élèves de CP, que certains élèves font plus facilement appel à des procédures relevant de la numération orale alors que d'autres vont plus facilement se tourner vers la numération écrites. Pour eux, ceci explique certains constats qui peuvent paraître paradoxaux. Par exemple, certains élèves savent écrire en chiffre un nombre dont le nom est dicté à l'oral, mais ne savent pas écrire le résultat du dénombrement d'une collection organisée en dizaines sans passer par un dénombrement un à un. Ces élèves mobilisent les régularités de la numération orale, mais pas celles de la numération écrite (comptage des unités et des dizaines puis écriture à l'aide du principe de position). A contrario, certains élèves savent donner l'écriture chiffrée correspondant au dénombrement d'une collection organisée (sans passer par le comptage un à un), sans pour autant réussir à écrire en chiffre un nombre dicté à l'oral. Ces élèves mobilisent les régularités de la numération écrite, mais ne connaissent pas celles de la numération orale.

La capacité à mobiliser des connaissances de la numération écrite dans l'utilisation de la numération orale reflète d'une compréhension fine de notre système de numération (Mounier & Grapin & Pfaff, 2020).

La numération écrite présente quant à elle des difficultés qui lui sont propres :

- L'apprentissage du principe décimal consiste à étudier les relations qui lient les différentes unités de numération. Un premier niveau de difficulté consiste à comprendre que dix unités d'un certain ordre peuvent constituer une nouvelle unité d'ordre supérieur : il s'agit de l'unitisation (Tempier, 2016, p.11). Cela consiste en premier lieu à créer la dizaine par groupement et échange de dix unités. Tempier indique que l'étape suivante est de comprendre la relation entre des unités d'ordre non adjacentes, comme la relation entre les centaines et les unités. Accéder à cette compréhension est le révélateur d'une « compréhension profonde de la numération ».
- L'apprentissage du principe de position consiste à comprendre que la valeur associée à un chiffre dépend de sa position dans le nombre. La première difficulté est donc de comprendre qu'un même chiffre peut prendre des valeurs différentes. Ainsi, la valeur d'un nombre n'est pas égale à la somme des valeurs de ses chiffres sans tenir compte de leurs positions. Pour reprendre les termes de Tempier (2016, p.11), un nombre n'est pas une « juxtaposition d'unités simples ». La seconde difficulté est de comprendre que l'absence d'unité à un rang donné doit être marquée par l'écriture d'un « 0 ».

La compréhension entière et experte de la numération décimale en tant que « système » exige de surmonter les difficultés précédemment exposées et de maîtriser les interactions entre les deux principes fondamentaux.

1.2.1.4 Les préconisations pour entrer dans la numération décimale

Au fil de l'analyse des embûches qui jalonnent le chemin de l'apprentissage du système de numération décimale, les chercheurs ont émis des préconisations à destination des décideurs politiques et du corps enseignant.

Brissiaud (2012) insiste sur l'importance de travailler la construction des petits nombres avec des exercices de compositions et de décompositions, dès l'école maternelle. Il souligne l'enjeu de ne pas restreindre l'apprentissage à celui de la comptine numérique et au comptage un à un. Par exemple, les élèves doivent comprendre que « sept » c'est « cinq et encore deux » ou bien aussi « quatre et encore trois ».

Une fois la connaissance des petits nombres acquise, vient l'introduction de la notion de groupements et d'échanges dès le début du Cycle 2. L'introduction des groupements est variable d'un manuel à l'autre :

- certains demandent explicitement d'effectuer des groupements pour dénombrer, alors que d'autres vont laisser les élèves en découvrir l'intérêt avec le plus d'autonomie possible.
- certains les introduisent avec des groupements de trois ou de cinq, alors que d'autres utilisent dès le départ des groupements de dix en lien avec l'aspect décimal de notre numération.

C. Corriveau et D. Jeanotte (2019) ont mené une réflexion concernant l'introduction des notions de groupements et d'échanges. Elles écrivent que « comprendre la structure de notre système de numération, c'est être en mesure de travailler avec les groupements de différents ordres ». Selon elles, inciter les élèves à découvrir ces notions directement avec la base décimale puis de les associer très rapidement à l'écriture symbolique, peut éloigner les élèves de la perception de l'intérêt des groupements. Alors, il faudrait faire travailler les groupements et les échanges de manière autrement qu'en base décimale, par le biais de la manipulation. C'est dans ce cadre de réflexion qu'elles ont proposé un jeu intitulé le Jeu des diamants.

Dès lors, il semble important d'introduire les notions de groupements et d'échanges en se focalisant sur la manipulation avec un nombre d'ordre suffisant, quitte à utiliser une base inférieure à dix.

Une fois les notions d'échanges et de groupements acquises, l'introduction du principe décimal de notre système de numération est grandement facilitée. L'enjeu est alors de faire le lien avec la numération écrite chiffrée en introduisant le principe de position.

Selon Mounier, Grapin et Pfaff (2020), la poursuite de l'étude de la numération en cycle 2 doit se faire en proposant des enseignements distincts et spécifiques de la numération orale et de la numération écrite chiffrée, qu'il conviendra ensuite de lier. Ils effectuent cette recommandation en partant du constat qu'« il est clair que les connaissances concernant 'lire, écrire' les nombres qu'ont assurément les élèves de CE1 et CE2 ne préjugent pas de leurs connaissances sur la compréhension de la numération écrite chiffrée dans son aspect positionnel et son aspect décimal ». Il prend l'exemple d'un exercice de dénombrement d'une collection de soixante-quinze éléments où le résultat peut être restitué à l'oral ou à l'écrit, en prenant soin d'accéder à la notion de groupements de dix dans les deux cas.

- dans le cas d'un dénombrement où le résultat est exprimé à l'oral, ils vont oraliser les noms de dizaines en les associant aux groupements les uns après les autres (le dernier énoncé étant « soixante-dix »), puis surcompter les unités restantes pour arriver à « soixante-quinze ».
- dans le cas d'un dénombrement où le résultat est exprimé à l'écrit, ils vont compter le nombre de groupements de dix, puis compter le nombre d'unités, et écrire les chiffres correspondants en respectant l'aspect positionnel.

Dans les deux cas, les élèves ont utilisé l'aspect décimal du nombre puisqu'ils ont compté le nombre de dizaines.

Il semble donc nécessaire de proposer des situations de dénombrement où le nombre de procédures accessibles par les élèves pour trouver un résultat juste sera limité. Ainsi, l'enseignant peut cibler une notion spécifique. La situation peut viser la compréhension de la numération orale, ou bien de la numération écrite, ou encore du lien qu'il existe entre les deux.

Pour l'apprentissage spécifique de la numération décimale chiffrée, Tempier (2016) indique que les activités de composition / décomposition sont essentielles. Il s'agit de passer d'écritures en unités de numération vers des écritures en chiffres, et vice-versa. Les exercices de conversions entre unités de numération sont également très importants, ou encore l'identification du nombre de dizaines ou de centaines dans un nombre.

Il fait valoir la nécessité de jouer sur le nombre d'unités à chaque ordre, afin de mettre en jeu les relations entre unités lorsque certains d'entre eux en comportent plus de neuf.

Tempier (2016) a analysé les interprétations de l'écriture chiffrée chez des élèves en entrée de CE2, et les a catégorisées comme suit :

- *Juxtaposition d'unités simples* : pour l'élève, chaque chiffre exprime un nombre d'unités simples qu'il convient d'additionner.
- *Juxtaposition positionnelle* : l'élève associe à chaque chiffre la bonne unité orale (« unité », « dizaine », « centaine ») en fonction de sa position, sans pour autant comprendre ce qui constitue ces unités, ni ce qui les lie entre elles. Il peut savoir composer le nombre « 5 centaines 8 dizaines 3 unités » par juxtaposition positionnelle, mais ne pas savoir composer le nombre « 5 centaines 12 dizaines 3 unités ».
- *Unités simples* : l'élève associe à chaque chiffre la bonne unité et le traduit « *en termes de groupements d'unités simples* ». Mais les différents chiffres ne font pas référence à un système d'unités en relation. L'élève ne perçoit pas le lien entre les différentes unités de numération. Ainsi, un élève peut savoir décomposer le nombre 583 en unités de numération, à savoir 5c 8d 3u, mais peut ne pas savoir décomposer le nombre 583 en dizaines et en unités.
- *Systèmes d'unités* : l'élève identifie les unités correspondant à chaque position, en connaît la constitution (multiple de dix) et sait quelle relation lie les unités entre elles.

Il semble alors nécessaire de proposer des activités de composition / décomposition où l'enseignant visera des procédures expertes, et jouera sur le nombre d'unités de chaque ordre afin de mettre en jeu les relations entre unités, quand il y a plus de dix unités à certains ordres

1.2.2 La manipulation et le jeu en mathématiques

L'intérêt de la manipulation en mathématiques anime les recherches depuis de nombreuses années. Les pédagogies Freinet et Montessori positionnent l'enfant en tant qu'acteur de ses apprentissages, et la manipulation et l'expérimentation sont des piliers de ces méthodes. La manipulation continue d'alimenter les recherches les plus récentes et a pris une place notable dans les documents institutionnels.

1.2.2.1 Apports théoriques de la recherche concernant la manipulation

Pinel (Pinel, 2019, p. 88) justifie la nécessité de phases de manipulation dans une séquence d'apprentissage en évoquant les travaux de Jérôme Bruner sur l'apprentissage :

- le mode « énonciatif » dans lequel l'élève apprend par la manipulation en utilisant ses sens.
- puis le mode « iconique » : l'élève transforme l'action en image mentale sans encore savoir expliquer son raisonnement de manière rigoureuse.

- enfin le mode « symbolique », où l'élève procèdera à la transformation de l'image mentale vers une représentation abstraite. Ce mode correspond en mathématique à l'utilisation des symboles appropriés (signes opératoires ...)

Ces trois modes sont à la base de la démarche d'apprentissage en mathématiques (manipuler, verbaliser, abstraire). Pinel (Pinel, 2019, p. 89) a observé que souvent, la phase d'abstraction arrive précocement et les séances de manipulation sont trop courtes alors que « certains élèves ont besoin de temps pour s'appropriier les choses ». Il conseille de revenir à des activités de manipulation pour ces élèves. Briand (Briand, 2019) met cependant en garde au sujet de ces activités qui ne résolvent pas toutes les difficultés par leur simple programmation. Une séance de manipulation doit être bien pensée et organisée en amont car « cela peut conduire à peu de chose près à rien du tout ou à un début d'activité mathématiques ».

Charnay (Charnay, 2018, p. 44) décrit une séance de manipulation en quatre temps avec une situation de recherche (faire des tours identiques avec un nombre donné de cubes pour introduire la multiplication) :

- Temps 1 : manipulation pour comprendre le problème et découvrir le matériel. Faire des tours identiques avec douze cubes (2×6 , 6×2). La validation se fait seulement avec le matériel.
- Temps 2 : faire ranger le matériel et demander aux élèves d'anticiper le résultat avec 30 cubes qu'on peut seulement montrer aux élèves (5×6 , 6×5 , $3 \times 10 \dots$). Les élèves peuvent utiliser le calcul ou les schémas.
- Temps 3 : mise en commun et comparaison des différentes stratégies utilisées.
- Temps 4 : validation des différentes stratégies par l'utilisation du matériel.

Briand (Briand, 2019) recommande aussi ce phasage en notant l'importance de l'étape n°2 durant laquelle l'élève est privé de matériel, ce qui l'oblige à « engager un travail cognitif significatif » en se représentant mentalement le nombre. Il catégorise deux types de manipulations :

- Manipulation de type 1 : l'élève n'engage pas de travail cognitif significatif, comme on le retrouve dans le temps n°1 ci-dessus.
- Manipulation de type 2 : l'élève engage un travail cognitif significatif par un travail de prévision/anticipation.

Pinel (Pinel, 2019, p. 90) soutient l'intérêt de cette étape en conseillant de bloquer l'accès au matériel. Brissiaud (Brissiaud, 2019) confirme également l'importance de cette étape de prévision en affirmant qu'il n'y a « pas de séance sans phase d'anticipation » et qu'elle permet de faire un premier pas vers l'abstraction.

1.2.2.2 *La manipulation dans les documents institutionnels*

Les documents institutionnels demandent aux enseignants d'intégrer la manipulation dans leurs séances.

Les nouveaux programmes de 2015, amendés par la version de 2018, intègrent la manipulation dans les apprentissages. En mathématiques, pour la compétence générale qui est de « raisonner » (BOn° 30 du 26-7-2018, p.23), il est spécifié que les élèves doivent savoir « anticiper le résultat d'une manipulation, d'un calcul ou d'une mesure ». Ce point nous renvoie à la deuxième étape d'une séance de manipulation décrite par Charnay.

Sur commande de Jean-Michel Blanquer, une équipe menée par Cédric Villani a établi un rapport intitulé « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques », qui a été remis le 12 février 2018. Celui-ci souligne à nouveau l'importance de la manipulation en mathématiques puisque la cinquième mesure (rapport Villani Torossian, p.9) décrit les étapes importantes d'apprentissage qui sont : « la manipulation et l'expérimentation, la verbalisation, l'abstraction ». La manipulation et l'expérimentation avec un matériel adapté permettent d'effectuer la transition entre « un objet familier et sensible » vers la « généralisation des faits », soit l'abstraction (rapport Villani Torossian, p.58).

En novembre 2020, un guide intitulé « Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP » a été publié sur le site Eduscol. Sa rédaction a été coordonnée par les services du Ministère de l'Education Nationale et elle est fondée sur l'état de la recherche. Dans ce guide, il est indiqué que l'appel à la manipulation doit être systématique, mais qu'il n'est pas une fin en soi. La manipulation est une aide qui permet de passer du concret à l'abstrait, elle a pour vocation d'initier un travail cognitif puis de disparaître pour laisser place aux dessins et à la schématisation. Ce guide insiste sur le fait que toute manipulation doit être suivie d'une verbalisation. C'est une étape essentielle vers la généralisation et l'abstraction.

Ce document présente un schéma intéressant du processus d'abstraction pour la situation dite « de la boîte » (Figure 3 ci-après), qui concerne le champ additif en CP.

On observe dans ce schéma la phase d'appropriation du problème avec l'aide de la manipulation, puis les phases conduisant l'élève vers toujours plus d'abstraction. Pour cela, comme préconisé par Pinel (2019) dans son étape n°2, l'accès du matériel est bloqué pour forcer les élèves à anticiper. Puis le matériel peut à nouveau être utilisé pour valider les procédures.

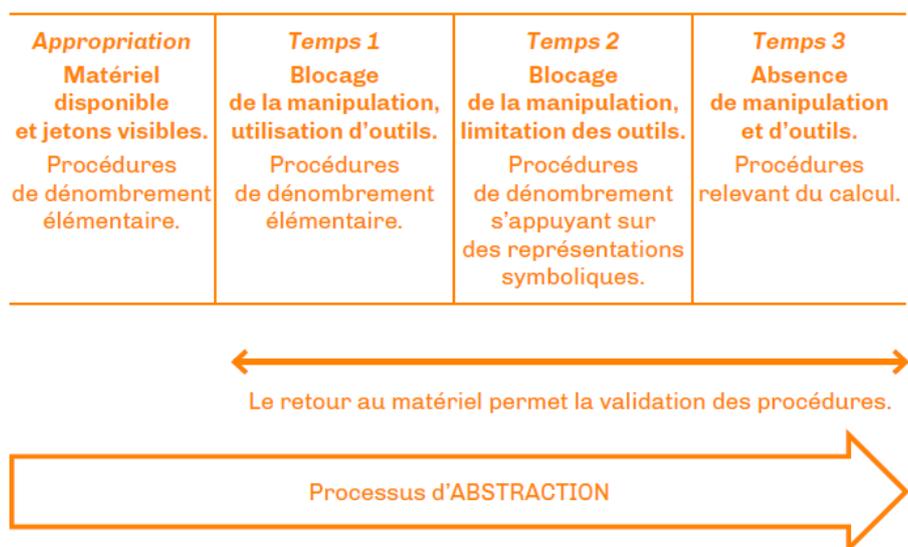


Figure 3 : schéma des différents temps de la situation de la boîte, extrait du guide *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*

1.2.2.3 La place du jeu dans l'enseignement mathématique

Le jeune enfant apprend par le jeu, et ceci est valable pour les mathématiques. Il suffit d'observer le nombre d'occurrence du mot « jeu » dans le programme de Cycle 1 pour en saisir l'importance. Le jeu est un besoin de l'enfant auquel l'enseignant doit répondre, et le jeu peut être exploité comme une situation d'apprentissage. Le jeu induit la manipulation.

Le jeu est relativement effacé dans les programmes du Cycle 2 et du Cycle 3, bien que le rapport Villani en fasse clairement la promotion. Il est indiqué que les activités mathématiques scolaires doivent être associées à des temps de plaisir pour les enfants (p.15), et qu'il est nécessaire de faire appel aux : « Jeux, énigmes, concours, défis et histoires ».

Aussi, en mars 2016, un guide intitulé « Des mathématiques par le jeu – du plaisir à l'apprentissage » a été produit par des professeurs en partenariat avec l'IREM, et publié sur Eduscol. Il est précisé que « le jeu amène l'élève à raisonner : faire des choix, prendre des décisions, anticiper un résultat » et qu' « un des atouts du jeu réside dans la décentration des objets d'apprentissage, qui ne sont plus regardés pour eux-mêmes mais pour gagner dans un espace de jeu spécifique ». Ce document, destiné aux Cycles 3 et 4, précise à quels moments d'apprentissage le jeu peut être mobilisé de manière bénéfique :

- pour l'« introduction d'une nouvelle notion ».
- pour la « construction d'automatismes ».
- pour l'« approfondissement / remédiation ».

Durant le jeu, comme l'expliquent C.Corriveau et D. Jeanotte (2019), l'enseignant joue un rôle important. Il doit observer les élèves pour décortiquer leurs actions, accéder à leurs procédures,

repérer les difficultés. Cette phase d'observation et d'échange permet de préparer le moment de restitution collective qui sera essentiel afin d'accompagner les élèves vers l'abstraction.

1.2.3 Le jeu et la manipulation en lien avec l'apprentissage de la numération décimale

La manipulation est courante dans les écoles afin de viser l'apprentissage de la numération, alors que le jeu semble l'être beaucoup moins.

C. Corriveau et D. Jeanotte (2019) rappellent les trois types de matériel qui ont été identifiés par Poirier (2001) pour l'apprentissage de la numération :

- « matériel aux groupements apparents et accessibles » : ce matériel permet de casser physiquement une dizaine en dix unités ou encore une centaine en dix dizaines.
- « matériel aux groupements apparents et non accessibles » : le matériel n'est pas divisible.
- « matériel symbolique : les groupements ne sont pas visibles », par exemple la monnaie.

Ce matériel sollicite une capacité d'abstraction croissante de la part des élèves.

C.Corriveau et D. Jeanotte (2019) ont conçu un jeu intitulé le Jeu des diamants, ayant pour objectif d'accompagner les élèves dans la compréhension des notions de groupements et d'échanges. En effet pour elles, « comprendre la structure de notre système de numération, c'est être en mesure de travailler avec les groupements de différents ordres ». Pour cela, les élèves sont amenés à faire évoluer des collections de diamants, où les différents types de diamants sont liés par des relations de groupement / échange. Le gagnant est le premier à obtenir l'unique diamant du niveau d'ordre le plus important. Il s'agit donc d'un jeu qui utilise du matériel symbolique. Ce matériel est présenté en Annexe n°5.

Le jeu a été mis en œuvre en phase de découverte du système de numération au Québec (équivalent des classes de CP et CE1 en France). Plusieurs stratégies d'élèves ont été observées au cours de ce jeu. Elles sont reprises ci-après et reflètent des procédures plus ou moins expertes :

- « Stratégie 1 : accumuler sans échanger », qui ne peut pas conduire à gagner la partie.
- « Stratégie 2 : échanger à partir de l'unité de référence » dès qu'il n'y a plus suffisamment de diamants unité.
- « Stratégie 3 : travailler avec les groupements sur les dés », c'est-à-dire identifier les diamants pouvant être directement ajoutés à la collection.
- « Stratégie 4 : articuler le résultat des dés et de sa collection de diamants », c'est-à-dire étendre la perception de sa collection en incluant le nombre indiqué sur les dés.

Les chercheuses ont conclu que, même si le matériel utilisé est « hautement symbolique », ce qui correspond normalement à une capacité d'abstraction déjà importante, le jeu « a permis aux élèves de développer des stratégies intéressantes pour faire des échanges dès la première séance ». Aussi, il a semblé intéressant de travailler autrement qu'en base dix, afin d'observer les élèves effectuer des échanges et des groupements sans faire appel à des procédures qui pourraient être automatisées.

2 Problématique

En milieu de cycle 2, certains élèves sont en très bonne voie pour accéder à la compréhension de la numération décimale en tant que « système », alors que d'autres semblent stagner. Ces derniers savent bien souvent résoudre des exercices qui ne font appel qu'à des notions isolées de numération. Mais il semblerait que ces succès puissent être liés à un phénomène d'entraînement sur des exercices stéréotypés, sans être révélateurs d'une bonne compréhension. Ces difficultés s'accroissent quand les nombres manipulés sont des nombres à trois ou quatre unités de numération, du fait de leur grandeur qui sort de leur champ de représentation des objets quotidiens. Pourtant, c'est dans cette configuration que le « système » décimal prend tout son sens.

Problématique : En quoi un jeu de manipulation pourrait aider les élèves de milieu de cycle 2 les plus en difficulté à accéder à la compréhension de la numération décimale?

Hypothèse 1 : manipuler des objets dans un système de numération en base ternaire, en sortant du champ de la numération décimale, permet de (re)donner du sens aux notions de groupement et d'échange.

Hypothèse 2 : le jeu permet de transférer les compétences de manipulations groupements / échanges de la base ternaire vers la base décimale.

Hypothèse 3 : la maîtrise de la manipulation des groupements et des échanges en base décimale dans un jeu permet, une fois le lien effectué avec le principe décimal de notre système de numération, d'accéder au sens de la constitution du nombre (construction / composition / décomposition).

Hypothèse 4 : l'apprentissage par le jeu propose un contexte de travail stimulant et motivant pour les élèves, ce qui va les conduire à un plein engagement dans l'activité.

3 Méthode

3.1 Participants

L'étude est menée au second semestre à l'école de Veyrier-du-lac en Haute-Savoie, dans une classe de CE1-CE2 de 22 élèves (16 élèves de CE1 et 6 élèves de CE2). Veyrier-du-lac est une commune proche d'Annecy où le niveau social de ses habitants est élevé de manière générale. L'expérimentation vise les élèves de CE1 qui présentent des faiblesses importantes en termes de compréhension du fonctionnement de notre système de numération décimale. Ils sont au nombre de quatre dans ce niveau. Une élève de CE2, qui n'arrive pas à stabiliser ses connaissances en mathématiques, est également intégrée à l'étude.

Afin que les données recueillies le soient en nombre suffisant pour être exploitées, le travail est mené avec l'ensemble des élèves.

Il est à noter qu'une caractéristique commune aux élèves cibles est leur difficulté en calcul mental et/ou en leur compréhension des problèmes.

3.2 Conception et mise en œuvre matérielle

3.2.1 Principes de conception de l'étude

Les élèves visés par l'étude semblent ne pas percevoir le sens de la numération décimale. L'accompagnement effectué en classe en différenciant les enseignements, notamment en proposant beaucoup de manipulation avec le matériel de base décimale, porte ses fruits mais lentement. Certains retours en arrière sont constatés et laissent penser que les « assises » en numération sont trop faibles pour accepter la construction et l'acquisition de nouvelles notions. L'objectif est alors :

- de travailler les notions de groupement et d'échanges, qui sont des fondamentaux, sans faire appel à des situations ou des exercices connus des élèves.
- de proposer une situation au cours de laquelle les élèves ne pourraient pas prendre appui sur leur compréhension fébrile ou erronée de la numération.

Dans ce contexte, le jeu peut être une bonne alternative, et le jeu des diamants semble particulièrement intéressant avec l'idée de travailler les groupements et les échanges autrement qu'en base décimale.

L'étude porte sur la mise en œuvre d'une séquence où un jeu inspiré du Jeu des diamants sert de support aux apprentissages. Les objets manipulés ne sont pas des diamants mais des pâtes, nous l'appelons donc le Jeu des pâtes. Un type de pâte est attribué à chaque niveau d'ordre. Le

but du jeu est d'obtenir le plus rapidement possible une ou deux pâtes du niveau d'ordre le plus élevé. Pour cela, les groupements et les échanges sont nécessaires. La démarche est décomposée en trois phases dont l'articulation est exposée ci-après.

3.2.1.1 Phase 1 : manipulation de groupements et d'échanges en base ternaire

Afin de favoriser la manipulation de plusieurs niveaux d'ordre tout en restant sur un nombre de pâtes manipulées qui soit réaliste, le jeu est exécuté en base 3. L'objectif est de pouvoir utiliser quatre niveaux d'ordre (Figure 4).

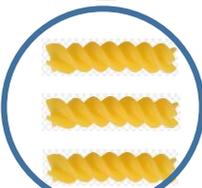
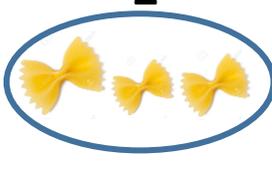
Niveau d'ordre	1	2	3	4
Type de pâte	Type A 	Type B 	Type C 	Type D 
Groupements / échanges				

Figure 4 : Types de pâtes et règles d'échanges en base ternaire

Le quatrième ordre est atteint à partir de vingt-sept pâtes en base ternaire alors qu'il le serait avec mille pâtes en base décimale. Nous voyons ici l'intérêt de travailler en base ternaire.

Règle du jeu énoncée aux élèves :

« A tour de rôle, lancez le dé et augmentez votre collection d'autant de pâtes de type A que la valeur spécifiée sur le dé. Le nombre indique le nombre de pâtes de type A que vous pouvez piocher dans les gobelets (Figure 5). Vous pouvez faire des échanges entre les types de pâtes en respectant les règles qui ont été présentées et qui sont rappelées sur les gobelets.

Le gagnant est le premier de vous deux à obtenir un vélo. »



Figure 5 : Matériel utilisé pour le jeu des pâtes

3.2.1.2 Phase 2 : transfert vers la base décimale et analogie avec le matériel de numération

Une fois ces notions de groupements et d'échanges retravaillées en base ternaire, elles sont transposées dans le contexte de la numération décimale. Pour cela, le jeu des pâtes est utilisé en base décimale (Annexe n°2) mais uniquement avec trois niveaux d'ordre. L'analogie est alors faite avec le matériel de numération (Figure 6). L'équivalence avec le type de pâte de quatrième ordre est induite par les élèves.

Cette phase permet d'aider les élèves à donner du sens au principe décimal.

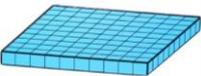
Type de pâte				
Matériel de numération				
Unité de numération	M	C	D	U

Figure 6 : Analogie avec entre le jeu des pâtes en base décimale et le matériel de numération décimale

3.2.1.3 Phase 3 : Compréhension de la constitution du nombre en chiffres

Une fois le principe décimal correctement appréhendé, la construction et la constitution du nombre écrit en chiffre peuvent être abordés. Ce travail est fait en trois temps :

- Temps 1 : écriture de nombres en utilisant le principe de position, à partir d'une décomposition canonique. Par exemple, 1d 2c 1u = 211.

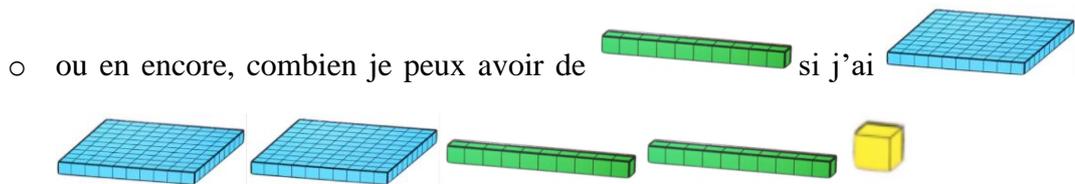
Pour cela, un tableau de numération est utilisé (Annexe n°3), toujours en effectuant l'analogie entre le jeu des pâtes et le matériel de numération.

Les trois représentations du nombre sont associées : celle avec matériel du jeu de pâtes, celle avec le matériel de numération décimale, celle en écriture chiffrée.

- Temps 2 : composition de nombres à partir de représentations « non canoniques ». Par exemple, 26 d 2 c 4u = 4c 6d 4u = 464 (voir Annexe n°3).
- Temps 3 : décomposition de nombres afin de trouver combien il y a de dizaines dans un nombre à 3 chiffres.

Par exemple, trouver combien il y a des dizaines dans le nombre 321 revient à trouver :

- combien je peux avoir de pâtes si j'ai 
- 



Il faudra ici remplacer des éléments d'un certain niveau d'ordre par un groupe d'éléments d'un niveau d'ordre inférieur en respectant le principe décimal et le principe positionnel (exemple en Annexe n°3).

3.2.1.4 Evaluations

Les séances d'apprentissages sont encadrées par deux évaluations écrites identiques (EE1 et EE2), qui permettent d'observer d'éventuelles évolutions de compréhension du concept étudié, et donc d'apporter des réponses à la problématique objet de l'étude. Ces évaluations sont réalisées sous format papier et consistent en la réalisation d'une série d'exercices ciblant les différentes compétences liées à la numération décimale. La volonté est que le type d'exercices proposés lors des évaluations soit connu des élèves, mais qu'il n'y ait aucun entraînement à la réalisation de ce type d'exercices durant la séquence afin d'éviter tout phénomène de réussite par mimétisme. Dans cette logique, la correction de la première évaluation ne sera pas donnée aux élèves avant la fin de la séquence.

Par ailleurs, pour les six élèves ciblés par l'étude, deux autres évaluations de manipulation (EP1 et EP2) sont mises en œuvre. Il s'agit de deux exercices de dénombrement où le professeur observe les procédures des élèves. L'objectif est bien de noter ce qui ne peut pas être vu sur une copie, à savoir si l'élève s'appuie sur la numération orale ou sur la numération écrite chiffrée pour dénombrer.

3.2.2 Les variables

Les variables qui vont influencer sur les procédures des élèves et le niveau de difficulté sont présentées dans le Tableau 2 ci-après.

Variable	Valeurs possibles	Incidences
Base de numération	3 ; 10	Manipulation des niveaux d'ordre plus aisée avec une petite base.
Dénombrement de collection	Non exigé ; Exigé	L'absence de dénombrement permet de se concentrer sur les groupements / échanges.

Variable	Valeurs possibles	Incidences
Nombre de pâtes disponibles pour chaque ordre	Sans contrainte	Le manque de pâtes à un certain ordre va contraindre à effectuer des échanges.
Valeur des dés	1 à 3 ; 1 à 6 ; 1 à 12 en fonction des dés utilisés	Plus la valeur de modification de collection sera importante, plus le nombre d'échanges sera important.
Augmentation / diminution de collection	Augmentation ; Augmentation et réduction	La réduction de collection nécessite d'effectuer des échanges contre des unités d'ordre inférieur (« cassage »).

Tableau 2 : présentation des variables

3.2.3 Les indicateurs

Les indicateurs sont les éléments qui vont être observés et/ou mesurés pour analyser l'évolution des élèves en termes de compréhension de la numération décimale.

Ils sont listés ci-après :

- Le réflexe d'appel aux groupements pour dénombrer → teste la perception du sens et de l'intérêt de notre système de numération.
- La stratégie de dénombrement d'une collection déjà organisée en sollicitant soit la numération orale, soit la numération écrite → témoigne d'une approche experte quand la numération écrite est sollicitée.
- La conversion entre unités de numération → teste la compréhension du principe décimal. Par exemple : $30 \text{ u} = 3\text{d}$.
- L'écriture d'un nombre en chiffre à partir d'une expression en unités de numération → teste la capacité à faire appel aux conversions d'unités dans le cadre de l'écriture du nombre (principe décimal). Par exemple : $3\text{c } 12\text{d } 4\text{u} = 424$
- L'expression du nombre de dizaines dans un nombre à trois chiffres → évalue la compréhension experte de la constitution du nombre en faisant appel au principe décimal et au principe de position. Par exemple, dans 416 il y a 41 dizaines.

3.3 Déroulement

Pour réaliser cette étude, une séquence composée de deux séances d'évaluation et de six séquences d'apprentissage a été mises en œuvre.

3.3.1 Structure de la séquence

La structure de cette séquence est exposée ci-après, alors que le plan détaillé est proposé en annexe n°1 :

N° séance	Objectif	Contenu
1 (30')	Evaluation initiale	Evaluation écrite EE1 pour tous les élèves et évaluation EP1 pour les cinq élèves cibles.
2 (45')	Maîtriser les groupements et échanges en base 3 (cf. Phase 1 de conception) pour augmenter une collection.	Jeu des pâtes en binôme, en base 3 . But : augmenter sa collection et obtenir deux pâtes de type D en premier.
3 (45')	Maîtriser les groupements et échanges en base 3 pour augmenter et diminuer une collection. (cf. Phase 1 de conception)	Jeu des pâtes en binôme, base 3 . Règle : augmenter sa collection et obtenir deux pâtes de type D le premier. Evolution par rapport à la séance précédente : des diminutions de collections sont induites.
4 (45')	Transférer les compétences de manipulation en base 10 et faire l'analogie avec le principe décimal de numération (cf. Phase 2 de conception)	Jeu des pâtes en binôme, en base 10 . Règle : augmenter sa collection et obtenir une pâte de type C le premier.
5 (45')	Construire le nombre écrit en chiffres à partir de sa représentation matérielle, en faisant le lien avec les unités de numération (cf. Phase 3 de conception).	Manipulations en binôme, en base 10 : 1/ à partir de collections canoniques. 2/ à partir de collections non canoniques.
6 (45')	Manipuler les pâtes et les nombres en parallèle (composer / décomposer) en utilisant les notions de groupements et d'échanges (cf. Phase 3 de conception)	3/ Décomposer un nombre pour en exprimer sa composition pour une unité de numération donnée (ex : dans 284 il y a 28 dizaines).
7 (30')	Evaluation finale	Evaluation écrite EE2 pour tous les élèves et évaluation EP2 pour les cinq élèves cibles.

3.3.2 Evaluations

3.3.2.1 Les évaluations écrites EE1 et EE2

Elles ont pour objectif d'évaluer les compétences des élèves dans leur utilisation du principe décimal et du principe positionnel. Pour cela, les exercices vont porter sur des tâches de composition / décomposition et de conversions d'unités de numération, comme préconisé par Tempier (2016).

Les exercices sont repris de l'étude de Tempier (2016). Ils sont de trois natures différentes, avec pour chaque exercice une gradation des difficultés. Pour les besoins de l'étude, les questions de chaque série sont découpées en sous-groupes en fonction des compétences mobilisées.

- Série 1 (Figure 7) : convertir un nombre écrit en unités de numération, vers une écriture chiffrée.

1)	1 centaine + 9 dizaines + 3 unités = ...	S1_A	6)	2 dizaines + 15 unités = ...	S1_C
2)	8 dizaines + 2 centaines + 5 unités = ...	S1_B	7)	4 centaines + 10 dizaines = ...	S1_D
3)	6 centaines + 9 unités = ...		8)	5 centaines + 12 dizaines + 3 unités =	
4)	7 unités + 4 centaines = ...		9)	21 dizaines + 3 centaines = ...	
5)	3 dizaines + 6 centaines = ...		10)	6 centaines + 21 dizaines + 14 unités =	S1_E

Figure 7 : Série 1 de l'évaluation EE, d'après Tempier (2016)

Sous-groupe S1_A : ne sollicite ni le principe de position, ni le principe décimal.

Sous-groupe S1_B : sollicite le principe de position.

Sous-groupe S1_C : mobilise les relations entre unités et dizaines.

Sous-groupe S1_D : mobilise les relations entre dizaines et centaines.

Sous-groupe S1_E : nécessite de savoir effectuer des conversions en cascade entre unités et dizaines puis entre dizaines et centaines.

- Série 2 (Figure 8) : convertir des unités de numération.

1)	5 dizaines = unités	S2_A
2)	80 unités = dizaines	S2_B
3)	1 centaine = dizaines	
4)	3 centaines = unités	
5)	60 dizaines = centaines	

Figure 8 : Série 2 de l'évaluation EE, d'après Tempier (2016)

Sous-groupe S2_A : sollicite les relations entre unités et dizaines.

Sous-groupe S2_B : sollicite les relations entre les dizaines et les centaines.

Sous-groupe S2_C : sollicite les relations entre les unités et les centaines.

- Série 3 (Figure 9) : déterminer le nombre de dizaines ou de centaines dans un nombre.

1)	Dans 67 il y a dizaines	S3_A
2)	Dans 105 il y a dizaines	S3_B
3)	Dans 260 il y a centaines	S3_A
4)	Dans 400 il y a dizaines	S3_B
5)	Dans 764 il y a dizaines	S3_B

Figure 9 : Série 3 de l'évaluation EE, d'après Tempier (2016)

Sous-groupe S3_A : pose la question du nombre de dizaines dans un nombre à deux chiffres et du nombre de centaines dans un nombre à trois chiffres. Il est à noter que dans ce sous-groupe de questions, un élève qui confondrait le « nombre » de dizaines avec le « chiffre » des dizaines aurait tout de même une réponse correcte à la première question, et de même avec le « nombre » de centaines ou le « chiffre » des centaines à la question n°3.

Sous-groupe S3_B : exige, quant à lui, de faire cette distinction entre « nombre de ... » et « chiffre de ... » pour accéder à une réponse correcte.

La saisie des résultats des évaluations EE1 et EE2 conduit à attribuer une note pour chaque élève. Cette note est comprise entre 0 et 20 car il y a vingt questions.

3.3.2.2 Les évaluations de manipulation EP1 et EP2

Les évaluations EP vont consister en des activités de dénombrement de pâtes selon deux situations, visant deux objectifs distincts :

- Le premier étant d'observer si les élèves font appel aux groupements pour faciliter et fiabiliser le dénombrement d'une collection.

Pour cela, soixante-douze pâtes sont disposées sur une table de manière non organisée (Figure 10), et les élèves doivent en effectuer le dénombrement. Ils doivent exprimer leur réponse oralement, puis indiquer un indice de confiance en leur réponse sur une échelle de un à cinq.

- Le second étant d'identifier la procédure à laquelle font appel les élèves pour dénombrer une collection d'objets déjà organisée en groupements de dix : procédures relevant de la numération orale ou de la numération écrite ;

Pour cela, soixante-seize pâtes sont disposées sur une table avec sept groupements de dix et six pâtes isolées (Figure 10). Comme lors de la situation précédente, les élèves doivent exprimer leur réponse oralement, puis indiquer un indice de confiance en leur réponse sur une échelle de un à cinq. Le professeur est particulièrement attentif à la

procédure utilisée par les élèves. Les élèves peuvent prendre appui soit sur la numération orale, soit sur la numération écrite chiffrée. C'est la seconde procédure qui est jugée experte.

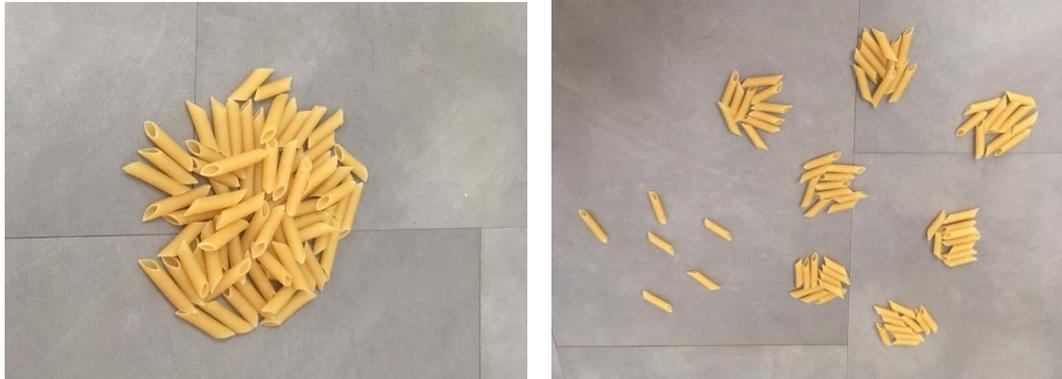


Figure 10: collection non organisée (à gauche) et collection organisée (à droite)

Les évaluations EP1 et EP2 conduisent à une saisie d'éléments factuels (Tableau 3), pour chaque élève :

- nous noterons si l'élève fait appel aux groupements pour dénombrer. Trois réponses seront possibles : oui avec des groupements de dix ; oui avec des groupements autres que dix ; non.
- nous noterons si l'élève utilise une procédure experte de dénombrement en prenant appui sur des connaissances de numération écrite chiffrée.
- nous noterons si l'élève a confiance en son résultat, en utilisant une échelle de 1 à 5.

4 Résultats / Méthode d'analyse des données

4.1 Organisation de la collecte des données

La séquence a été menée sur la seconde partie de la période 4 et a été terminée en début de période 5.

Les données collectées au cours de cette étude sont de trois ordres :

- **les observations effectuées au cours des évaluations de manipulation EP1 et EP2** auprès des cinq élèves cibles conduisent à les situer suivant quatre types d'items : le réflexe de « grouper » pour dénombrer, l'appel à la numération écrite ou orale pour dénombrer une collection déjà organisée en groupements, l'indice de confiance des élèves en leur résultat, la validité de la réponse.

NB : cette évaluation a été également proposée à deux élèves identifiés comme « experts » afin de vérifier que ces élèves mobilisent bien les procédures dites « expertes ».

	Item	Observation
Collection non organisée de 72 pâtes	Le réflexe « grouper » pour dénombrer	Aucun groupement n'est effectué
		Des groupements autres que 10 sont effectués
		Des groupements de 10 sont effectués
	L'indice de confiance des élèves en leur résultat sur une échelle de 1 à 5	Entre 1 et 2
		Entre 3 et 4
		5
	La validité de la réponse	Absence de réponse ou réponse erronée et éloignée du résultat attendu
		Réponse erronée mais très proche du résultat attendu (erreur de comptage)
		Réponse correcte
Collection organisée de 76 pâtes	L'appel à la numération écrite ou orale pour dénombrer une collection déjà organisée en groupements	Dénombrement un à un
		Comptage des groupes de dix en énumérant les dizaines oralement, puis surcomptage des unités restantes
	La validité de la réponse	Comptage des groupes de dix pour déterminer le chiffre des dizaines puis comptage des unités pour déterminer le chiffre des unités
		Absence de réponse ou réponse erronée et éloignée du résultat attendu
		Réponse erronée mais très proche du résultat attendu (erreur de comptage)
		Réponse correcte

Tableau 3 : Structure des données collectées lors des évaluations EP1 et EP2

- les résultats des évaluations écrites EE1 et EE2 permettent d'indiquer un score sur vingt pour chaque élève (Tableau 4) en fonction des réponses correctes ou erronées apportées :

Types d'exercices	Nombre de questions
Série 1 : convertir un nombre écrit en unités de numération, vers une écriture chiffrée	10
Série 2 : convertir des unités de numération	5
Série 3 : déterminer le nombre de dizaines ou de centaines dans un nombre	5
Score total maximum	20

Tableau 4: Structure des données collectées lors des évaluations EE1 et EE2

- les observations effectuées au cours du jeu. Celles-ci permettent de comprendre les procédures utilisées par les élèves et d'apporter les étayages nécessaires à l'apprentissage. Les observations au cours du jeu des pâtes portent sur plusieurs aspects : le comportement des élèves (motivation, écoute, respect des consignes), la

compréhension des règles du jeu, la faculté à créer des groupements et des échanges, les stratégies plus ou moins expertes qui sont mobilisées pour effectuer les échanges (passage par l'unité de référence, prise en compte directe du score des dés, vision globale « collection + dé(s)).

Pour la présentation des résultats, les élèves sont dénommés comme suit : « EC » pour élève cible ou alors « E », puis un numéro d'identification unique de « 01 » à « 22 », puis la classe « CE1 » ou « CE2 » (exemple : EC03_CE1).

4.2 Synthèse et traitement des données collectées

4.2.1 Evaluations EP1 et EP2

4.2.1.1 Synthèse des données collectées

Les résultats des évaluations d'observation sont présentés en annexe n°4.

4.2.1.2 Traitement des données et description des résultats

L'évaluation EP1 fait ressortir les points suivants :

- Les élèves en difficulté n'utilisent pas les groupements pour dénombrer une collection non organisée, ils effectuent un dénombrement un à un. Les élèves jugés « experts » effectuent quant à eux des groupements de dix, puis font appel à la numération chiffrée pour construire le nombre et l'énoncer à l'oral.
- Les élèves en difficulté savent utiliser les groupements de dix déjà effectués dans une collection organisée pour la dénombrer. Ils vont par contre s'appuyer sur la numération orale pour effectuer le dénombrement, alors que les élèves jugés « experts » vont s'appuyer sur la numération écrite.

A l'issue de la séquence, on ne constate que très peu d'évolution chez les élèves en ce qui concerne les procédures utilisées pour dénombrer une collection.

Pour ce qui est du dénombrement d'une collection non organisée :

- Ceux qui effectuaient un comptage un à un lors de l'évaluation EP1 utilisent la même stratégie lors de l'évaluation EP2 ;
- Ceux qui organisaient leur collection en dizaines puis utilisaient ces dizaines pour accéder au nombre lors de l'évaluation EP1 utilisent la même stratégie lors de l'évaluation EP2.

S'agissant du dénombrement d'une collection déjà organisée en dizaines, les stratégies utilisées lors de l'évaluation EP1 sont à nouveau reproduites lors de l'évaluation EP2.

4.2.2 Evaluations EE1 et EE2

4.2.2.1 Synthèse des données collectées

Les résultats des évaluations écrites sont présentés dans le Tableau 5.

		Série 1										Série 2					Série 3					Score élève
EE1	n°question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	initial
	Résultat	193	285	609	407	630	35	500	623	510	824	50	8	10	300	6	6	10	2	40	76	
	E12_CE1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20
	E18_CE2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20
	E07_CE1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20
	E19_CE2	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	18
	E17_CE2	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1		17
	E08_CE1	1				1		1	1	1	1	1	1	1	1		1	1		1	1	17
	E16_CE1	1	1	1	1	1	1	1	1			1	1	1	1	1	1	1		1	1	17
	E11_CE1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1				16
	E13_CE1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1					15
	E14_CE1	1	1	1	1	1	1					1	1	1	1	1	1	1		1	1	15
	E09_CE1	1	1	1	1	1	1	1				1	1	1	1	1	1		1			14
	E21_CE2	1	1	1	1	1			1	1		1				1	1	1	1	1	1	13
	E10_CE1	1	1	1	1	1			1			1	1	1		1	1	1		1		12
	E15_CE1	1		1	1	1	1	1				1	1		1		1			1	1	11
	EC01_CE1	1	1	1	1	1						1	1	1	1						1	10
	EC03_CE1	1	1			1	1		1			1	1	1			1		1			10
	EC06_CE1	1	1	1	1	1						1	1		1		1					9
	EC04_CE1	1		1		1						1	1	1		1	1		1			9
	EC02_CE1	1	1	1	1	1								1		1						7
	E20_CE2	1	1	1	1	1								1								6
	E22_CE2	1		1	1	1							1				1					6
	EC05_CE2	1		1								1		1			1					5
	Score classe (max = 22)	22	18	21	19	20	12	8	13	8	8	19	18	18	14	13	18	11	8	11	8	

Tableau 5: synthèse des résultats de l'évaluation EE1

Le score « élève », compris entre 0 et 20, détermine le nombre de réponses correctes données par chaque élève sur les 20 questions qui lui sont posées.

Le score « classe », compris entre 0 et 22, détermine le nombre de réponses correctes données par la classe pour une question donnée.

Les annotations graphiques présentes sur le Tableau 5 sont exposées dans la partie 4.2.2.2.

Le tableau de résultats a été trié par ordre décroissant de « score élève ». L'ordre d'apparition des élèves sera le même pour l'EE2 afin de pouvoir comparer les données.

4.2.2.2 Traitement des données et description des résultats

La lecture graphique de la synthèse de l'évaluation EE1 (Tableau 5) permet d'identifier trois groupes d'élèves pour chaque série :

- Un Groupe 1 pour lequel, à partir d'un certain numéro de question, toutes les réponses (à l'exception près) aux questions suivantes sont erronées. Graphiquement, cela se traduit par des blocs noirs.

On identifie clairement ces blocs dans les séries 1 et 3, avec les élèves dont le score final est inférieur ou égal à 10.

- Un Groupe 2 pour lequel, à partir d'un certain numéro de question, les réponses erronées prennent le dessus sur les réponses correctes, sans pour autant créer de blocs noirs de réponses erronées. Ce groupe concerne les élèves dont le score final est compris entre 10 et 15.
- Un Groupe 3 pour lequel les réponses correctes prennent le dessus dans chacune des séries. Ce groupe concerne les élèves dont le score final est supérieur à 15.

Les élèves cibles de l'étude se trouvent dans le Groupe 1.

Un tableau de synthèse de l'évaluation EE2 a été établi de la même manière que pour l'évaluation EE1. Cela a permis de générer un tableau présenté ci-après (Tableau 6) mettant en avant les évolutions entre les réponses apportées à l'EE1 et celles apportées à l'EE2.

La lecture graphique semble montrer, à première vue, que les effets positifs de la séquence se sont particulièrement concentrés sur les élèves du Groupe 2.

		Légende : +1 Réponse correcte -1 Réponse erronée																				
Evolution entre EE1 et EE2																						
Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	Evolution du score élève	
E12_CE1																					0	
E18_CE2					-1				-1											-1	-3	
E07_CE1																					0	
E19_CE2					1										1					-1	1	
E17_CE2					-1					-1										1	-1	
E08_CE1					-1	1				-1					-1	1					-1	
E16_CE1										1											1	
E11_CE1									1									-1	-1	1	-1	
E13_CE1																				1	1	2
E14_CE1									-1	1	1	1	1								3	
E09_CE1																		1		1	1	3
E21_CE2									1	1					1				1			7
E10_CE1									1											-1	1	1
E15_CE1										-1					1	1					1	4
E04_CE1																					1	1
EC01_CE1										-1	-1										-2	
EC03_CE1																						3
EC06_CE1										1					1					1		2
EC04_CE1										1												1
EC02_CE1															-1	1				1		1
E20_CE2									1	1					-1							1
E22_CE2									1						1	1						3
EC05_CE2										-1	1			-1								-2
Evolution du score classe	0	3	-1	1	-3	1	2	3	-1	2	-1	2	0	1	4	1	0	1	2	6		

Tableau 6 : évolution des scores entre l'EE1 et l'EE2s

Pour aller plus loin dans l'analyse, il est intéressant d'observer les réponses des élèves par groupes d'élèves, et par notions visées. Pour cela, les résultats sont classés via les sous-ensembles de questions qui ont été établis à la partie 3.3.2.1. Pour chaque sous-ensemble de questions, le taux de réussite du groupe est indiqué (Tableau 7). Les scores les plus faibles ont été mis en valeur afin de cibler les notions qu'il est important de travailler. Nous voyons ainsi que les notions sollicitées par les groupes de questions S1_C_D_E et S2_C et S3 sont les moins bien maîtrisées. Toutes ces questions font appel aux relations entre unités, mobilisées dans l'écriture du nombre. Il est à noter que les exercices sollicitant les relations entre unités de numération mais dans un contexte ne faisant pas appel au nombre (simples conversions d'unités) amènent à des résultats satisfaisants.

	Série 1					Série 2			Série 3	
	S1_A	S1_B	S1_C	S1_D	S1_E	S2_A	S2_B	S2_C	S3_A	S3_B
Groupe 1	100%	75%	13%	4%	0%	63%	50%	25%	44%	4%
Groupe 2	100%	95%	60%	33%	0%	90%	70%	60%	60%	53%
Groupe 3	100%	97%	89%	85%	89%	100%	89%	100%	72%	78%

Tableau 7: Taux de réussite en % lors de l'évaluation EE1

En conservant la même grille d'analyse pour les résultats de l'évaluation EE2, il est ensuite possible de déterminer la progression pour chacun des groupes (Tableau 8). Les évolutions significativement positives ont été mises en valeur. Elles portent sur les sous-groupes de questions qui avaient posé des difficultés lors de l'évaluation EE1. Les exercices sollicitant les relations entre unités de numération dans le cadre de l'écriture d'un nombre un ont donc été mieux réussis après la séquence. Cependant, les évolutions ne sont pas homogènes entre les groupes puisqu'elles se concentrent particulièrement sur le groupe 2.

	Série 1					Série 2			Série 3	
	S1_A	S1_B	S1_C	S1_D	S1_E	S2_A	S2_B	S2_C	S3_A	S3_B
Groupe 1	0	3	0	8	0	0	-6	13	19	4
Groupe 2	0	5	0	27	40	10	30	20	10	33
Groupe 3	0	-6	11	-7	0	0	11	-11	-11	7

Tableau 8: Nombre de points d'évolution entre EE1 et EE2

4.2.3 Observations effectuées lors du jeu

Tout au long de la séance, l'observation et les échanges avec les élèves ont conduit à effectuer un certain nombre de constats qui ne sont pas traduits dans les résultats « mesurés ». Il s'agit donc, dans la majeure partie des cas, d'éléments subjectifs. Mais il est pour autant très intéressant de les prendre en compte dans l'analyse de l'enseignant.

Les observations en lien avec la motivation des élèves sont tout d'abord listées ci-dessous :

- les élèves sont enjoués quand il s'agit de jouer au jeu des pâtes.

- les élèves apprécient la complexité apportée par de nouvelles règles. Ils les perçoivent comme un défi. Par exemple, l'ajout de la règle conduisant à devoir diminuer une collection leur a beaucoup plu.
- les élèves les plus à l'aise avec la numération peuvent se lasser plus vite car leurs stratégies expertes les conduisent à terminer les parties rapidement. Il faut leur fournir d'autres contraintes de jeu.

Ensuite, ce sont les observations en lien avec l'évolution des procédures (incitées par l'organisation du jeu) qui sont retranscrites :

- limiter le nombre de pâtes disponibles pour le type A a conduit certains élèves à être bloqués. Un échange avec l'enseignant permet un engagement cognitif des élèves qui les amène à penser aux groupements, et ainsi à débloquer la situation.
- dès le début du jeu en base ternaire, les élèves ont eu tendance à calculer la valeur de la pâte de type D (objectif), et calculaient en permanence la valeur de leur collection, sans se concentrer réellement sur les procédures de groupements et d'échanges. Petit à petit, ils se sont éloigné de cette envie de donner une valeur à leur collection pour se concentrer sur les groupements et les échanges.
- L'enseignant doit être très présent car les élèves trouvent toujours une solution à un blocage dans le jeu, ils peuvent s'affranchir de certaines règles embarrassantes assez facilement.
- le passage de la base ternaire à la base décimale n'a occasionné aucune difficulté pour les élèves.
- le fait que le jeu se déroule en binôme entraîne des échanges entre pairs concernant les règles et les procédures. Les élèves apprennent beaucoup de leurs pairs en partageant leurs procédures techniques et leurs stratégies.
- le jeu permet de multiplier les manipulations, laissant ainsi le temps aux élèves de mettre en place des habiletés manipulatoires et de faire évoluer leurs procédures.

5 Discussion

5.1 Re-contextualisation

Cette étude vise à renforcer la compréhension de notre système de numération décimale. L'objectif est de déterminer en quoi un jeu de manipulation pourrait permettre aux élèves de milieu de cycle 2 les plus en difficulté d'accéder au sens et à l'intérêt de la numération décimale, afin de renouer avec son apprentissage.

L'apprentissage du principe décimal, fondamental et complexe, est basé sur la notion d'échanges et de groupements. C'est cette notion qui est particulièrement visée en utilisant le jeu comme support d'apprentissage. Les élèves sont invités à manipuler une collection d'objets (de pâtes) dans un système de numération en base ternaire. Cette base est choisie car elle permet d'effectuer des échanges et des groupements en utilisant jusqu'à quatre niveaux d'ordre tout en conservant un nombre d'objets manipulés qui soit raisonnable. L'hypothèse n°1 est que les manipulations de groupements et d'échanges avec quatre niveaux d'ordre permettent de donner plus sens à ce concept de groupements et d'échanges.

Le jeu est ensuite transféré en base décimale pour conduire à l'analogie avec le principe décimal. L'hypothèse n°2 est que les habiletés développées en manipulant une collection en base ternaire sont transférables en base décimale et facilitent la compréhension du lien entre les unités de numération décimale.

L'hypothèse 3 est que les habiletés manipulatoires développées au cours du jeu facilitent l'accès à l'abstraction et par conséquent à la manipulation des nombres écrits, sans en passer par une phase d'entraînement avec des exercices écrits.

Enfin, l'hypothèse n°4 est que le jeu permet un réel engagement des élèves dans l'activité, du fait de son caractère stimulant et motivant.

L'incidence sur la compréhension de la numération décimale par les élèves est évaluée grâce à deux exercices de dénombrement d'une collection, ainsi qu'à une série d'exercices de manipulation des nombres écrits. Ces évaluations sont réalisées avant la séquence et après la séquence, sans en modifier le contenu. Aussi, il est précisé qu'afin d'éviter des réussites liées au phénomène d'entraînement, voire de mimétisme, aucun exercice ressemblant aux évaluations n'est proposé au cours de la séquence. C'est le transfert des apprentissages d'un type d'exercice à un autre qui est évalué. Les transferts réussis sont souvent le signe d'une compréhension plus profonde.

5.2 Mise en lien avec les recherches antérieures

5.2.1 Lien entre données récoltées et hypothèses

Nous rappelons que les données recueillies sont de trois sortes :

- les observations faites au cours des évaluations de manipulations EP1 et EP2 ayant fait l'objet de constatations factuelles.
- les résultats des évaluations écrites EE1 et EE2.
- des observations, plus subjectives, faites au cours de la séquence.

Chaque type de données va permettre d'alimenter la réflexion concernant une ou plusieurs hypothèses comme exposé dans le Tableau 9 ci-après :

	EP	EE	Obs.
Hypothèse 1 : bénéfice de la manipulation en base ternaire sur l'intérêt des groupements, et sur la compréhension du concept de relations entre unités.	X	X	
Hypothèse 2 : le jeu permet de transférer les compétences de manipulations de la base ternaire à la base décimale.			X
Hypothèse 3 : les habiletés manipulatoires développées au cours du jeu sont transférables pour la manipulation des nombres écrits en chiffres.		X	
Hypothèse 4 : le jeu permet un engagement important des élèves grâce à son caractère motivant.			X

Tableau 9 : liens entre données récoltées et hypothèses

5.2.2 Analyse des observations au regard de l'hypothèse n°1

Le sens de la numération décimale, et notamment du principe de groupements / échanges, peut être analysé suivant deux axes.

Nous nous intéressons en premier lieu à la perception de l'intérêt des groupements. L'évaluation EP propose ainsi de tester le réflexe de groupements. Ce réflexe n'est pas apparu lors de l'évaluation EP1 chez les élèves les plus en difficulté. L'analyse montre qu'il n'y a quasiment eu aucune évolution entre les évaluations EP1 et EP2 effectuées auprès de ces élèves. (Annexe n°4). Ceux-ci ne faisaient pas appel aux groupements pour rendre le dénombrement plus efficace avant la séquence, et ils n'y font toujours pas appel après la séquence.

En second lieu, nous observons les évolutions quant aux facultés de manipulation des unités de numération (relations entre unités). Cette compétence est particulièrement sollicitée par les sous-groupes de questions suivants : S1_C à D et S2. Les évolutions significatives sont mises en avant dans le Tableau 10 ci-après.

Nombre de points d'évolution entre EE1 et EE2	Série 1					Série 2			Série 3	
	S1_A	S1_B	S1_C	S1_D	S1_E	S2_A	S2_B	S2_C	S3_A	S3_B
Groupe 1	0	3	0	8	0	0	-6	13	19	4
Groupe 2	0	5	0	27	40	10	30	20	10	33
Groupe 3	0	-6	11	-7	0	0	11	-11	-11	7

Tableau 10 : Résultats concernant les questions qui sollicitent les relations entre unités

L'évolution la plus notable concerne le Groupe 2, pour qui la manipulation des relations entre dizaines et centaines s'est à priori nettement améliorée. Par contre les effets semblent limités pour les élèves du Groupe 1 qui étaient pourtant ciblés par cette étude. En ce qui concerne le Groupe 3, aucune évolution d'importance n'est constatée mais nous pouvons toutefois être surpris par la présence d'évolutions négatives.

Au regard de ces éléments, **l'hypothèse n°1 n'est que partiellement vérifiée. En effet, la manipulation n'a pas réellement permis aux élèves les plus faibles d'améliorer leur perception du sens de la numération décimale. Par contre, il semblerait que la manipulation ait permis à des élèves de niveau intermédiaire de consolider leur compréhension de la notion des groupements et des échanges.**

5.2.3 Analyse des observations au regard de l'hypothèse n°2

Le jeu des pâtes a été mis en œuvre avec une règle de conversion entre type de pâtes qui répondait à celles de la base ternaire. Les élèves se sont largement exercés à effectuer des manipulations dans cette base ternaire.

Lors de la séance n°4, les règles du jeu ont été changées pour passer en base décimale. Pour cela, seul un nouvel affichage a été proposé aux élèves pour expliquer les nouvelles relations entre unités. Il a été observé que le changement de règles du jeu n'a aucunement perturbé les élèves, qui ont transféré leurs compétences manipulatoires dans cette base.

Il est à noter que cette observation reste subjective puisqu'elle n'est accompagnée d'aucun recueil de données mesurables. Malgré cela, **l'hypothèse n°2 semble vérifiée** sur la base des observations effectuées.

5.2.4 Analyse des résultats au regard de l'hypothèse n°3

Les données qui alimentent la réflexion concernant l'hypothèse n°3 sont recueillies à partir de l'évaluation écrite EE, et plus précisément à partir des questions S1_C à E et S3 (Tableau 11).

Nombre de points d'évolution entre EE1 et EE2	Série 1					Série 2			Série 3	
	S1_A	S1_B	S1_C	S1_D	S1_E	S2_A	S2_B	S2_C	S3_A	S3_B
Groupe 1	0	3	0	8	0	0	-6	13	19	4
Groupe 2	0	5	0	27	40	10	30	20	10	33
Groupe 3	0	-6	11	-7	0	0	11	-11	-11	7

Tableau 11 : Résultats concernant les questions qui sollicitent le principe décimal dans la construction du nombre

Une nouvelle fois, c'est chez le Groupe 2 que les évolutions les plus notables sont constatées. Les élèves ont notamment augmenté leur taux de réussite pour la question S1_E qui nécessitait d'effectuer plusieurs conversions d'unités en cascade. Aussi, leur compréhension de la constitution du nombre s'est améliorée puisqu'ils ont augmenté leurs compétences pour identifier le nombre de dizaines ou le nombre de centaines dans un nombre à trois chiffres (S3).

Chez les Groupe 1, une amélioration semble apparaître dans le tableau d'analyse mais il s'agit d'un artéfact. L'augmentation de 19 points aux questions S3_A n'est pas révélatrice de la compréhension du nombre car il était possible d'obtenir une réponse correcte en confondant « chiffre des ... » et « nombre de ... ». C'est d'ailleurs l'erreur qu'ils semblent avoir commise puisqu'ils ne sont pas améliorés aux questions S3_B qui, justement, permettaient d'éviter ce genre de « fausses bonnes réponses ».

L'hypothèse n°3 semble partiellement vérifiée puisque la séquence n'a conduit qu'une partie des élèves à transférer leurs compétences manipulatoires d'une collection vers des compétences manipulatoires des nombres écrits en chiffres.

5.2.5 Analyse des observations au regard de l'hypothèse n°4

Les élèves ont exprimé une réelle motivation pour jouer au jeu des pâtes. Cette observation reste suggestive, mais est appuyée par les constatations suivantes :

- Les expressions de joie à l'annonce du jeu (« génial ! »).
- Les demandes spontanées des élèves en arrivant le matin (« Maître, est-ce qu'on va jouer au jeu des pâtes aujourd'hui ? »).
- L'attention importante des élèves au cours des modifications de règles, et la motivation qui en découle. Les élèves perçoivent ces modifications de manière très positives, comme des défis à relever. Ils ont semblé apprécier la complexification des règles.

Aucune donnée mesurable ne permet d'étayer l'analyse, mais au regard des observations effectuées **l'hypothèse n°4 semble clairement vérifiée.**

5.2.6 Analyse globale des résultats au regard des recherches antérieures

La mise en œuvre de cette séquence semble avoir eu des effets positifs sur la compréhension de la numération décimale chiffrée, du moins pour une partie des élèves. Ces effets étaient espérés car la séquence a été bâtie en intégrant des éléments clés identifiés lors de l'établissement de l'état de l'art, à savoir :

- manipuler une collection avec un nombre suffisant de niveaux d'ordre afin de comprendre le fonctionnement des groupements et des échanges, notamment en référence à l'étude de C. Corriveau et D. Jeanotte (2019).
- utiliser la manipulation pour passer du concret à l'abstrait, en référence à l'étude de Pinel (2019).
- Travailler la composition et la décomposition des nombre afin d'en saisir les concepts clés de la numération décimale, en référence à l'étude de Tempier (2016).

D'une manière générale, les élèves les plus en difficulté (Groupe 1) ont très légèrement progressé, les élèves d'un niveau « moyen » (Groupe 2) ont bien progressé dans leur manipulation du principe décimal dans l'écriture chiffrée, et les élèves les plus à l'aise (Groupe 3) n'ont pas vraiment été sensibles à la séquence. Certains éléments paraissent cependant surprenants :

- le fait le plus inattendu est que les élèves ayant le plus de difficultés n'aient que très peu progressé alors que la séquence était conçue pour eux, avec notamment beaucoup de manipulation. Il était imaginable que ce soient les élèves les plus éloignées de l'abstraction (les moins à l'aise avec la numération) qui en tirent le plus profit. Or, ce sont plutôt les élèves d'un niveau « moyen » pour qui la séquence a conduit à une réelle progression. Une explication possible est exposée dans la partie 5.3.1 Limites de l'étude.
- un second fait notable est que certains des élèves les plus à l'aise ont obtenu un score plus faible à la seconde évaluation. Au moins deux explications peuvent être envisagées. La première serait que ces élèves, qui avaient trouvé la première évaluation EE1 facile, n'aient pas réussi à se concentrer pour effectuer la seconde évaluation EE2 qui était identique : ils auraient alors effectué des erreurs d'inattention. La seconde explication pourrait être liée au fait que la séquence est venu perturber leurs conceptions de certaines notions qui n'étaient peut-être pas stabilisées. Ainsi, ils seraient passés de réponses « automatiques » correctes, à des réponses « réfléchies » qui peuvent alors se révéler incorrectes. Si tel est le cas, cette séquence leur a peut-être permis d'apporter de nouveaux éléments à leur réflexion, qu'il faudra stabiliser.

5.3 Limites et perspectives

5.3.1 Trois limites principales pour cette étude

La première limite concerne la constitution de l'échantillon d'élèves qui ne peut pas être considéré comme représentatif, du fait de sa taille limité (22 élèves), mais aussi parce que les

élèves sont en grande majorité issus d'un milieu social bien spécifique. Nous noterons que des études telles celle de Tempier (2016) portent sur plus de 100 élèves.

La seconde limite concerne l'analyse des résultats qui, pour rester factuelle, a été établie avec un traitement de type statistique malgré la taille de l'échantillon. Or des calculs d'évolution menés sur des échantillons limités sont trop sensibles. L'évolution du Groupe 2 (constitué de cinq individus) est ainsi particulièrement portée par l'élève E09_CE1 qui compte à lui seul le tiers des points gagnés en plus par ce groupe. Si jamais cet élève n'a pas réellement progressé, mais qu'il a simplement « raté » la première évaluation, alors l'analyse statistique des résultats s'en trouve faussée, ainsi les conclusions de l'étude, par conséquence.

La troisième limite vise à tenter d'expliquer pourquoi les élèves les plus en difficultés n'ont que très peu progressé par rapport aux élèves d'un niveau « moyen ». Il se pourrait que ce résultat soit induit par un des choix de conception de l'étude. En effet, dans l'objectif d'observer le transfert qui est opéré par les élèves de manière naturelle entre la manipulation des collections et la manipulation des nombres écrits en chiffres, il a été décidé de ne pas exercer les élèves à la manipulation des nombres écrits en chiffres entre les deux évaluations EE1 et EE2. Or cela ne va pas dans le sens de deux éléments mis en exergue par l'état de l'art :

- Charnay (2018) souligne l'importance de bloquer l'accès au matériel pour contraindre les élèves à évoluer vers l'abstraction.
- Tempier (2016) montre que les exercices de composition et de décomposition sont essentiels pour accéder à la compréhension de la numération décimale.

Il est alors probable que ces exercices sur le nombre écrit en chiffres aient fait défaut aux élèves les plus en difficulté, alors que les élèves du Groupe 2 disposant déjà d'un certain niveau d'abstraction ont pu faire ce lien en adoptant une attitude réflexive tout au long de la séquence.

5.3.2 Perspectives

La mise en œuvre de cette séquence me conduit tout d'abord à envisager une suite pour cette situation d'apprentissage que j'ai mise en œuvre. Concevoir la séquence puis en analyser les résultats au regard des lectures de la recherche s'est révélé très instructif et m'apporte les éléments de réflexion qui me permettront de l'améliorer. J'ai trouvé la situation très intéressante pour faire manipuler les groupements et les échanges aux élèves, et les accompagner vers l'abstraction pour accéder à la compréhension de la numération décimale. Cependant, cette situation devrait plutôt être conduite en rituel pour des élèves en découverte de notion, ou des élèves présentant des difficultés. Le lien existant entre la manipulation des objets et la manipulation des nombres doit faire l'objet d'un apprentissage très explicite.

J'ai ensuite été très agréablement surpris de la posture des élèves au cours de l'apprentissage par le jeu. Cet élan de motivation se traduit forcément en excitation, mais celle-ci est canalisée car ils sont engagés dans l'activité. Pour eux, le jeu est quelque chose de sérieux. Cela permet à l'enseignant d'être précis dans la construction du jeu en lien avec l'articulation des notions, puisque les élèves respectent les règles. C'est un mode d'apprentissage que je souhaite reconduire dans d'autres disciplines.

Enfin, le dernier point concerne le sujet de l'évaluation des élèves. Le travail d'analyse des données m'a conduit à l'élaboration d'une représentation graphique que j'ai trouvé très utile (Tableau 5). Ce mode de représentation permet avec de simples tris de faire ressortir des groupes de besoin, et d'identifier les frontières d'acquisitions des notions entre ces différents groupes. Il faut cependant avoir à l'esprit que ce type de représentation ne peut émerger qu'avec une construction méticuleuse des évaluations avec une gradation en termes de complexité des notions mobilisées. Pour l'avenir, mon intention est de bâtir des évaluations diagnostiques qui me permettront de créer des groupes de besoin dans les disciplines clés, en me basant sur des représentations graphiques des évaluations.

6 Conclusion

Les réussites très fluctuantes de certains élèves de milieu de cycle 2 dans le domaine de la numération m'ont conduit à un questionnement sur l'ancrage des notions fondamentales, et en particulier celle du principe décimal. J'ai le sentiment que certains élèves, portés sur la procédure plutôt que sur le concept sous-jacent, avancent dans ce domaine d'apprentissage grâce à une sorte de mimétisme qui leur permet de réussir des exercices parfois stéréotypés. Pourtant, ces élèves échouent souvent dès qu'il s'agit de mobiliser ces notions dans un contexte nouveau. Je souhaitais donc trouver un moyen de travailler la numération autrement.

La lecture des articles de recherche m'a orienté vers une activité de manipulation qui utilise le jeu comme support. Ce jeu a pour objectif de développer les habiletés manipulatoires des élèves en lien avec le concept de groupements et d'échanges. L'originalité vient du fait que les habiletés sont créées en manipulant une collection en base ternaire, afin de transférer ces compétences en base décimale. Cette situation a du potentiel puisqu'elle a permis à certains élèves, mais pas forcément ceux qui étaient ciblés par l'étude, de progresser. L'enjeu sera désormais, pour l'avenir, d'adapter cette situation afin d'aider les élèves à entrer dans la numération décimale, mais également pour accompagner les élèves les plus en difficultés dans leur apprentissage de la numération décimale.

Bibliographie

- Briand, J. (2019, octobre 19). Manipuler au service des apprentissages. Centre Alain Savary - Education prioritaire - ifé. <http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/mathematiques-en-education-prioritaire/manipulation-nombres-decimaux-aux-cycles-1-2-et-3-1/place-et-role-de-la-manipulation-dans-la-construction-du-nombre-et-la-resolution-de-problemes-aux-cycle-1-2-et-3/manipuler-au-service-des-apprentissages>
- Brissiaud, R (2012). Il faut refonder l'apprentissage des nombres en maternelle. Repéré à <http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2012/11/12112012Article634882967527254607.aspx> le 05/01/21
- Brissiaud, R. (2019, septembre 8). SNUipp-FSU 07—Rémi Brissiaud Le comptage Numérotage doit-il être enseigné ? - UDA 2018 Partie 1. <https://www.youtube.com/watch?v=3Zs8ieHb4sY>
- Charnay, R. (2018). *Réussir en maths à l'école, c'est possible !* Hatier.
- Corriveau, C., & Jeannotte, D. (2019). Travailler le principe de groupement / échange lié à la numération sans passer par l'écriture symbolique : analyse des stratégies d'élèves, *Grand N*, 104, pp. 59-70
- MEN, B.O. du 26 juillet 2018.
- Mounier, E. (2010). *Une analyse de l'enseignement de la numération. Vers de nouvelles pistes.*
- Mounier, É., Grapin, N., & Pfaff, N. (2020). Lire, écrire les nombres : quelle place dans l'apprentissage des numérations au cycle 2, *Grand N*, 106, pp. 31-47
- Pinel, N. (2019). *La Méthode Heuristique de Mathématiques— Le guide de la méthode* (3e édition). Nathan.
- Ross, A., & Charbonneau, L. (2002). Systèmes de numération : du concret à l'abstrait, Bulletin *AMQ*. Vol. XLII, 4, pp. 48-56
- Tempier, F. (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves, *Grand N*, 98, pp. 67-90
- Villani-Torossian (rapport remis le 12 février 2018) 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques. Site du ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse : <https://www.education.gouv.fr/cid126423/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques.html>

Sitographie :

Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche : actualités, pédagogie, ressources : <http://www.education.gouv.fr>

Eduscol - Le site de l'enseignement primaire et secondaire : <http://eduscol.education.fr>

- Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP
- Les mathématiques par les jeux :

https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Maths_par_le_jeu/92/4/01-RA16_C3_C4_MATH_math_jeu_641924.pdf

<http://e.guimberteau.free.fr/Site/MPI/Info/11.%20histoire/histoire.htm>

<http://histoiredechiffres.free.fr/numeration/sumeriens.htm>

ANNEXES

Sommaire des annexes

Annexe 1 - Séquence d'apprentissage mise en œuvre

Annexe 2 – Analogie entre le jeu des pâtes et le matériel de numération décimale

Annexe 3 – Exercices de manipulations

Annexe 4 - Résultats des évaluations EP1 et EP2

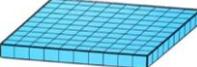
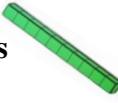
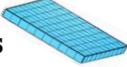
Annexe 5 – Matériel du jeu des diamants

Annexe 1 – Séquence d'apprentissage mise en oeuvre

N° séance	Objectif	Contenu
1 (30')	Evaluation initiale	Evaluation écrite EE1 pour tous les élèves (exercices de numération) Evaluation d'observation EP1 d'une activité de dénombrement pour les cinq élèves cibles.
2 (45')	Maîtriser les groupements et échanges en base 3 (cf. Phase 1 de conception) pour augmenter une collection. NB : le nombre limité de pâtes de chaque type va contraindre les élèves à effectuer des groupements et des échanges.	Jeu des pâtes en binôme, en base 3, avec 10xTypeA, 10xTypeB, 10xTypeC, 3xTypeD et 1 dé. Règle : augmenter sa collection et obtenir deux pâtes de TypeD le premier. 1/ Prise en main du jeu avec utilisation des dés de 1 à 3 uniquement. 2/ Utilisation des dés de 1 à 6.
3 (45')	Maîtriser les groupements et échanges en base 3 pour augmenter et diminuer une collection. (cf. Phase 1 de conception)	Jeu des pâtes en binôme, en base 3, avec 10xTypeA, 10xTypeB, 10xTypeC, 3xTypeD et 1 dé. Règle : augmenter sa collection et obtenir deux pâtes de TypeD le premier. 1/ Reprise en main du jeu avec l'utilisation du dé de 1 à 6 pour augmenter sa collection. 2/ Utilisation du dé de 1 à 5 pour augmenter sa collection. Si l'on tombe sur le 6, il faut diminuer sa collection en retirant 2 unités à celle-ci.
4 (45')	Transférer les compétences de manipulation en base 10 et faire l'analogie avec le principe décimal de numération (cf. Phase 2 de conception)	Jeu des pâtes en binôme, en base 10, avec 25xTypeA, 25xTypeB, 3xTypeC et 2 dés. Règle : augmenter sa collection et obtenir une pâte TypeC le premier. 1/ Prise en main du jeu en base 10 avec l'utilisation du dé de 1 à 6 pour augmenter sa collection.

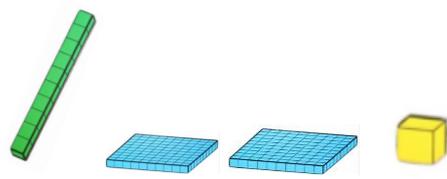
		<p>2/ Jeu en base 10 avec l'utilisation de deux dés pour augmenter sa collection.</p> <p>3/ Jeu en base dix avec l'utilisation de deux dés. Si l'on fait un double, on doit diminuer d'autant d'unités sa collection.</p>
5 (45')	<p>Construire le nombre écrit en chiffres à partir de sa représentation matérielle, en faisant le lien avec les unités de numération (cf. Phase 3 de conception).</p>	<p>Manipulations en binôme avec 25xTypeA, 25xTypeB, 5xTypeC.</p> <p>1/ Construire le nombre à partir collections canoniques en utilisant le principe décimal de position. (ex : 8d 6u 1c équivaut à 186).</p> <p>2/ Composer un nombre en organisant des collections non-canoniques (ex : 3c 12d 8u équivaut à 4c 2d 8u, soit 428).</p>
6 (45')	<p>Manipuler les pâtes et les nombres (composer / décomposer) en utilisant les notions de groupements et d'échanges (cf. Phase 3 de conception)</p>	<p>3/ Décomposer un nombre pour en exprimer la quantité de chaque unité de numération (ex : 284 équivaut à 2c 8d 4u, ou encore 284u, ou encore, 2c et 84u, ou encore 28d et 4u).</p>
7 (30')	<p>Evaluation finale</p>	<p>Evaluation écrite EE2 pour tous les élèves (exercices de numération)</p> <p>Evaluation d'observation EP2 d'une activité de dénombrement pour les cinq élèves cibles.</p>

Annexe 2 – Analogie entre le jeu des pâtes et le matériel de numération décimale

Base décimale				
Niveau d'ordre	1	2	3	4
Type de pâte	Type A 	Type B  = 10 fois 	Type C  = 10 fois 	Type D  = 10 fois 
Matériel de numération correspondant	 « unité »	 « dizaine » = 10 fois 	 « centaine » = 10 fois 	 « millier » = 10 fois 

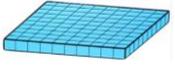
Annexe 3 – Exercices de manipulations

1/ Associations de représentations sous formes canoniques et décomposition d'un nombre

Représentation n°1	
Représentation n°2 (équivalente)	

			
			
« millier »	« centaine »	« dizaine »	« unité »
M	C	D	U
0	2	1	1
Le nombre est 211			

2/ Associations de représentations sous formes non canoniques

Type d'unité « pâtes »			
Type d'unités de numération			
Nombre d'unités dénombrées	2	26	4
Nombre d'unités après groupements et échanges	4	6	4

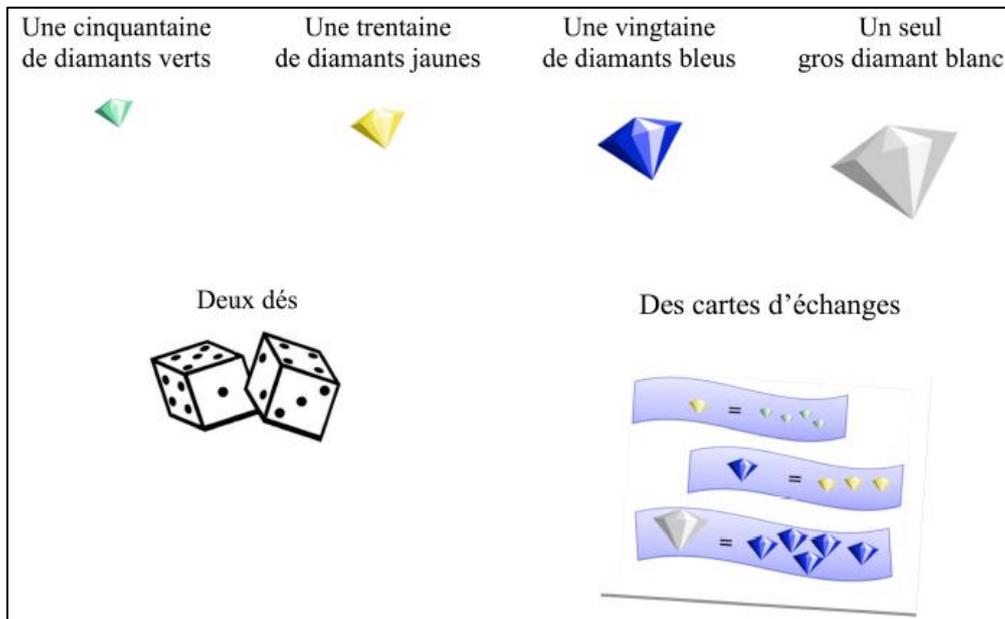
3/ Décomposition d'un nombre

Type d'unité « pâtes »			
Type d'unités de numération			
Nombre d'unités dénombrées	3	2	1
Nombre d'unités après échanges		$(3 \times 10) + 2 = 32$	1

Annexe 4 - Résultats des évaluations EP1 et EP2

			EC01_CE1	EC02_CE1	EC03_CE1	EC04_CE1	EC05_CE2	EC07_CE1	EC08_CE1	
	Item	Observation								
Collection non organisée de 72 pâtes à l'EP1 et 67 pâtes à l'EP2	Le réflexe « grouper » pour dénombrer	Aucun groupement n'est effectué	EP1 / EP2	EP1 / EP2	EP1 / EP2	EP1 / EP2				
		Des groupements autres que 10 sont effectués					EP1 ⁽¹⁾ /EP2 ⁽²⁾			
		Des groupements de 10 sont effectués						EP1 / EP2	EP1 / EP2	
	L'indice de confiance des élèves en leur résultat sur une échelle de 1 à 5	Entre 1 et 2								
		Entre 3 et 4		EP2	EP1 / EP2	EP1			EP1	
		5	EP1 / EP2	EP1		EP2	EP2	EP2	EP2	EP1 / EP2
	La validité de la réponse	Absence de réponse ou réponse erronée et éloignée du résultat attendu						EP2		
		Réponse erronée mais très proche du résultat attendu (erreur de comptage)		EP2 (61)			EP2			
		Réponse correcte	EP1 / EP2	EP1	EP1/EP2	EP1			EP1 / EP2	EP1 / EP2
Collection organisée de 76 pâtes à l'EP1 et 64 pâtes à l'EP2	L'appel à la numération écrite ou orale pour dénombrer une collection déjà organisée en groupements	Dénombrement un à un					EP1/EP2			
		Comptage des groupes de dix en énumérant les dizaines oralement, puis surcomptage des unités restantes		EP1 / EP2	EP1 / EP2	EP1 / EP2				
		Comptage des groupes de dix pour déterminer le chiffre des dizaines puis comptage des unités pour déterminer le chiffre des unités	EP1 / EP2						EP1 / EP2	EP1 / EP2
	La validité de la réponse	Absence de réponse ou réponse erronée et éloignée du résultat attendu								
		Réponse erronée mais très proche du résultat attendu (erreur de comptage)						EP1/EP2		
		Réponse correcte	EP1 / EP2	EP1 / EP2	EP1 / EP2	EP1 / EP2			EP1 / EP2	EP1 / EP2

Annexe 5 – Matériel du Jeu des diamants



Année universitaire 2020-2021

Diplôme universitaire *Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation*

Mention Premier degré

Titre de l'écrit scientifique réflexif : Excursion en base ternaire pour renouer avec le sens de la numération décimale

Auteur : Thomas ROUX, en collaboration avec Pierre FERRAZZI pour la rédaction de la partie théorique

Résumé :

L'apprentissage des fondamentaux de notre système de numération décimale est un des enjeux majeurs du Cycle 2. Si certains élèves accèdent sans trop de difficultés à la compréhension des concepts clés, d'autres semblent stagner. Cette étude expérimente une situation de manipulation par le jeu, qui vise à permettre aux élèves en difficulté d'accéder de manière stable à la notion de groupement et d'échange. Pour cela, des habiletés manipulatoires sont d'abord acquises en base ternaire, avant de revenir en base décimale pour se diriger vers l'abstraction. Les résultats sont intéressants et surprenants : intéressants car une partie des élèves a progressé à l'issue de la séquence qui a été menée; surprenants car ce ne sont pas les élèves ciblés, c'est à dire les plus en difficulté, qui ont le plus progressé. L'enjeu est désormais d'adapter cette situation d'apprentissage afin qu'elle ait des effets notables sur les élèves ciblés.

Mots clés : mathématiques, cycle 2, numération, groupements, manipulation, jeu

Abstract:

Learning the fundamentals of our decimal number system is one of the major challenges in Cycle 2. While some students understand the keys concepts without difficulty, others seems to stagnate. This study experiments with a game manipulation situation, which aims to allow students in difficulty to gain stable access to the notion of grouping and exchange. To do this, manipulative skills are first acquired in ternary basis, before returning to decimal basis and finally moving towards abstraction. The results are interesting and surprising.

Interesting because some of the students progressed at the end of the sequence that was conducted. Surprising because it is not the targeted students, those in difficulty, who have made the most progress. The challenge is now to adapt this learning situation for producing effects on the targeted students.

Keywords: mathematics, cycle 2, numbering, groupings, manipulation, game