



HAL
open science

Modes d'un modèle de poutre linéaire avec des conditions aux limites élastiques couplée à un oscillateur non linéaire

Matthieu Leroux

► To cite this version:

Matthieu Leroux. Modes d'un modèle de poutre linéaire avec des conditions aux limites élastiques couplée à un oscillateur non linéaire. Sciences de l'ingénieur [physics]. 2021. dumas-03615351

HAL Id: dumas-03615351

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-03615351v1>

Submitted on 21 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright



Travail de fin d'études

Pour le diplôme d'ingénieur de l'École nationale des travaux publics de l'État

Année 2020-2021

Voie d'approfondissement : Génie Civil

Soutenue le : 2 septembre 2021

Devant le jury composé de :

Maitre de Stage : Sébastien LANGLOIS - Université de Sherbrooke

Président de Jury : Alireza TURE SAVADKOOHI - ENTPE/LTDS

Expert : Claude-Henri LAMARQUE - ENTPE/LTDS

par :

Matthieu LEROUX

Modes d'un modèle de poutre linéaire avec des conditions aux limites élastiques couplée à un oscillateur non linéaire

Établissement d'accueil : Université de Sherbrooke



UNIVERSITÉ DE
SHERBROOKE

Notice Analytique

Auteur			
Nom	LEROUX		
Prénom	Matthieu		
Organisme d'accueil			
Nom et localité	Université de Sherbrooke, 2500 Boulevard de l'Université, Sherbrooke QC J1K 2R1, Canada.		
Nom du tuteur	M. Sébastien LANGLOIS		
Analyse du stage			
Titre	Modes d'un modèle de poutre linéaire avec des conditions aux limites élastiques couplée à un oscillateur non linéaire		
Title	Modes of a beam with elastic boundaries conditions connected to a non-linear oscillator		
Résumé	<p>Ce rapport porte sur le contrôle passif d'un mode de poutre avec des conditions aux limites élastiques. Nous voulons modéliser une portion de câble de ligne de transport électrique. Au Québec, à cause des précipitations de givre, un phénomène de vibration (galop) cause des dommages mécaniques sur les lignes de transport. Le but est d'étudier la possibilité de contrôle passif des vibrations des câbles avec un dispositif de puit d'énergie non-linéaire. Premièrement, on calcule les modes de vibration de la poutre aux conditions aux limites élastiques. Puis, on projette sur un mode le système constitué de la poutre couplée à un oscillateur non-linéaire. On utilise la méthode des échelles multiples pour déterminer les points d'équilibre du système. Ensuite, on réalise une modélisation par la méthode des éléments finis avec le logiciel Code_Aster. On fait une analyse modale et une analyse dynamique du système soumis à une sollicitation harmonique. Finalement, on compare les résultats des différentes modélisations.</p>		
Abstract	<p>This report deals with passive control of the mode of a beam with elastic boundaries conditions. We want to model a part of a transmission line cable. The aim is to study the possibility of passive control for vibration reduction of this cable with a nonlinear energy sink. In Quebec, due to frost, a vibration phenomenon called galloping causes mechanical damages on transmission line. First, we calculate the mode shape of a beam with elastic boundaries conditions. Then, we project on one mode the system that consists of the beam connected to a nonlinear oscillator. We find the equilibrium points of the system by using a multiple scale method. Then, we conduct a finite element model with Code_Aster. We perform modal analysis and dynamic analysis of the system under harmonic force. Finally, we compare the different results.</p>		
Mots-clés	Lignes de transport électrique, galop, puit d'énergie non-linéaire, contrôle passif.		
Keywords	Transmission line, galloping, nonlinear energy sink, passive control.		
Termes géo.	Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Canada		
Collation			
	Nombre de pages	Nombres d'annexes	Nombre de réf. biblio.
	60 pages	2 (10 pages)	29

Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, mon tuteur de stage, Monsieur Sébastien Langlois, professeur à l'Université de Sherbrooke, pour m'avoir confié ce sujet de recherche, ainsi que pour ses nombreux conseils tout au long de ces quatre mois et demi.

Je tiens également à remercier mes colocataires du C2-2036, en particulier Shima et Romain, qui m'ont énormément aidé avec Code_Aster.

Déclaration de travail personnel

Je déclare que ce rapport constitue l'aboutissement d'un travail personnel et ne peut être suspecté de plagiat.

Le travail présenté distingue explicitement ce que j'ai produit de ce que j'ai emprunté à d'autres. A ce titre, les citations sont clairement identifiables et les sources (écrits, images) qui ont alimenté ma réflexion sont référencées.

Table des matières

1	Introduction	8
1.1	Les différents phénomènes de vibration des lignes de transport	8
1.2	Les différentes méthodes d'atténuation des vibrations dans les conducteurs . . .	10
1.3	Transfert d'énergie / Puit d'énergie non-linéaire	11
1.4	Problématique	12
1.5	Méthodologie	13
2	Modèle analytique	14
2.1	Modes d'une poutre avec des conditions aux limites élastiques en translation et rotation	14
2.1.1	Calcul des modes et des fréquences propres	15
2.1.2	Comparaison aux modes d'une poutre bi-encastree	19
2.2	Poutre avec NES cubique	21
2.2.1	Mise en équation du système	21
2.2.2	Étude de la dynamique rapide du système	24
2.2.3	Étude de la dynamique lente du système	27
2.2.4	Intégration numérique et résultats analytiques	31
3	Modélisation par la méthode des éléments finis et comparaison des résultats	40
3.1	Présentation du modèle à éléments finis	40
3.1.1	Poutre aux conditions aux limites élastiques	40
3.1.2	Oscillateur non-linéaire.	42
3.1.3	Système couplé	44
3.2	Résultats et comparaison avec le modèle analytique	45
3.2.1	Comparaison des modes propres.	46
3.2.2	Réponse temporelle du système aux conditions initiales non nulles.	48
3.2.3	Réponse temporelle du système sous sollicitation harmonique.	51
4	Conclusion	58

Table des figures

1	Photo et schéma du détachement de la couche limite [1]	9
2	Pendule de Nigol [9]	10
3	Pendule TDD [13]	10
4	Différentes configurations de placement des entretoises [15]	11
5	Vitesse de vent critique de galop pour différents couplages [16]	12
6	Schéma explicatif du dispositif puit d'énergie non-linéaire [21]	12
7	Poutre couplée à un oscillateur non-linéaire	14
8	Poutre avec conditions aux limites élastiques	14
9	Bilan des forces sur une portion de poutre	15
10	Modes de la poutre bi-encastée et de la poutre aux conditions aux limites élastiques $\bar{k}_i = \bar{k}_{Ri} = 10$	20
11	Modes de la poutre bi-encastée et de la poutre aux conditions aux limites élastiques $\bar{k}_i = \bar{k}_{Ri} = 10000$	21
12	Poutre couplée à un oscillateur non-linéaire cubique.	22
13	SIM (dynamique rapide)	26
14	Zones de stabilité du SIM	28
15	Réponse temporelle du système non excité, $w(0) = w_0 = 3,5$ et $v(0) = v_0 = 1,5$.	32
16	Réponse du système non excité (domaine des variables N_1 et N_2), $w_0 = 3,5$ et $v_0 = 1,5$	32
17	Réponse du système non excité aux conditions initiales $N_2(0) = 10$ et $N_1(0) = 7$	33
18	Réponse du système non excité aux conditions initiales $N_2(0) = 1$ et $N_1(0) = 3$.	33
19	Réponse du système non excité aux conditions initiales $N_2(0) =$ et $N_1(0) = 1,5$.	34
20	Schéma du comportement du système non excité avec conditions initiales non nulles	34
21	Points d'équilibres ($\gamma = 4$)	35
22	Points d'équilibres ($\gamma = 9$)	35
23	Points d'équilibres ($\gamma = 13$)	36
24	Réponse temporelle du système à une sollicitation harmonique.	36
25	Intégration numérique du système soumis à une sollicitation harmonique ($\sigma = -5$)	37
26	Intégration numérique du système soumis à une sollicitation harmonique ($\sigma = -2$)	37
27	Intégration numérique du système soumis à une sollicitation harmonique ($\sigma = -1$)	38
28	Intégration numérique du système soumis à une sollicitation harmonique ($\sigma = 2$)	38
29	Intégration numérique du système soumis à une sollicitation harmonique ($\sigma = 4$)	39
30	Poutre aux conditions aux limites élastiques couplée à un oscillateur non-linéaire	40
31	Poutre aux conditions aux limites élastiques couplée à un oscillateur non-linéaire	41
32	Forme du premier mode de la poutre	42
33	Coefficient d'amortissement en fonction de la fréquence.	43
34	Schéma de principe de l'oscillateur non-linéaire.	43
35	Maillage de l'oscillateur non-linéaire.	44
36	Loi de comportement de l'oscillateur non-linéaire.	45
37	Maillage du système couplé.	45
38	Comparaison du mode 1.	47
39	Comparaison du mode 2.	47
40	Comparaison du mode 3.	48
41	Comparaison du mode 4.	48
42	Réponse du système non excité dans le domaine des variables N_1 et N_2 (Cas 1).	50
43	Réponse du système non excité dans le domaine des variables N_1 et N_2 (Cas 2).	50
44	Réponse du système non excité dans le domaine des variables N_1 et N_2 (Cas 3).	51

45	Réponse du système non excité dans le domaine des variables N_1 et N_2 (Cas 4).	51
46	Réponse temporelle $\gamma = 9$ et $\Omega = 1, 5$.	53
47	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité : $\gamma = 9$ et $\Omega = 1, 5$.	53
48	Points d'équilibres obtenues avec la méthode des éléments finis, $\gamma = 9$.	54
49	Points d'équilibres obtenues avec les deux méthodes, $\gamma = 9$.	55
50	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité : $F = 25 N$ et $\Omega = 1, 5$.	56
51	Points d'équilibres obtenues avec la méthode des éléments finis, $F = 25 N$.	56
52	Impact du NES sur l'amplitude de vibration de la poutre.	57
53	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 1, 6$.	61
54	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 1, 7$.	61
55	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 1, 8$.	62
56	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 1, 9$.	62
57	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 2$.	63
58	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 2, 1$.	63
59	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 2, 2$.	64
60	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 2, 3$.	64
61	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 2, 4$.	65
62	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 2, 5$.	65
63	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25 N$ et $\Omega = 1, 6$.	66
64	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25 N$ et $\Omega = 1, 7$.	66
65	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25 N$ et $\Omega = 1, 8$.	67
66	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25 N$ et $\Omega = 1, 9$.	67
67	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25 N$ et $\Omega = 2$.	68
68	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25 N$ et $\Omega = 2, 1$.	68
69	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25 N$ et $\Omega = 2, 2$.	69
70	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25 N$ et $\Omega = 2, 3$.	69
71	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25 N$ et $\Omega = 2, 4$.	70
72	Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25 N$ et $\Omega = 2, 5$.	70

Liste des tableaux

1	Comparaison des fréquences	20
2	paramètres du système d'équation	31
3	paramètres de la poutre	41
4	Paramètres des ressorts aux extrémités de la poutre	41
5	paramètres de l'oscillateur non-linéaire	44
6	Paramètres physiques à gauche et paramètres analytiques correspondant à droite.	46
7	Comparaison des fréquences propres.	46
8	Différents cas de conditions initiales.	49
9	Les différents fréquences de la sollicitation.	52

1 Introduction

Les phénomènes de vibration sont courants dans le domaine des lignes de transport d'électricité à haute tension, ils sont causés par l'environnement et plus particulièrement par les conditions météorologiques. Le vent et les précipitations de givre induisent différents types de phénomènes vibratoires sur les câbles de ligne de transport, cela entraîne des conséquences graves comme les bris de câbles (rupture des câbles en fatigue) et les courts-circuits (contact entre les différentes phases). Des recherches sont menées pour trouver des moyens d'atténuer ces phénomènes, notamment au Québec où les précipitations de givre et les conditions hivernales sont particulièrement sévères.

Nous allons tous d'abord passer en revue les différentes études scientifiques qui traitent des phénomènes de vibration dans les lignes de transport. Puis, nous verrons les solutions existantes pour la réduction des oscillations de galop sur les lignes de transport. Et pour finir nous verrons le principe de fonctionnement d'un dispositif de type puit d'énergie non-linéaire.

1.1 Les différents phénomènes de vibration des lignes de transport

Cette première partie sur les phénomènes de vibrations s'appuie sur le chapitre 5 de l'ouvrage «Atmospheric Icing of Power Networks» [1].

Les phénomènes de vibration des câbles de ligne transport sont un sujet de grande importance car ils affectent l'intégrité de ces systèmes. Ces phénomènes causent notamment la rupture en fatigue des câbles. Les causes de ces oscillations sont variées mais leur origine est l'environnement, en particulier le vent, la glace et les tempêtes de neige.

Le premier phénomène que l'on peut observer sont les vibrations éoliennes. Ces vibrations interviennent lorsqu'il y a un vent constant avec une vitesse de vent allant de 3 à 25 km/h. En effet, pour un écoulement suffisamment rapide autour du câble, du fait de la géométrie du conducteur, la couche d'air en contact avec le câble se détache et crée un vortex turbulent dans le sillage du câble. Les détachements de la couche limite se produisent des deux côtés du câble, ce qui fait que les vortex apparaissent en alternance d'un côté et de l'autre du conducteur. On peut voir sur la figure 1 les turbulences qui sont induites par le détachement de la couche limite. De cette manière, un vent horizontal crée des sollicitations verticales et donc des oscillations verticales du câble. Strouhal en 1878 a déterminé une loi qui donne la fréquence des vibrations éoliennes en fonction de la vitesse du vent et du diamètre du conducteur [2]. La fréquence des vibrations éoliennes varie de 3 à 150 Hz et leur amplitude ne dépasse pas le diamètre du câble. De plus, un phénomène de synchronisation a été mis en évidence, notamment par Brika et Lanneville [3], le conducteur peut être sollicité à ses fréquences propres pour une fréquence d'excitation qui n'est pas exactement égale aux fréquences propres. Par conséquent, le câble peut rentrer en résonance même si la fréquence de Strouhal n'est pas une fréquence de résonance du câble. On peut aussi déterminer la puissance qui est transférée du vent au câble [4], notamment la puissance des vibrations dépend du diamètre du câble à la puissance quatre. Ce qui veut dire que les oscillations sont encore plus sévères pour les câbles de grand diamètres présents sur les grandes portées. De plus, d'autres paramètres affectent la sévérité des vibrations. Lorsque la tension du câble augmente, la dissipation d'énergie par frottement dans le câble diminue, donc le phénomène est plus sévère. La présence de glace sur les câbles augmente les vibrations pour plusieurs raisons. Les torons du câble sont figés les uns par rapport aux autres et la tension du câble augmente, ce qui diminue l'auto-amortissement du câble. Des études [5] ont montrés que les vibrations éoliennes sous des conditions de gel et

de neige causent la rupture en fatigue des amortisseurs Stockbridge. D'après Hardy et Van Dyke [6], les faisceaux de câbles sont moins sujets aux vibrations éoliennes que les conducteurs seuls.

Un autre phénomène qui peut causer des dommages sont les oscillations de sous-portée. Elles

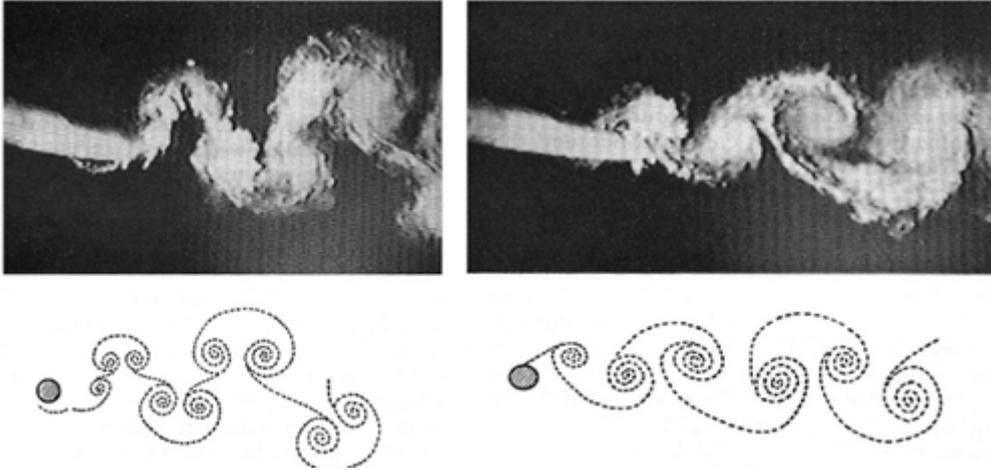


FIGURE 1 – Photo et schéma du détachement de la couche limite [1]

sont caractérisées par des vibrations dont l'amplitude varie de 0,2 à 20 fois le diamètre du conducteur et pour des vents de 15 km/h à 65 km/h. Ces vibrations apparaissent sur des lignes qui comportent des faisceaux de câbles séparés par des entretoises. Les principaux risques sont les chocs entre les conducteurs ce qui endommage mécaniquement les câbles. Ces oscillations interviennent lorsque deux câbles sont alignés par rapport aux sens du vent, le câble en amont crée une zone de turbulence qui sollicite le deuxième câble. De plus, les deux câbles sont couplés par l'entretoise donc les oscillations se répercutent sur le premier câble. Les câbles ont alors une trajectoire elliptique [7]. Pour les oscillations de sous-portée, une tension plus faible du câble est défavorable contrairement aux vibrations éoliennes.

Le phénomène de galop est un mécanisme de vibration de câble qui génère des oscillations de très grande amplitude et de basse fréquence. Elles sont caractérisées par des fréquences allant de 0,08 Hz à 3 Hz et des amplitudes pouvant égaler la flèche du câble. Ce phénomène a été mis en évidence par Den Hartog en 1932 [8]. Lors de précipitations de givre, une couche de glace se forme autour du câble, ce qui modifie son profilé aérodynamique. Cela change le comportement du câble vis-à-vis du vent, qui le rend plus sensible à ses perturbations. Dans cette configuration, le galop se manifeste par des oscillations progressives dues à un apport constant d'énergie par le vent. L'étude de ce phénomène nécessite une modélisation aérodynamique du câble en déterminant notamment les coefficients de trainée, de portance et de moment. Les études se sont succédées pour modéliser le mécanisme de galop. Den Hartog en 1932 [8] a d'abord présenté sa théorie de mécanisme vertical, c'est-à-dire en translation simple, puis Nigol et Clarke en 1981 [9] ont développé leur modèle de torsion et de translation. Yu a établi en 1993 [10] un mécanisme de galop à trois degrés de liberté (déplacement vertical, torsion et balancement). Yan propose en 2012 [11] une modélisation à 4 degrés de liberté et prenant en compte la flexion, la rotation et l'excentricité de la section du conducteur. Le galop cause des ruptures en fatigue des câbles au niveau des mâchoires là où les déformations sont les plus importantes. Il cause également des pannes électriques et peut même engendrer des incendies à cause du rapprochement des différentes phases.

1.2 Les différentes méthodes d'atténuation des vibrations dans les conducteurs

En 1994 Havard [12] étudie l'efficacité d'un pendule de torsion pour la réduction des oscillations de galop. Ce dispositif s'appuie sur le mécanisme de galop décrit par Nigol et Clarke en 1977 [9]. Nigol montre que le galop est induit par un mouvement de torsion. Le principe du pendule est donc de contrôler la torsion créée par l'excitation du vent. D'après une analyse de retours d'expériences provenant de plusieurs pays, ce système est assez efficace pour des travées de 100 m à 400 m avec des conducteurs simples. Un autre dispositif de type pendule a été conçu par Keutgen et al. [13], celui-ci vise à réduire les oscillations de galop pour des faisceaux de câbles. Il est appelé le pendule TDD (Torsional Damper and Detuner). D'après les essais en laboratoire et sur site, ce type de pendule réduit de manière efficace le galop pour des faisceaux de deux câbles. On peut observer sur la figure 2 le dispositif pensé par Nigol et sur la figure 3 le pendule TDD. Une étude de Edwards et Ko en 1979 [14] montre

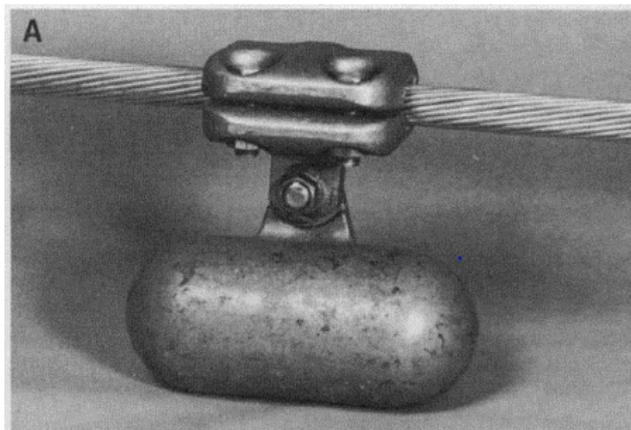


FIGURE 2 – Pendule de Nigol [9]

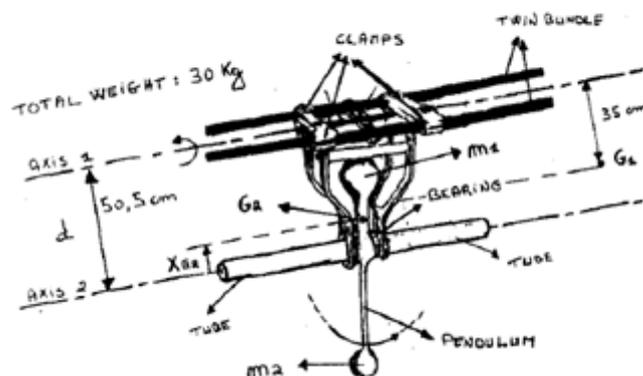


FIGURE 3 – Pendule TDD [13]

que les entretoises qui étaient à l'origine utilisées pour éviter que les différentes phases entrent en contact ont un impact positif sur les oscillations de galop, c'est-à-dire qu'elles ont un effet d'amortissement des oscillations de galop. Après avoir utilisé ces systèmes pendant 10 ans, les données récoltées montrent que les entretoises rigides réduisent de manière significatives

les pannes liées au galop sur les petites portées. De la même manière les entretoises souples permettent de réduire les oscillations et elles apportent un amortissement supplémentaire.

Une étude plus récente menée par Zhou et al. en 2018 [15] montre que les entretoises peuvent avoir un effet de réduction des oscillations de galop. Des essais en soufflerie ont été réalisés sur des faisceaux de trois câbles. Les résultats montrent qu’une configuration des entretoises comme la S-6 (telle qu’elle est décrite sur la figure 4) peut réduire les oscillations de galop de 25% mais que certaines configurations comme la S-2 amplifient le phénomène de galop.

Un autre article plus récent montre que les entretoises viscoélastiques amortissent les

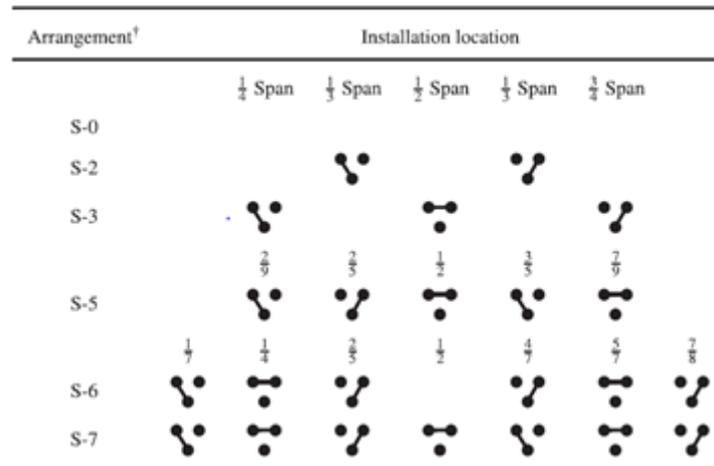


FIGURE 4 – Différentes configurations de placement des entretoises [15]

oscillations de galop [16]. Une étude analytique a été faite pour deux conducteurs couplées par trois entretoises, des modèles de Kelvin-Voigt ont été utilisés pour représenter les entretoises. Comme on peut l’observer sur la figure 5, cette étude montre que la présence des entretoises augmente la vitesse de vent critique qui cause le galop [16]. Par exemple pour deux câbles de même masse couplés par des entretoises viscoélastiques (IPS), la vitesse de vent critique pour une amplitude adimensionnelle de 1 passe de 10 m/s (sans IPS) à 20 m/s (avec IPS).

D’autres dispositifs de réduction des vibrations de galop ont été développées, comme le système étudié par Jiajun Si et al. [17] qui combine le principe du pendule de torsion et des entretoises pour des faisceaux de 4 conducteurs. Un autre dispositif qui se base sur la dissipation d’énergie grâce à l’interaction électromagnétique à l’aide d’un aimant permanent a été développé par Zhang [18].

1.3 Transfert d’énergie / Puit d’énergie non-linéaire

Il existe plusieurs méthodes pour réduire les oscillations d’un système. La méthode par couplage à un amortisseur linéaire est bien connue et très efficace pour atténuer une fréquence ciblée. Lorsque l’on veut atténuer des oscillations sur une plus large bande de fréquence, les amortisseurs non-linéaires sont plus efficaces [19]. Comme on peut l’observer sur la figure 6, le principe du puit d’énergie non-linéaire est de coupler un amortisseur non-linéaire à un système primaire [20], [21], [22], [23], [24], [25]. La masse du système secondaire doit être petite devant celle du système primaire afin de ne pas modifier les fréquences propres du système primaire. De plus le couplage entre les deux systèmes doit être non-linéaire.

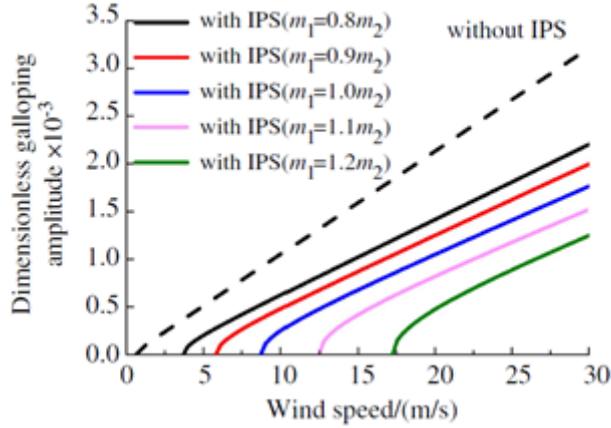


FIGURE 5 – Vitesse de vent critique de galop pour différents couplages [16]

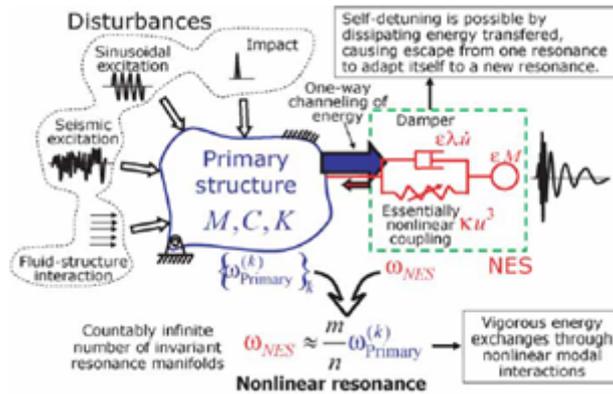


FIGURE 6 – Schéma explicatif du dispositif puit d'énergie non-linéaire [21]

1.4 Problématique

Dans un environnement particulier tel que celui du Québec qui se caractérise par des épisodes fréquents de verglas, des problématiques de galop des câbles de lignes de transport apparaissent. Nous avons vu dans la littérature que de nombreuses solutions existent pour atténuer ce phénomène. Cependant, des recherches sont encore en cours car les solutions existantes ont une efficacité limitée.

On a vu que le puit d'énergie non-linéaire est une méthode efficace pour réduire les oscillations d'un système primaire grâce à un système secondaire non-linéaire dont la masse est petite devant celle du système primaire. L'idée de ce projet est de concevoir un amortisseur non-linéaire de type puit d'énergie pour atténuer les oscillations de galop. Dans le cadre de ce travail de fin d'études, la question que nous allons nous poser est la suivante : comment se comporte le système composé d'un câble couplé avec un oscillateur non-linéaire, en particulier, quels sont les modes de vibration de ce système ?

1.5 Méthodologie

Les câbles sont des systèmes très complexes et fortement non-linéaire à cause de leur grande déformabilité et des frottements internes entre les brins. Pour cette raison, nous allons simplifier l'étude en n'étudiant qu'une portion du câble qu'on pourra modéliser par une poutre d'Euler-Bernoulli. Pour rester cohérent avec le système de câble qu'on modélise, on va fixer des conditions aux limites élastiques à la poutre. De cette manière, on pourra recréer une partie des modes du câble. On va coupler à la poutre un oscillateur non-linéaire pour réaliser un puit d'énergie non-linéaire.

L'objectif de l'étude est d'arriver à un modèle pouvant prédire le comportement du système sous une sollicitation harmonique. Nous allons réaliser une modélisation analytique qui permettra de caractériser le système. Nous allons d'abord calculer des modes propres et les fréquences propres du système sans le puit d'énergie non-linéaire. Puis en supposant que l'oscillateur ne modifie pas les modes propres du système, nous allons étudier la réponse du système à une sollicitation harmonique. Pour cela, nous allons projeter le système sur un mode et calculer les points d'équilibre en utilisant les variables de Manevitch. La méthode de Manevitch permet de déterminer certaines caractéristiques d'un système non-linéaire par un changement de variables, alors qu'on ne peut pas résoudre les équations de manière analytique. Dans un deuxième temps, on réalisera une modélisation par éléments finis grâce au logiciel Code_Aster. En faisant une analyse modale du système, on pourra vérifier le calcul analytique des modes. On pourra aussi vérifier que l'oscillateur non-linéaire ne modifie pas les modes de la poutre. Puis on fera une analyse temporelle par intégration directe pour voir si le modèle analytique permet de déterminer efficacement les points d'équilibre du système sous sollicitation harmonique.

Dans un premier temps (partie 2), nous allons présenter le développement du modèle analytique. Nous détaillerons le calcul des modes propres et comparerons ces modes avec ceux d'une poutre bi-encastée. Puis, nous verrons le calcul des points d'équilibre avec la méthode de Manevitch. Dans un second temps (partie 3) nous verrons le modèle éléments finis et nous comparerons ces résultats avec ceux de la partie 2.

2 Modèle analytique

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au système constitué d'une poutre aux conditions aux limites élastiques couplé à un oscillateur non-linéaire. On peut observer un schéma de ce système sur la figure 7. Par une méthode analytique, nous allons déterminer certaines caractéristiques de ce système. Dans un premier temps, nous allons déterminer les modes de vibration de la poutre, puis nous étudierons le système couplé, à différentes échelles de temps.

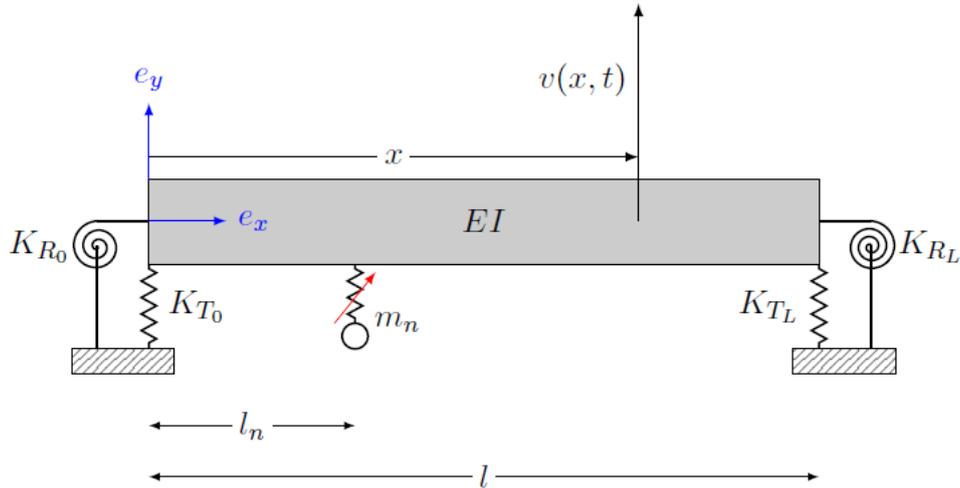


FIGURE 7 – Poutre couplée à un oscillateur non-linéaire

2.1 Modes d'une poutre avec des conditions aux limites élastiques en translation et rotation

Dans cette partie nous allons déterminer les modes de vibration d'une poutre avec des conditions aux limites élastiques en translation et en rotation. La Figure 8 nous montre un schéma de la poutre que nous voulons modéliser.

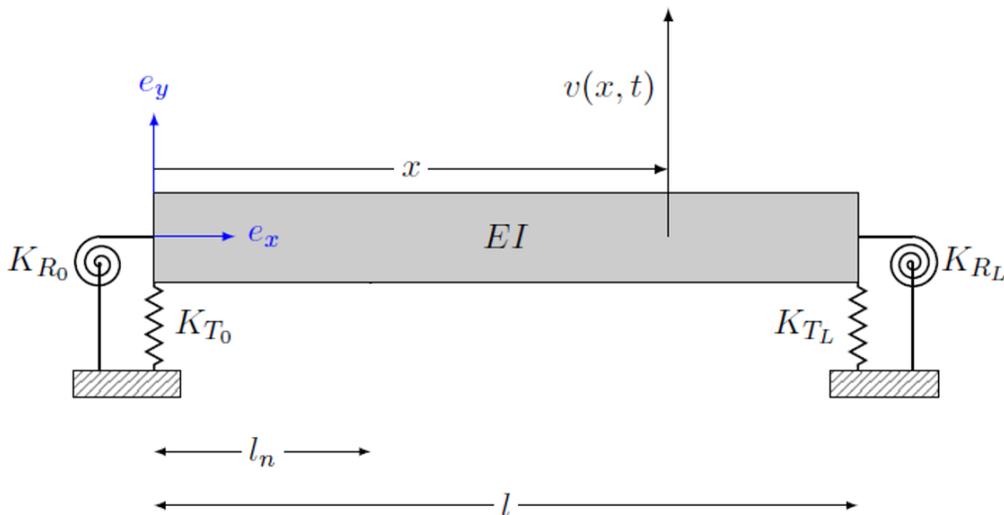


FIGURE 8 – Poutre avec conditions aux limites élastiques

2.1.1 Calcul des modes et des fréquences propres

On modélise une poutre de Euler-Bernoulli avec une raideur de flexion EI , une masse volumique ρ et une section S . Les conditions aux limites élastiques sont modélisées par des ressorts en translation de raideur k_0 et k_L ainsi que par des ressorts en rotation de raideur k_{R0} et k_{RL} . Écrivons les équations d'équilibre de cette poutre avec M le moment fléchissant, V l'effort tranchant et v le déplacement vertical de la poutre.

Écrivons l'équilibre en moment de la portion de poutre décrite sur la Figure 9 en négligeant le

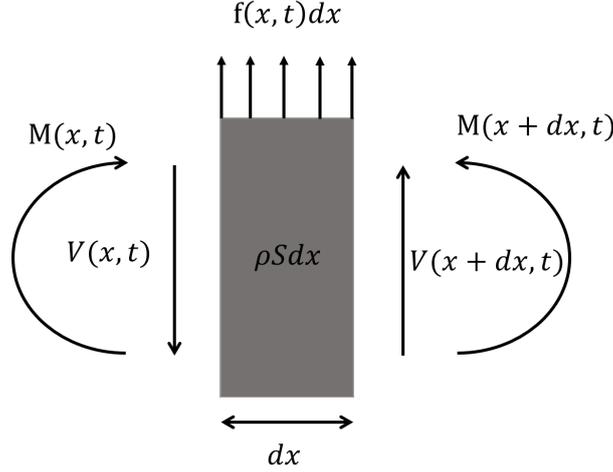


FIGURE 9 – Bilan des forces sur une portion de poutre

terme d'inertie de rotation.

$$\begin{aligned}
 M(x + dx, t) + M(x, t) + dxV(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow M(x, t) + \frac{\partial M}{\partial x}(x, t)dx - M(x, t) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial x}(x, t) + V(x, t) &= 0
 \end{aligned}$$

On obtient l'équation qui relie M et V .

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, t) + V(x, t) = 0 \quad (1)$$

Écrivons l'équilibre en force.

$$\begin{aligned}
 f(x, t)dx + V(x + dx, t) - V(x, t) &= \rho S dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) \\
 \Leftrightarrow f(x, t)dx + V(x, t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x, t)dx - V(x, t) &= \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) + f(x, t) &= \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t)
 \end{aligned}$$

On obtient l'équation qui relie V et v .

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) + f(x, t) = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) \quad (2)$$

Écrivons également la loi de comportement de la poutre.

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3)$$

En combinant les équations (1), (2) et (3), on obtient l'équation (4) qui régit le déplacement vertical de la poutre.

$$-EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(x, t) + f(x, t) = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) \quad (4)$$

Dans cette partie, on prendra $f(x, t) = 0$.

Nous avons dans ce cas des conditions aux limites particulières qu'il faut détailler. En effet, les déplacements aux extrémités sont proportionnels à l'effort tranchant. L'effort tranchant peut être exprimé en fonction de la dérivée troisième du déplacement vertical de la poutre. De plus, les moments fléchissant aux extrémités sont proportionnels à la rotation de la poutre. On peut également exprimer le moment fléchissant en fonction de la dérivée seconde du déplacement vertical de la poutre.

$$\text{En } x = 0 ; \quad k_0 v(0, t) = -EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(0, t) \quad \text{et} \quad EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, t) = k_{R0} \frac{\partial v}{\partial x}(0, t)$$

$$\text{En } x = L ; \quad k_L v(L, t) = EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(L, t) \quad \text{et} \quad EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(L, t) = -k_{RL} \frac{\partial v}{\partial x}(L, t)$$

On va utiliser la méthode de séparation des variables.

$$v(x, t) = Y(x) F(t)$$

On peut alors réécrire l'équation (18) où ω est une constante positive.

$$-\frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4}(x) \frac{1}{Y(x)} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t) \frac{1}{F(t)} = -\omega^2 \quad (5)$$

Comme tous les membres de l'équation (5) sont constant et égaux à $-\omega^2$, on peut en déduire les deux équations suivantes sur F et sur Y .

$$\frac{d^2 F}{dt^2} + \omega^2 F = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} = \beta^4 Y \quad \text{avec} \quad \beta^4 = \frac{\rho S}{EI} \omega^2 \quad (7)$$

Les solutions générales des équations (6) et (7) s'écrivent de la manière suivante avec A, B, C, D, E , et ϕ des constantes réelles.

$$F(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$Y(x) = B \sin(\beta x) + C \cos(\beta x) + D \cosh(\beta x) + E \sinh(\beta x)$$

Nous pouvons réécrire les conditions aux limites par rapport à Y .

$$\text{En } x = 0 \quad \frac{d^3 Y}{dx^3}(0) + \frac{k_0}{EI} Y(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 Y}{dx^2}(0) - \frac{k_{R0}}{EI} \frac{dY}{dx}(0) = 0 \quad (8)$$

$$\text{En } x = L \quad \frac{d^3 Y}{dx^3}(L) - \frac{k_L}{EI} Y(L) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 Y}{dx^2}(L) + \frac{k_{RL}}{EI} \frac{dY}{dx}(L) = 0 \quad (9)$$

Nous pouvons exprimer les équations (8) et (9) avec comme seules inconnues les constantes B , C , D et E . On met ces equations sous forme matricielle ce qui nous donne l'équation (10).

$$M \begin{bmatrix} B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Avec,

$$M = \begin{bmatrix} -\bar{\beta}^3 & \bar{k}_0 & \bar{k}_0 & \bar{\beta}^3 \\ \bar{k}_{R0} & \bar{\beta} & -\bar{\beta} & \bar{k}_{R0} \\ -\bar{\beta}^3 \cos \bar{\beta} - \bar{k}_L \sin \bar{\beta} & \bar{\beta}^3 \sin \bar{\beta} - \bar{k}_L \cos \bar{\beta} & \bar{\beta}^3 \sinh \bar{\beta} - \bar{k}_L \cosh \bar{\beta} & \bar{\beta}^3 \cosh \bar{\beta} - \bar{k}_L \sinh \bar{\beta} \\ -\bar{\beta} \sin \bar{\beta} + \bar{k}_{RL} \cos \bar{\beta} & -\bar{\beta} \cos \bar{\beta} - \bar{k}_{RL} \sin \bar{\beta} & \bar{\beta} \cosh \bar{\beta} + \bar{k}_{RL} \sinh \bar{\beta} & \bar{\beta} \sinh \bar{\beta} + \bar{k}_{RL} \cosh \bar{\beta} \end{bmatrix}$$

Où on note,

$$\bar{k}_0 = \frac{k_0 L^3}{EI} ; \bar{k}_L = \frac{k_L L^3}{EI} ; \bar{k}_{R0} = \frac{k_{R0} L}{EI} ; \bar{k}_{RL} = \frac{k_{RL} L}{EI} ; \bar{\beta} = \beta L$$

Pour que de telles constantes B , C , D et E non toutes nulles puissent exister il faut que le déterminant de la matrice M soit nul. On détermine alors les fréquences propres du système en résolvant l'équation 11.

$$\det M = 0 \quad (11)$$

On peut résoudre cette équation numériquement pour des valeurs de \bar{k}_i et \bar{k}_{Ri} données. L'équation (11) est une équation non-linéaire, combinaison linéaire de monômes de $\bar{\beta}_i$ multipliés aux termes $\cos(\bar{\beta}_i)$, $\sin(\bar{\beta}_i)$, $\cosh(\bar{\beta}_i)$ et $\sinh(\bar{\beta}_i)$. On peut par exemple résoudre cette équation avec une méthode de Newton-Raphson pour déterminer les premières pulsations propres. Si le déterminant de la matrice M est nul, alors les 4 équations algébriques de l'équation vectorielle (10) sont liées. On peut donc calculer les constantes B_i , C_i et D_i en fonction de E_i ce qui revient à dire que le vecteur des constantes B_i , C_i , D_i et E_i appartient à un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 de dimension 1. Il est généré par le vecteur V . On calcul V en fixant par exemple $E = 1$, puis on utilise 3 équations algébriques du système d'équations (10) pour calculer B , C et D .

$$V = \begin{bmatrix} \left(K \frac{\bar{\beta}_i^4 - \bar{k}_{R0} \bar{k}_0}{\bar{k}_{R0} \bar{k}_0 + \bar{\beta}_i^4} - \frac{2 \bar{k}_{R0} \bar{\beta}_i^3}{\bar{k}_{R0} \bar{k}_0 + \bar{\beta}_i^4} \right) \frac{\bar{k}_0}{\bar{\beta}_i^3} + K \frac{\bar{k}_0}{\bar{\beta}_i^3} + 1 \\ K \frac{\bar{\beta}_i^4 - \bar{k}_{R0} \bar{k}_0}{\bar{k}_{R0} \bar{k}_0 + \bar{\beta}_i^4} - \frac{2 \bar{k}_{R0} \bar{\beta}_i^3}{\bar{k}_{R0} \bar{k}_0 + \bar{\beta}_i^4} \\ K \\ 1 \end{bmatrix}$$

Avec,

$$K = \frac{\frac{2 \bar{k}_{R0} \bar{\beta}_i^3}{\bar{k}_{R0} \bar{k}_0 + \bar{\beta}_i^4} - \frac{\bar{\beta}_i^3 (\bar{\beta}_i \sinh \bar{\beta}_i + \bar{k}_{RL} \cosh \bar{\beta}_i) + \bar{\beta}_i^3 (-\bar{\beta}_i \sin \bar{\beta}_i + \bar{k}_{RL} \cos \bar{\beta}_i)}{-\bar{\beta}_i^3 (\bar{\beta}_i \cos \bar{\beta}_i + \bar{k}_{RL} \sin \bar{\beta}_i) + \bar{k}_0 (-\bar{\beta}_i \sin \bar{\beta}_i + \bar{k}_{RL} \cos \bar{\beta}_i)}}{\frac{\bar{\beta}_i^3 (\bar{\beta}_i \cosh \bar{\beta}_i + \bar{k}_{RL} \sinh \bar{\beta}_i) + \bar{k}_0 (-\bar{\beta}_i \sin \bar{\beta}_i + \bar{k}_{RL} \cos \bar{\beta}_i)}{-\bar{\beta}_i^3 (\bar{\beta}_i \cos \bar{\beta}_i + \bar{k}_{RL} \sin \bar{\beta}_i) + \bar{k}_0 (-\bar{\beta}_i \sin \bar{\beta}_i + \bar{k}_{RL} \cos \bar{\beta}_i)} - \frac{\bar{k}_{R0} \bar{k}_0 - \bar{\beta}_i^4}{\bar{k}_{R0} \bar{k}_0 + \bar{\beta}_i^4}}$$

On a,

$$\begin{bmatrix} B_i \\ C_i \\ D_i \\ E_i \end{bmatrix} \in Vect(V)$$

Un mode propre de vibration de pulsation propre ω_i est alors définie par la fonction Φ_i définie à une constante près.

$$\Phi_i(x) = B_i \sin(\beta_i x) + C_i \cos(\beta_i x) + D_i \cosh(\beta_i x) + E_i \sinh(\beta_i x)$$

Avec,

$$\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

On peut décider de normaliser ces modes par rapport à la masse linéique de la poutre.

$$\int_0^L m(x) \Phi_i^2(x) dx = 1 \quad \text{avec} \quad m(x) = \rho S \quad (12)$$

$$\Phi_i(x) = \alpha (V_1 \sin(\beta_i x) + V_2 \cos(\beta_i x) + V_3 \cosh(\beta_i x) + V_4 \sinh(\beta_i x)) \quad (13)$$

Dans l'équation (13), les V_i désignent les composantes du vecteur V que nous avons calculé. Calculons α .

$$\int_0^L m(x) \Phi_i^2(x) dx = \rho S \alpha^2 \int_0^L (V_1 \sin(\beta_i x) + V_2 \cos(\beta_i x) + V_3 \cosh(\beta_i x) + V_4 \sinh(\beta_i x))^2 dx$$

Posons,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^L (V_1 \sin(\beta_i x) + V_2 \cos(\beta_i x) + V_3 \cosh(\beta_i x) + V_4 \sinh(\beta_i x))^2 dx \\ &= V_1^2 \left(\frac{L}{2} - \frac{\sin(2\beta_i L)}{4\beta_i} \right) + V_1 V_3 \left(\frac{\sin(\beta_i L) \sinh(\beta_i L) - \cos(\beta_i L) \cosh(\beta_i L) + 1}{\beta_i} \right) \\ &+ V_2^2 \left(\frac{L}{2} + \frac{\sin(2\beta_i L)}{4\beta_i} \right) + V_1 V_4 \left(\frac{\sin(\beta_i L) \cosh(\beta_i L) - \cos(\beta_i L) \sinh(\beta_i L)}{\beta_i} \right) \\ &+ V_3^2 \left(\frac{\sinh(2\beta_i L)}{4\beta_i} + \frac{L}{2} \right) + V_2 V_3 \left(\frac{\cos(\beta_i L) \sinh(\beta_i L) + \sin(\beta_i L) \cosh(\beta_i L)}{\beta_i} \right) \\ &+ V_4^2 \left(\frac{\sinh(2\beta_i L)}{4\beta_i} - \frac{L}{2} \right) + V_2 V_4 \left(\frac{\sin(\beta_i L) \sinh(\beta_i L) + \cos(\beta_i L) \cosh(\beta_i L) - 1}{\beta_i} \right) \\ &+ V_1 V_2 \left(\frac{1 - \cos^2(\beta_i L)}{\beta_i} \right) + V_3 V_4 \left(\frac{\cosh^2(\beta_i L) - 1}{\beta_i} \right) \end{aligned}$$

On a alors,

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\rho S A}} \quad (14)$$

Finalement, les modes normalisés sont les fonctions suivantes :

$$\Phi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho S A}} (V_1 \sin(\beta_i x) + V_2 \cos(\beta_i x) + V_3 \cosh(\beta_i x) + V_4 \sinh(\beta_i x)) \quad (15)$$

Nous allons maintenant montrer que les modes sont orthogonaux, c'est-à-dire que $\int_0^L \Phi_i \Phi_j dx = 0$ pour $i \neq j$. Reprenons l'équation (7).

$$\frac{d^4 \Phi_i}{dx^4} = \beta_i^4 \Phi_i \Rightarrow \int_0^L \frac{d^4 \Phi_i}{dx^4} \Phi_j dx = \beta_i^4 \int_0^L \Phi_i \Phi_j dx$$

En faisant deux intégrations par partie on montre que $\int_0^L \frac{d^4\Phi_i}{dx^4} \Phi_j dx$ est symétrique par rapport aux indices i et j . On utilise aussi les conditions aux limites données dans les équations (8) et (9).

$$\begin{aligned}
\int_0^L \frac{d^4\Phi_i}{dx^4} \Phi_j dx &= \left[\Phi_j \frac{d^3\Phi_i}{dx^3} \right]_0^L - \left[\frac{d\Phi_j}{dx} \frac{d^2\Phi_i}{dx^2} \right]_0^L + \int_L^0 \frac{d^2\Phi_i}{dx^2} \frac{d^2\Phi_j}{dx^2} dx \\
&= \Phi_j(L) \frac{d^3\Phi_i}{dx^3}(L) - \Phi_j(0) \frac{d^3\Phi_i}{dx^3}(0) - \frac{d\Phi_j}{dx}(L) \frac{d^2\Phi_i}{dx^2}(L) + \frac{d\Phi_j}{dx}(0) \frac{d^2\Phi_i}{dx^2}(0) \\
&+ \int_L^0 \frac{d^2\Phi_i}{dx^2} \frac{d^2\Phi_j}{dx^2} dx \\
&= -\frac{k_L}{EI} \Phi_j(L) \Phi_i(L) + \frac{k_0}{EI} \Phi_j(0) \Phi_i(0) + \frac{k_{RL}}{EI} \frac{d\Phi_j}{dx}(L) \frac{d\Phi_i}{dx}(L) - \frac{k_{R0}}{EI} \frac{d\Phi_j}{dx}(0) \frac{d\Phi_i}{dx}(0) \\
&+ \int_L^0 \frac{d^2\Phi_i}{dx^2} \frac{d^2\Phi_j}{dx^2} dx
\end{aligned}$$

On voit bien que la dernière expression est symétrique par rapport aux indices i et j . On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^L \frac{d^4\Phi_i}{dx^4} \Phi_j dx - \int_0^L \frac{d^4\Phi_j}{dx^4} \Phi_i dx &= (\beta_i^4 - \beta_j^4) \int_0^L \Phi_i \Phi_j dx \\
\Leftrightarrow 0 &= (\beta_i^4 - \beta_j^4) \int_0^L \Phi_i \Phi_j dx \\
\Leftrightarrow \int_0^L \Phi_i \Phi_j dx &= 0 \quad \text{car } \beta_i \neq \beta_j
\end{aligned}$$

Les modes sont donc orthogonaux.

2.1.2 Comparaison aux modes d'une poutre bi-encastée

Dans cette partie, nous allons comparer les modes d'une poutre aux conditions aux limites élastiques (cf partie précédente) aux modes d'une poutre bi-encastée. On va étudier plusieurs cas en faisant augmenter les raideurs des ressorts de la poutre pour essayer de tendre vers un modèle de poutre bi-encastée. On peut trouver les fréquences propres et les modes propres d'une poutre encastée dans la littérature [26]. On va prendre une poutre de 4 m et considérer que $m(x) = \rho S = 1$ de telle sorte qu'on ait $\int_0^L \Phi_i^2 dx = 1$.

Valeurs de β_i					
Numéro du mode	bi-encastrement	$k_i = k_{Ri} = 10$	$k_i = k_{Ri} = 100$	$k_i = k_{Ri} = 1000$	$k_i = k_{Ri} = 10000$
1	4,73	2,09	3,50	4,53	4,71
		Écart : 55,8%	Écart : 26%	Écart : 4,2%	Écart : 0,4%
2	7,85	3,27	4,66	6,92	7,75
		Écart : 58,3%	Écart : 40,6%	Écart : 11,8%	Écart : 1,3%
3	11,0	5,90	6,65	8,76	10,7
		Écart : 46,3%	Écart : 40,7%	Écart : 20,3%	Écart : 2,6%
4	14,1	8,85	9,47	10,6	13,5
		Écart : 37,4%	Écart : 33%	Écart : 24,7%	Écart : 4,5%

TABLE 1 – Comparaison des fréquences

On remarque sur le tableau 3 que plus on augmente la raideur des ressorts plus les fréquences sont proches des fréquences de la poutre encastree. C'est coherent car un encastrement à une raideur infinie en translation et en rotation donc plus on augmente les raideurs des ressorts plus on se rapproche théoriquement du modèle de poutre bi-encastree. On peut également comparer la forme des modes si on les normalise de la même manière.

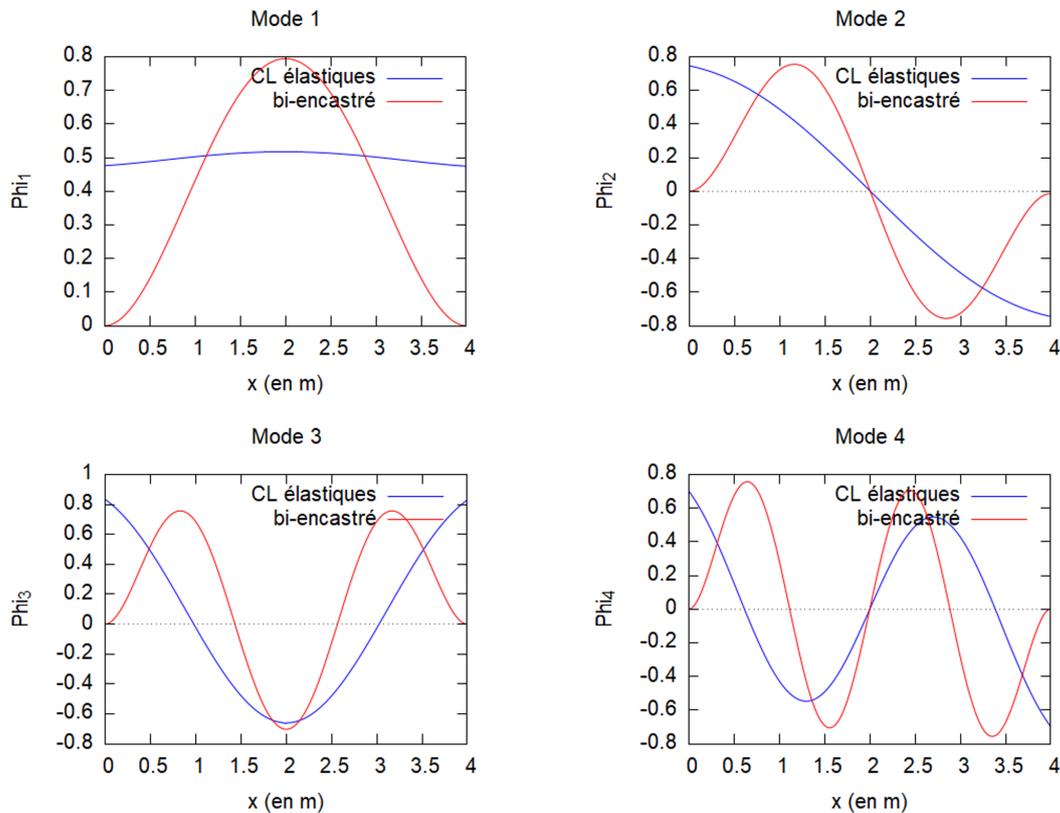


FIGURE 10 – Modes de la poutre bi-encastree et de la poutre aux conditions aux limites élastiques $\bar{k}_i = \bar{k}_{Ri} = 10$

On peut voir sur la figure 10 que les modes de la poutre aux conditions aux limites :

$\bar{k}_i = \bar{k}_{Ri} = 10$ sont très différents des modes de la poutre bi-encastée. En effet la raideur des ressort est très faible par rapport à la raideur de flexion de la poutre, donc nous avons des grands déplacements aux extrémités et peu de flexion sur la poutre. Dans le cas d'une poutre

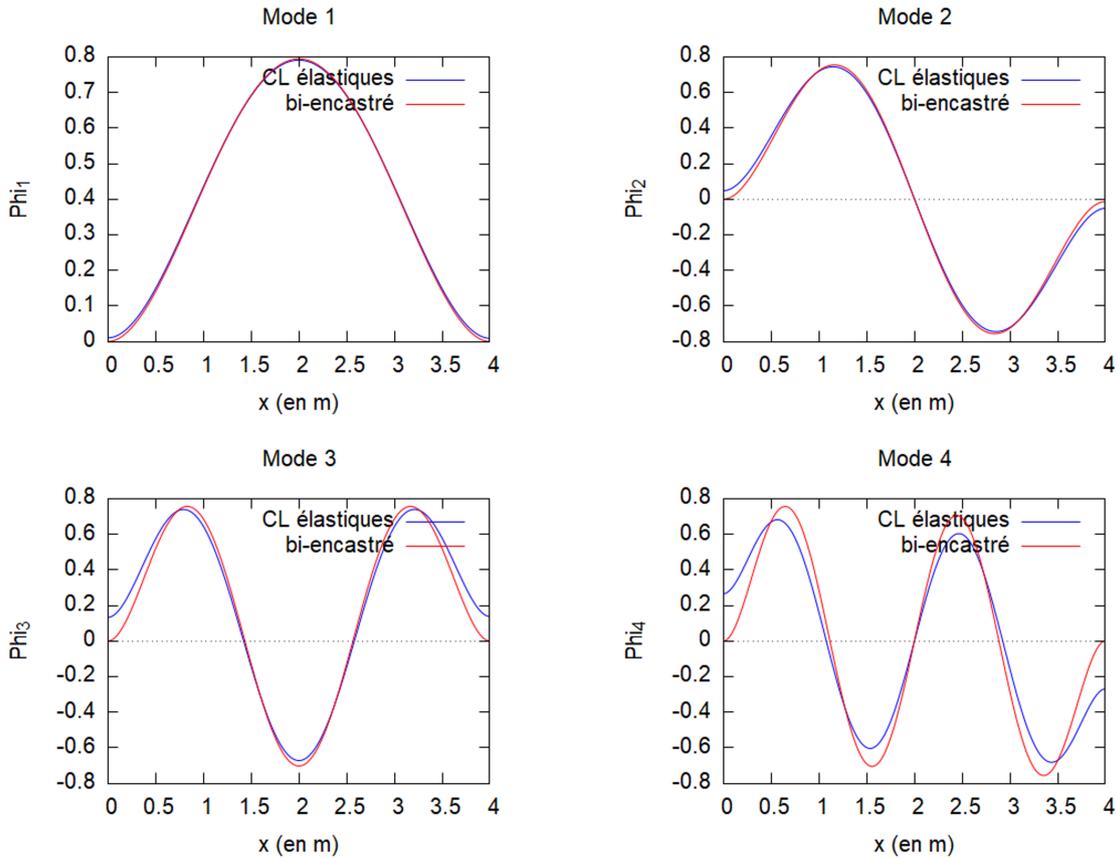


FIGURE 11 – Modes de la poutre bi-encastée et de la poutre aux conditions aux limites élastiques $\bar{k}_i = \bar{k}_{Ri} = 10000$

aux conditions aux limites : $\bar{k}_i = \bar{k}_{Ri} = 1000$, les raideurs des ressorts sont grandes devant la raideur de flexion de la poutre. Nous avons donc des déplacements aux extrémités qui sont faibles et une grande flexion de la poutre. On remarque sur la figure 11 que les modes des deux types de poutre sont proches. On observe donc bien que lorsque l'on augmente les raideurs des conditions aux limites, on tend vers les modes d'une poutre bi-encastée.

2.2 Poutre avec NES cubique

Dans cette partie nous allons étudier le même modèle de poutre que dans la partie précédente mais nous allons ajouter une petite masse couplée à la poutre par une raideur non-linéaire cubique. On peut observer sur la Figure 12 un schéma du système que nous allons étudier. Le but de cette partie est de caractériser ce système. Dans un premier temps, nous allons mettre en équation le système. Puis, nous étudierons ces équations non-linéaires grâce à la méthode de Manevitch. Pour finir, nous étudierons les résultats.

2.2.1 Mise en équation du système

Dans ce modèle nous allons négliger les effets de la pesanteur. La position de la masselotte sera repérée avec $u(t)$, son déplacement par rapport à sa position d'équilibre. On va faire

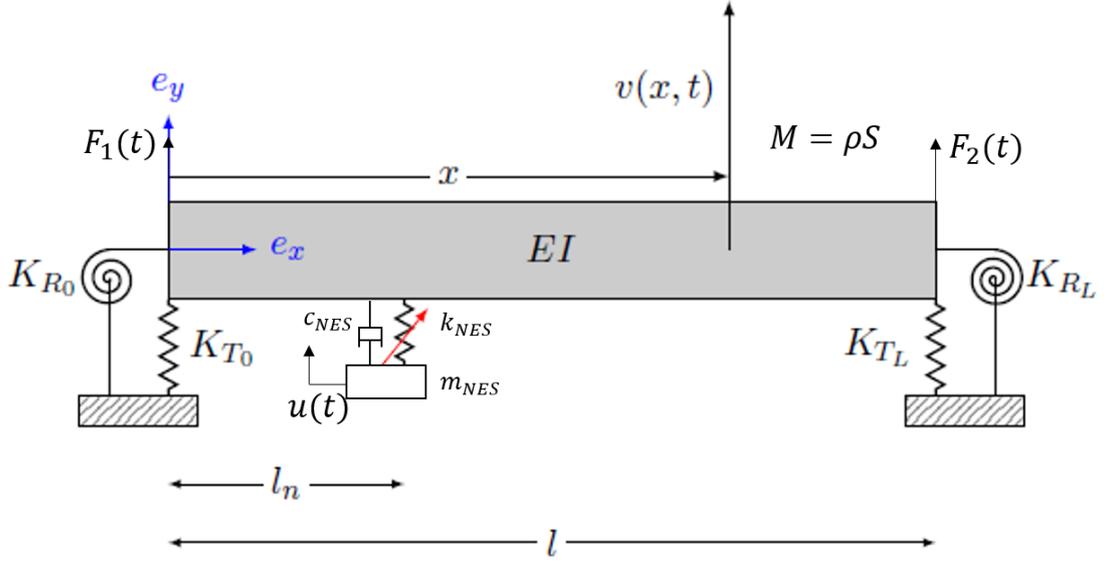


FIGURE 12 – Poutre couplée à un oscillateur non-linéaire cubique.

l'hypothèse que l'oscillateur non-linéaire ne modifie pas les modes de vibration de la poutre (modes que nous avons déterminés dans la partie précédente). La poutre est sollicitée par deux forces ponctuelles à ses extrémités, elles seront sinusoïdales, de même fréquence, mais d'amplitude différente. On réécrit l'équation (4) qui régit la dynamique de la poutre.

$$-EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(x, t) + f(x, t) = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t)$$

Plusieurs forces s'appliquent sur la poutre : la force de l'oscillateur sur la poutre et les deux forces ponctuelles aux extrémités de la poutre.

$$\begin{aligned} F_{\text{ressort}} &= -k_{NES}(v(l_n, t) - u(t))^3 \delta(x - l_n) \\ F_{\text{amortisseur}} &= -c_{NES} \left(\frac{\partial v}{\partial t}(l_n, t) - \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right) \delta(x - l_n) \\ F_{\text{extrémité gauche}} &= F_1(t) \delta(x) \\ F_{\text{extrémité droite}} &= F_2(t) \delta(x - L) \end{aligned}$$

L'équation qui régit la dynamique de la poutre s'écrit alors :

$$\begin{aligned} -EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(x, t) - c_{NES} \left(\frac{\partial v}{\partial t}(l_n, t) - \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right) \delta(x - l_n) - k_{NES}(v(l_n, t) - u(t))^3 \delta(x - l_n) \\ + F_1(t) \delta(x) + F_2(t) \delta(x - L) = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) \end{aligned}$$

On écrit maintenant l'équation d'équilibre du système masse-ressort avec une masse m_{NES} , un coefficient d'amortissement c_{NES} et une raideur k_{NES} , dont la raideur est non-linéaire cubique.

$$m_{NES} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t) + c_{NES} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t) - \frac{\partial v}{\partial t}(l_n, t) \right) + k_{NES}(u(t) - v(l_n, t))^3 = 0$$

On définit $\epsilon = \frac{m_{NES}}{M}$ où M est la masse linéique de la poutre, on pose également :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L} ; \bar{u}(\tau) = \frac{u(t)}{L} ; \bar{v}(\bar{x}, \tau) = \frac{v(x, t)}{L} ; \tau = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{M}} t ; \epsilon k = \frac{k_{NES} L^6}{EI} \\ \epsilon c &= \frac{c_{NES} L^2}{\sqrt{EIM}} ; \bar{F}_i(\tau) = \frac{F_i(t) L^3}{EI} \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de réécrire les équations d'équilibre en fonction des variables adimensionnelles τ et \bar{x} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial \bar{x}^4}(\bar{x}, \tau) + \epsilon k \left(\bar{v} \left(\frac{l_n}{L}, \tau \right) - \bar{u}(\tau) \right)^3 \delta \left(\bar{x} - \frac{l_n}{L} \right) + \epsilon c \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} \left(\frac{l_n}{L}, \tau \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau}(\tau) \right) \delta \left(\bar{x} - \frac{l_n}{L} \right) \\ + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \tau^2}(\bar{x}, \tau) = \bar{F}_1(\tau) \delta(\bar{x}) + \bar{F}_2(\tau) \delta(\bar{x} - 1) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\epsilon \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tau^2}(\tau) + \epsilon c \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau}(\tau) - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} \left(\frac{l_n}{L}, \tau \right) \right) + \epsilon k \left(\bar{u}(\tau) - \bar{v} \left(\frac{l_n}{L}, \tau \right) \right)^3 = 0 \quad (17)$$

On va écrire la décomposition de la fonction \bar{v} dans sa base modale. On va supposer qu'un des modes est prédominant et que l'on peut écrire :

$$\bar{v}(\bar{x}, \tau) = q_k(\tau) \Phi_k(\bar{x}) \quad k \in \mathbb{N}$$

On va maintenant remplacer \bar{v} dans les équations (16) et (17), puis on va projeter ces équations sur le mode Φ_k i.e. on multiplie les équations (16) et (17) par Φ_k et on intègre sur toute la longueur de la poutre.

$$\begin{aligned} \beta_{1k} q_k(\tau) + \beta_{2k} \ddot{q}_k(\tau) + \epsilon c \left(\dot{q}_k(\tau) \Phi_k \left(\frac{l_n}{L} \right) - \dot{u}(\tau) \right) \Phi_k \left(\frac{l_n}{L} \right) + \epsilon k \left(q_k(\tau) \Phi_k \left(\frac{l_n}{L} \right) - \bar{u}(\tau) \right)^3 \Phi_k \left(\frac{l_n}{L} \right) \\ = \bar{F}_1(\tau) \Phi_k(0) + \bar{F}_2(\tau) \Phi_k(1) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\epsilon \ddot{u}(\tau) + \epsilon c \left(\dot{u}(\tau) - \dot{q}_k(\tau) \Phi_k \left(\frac{l_n}{L} \right) \right) + \epsilon k \left(\bar{u}(\tau) - q_k(\tau) \Phi_k \left(\frac{l_n}{L} \right) \right)^3 = 0 \quad (19)$$

Avec,

$$\beta_{1k} = \int_0^1 \frac{\partial^4 \Phi_k}{\partial \bar{x}^4}(\bar{x}) \Phi_k(\bar{x}) d\bar{x} , \quad \beta_{2k} = \int_0^1 \Phi_k^2(\bar{x}) d\bar{x}$$

Posons,

$$\omega_0^2 = \frac{\beta_{1k}}{\beta_{2k}} , \quad \alpha = \frac{\Phi_k^2 \left(\frac{l_n}{L} \right)}{\beta_{2k}} , \quad f = \frac{\Phi_k \left(\frac{l_n}{L} \right)}{\beta_{2k}} (\bar{F}_1 \Phi_k(0) + \bar{F}_2 \Phi_k(1)) \quad \text{et} \quad p_k(\tau) = q_k(\tau) \Phi_k \left(\frac{l_n}{L} \right)$$

On obtient alors les équations suivantes en multipliant les équations (18) et (19) par $\Phi_k \left(\frac{l_n}{L} \right)$.

$$\ddot{p}_k(\tau) + \omega_0^2 p_k(\tau) + \epsilon \alpha c (\dot{p}_k(\tau) - \dot{u}(\tau)) + \epsilon \alpha k (p_k(\tau) - \bar{u}(\tau))^3 = f(\tau) \quad (20)$$

$$\epsilon \ddot{u}(\tau) + \epsilon c (\dot{u}(\tau) - \dot{p}_k(\tau)) + \epsilon k (\bar{u}(\tau) - p_k(\tau))^3 = 0 \quad (21)$$

2.2.2 Étude de la dynamique rapide du système

Nous allons maintenant utiliser la méthode de complexification de Manevitch [27] afin d'étudier le comportement du système à plusieurs échelles de temps. Le système que nous étudions est toujours celui décrit sur la figure 12. Nous allons tout d'abord changer de système de variables et allons considérer w le déplacement du barycentre des masses et v le déplacement relatif entre la masse du NES et la poutre.

$$w = \frac{m_{NES}\bar{u} + Mp_k}{M + m_{NES}} = p_k + \epsilon\bar{u} \quad \text{et} \quad v = p_k - \bar{u}$$

On va également supposer que la force d'excitation s'écrit :

$$f(\tau) = \epsilon\gamma \sin(\Omega\tau)$$

En additionnant les équations (20) et (21), nous obtenons une nouvelle équation sur w et v .

$$\begin{aligned} (20) + (21) &\Leftrightarrow \omega_0^2 p_k + \ddot{p}_k + \epsilon\ddot{\bar{u}} + \epsilon c(\alpha - 1)(\dot{p}_k - \dot{\bar{u}}) + \epsilon k(\alpha - 1)(p_k - \bar{u})^3 = f \\ &\Leftrightarrow \ddot{w} + \omega_0^2(w + \epsilon v) + \epsilon k(\alpha - 1)v^3 + \epsilon c(\alpha - 1)\dot{v} = f \end{aligned} \quad (22)$$

En faisant une combinaison linéaire des équations (20) et (21) on obtient :

$$\begin{aligned} (20) - \frac{(21)}{\epsilon} &\Leftrightarrow \ddot{p}_k - \ddot{\bar{u}} + \omega_0^2 p_k + k(\epsilon\alpha + 1)(p_k - \bar{u})^3 + c(\epsilon\alpha + 1)(\dot{p}_k - \dot{\bar{u}}) = f \\ &\Leftrightarrow \ddot{v} + \omega_0^2(w + \epsilon v) + k(\epsilon\alpha + 1)v^3 + c(\epsilon\alpha + 1)\dot{v} = f \end{aligned} \quad (23)$$

Nous allons maintenant introduire les variables de Manevitch [27] φ_1 et φ_2 .

$$\begin{aligned} \varphi_1 e^{i\Omega\tau} &= \dot{w} + i\Omega w \\ \varphi_2 e^{i\Omega\tau} &= \dot{v} + i\Omega v \end{aligned} \quad (24)$$

Physiquement la norme de φ_1 (respectivement φ_2) correspond à l'enveloppe de w (respectivement v). Par la suite on notera pour tous nombre complexe φ , φ^* son conjugué, on notera également i l'imaginaire pur tel que $i^2 = -1$. On peut calculer les variables v et w en fonction des variables de Manevitch.

$$\begin{aligned} w &= \frac{\varphi_1 e^{i\Omega\tau} - \varphi_1^* e^{-i\Omega\tau}}{2i\Omega} ; \quad \dot{w} = \frac{\varphi_1 e^{i\Omega\tau} + \varphi_1^* e^{-i\Omega\tau}}{2} ; \quad \ddot{w} = \dot{\varphi}_1 e^{i\Omega\tau} - \Omega^2 w \\ v &= \frac{\varphi_2 e^{i\Omega\tau} - \varphi_2^* e^{-i\Omega\tau}}{2i\Omega} ; \quad \dot{v} = \frac{\varphi_2 e^{i\Omega\tau} + \varphi_2^* e^{-i\Omega\tau}}{2} ; \quad \ddot{v} = \dot{\varphi}_2 e^{i\Omega\tau} - \Omega^2 v \end{aligned}$$

On peut donc réécrire les équations (22) et (23) avec les variables de Manevitch.

$$\begin{aligned} (22) &\Leftrightarrow \dot{\varphi}_1 e^{i\Omega\tau} - \frac{\Omega}{2i}(\varphi_1 e^{i\Omega\tau} - \varphi_1^* e^{-i\Omega\tau}) + \frac{\omega_0^2}{2i\Omega} (\varphi_1 e^{i\Omega\tau} - \varphi_1^* e^{-i\Omega\tau} + \epsilon(\varphi_2 e^{i\Omega\tau} - \varphi_2^* e^{-i\Omega\tau})) \\ &\quad + \epsilon k(\alpha - 1) \left(\frac{\varphi_2 e^{i\Omega\tau} - \varphi_2^* e^{-i\Omega\tau}}{2i\Omega} \right)^3 + \epsilon c(\alpha - 1) \left(\frac{\varphi_2 e^{i\Omega\tau} + \varphi_2^* e^{-i\Omega\tau}}{2} \right) = \epsilon\gamma \sin(\Omega\tau) \end{aligned} \quad (25)$$

$$(23) \Leftrightarrow \dot{\varphi}_2 e^{i\Omega\tau} - \frac{\Omega}{2i}(\varphi_2 e^{i\Omega\tau} - \varphi_2^* e^{-i\Omega\tau}) + \frac{\omega_0^2}{2i\Omega}(\varphi_1 e^{i\Omega\tau} - \varphi_1^* e^{-i\Omega\tau} + \epsilon(\varphi_2 e^{i\Omega\tau} - \varphi_2^* e^{-i\Omega\tau})) \\ + k(\epsilon\alpha + 1) \left(\frac{\varphi_2 e^{i\Omega\tau} - \varphi_2^* e^{-i\Omega\tau}}{2i\Omega} \right)^3 + c(\epsilon\alpha + 1) \left(\frac{\varphi_2 e^{i\Omega\tau} + \varphi_2^* e^{-i\Omega\tau}}{2} \right) = \epsilon\gamma \sin(\Omega\tau) \quad (26)$$

Nous allons faire la décomposition en série de Fourier des équations (25) et (26) et garder uniquement le premier terme harmonique. On va supposer que φ_1 et φ_2 ne dépendent pas de τ , on pourra vérifier cette hypothèse par la suite.

$$\frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} (25) e^{-i\Omega\tau} d\tau \Leftrightarrow \dot{\varphi}_1 - \frac{\Omega}{2i}\varphi_1 + \frac{\omega_0^2}{2i\Omega}(\varphi_1 + \epsilon\varphi_2) + \frac{3\epsilon k(\alpha - 1)}{8i\Omega^3}\varphi_2^2\varphi_2^* + \frac{\epsilon c(\alpha - 1)}{2}\varphi_2 = \frac{\epsilon\gamma}{2i} \quad (27)$$

$$\frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} (26) e^{-i\Omega\tau} d\tau \Leftrightarrow \dot{\varphi}_2 - \frac{\Omega}{2i}\varphi_2 + \frac{\omega_0^2}{2i\Omega}(\varphi_1 + \epsilon\varphi_2) + \frac{3k(\epsilon\alpha + 1)}{8i\Omega^3}\varphi_2^2\varphi_2^* + \frac{c(\epsilon\alpha + 1)}{2}\varphi_2 = \frac{\epsilon\gamma}{2i} \quad (28)$$

On va supposer que Ω est proche de la pulsation propre du système : $\Omega = \omega_0 + \epsilon\sigma$, c'est à dire nous étudions le comportement du système autour de la résonance 1 :1. On va étudier le système à différentes échelles de temps et donc nous allons poser $\tau_n = \epsilon^n \tau$. On peut écrire les équations (27) et (28) à l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ ce qui correspond à l'échelle de temps rapide.

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau_0} - \frac{\omega_0}{2i}\varphi_1 + \frac{\omega_0}{2i}\varphi_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau_0} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_0} - \frac{\omega_0}{2i}\varphi_2 + \frac{\omega_0}{2i}\varphi_1 + \frac{3k}{8i\omega_0^3}\varphi_2^2\varphi_2^* + \frac{c}{2}\varphi_2 = 0 \quad (30)$$

On a donc bien l'indépendance de φ_1 en τ_0 . On cherche les points fixes du système (mathématiquement $\tau_0 \rightarrow +\infty$) et donc $\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_0} = 0$. On a alors l'équation suivante.

$$\mathcal{H}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^*, \varphi_2^*) = 0 \quad (31)$$

Avec.

$$\mathcal{H} = \frac{\omega_0}{2i}\varphi_1 - \frac{\omega_0}{2i}\varphi_2 + \frac{3k}{8i\omega_0^3}\varphi_2^2\varphi_2^* + \frac{c}{2}\varphi_2 \quad (32)$$

On pose $\varphi_1 = N_1 e^{i\delta_1}$ et $\varphi_2 = N_2 e^{i\delta_2}$, On peut alors réécrire l'équation (31).

$$\frac{i\omega_0}{2}N_2 e^{i\delta_2} - \frac{i\omega_0}{2}N_1 e^{i\delta_1} - \frac{3ik}{8\omega_0^3}N_2^3 e^{i\delta_2} + \frac{c}{2}N_2 e^{i\delta_2} = 0 \\ \Leftrightarrow N_1 e^{i\delta_1} = N_2 e^{i\delta_2} - \frac{3k}{4\omega_0^4}N_2^3 e^{i\delta_2} - \frac{ic}{\omega_0}N_2 e^{i\delta_2} \\ \Leftrightarrow N_1 e^{i(\delta_1 - \delta_2)} = N_2 - \frac{3k}{4\omega_0^4}N_2^3 - \frac{ic}{\omega_0}N_2$$

On peut donc écrire :

$$\begin{cases} N_1 \cos(\delta_1 - \delta_2) = N_2 - \frac{3k}{4\omega_0^4}N_2^3 \\ N_1 \sin(\delta_1 - \delta_2) = -\frac{c}{\omega_0}N_2 \end{cases}$$

Donc,

$$N_1 = N_2 \sqrt{\left(\frac{c}{\omega_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{3k}{4\omega_0^4} N_2^2\right)^2} \quad (33)$$

On peut par exemple tracer la courbe de N_1 en fonction de N_2 pour une poutre de 4 mètres dont la fréquence du premier mode de résonance sur lequel on projette le système est $f_1 = 0,407 \text{ Hz}$, les autres paramètres sont : $E = 68,3 \text{ GPa}$, $I = 8,3923 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$, $M = 1,369 \text{ Kg.m}^{-1}$, $S = 409,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$, $c_{NES} = 0,088 \text{ N.s.m}^{-1}$ et $k_{NES} = 0.014 \text{ N.m}^{-1}$. Donc $\omega_0 = 2 \text{ rad.s}^{-1}$, $k = 1 \text{ m}^2$ et $c = 0.5$. On obtient la courbe de la Figure 13, ce graphique définit l'ensemble des points d'équilibre possibles de ce système. On appelle cette courbe le SIM (Slow Invariant Manifold).

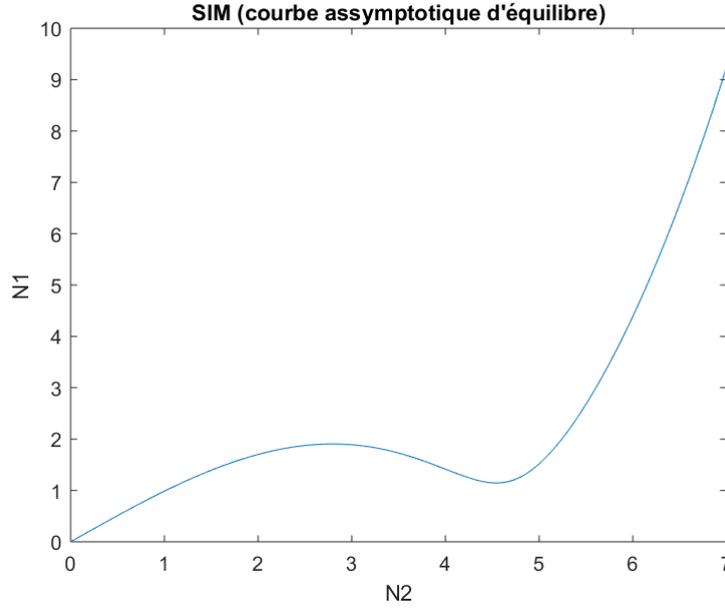


FIGURE 13 – SIM (dynamique rapide)

Nous allons maintenant étudier la stabilité du SIM en perturbant légèrement un point quelconque de la courbe. On va réutiliser l'équation (30) et remplacer φ_2 par $\varphi_2 + \Delta\varphi_2$ (avec $|\Delta\varphi_2| \ll |\varphi_2|$), on va également remplacer φ_2^* par $\varphi_2^* + \Delta\varphi_2^*$ (avec $|\Delta\varphi_2^*| \ll |\varphi_2^*|$) dans l'équation conjuguée (30).

$$\frac{\partial(\varphi_2 + \Delta\varphi_2)}{\partial\tau_0} - \frac{\omega_0}{2i}(\varphi_2 + \Delta\varphi_2) + \frac{\omega_0}{2i}\varphi_1 + \frac{3k}{8i\omega_0^3}(\varphi_2 + \Delta\varphi_2)^2(\varphi_2^* + \Delta\varphi_2^*) + \frac{c}{2}(\varphi_2 + \Delta\varphi_2) = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial(\varphi_2^* + \Delta\varphi_2^*)}{\partial\tau_0} + \frac{\omega_0}{2i}(\varphi_2^* + \Delta\varphi_2^*) - \frac{\omega_0}{2i}\varphi_1^* - \frac{3k}{8i\omega_0^3}(\varphi_2^* + \Delta\varphi_2^*)^2(\varphi_2 + \Delta\varphi_2) + \frac{c}{2}(\varphi_2^* + \Delta\varphi_2^*) = 0 \quad (35)$$

En développant les équations (34) et (35), en supprimant les termes d'ordre trop petit et en utilisant la relation de l'équation (30), on obtient un système d'équations que l'on peut mettre sous forme matricielle.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\Delta\varphi_2}{\partial\tau_0} \\ \frac{\partial\Delta\varphi_2^*}{\partial\tau_0} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\omega_0}{2i} - \frac{c}{2} - \frac{3k}{4i\omega_0^3}\varphi_2\varphi_2^* & -\frac{3k}{8i\omega_0^3}\varphi_2^2 \\ \frac{3k}{8i\omega_0^3}\varphi_2^{*2} & -\frac{\omega_0}{2i} - \frac{c}{2} + \frac{3k}{4i\omega_0^3}\varphi_2\varphi_2^* \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} \Delta\varphi_2 \\ \Delta\varphi_2^* \end{bmatrix} \quad (36)$$

On reconnait une équation différentielle d'ordre 1. Pour que $\Delta\varphi_2$ et $\Delta\varphi_2^*$ ne diverge pas il faut que la partie positive des valeurs propres de M soient négatives. La condition pour que le point d'équilibre soit stable est que les valeurs propres de M soient négatives. Nous allons donc évaluer le polynôme caractéristique de M .

$$\det(M - XI_2) = X^2 + cX + P(N_2) \quad (37)$$

avec,

$$P(N_2) = \frac{3}{4} \left(\frac{3k}{4\omega_0^3} \right)^2 N_2^4 - \frac{3k}{4\omega_0^2} N_2^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{2} \right)^2 \quad (38)$$

On sait donc que la somme des valeurs propres est $-c$ et le que le produit des valeurs propres est $P(N_2)$. Si $P(N_2)$ est positif alors les parties réelles des deux valeurs propres sont négatives (équilibre stable) et si $P(N_2)$ est négatif alors la partie réelle d'une des valeurs propres est positive (équilibre instable). Nous allons donc étudier le signe de $P(N_2)$ qui est un polynôme du second degrés en N_2^2 . Calculons son déterminant.

$$\Delta = \frac{1}{4} \left(\frac{3k}{4\omega_0^2} \right) \left(1 - 3 \left(\frac{c}{\omega_0} \right)^2 \right) \quad (39)$$

Si $c > \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}$ alors $\Delta < 0$ ce qui veut dire que $P(N_2)$ est toujours positif, et donc tous les points du SIM sont stables. Si $c < \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}$ alors $\Delta > 0$, pour les valeurs de N_2 dans l'intervalle $[N_{21}, N_{22}]$, $P(N_2)$ est négatif donc on est en équilibre instable. Cependant, pour les autres valeurs de N_2 l'équilibre est stable.

$$N_{21} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2\omega_0^4}{k} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - 3 \left(\frac{c}{\omega_0} \right)^2 \right)} \right)} \quad (40)$$

$$N_{22} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2\omega_0^4}{k} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - 3 \left(\frac{c}{\omega_0} \right)^2 \right)} \right)} \quad (41)$$

On peut représenter sur un graphique la zone instable et la zone stable du SIM que l'on a tracé sur la figure 13. On remarque sur la figure 14 que la zone instable du SIM est la branche décroissante.

L'étude de la dynamique rapide nous permet de déterminer l'ensemble des points d'équilibre que peut prendre le système, cette courbe que l'on appelle SIM (Slow Invariant Manifold) ne dépend pas de l'excitation du système. Il reste à déterminer les points d'équilibre du système en fonction des paramètres de la sollicitation.

2.2.3 Étude de la dynamique lente du système

Étudions maintenant la dynamique lente du système. On réécrit les équations (27) et (28) à l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$.

$$(27)\mathcal{O}(\epsilon) : \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau_1} - \frac{\sigma}{2i}\varphi_1 + \frac{1}{2i}(\omega_0\varphi_2 - \sigma\varphi_1) + \frac{3k(\alpha-1)}{8i\omega_0^3}\varphi_2^2\varphi_2^* + \frac{c(\alpha-1)}{2}\varphi_2 = \frac{\gamma}{2i}$$

$$(28)\mathcal{O}(\epsilon) : \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_1} - \frac{\sigma}{2i}\varphi_2 + \frac{1}{2i}(\omega_0\varphi_2 - \sigma\varphi_1) + \frac{3k}{8i} \left(\frac{\alpha}{\omega_0^3} - \frac{3\sigma}{\omega_0^4} \right) \varphi_2^2\varphi_2^* + \frac{c\alpha}{2}\varphi_2 = \frac{\gamma}{2i}$$

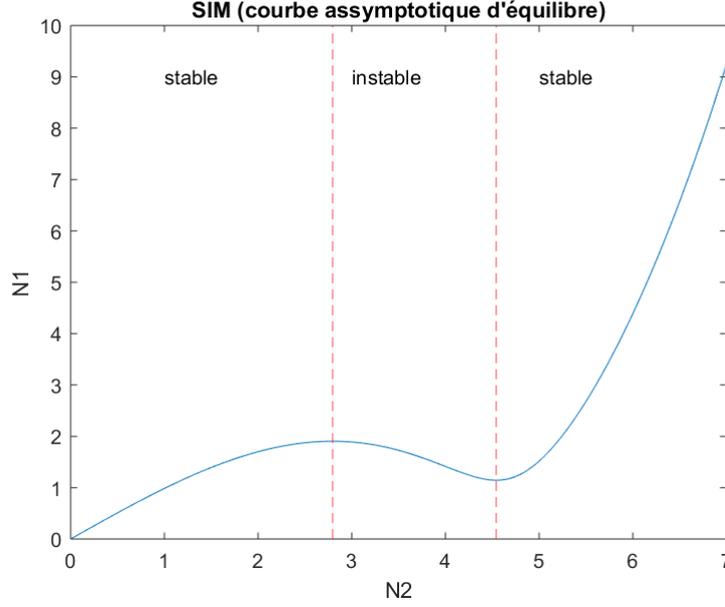


FIGURE 14 – Zones de stabilité du SIM

En effet, comme ϵ est un paramètre très petit nous pouvons développer certains termes en série.

$$\frac{\omega_0^2}{\Omega} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0 \left(1 + \frac{\sigma\epsilon}{\omega_0}\right)} = \omega_0 - \epsilon\sigma + o(\epsilon)$$

et de la même manière,

$$\frac{3k(\epsilon\alpha + 1)}{8i\Omega^3} = \frac{3k}{8i} \left(\frac{1}{\omega_0^3} + \epsilon \frac{\alpha}{\omega_0^3} - \epsilon \frac{3\sigma}{\omega_0^4} + o(\epsilon) \right)$$

On pose,

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau_1} = E_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^*, \varphi_2^*) \quad \text{et} \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_1} = E_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^*, \varphi_2^*)$$

Donc.

$$E_1 = \frac{\sigma}{2i}\varphi_1 - \frac{1}{2i}(\omega_0\varphi_2 - \sigma\varphi_1) - \frac{3k(\alpha - 1)}{8i\omega_0^3}\varphi_2^2\varphi_2^* - \frac{c(\alpha - 1)}{2}\varphi_2 + \frac{\gamma}{2i} \quad (42)$$

$$E_2 = \frac{\sigma}{2i}\varphi_2 - \frac{1}{2i}(\omega_0\varphi_2 - \sigma\varphi_1) - \frac{3k}{8i} \left(\frac{\alpha}{\omega_0^3} - \frac{3\sigma}{\omega_0^4} \right) \varphi_2^2\varphi_2^* - \frac{c\alpha}{2}\varphi_2 + \frac{\gamma}{2i} \quad (43)$$

On doit également prendre en compte le résultat que nous donne la dynamique rapide (SIM), grâce à l'équation $\mathcal{H} = 0$. L'évolution de \mathcal{H} par rapport à l'échelle de temps τ_1 s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{d\tau_1} &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi_1} \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau_1} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi_2} \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_1} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi_1^*} \frac{\partial\varphi_1^*}{\partial\tau_1} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi_2^*} \frac{\partial\varphi_2^*}{\partial\tau_1} = 0 \\ \frac{d\mathcal{H}^*}{d\tau_1} &= \frac{\partial\mathcal{H}^*}{\partial\varphi_1} \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau_1} + \frac{\partial\mathcal{H}^*}{\partial\varphi_2} \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_1} + \frac{\partial\mathcal{H}^*}{\partial\varphi_1^*} \frac{\partial\varphi_1^*}{\partial\tau_1} + \frac{\partial\mathcal{H}^*}{\partial\varphi_2^*} \frac{\partial\varphi_2^*}{\partial\tau_1} = 0 \end{aligned}$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi_2} & \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi_2^*} \\ \frac{\partial\mathcal{H}^*}{\partial\varphi_2} & \frac{\partial\mathcal{H}^*}{\partial\varphi_2^*} \end{bmatrix}}_{B_2} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_1} \\ \frac{\partial\varphi_2^*}{\partial\tau_1} \end{bmatrix}}_{B_1} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi_1} & \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi_1^*} \\ \frac{\partial\mathcal{H}^*}{\partial\varphi_1} & \frac{\partial\mathcal{H}^*}{\partial\varphi_1^*} \end{bmatrix}}_{B_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau_1} \\ \frac{\partial\varphi_1^*}{\partial\tau_1} \end{bmatrix}}_{B_1}$$

Sachant que nous connaissons l'expression de \mathcal{H} (équation 32), on va pouvoir calculer les matrices B_1 et B_2 .

$$\mathcal{H} = \frac{\omega_0}{2i}\varphi_1 - \frac{\omega_0}{2i}\varphi_2 + \frac{3k}{8i\omega_0^3}\varphi_2^2\varphi_2^* + \frac{c}{2}\varphi_2 \quad (44)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{\omega_0}{2i} & 0 \\ 0 & -\frac{\omega_0}{2i} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_2 = \begin{bmatrix} \frac{c}{2} - \frac{\omega_0}{2i} + \frac{3k}{4i\omega_0^3}\varphi_2\varphi_2^* & \frac{3k}{8i\omega_0^3}\varphi_2^2 \\ -\frac{3k}{8i\omega_0^3}\varphi_2^{*2} & \frac{c}{2} + \frac{\omega_0}{2i} - \frac{3k}{4i\omega_0^3}\varphi_2\varphi_2^* \end{bmatrix}$$

On a certaines conditions qui définissent deux types de points du SIM [28].

$$\begin{array}{ll} \text{Point d'équilibre :} & \text{Point singulier :} \\ \begin{cases} E_1 = 0 \\ \mathcal{H} = 0 \\ \det(B_2) \neq 0 \end{cases} & \begin{cases} E_1 = 0 \\ \mathcal{H} = 0 \\ \det(B_2) = 0 \end{cases} \end{array}$$

On peut déterminer l'équation $\det(B_2) = 0$ en fonction de N_2 .

$$\begin{aligned} \det(B_2) &= \left(\frac{c}{2} - \frac{\omega_0}{2i} + \frac{3k}{4i\omega_0^3}\varphi_2\varphi_2^*\right) \left(\frac{c}{2} + \frac{\omega_0}{2i} - \frac{3k}{4i\omega_0^3}\varphi_2\varphi_2^*\right) - \left(\frac{3k}{8i\omega_0^3}\varphi_2^2\right) \left(-\frac{3k}{8i\omega_0^3}\varphi_2^{*2}\right) \\ &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 - \frac{3\omega_0 k}{4\omega_0^3}\varphi_2\varphi_2^* + \frac{3}{4} \left(\frac{3k}{4\omega_0^3}\varphi_2\varphi_2^*\right)^2 \\ &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 - \frac{3k}{4\omega_0^2}N_2^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{3k}{4\omega_0^3}\right)^2 N_2^4 \end{aligned}$$

Donc,

$$\det(B_2) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 - \frac{3k}{4\omega_0^2}N_2^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{3k}{4\omega_0^3}\right)^2 N_2^4 = 0 \quad (45)$$

Les points singuliers sont donnés par l'équation (45), il peut y avoir entre 0 et 2 points singuliers. On remarque que l'équation (45) fait intervenir le polynôme $P(N_2)$ de l'équation (38) qui a servi à déterminer les bornes de la zone d'instabilité du SIM. Les points singuliers sont donc les extrémités de la zone instable du SIM.

On va maintenant étudier et essayer de résoudre l'équation $E_1 = 0$. On réécrit cette équation sachant qu'on a déjà déterminé l'expression de E_1 (Voir équation (42)), le but est de déterminer N_2 en fonction des paramètres de la sollicitation, et en tenant toujours compte de la relation entre N_1 et N_2 donnée par le SIM.

$$E_1 = \frac{\sigma}{i}\varphi_1 - \frac{\omega_0}{2i}\varphi_2 + \frac{3k(1-\alpha)}{8i\omega_0^3}\varphi_2^2\varphi_2^* + \frac{c(1-\alpha)}{2}\varphi_2 + \frac{\gamma}{2i} \quad (46)$$

D'après l'équation $\mathcal{H} = 0$ qui exprime la dynamique rapide, on a une relation entre φ_1 et φ_2 .

$$\varphi_1 = \varphi_2 - \frac{3k}{4\omega_0^4}\varphi_2^2\varphi_2^* - \frac{ic}{\omega_0}\varphi_2 \quad (47)$$

On injecte l'expression de φ_1 dans l'équation (46).

$$\begin{aligned}
E_1 = 0 &\Leftrightarrow \frac{\sigma}{i} \left(\varphi_2 - \frac{3k}{4\omega_0^4} \varphi_2^2 \varphi_2^* - \frac{ic}{\omega_0} \varphi_2 \right) - \frac{\omega_0}{2i} \varphi_2 + \frac{3k(1-\alpha)}{8i\omega_0^3} \varphi_2^2 \varphi_2^* + \frac{c(1-\alpha)}{2} \varphi_2 + \frac{\gamma}{2i} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\sigma}{i} \left(N_2 e^{i\delta_2} - \frac{3k}{4\omega_0^4} N_2^3 e^{i\delta_2} - \frac{ic}{\omega_0} N_2 e^{i\delta_2} \right) - \frac{\omega_0}{2i} N_2 e^{i\delta_2} + \frac{3k(1-\alpha)}{8i\omega_0^3} N_2^3 e^{i\delta_2} + \frac{c(1-\alpha)}{2} N_2 e^{i\delta_2} \\
&\quad + \frac{\gamma}{2i} = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\sigma \left(N_2 e^{i\delta_2} - \frac{3k}{4\omega_0^4} N_2^3 e^{i\delta_2} - \frac{ic}{\omega_0} N_2 e^{i\delta_2} \right) - \omega_0 N_2 e^{i\delta_2} + \frac{3k(1-\alpha)}{4\omega_0^3} N_2^3 e^{i\delta_2} + ic(1-\alpha) N_2 e^{i\delta_2} \\
&= -\gamma \\
&\Leftrightarrow N_2 \left(2\sigma - \omega_0 + \frac{3k\omega_0(1-\alpha) - 6k\sigma}{4\omega_0^4} N_2^2 \right) + i \left(c(1-\alpha) - \frac{2\sigma c}{\omega_0} \right) N_2 = -\gamma e^{-i\delta_2} \\
&\Rightarrow N_2^2 \left(2\sigma - \omega_0 + \frac{3k\omega_0(1-\alpha) - 6k\sigma}{4\omega_0^4} N_2^2 \right)^2 + \left(c(1-\alpha) - \frac{2\sigma c}{\omega_0} \right)^2 N_2^2 = \gamma^2
\end{aligned}$$

On pose $X = N_2^2$, on a alors :

$$\begin{aligned}
E_1 = 0 &\Rightarrow X \left(2\sigma - \omega_0 + \frac{3k\omega_0(1-\alpha) - 6k\sigma}{4\omega_0^4} X \right)^2 + \left(c(1-\alpha) - \frac{2\sigma c}{\omega_0} \right)^2 X - \gamma^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow a_1 X^3 + a_2 X^2 + a_3 X + a_4 = 0
\end{aligned}$$

Avec,

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left(\frac{3k\omega_0(1-\alpha) - 6k\sigma}{4\omega_0^4} \right)^2 ; \quad a_2 = \frac{(2\sigma - \omega_0)(3k\omega_0(1-\alpha) - 6k\sigma)}{2\omega_0^4} \\
a_3 &= (2\sigma - \omega_0)^2 + \left(c(1-\alpha) - \frac{2\sigma c}{\omega_0} \right)^2 ; \quad a_4 = -\gamma^2
\end{aligned}$$

En posant,

$$Z = X + \frac{a_2}{3a_1} ; \quad p = \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{3a_1^2} ; \quad q = \frac{a_2}{27a_1} \left(\frac{2a_2^2}{a_1^2} - \frac{9a_3}{a_1} \right) + \frac{a_4}{a_1}$$

On montre que,

$$a_1 X^3 + a_2 X^2 + a_3 X + a_4 = 0 \Leftrightarrow Z^3 + pZ + q = 0 \quad (48)$$

On peut résoudre l'équation (48) par la méthode de Cardan. On pose Δ le déterminant de cette équation donné par l'expression $\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$. Selon le signe de Δ il y a une ou plusieurs solutions réelles à l'équation (48).

Si $\Delta > 0$, il y a trois solutions réelles qui s'écrivent :

$$Z_k = j^k u + (j^k u)^* \quad k \in \{0, 1, 2\} \quad \text{avec } j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et } u = \sqrt[3]{\frac{-q + i\sqrt{\frac{\Delta}{27}}}{2}} \quad (49)$$

Si $\Delta = 0$, il y a deux solutions réelles dont une est racine double du polynôme :

$$Z_0 = 2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} ; \quad Z_1 = Z_2 = -\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} \quad (50)$$

Si $\Delta < 0$, il y a une solution réelle et deux solutions complexes conjuguées, la solution réelle s'écrit :

$$Z_0 = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\frac{-\Delta}{27}}}{2}} \quad (51)$$

Une fois qu'on a trouvé les solutions Z_k de l'équation (48), on calcule les solutions $X_k = Z_k - \frac{a_2}{3a_1}$. Puis pour les X_k positifs, on calcule $N_2 = \sqrt{X_k}$. On peut trouver de cette manière jusqu'à trois points d'équilibre.

2.2.4 Intégration numérique et résultats analytiques

Nous avons déterminé les caractéristiques de notre système avec une méthode analytique. Nous avons mis en équation le système puis nous l'avons étudié à différentes échelles de temps, cela nous a permis de déterminer la courbe de SIM ainsi que les points d'équilibre pour une sollicitation harmonique du système. Dans cette partie, nous allons intégrer numériquement les équations (22) et (23) avec une méthode Runge-Kutta 4 (ode45 sur Matlab) et nous allons faire une comparaison avec les résultats de la partie précédente, à savoir la courbe de SIM et les points d'équilibre. Ces équations font intervenir les variables v et w qui sont respectivement le déplacement relatif entre la poutre et l'oscillateur non-linéaire et le déplacement du barycentre des masses.

Tout d'abord, nous devons choisir les paramètres du système pour qu'ils soient en accord avec les hypothèses mathématiques. En effet, le paramètre ϵ doit être suffisamment petit et les autres paramètres doivent être de l'ordre $O(1)$. On peut voir sur le tableau 2 les paramètres analytiques choisis.

k	1
c	0,5
ϵ	0,1
α	1.024
ω_0	2

TABLE 2 – paramètres du système d'équation

Nous allons d'abord intégrer le système sans excitation mais avec des conditions initiales non-nulles, de cette manière nous n'avons pas à considérer les points d'équilibre. De plus, on peut choisir les conditions initiales comme on veut pour partir d'un point spécifique dans le domaine des variables N_1 et N_2 . L'idée est de choisir différentes conditions initiales pour comprendre l'effet du SIM. Cela va nous permettre de vérifier la stabilité du SIM et de vérifier qu'il y a bien une zone instable. Pour commencer on peut fixer les conditions initiales $w(0) = w_0 = 3,5$ et $v(0) = v_0 = 1,5$, ce qui correspond dans le domaine des variables N_1 et N_2 à $N_1(0) = 7$ et $N_2(0) = 3$. On observe sur la figure 15 le signal temporel qui résulte de l'intégration numérique. On peut calculer les variables de Manevitch (equation (24)) et on calcule leur module pour obtenir N_1 et N_2 . On peut ensuite tracer le signal dans le domaine des variables N_1 et N_2 . On observe sur la figure 16 que le signal est bien attiré par la courbe du SIM. En effet, le SIM est constitué de deux branches stables croissantes et d'une branche instable décroissante. Les différentes zones sont séparées par un point singulier. Le signal est tout d'abord attiré par le point de la branche stable qui se trouve à la même ordonnée que le point de départ du signal. Etant donné que le système est non excité, le signal doit rejoindre le point $N_1 = N_2 = 0$. On remarque que le signal rejoint ce point en passant par les branches stables du SIM. Lorsque le signal arrive à un point singulier il va rejoindre l'autre branche

stable.

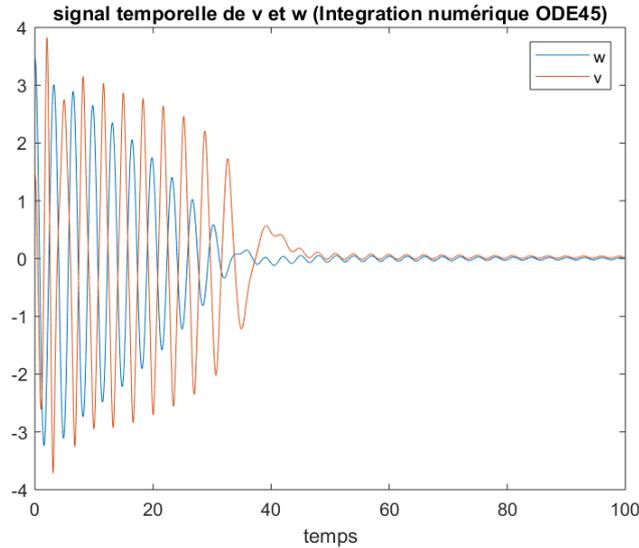


FIGURE 15 – Réponse temporelle du système non excité, $w(0) = w_0 = 3,5$ et $v(0) = v_0 = 1,5$

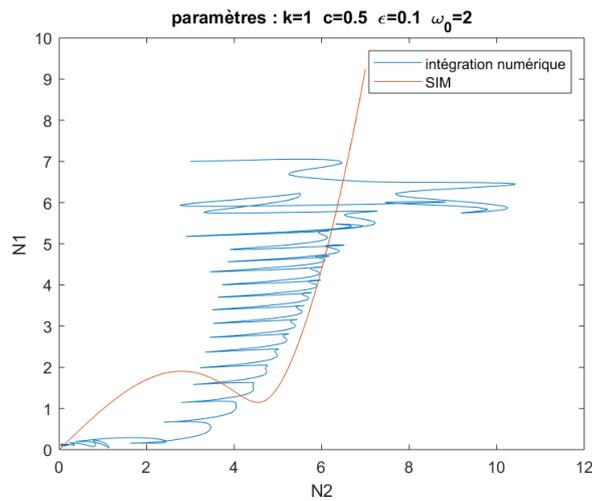


FIGURE 16 – Réponse du système non excité (domaine des variables N_1 et N_2), $w_0 = 3,5$ et $v_0 = 1,5$

On peut faire une intégration numérique du système pour des conditions initiales différentes pour voir si le SIM attire le signal de la même manière. On a réalisé l'intégration numérique pour trois autres cas : $N_2(0) = 10$ et $N_1(0) = 7$ (figure 17), $N_2(0) = 1$ et $N_1(0) = 3$ (figure 18) et $N_2(0) = 1$ et $N_1(0) = 1,5$ (figure 19). Sur le graphique de la figure 17 on remarque que le signal se comporte de la même manière que sur la figure 16 sauf que le point de départ est à droite du SIM donc le signal rejoint le SIM par la droite. Pour le cas $N_2(0) = 1$ et $N_1(0) = 3$ on voit bien que le signal est attiré par la branche stable de même ordonnée que le point initial et non la plus proche du point de départ. On peut représenter schématiquement sur la figure 20 la manière dont le SIM interagit avec le signal non excité pour une condition initiale non-nulle.

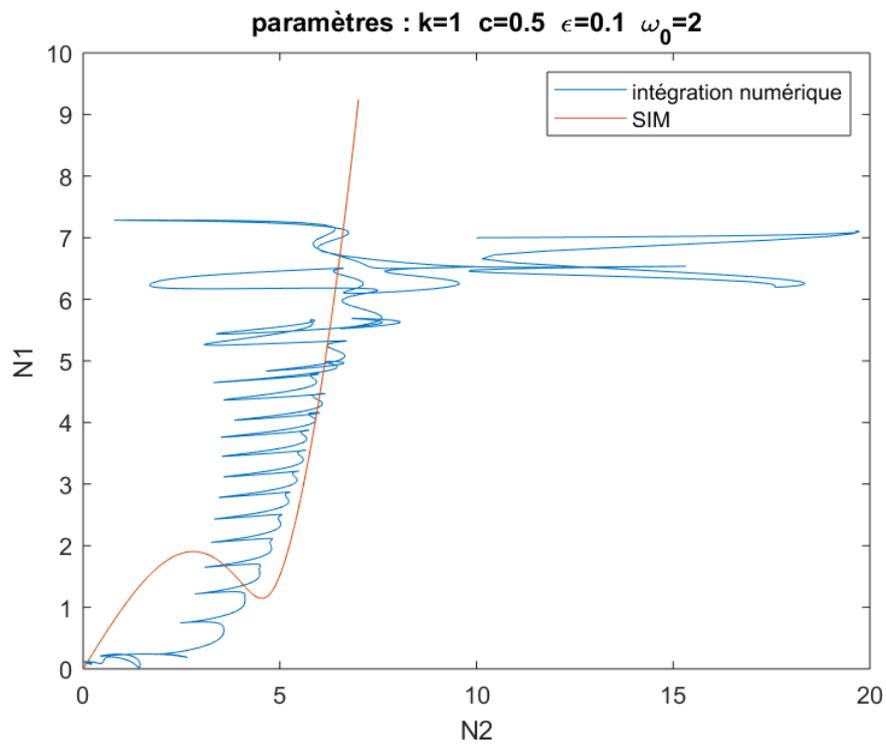


FIGURE 17 – Réponse du système non excité aux conditions initiales $N_2(0) = 10$ et $N_1(0) = 7$

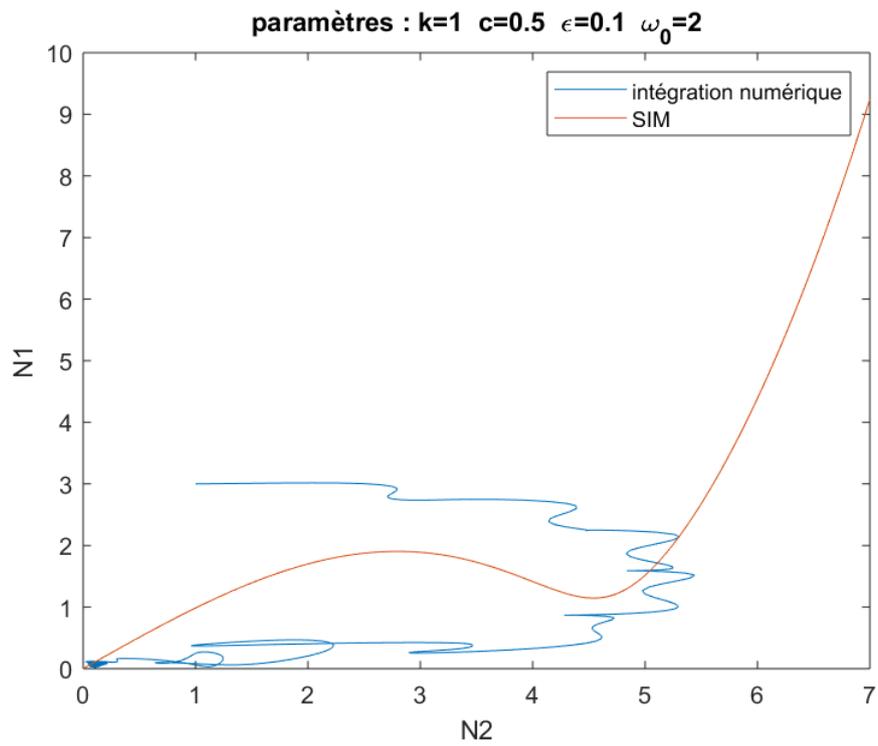


FIGURE 18 – Réponse du système non excité aux conditions initiales $N_2(0) = 1$ et $N_1(0) = 3$

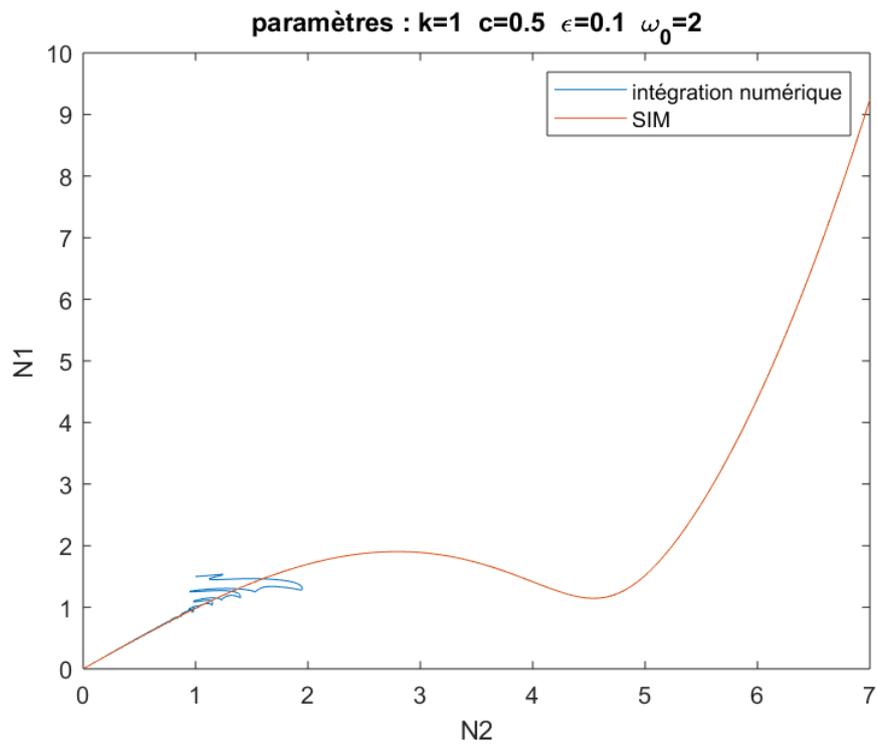


FIGURE 19 – Réponse du système non excité aux conditions initiales $N_2(0) =$ et $N_1(0) = 1,5$

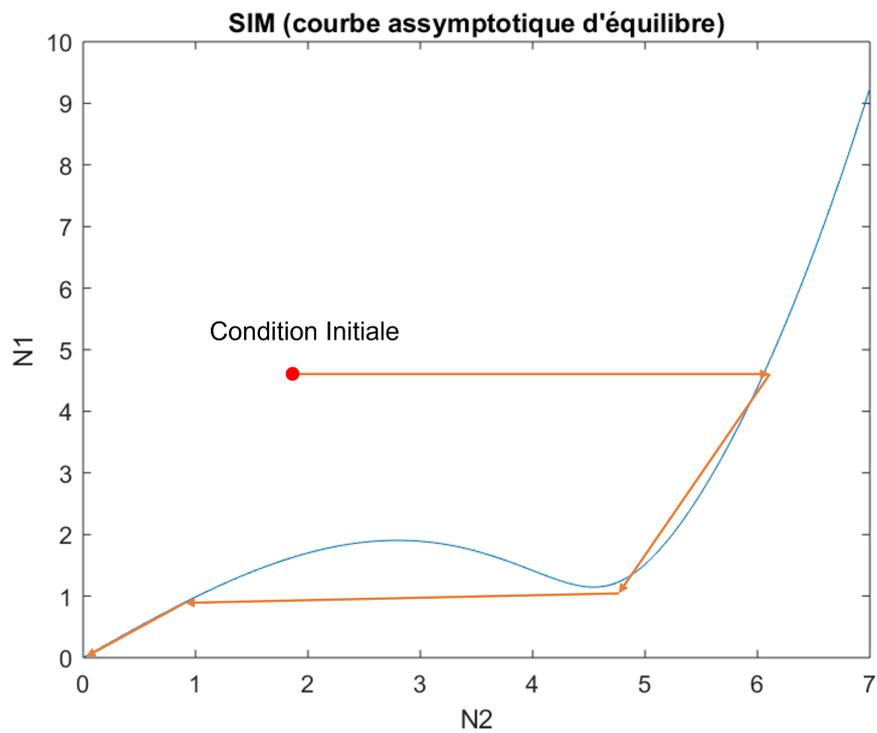


FIGURE 20 – Schéma du comportement du système non excité avec conditions initiales non nulles

Nous allons maintenant considérer le système soumis à une sollicitation harmonique dont la fréquence est proche de la fréquence du premier mode de la poutre. On va tout d'abord revenir sur les résultats analytiques. Nous avons établi des formules qui nous permettent de déterminer les points d'équilibre du système, on peut donc tracer les graphiques représentant les points d'équilibre en fonction de σ , N_1 et N_2 . On observe sur les figures 21 à 23 les points

d'équilibre pour différentes valeurs de N_2 et σ pour différentes valeurs de γ qui est l'amplitude de l'excitation. Comme on l'a déjà vu avec la méthode de Cardan, il peut y avoir jusqu'à trois points d'équilibre. On connaît également une condition sur N_2 pour savoir si le point d'équilibre est stable ou instable. On peut donc tracer sur les graphiques les points stables en bleu et les points instables en rouge.

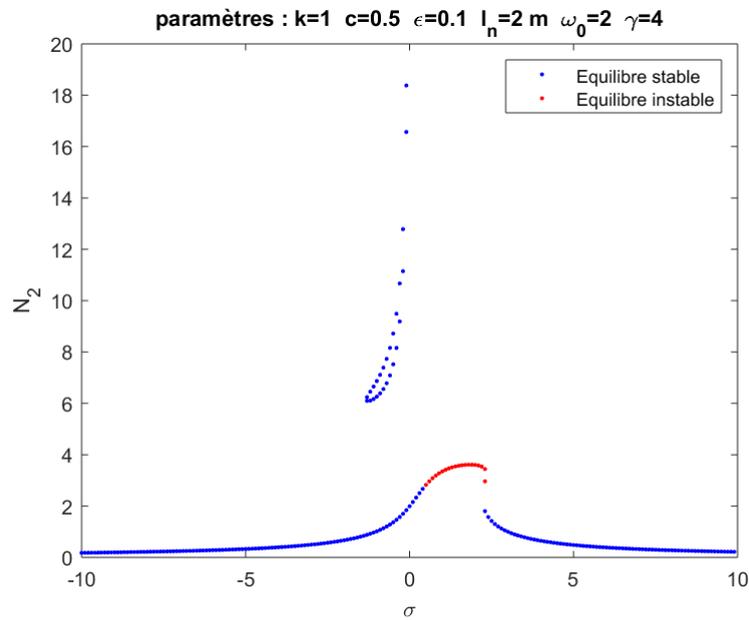


FIGURE 21 – Points d'équilibres ($\gamma = 4$)

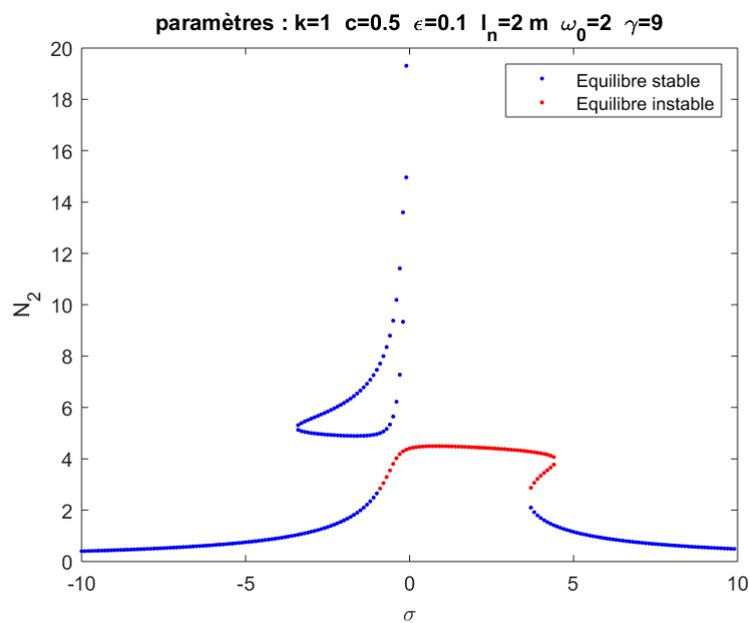


FIGURE 22 – Points d'équilibres ($\gamma = 9$)

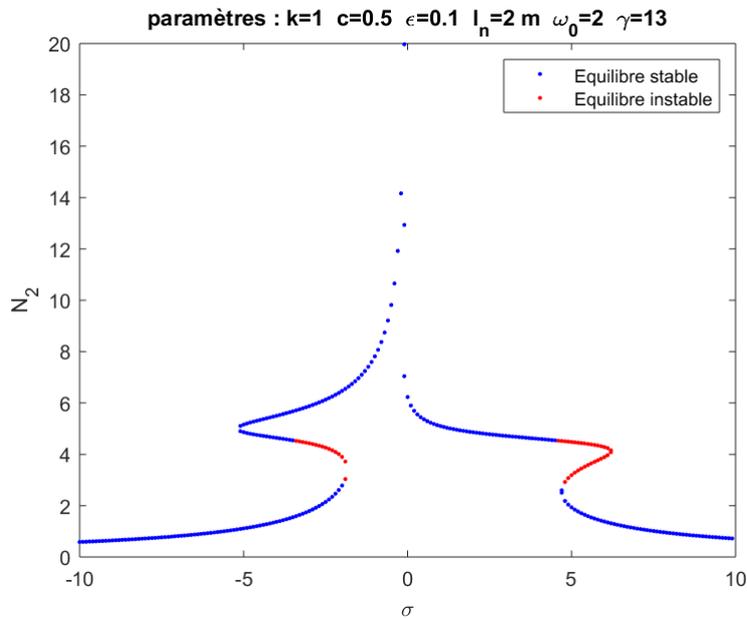


FIGURE 23 – Points d'équilibres ($\gamma = 13$)

On remarque sur ces figures des branches isolées et une branche principale pour certaines valeurs de γ . Si on avait un système linéaire, il n'y aurait qu'une seule courbe constituée d'un pic centrée sur l'abscisse $\sigma = 0$. De plus, la courbe serait symétrique par rapport à l'axe $\sigma = 0$. Dans notre cas non-linéaire, la courbe n'est pas symétrique. De plus, pour des valeurs de γ faibles c'est à dire inférieures à 10, on observe une branche isolée. Pour des valeurs de γ supérieures à 10 la branche isolée se connecte à la branche principale. Dans notre étude nous allons fixer arbitrairement $\gamma = 9$.

Nous pouvons à présent comparer le calcul analytique des points d'équilibres avec le résultat de l'intégration numérique. On va obtenir les signaux temporels de w et v pour un système soumis à une sollicitation harmonique et avec des conditions aux limites nulles.

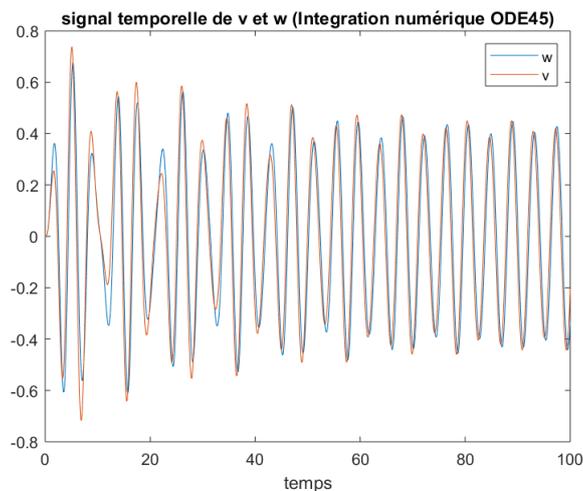


FIGURE 24 – Réponse temporelle du système à une sollicitation harmonique.

La figure 24 montre le résultat de cette intégration numérique pour $\sigma = -5$. Ce graphique ne permet pas de comparer les résultats, nous allons donc calculer N_1 et N_2 et tracer les résultats

dans le domaine des variables N_1 et N_2 . Sur les figures 25 à 29 on peut observer ces résultats pour différentes valeurs de σ . On a tracé le résultat de l'intégration numérique en bleu, le SIM en orange et les points d'équilibre en rouge.

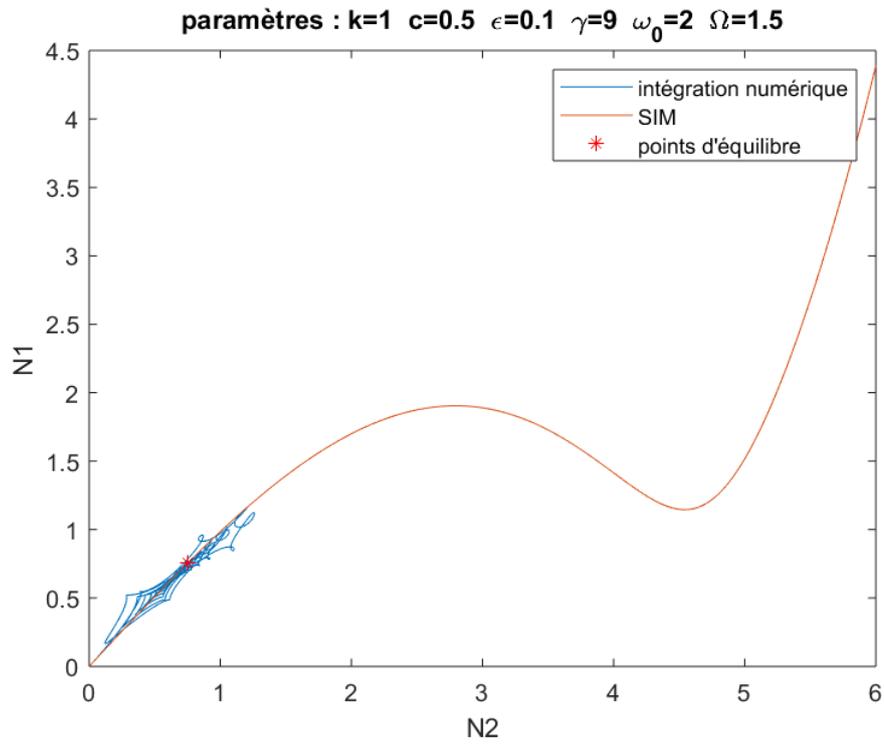


FIGURE 25 – Intégration numérique du système soumis à une sollicitation harmonique ($\sigma = -5$)

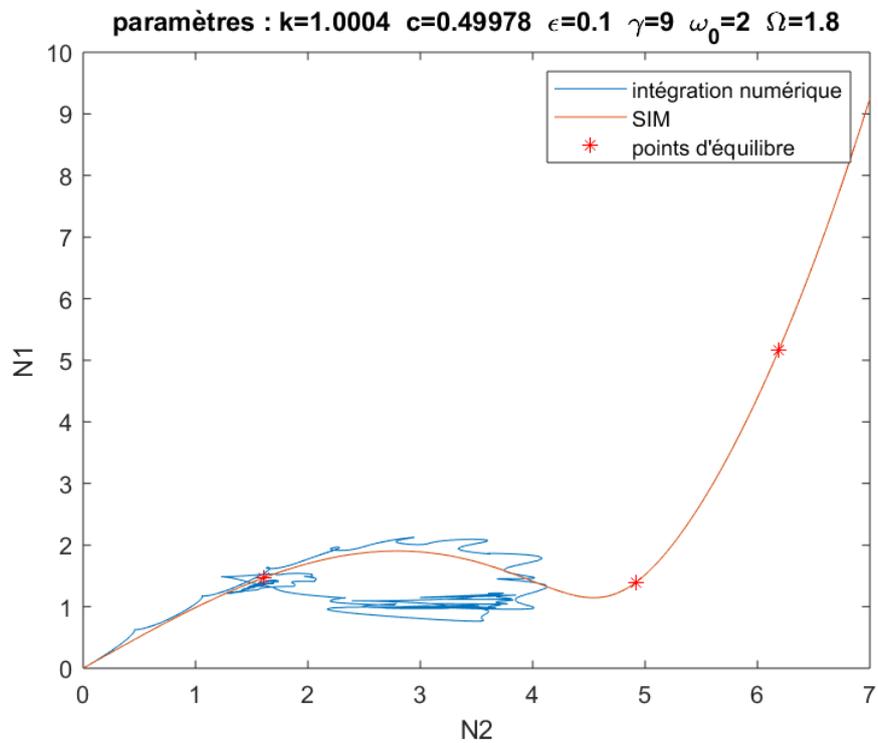


FIGURE 26 – Intégration numérique du système soumis à une sollicitation harmonique ($\sigma = -2$)

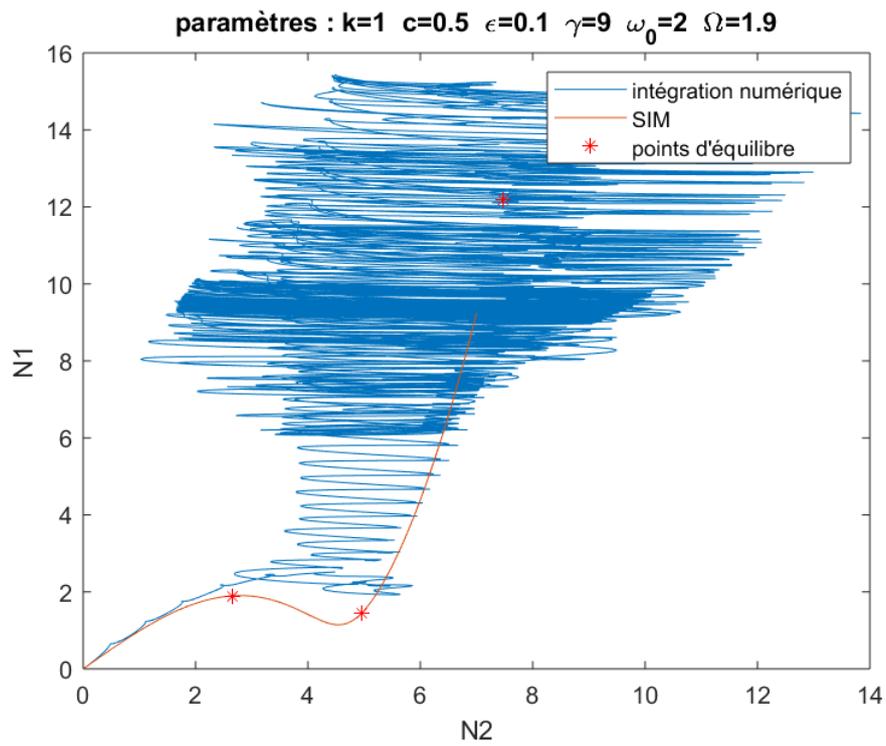


FIGURE 27 – Intégration numérique du système soumis à une sollicitation harmonique ($\sigma = -1$)

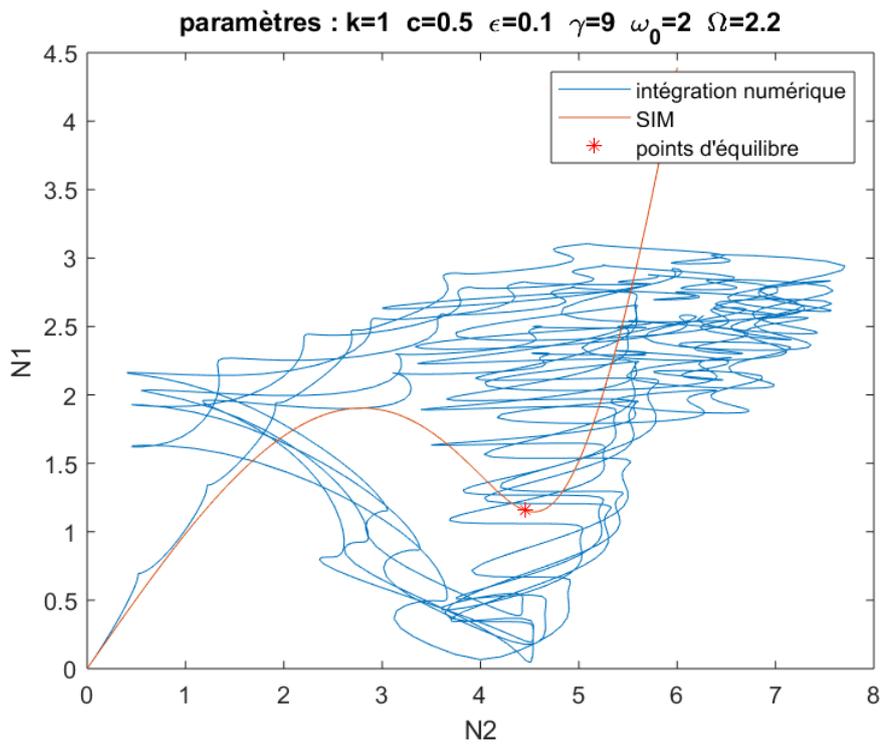


FIGURE 28 – Intégration numérique du système soumis à une sollicitation harmonique ($\sigma = 2$)

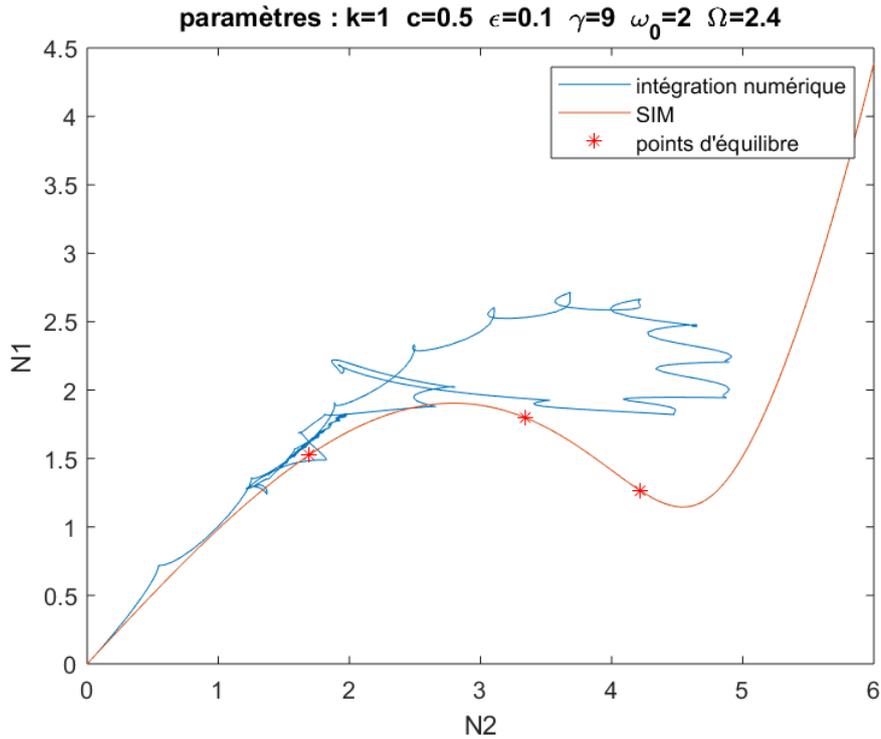


FIGURE 29 – Intégration numérique du système soumis à une sollicitation harmonique ($\sigma = 4$)

On observe sur ces graphiques que le signal finit par se stabiliser autour d'un point d'équilibre. Il y a une exception, dans le cas où le seul point d'équilibre est instable le système se met alors à osciller entre les deux branches stables du SIM. On remarque également que dans le cas $\sigma = -1$ le signal se stabilise à une valeur qui n'est pas celle d'un point d'équilibre mais qui est entre les deux points d'équilibre de la branche isolée.

Dans cette partie, nous avons comparé les résultats de l'intégration numérique du système projeté sur un mode avec les résultats analytiques. Nous avons vu que dans le cas du système non-sollicité avec des conditions initiales non nulles la courbe de SIM est bien un attracteur du système. Nous avons également vu qu'il y a des zones stables et instables et que le signal parcourt uniquement les branches stables du SIM. Grâce à l'intégration du système soumis à une sollicitation harmonique, nous avons vu que le système atteint un régime permanent qui est en accord avec les points d'équilibre calculés dans la partie analytique.

3 Modélisation par la méthode des éléments finis et comparaison des résultats

3.1 Présentation du modèle à éléments finis

Nous avons vu dans la partie précédente le modèle analytique qui a été développé. Ce modèle va nous permettre de déterminer différentes caractéristiques du comportement de notre système. Afin de valider ce modèle analytique, nous allons réaliser une modélisation par la méthode des éléments finis du système constitué d'une poutre aux conditions aux limites élastiques couplée à un oscillateur non-linéaire. Comme on peut le voir sur la Figure 30, le système est constitué d'une poutre d'Euler-Bernoulli avec à ses extrémités des ressorts en translation et en rotation. L'oscillateur non-linéaire qui est couplé à la poutre est constitué d'une masse, d'un amortisseur et d'une raideur non-linéaire. La modélisation par la méthode des éléments finis (FEM) est

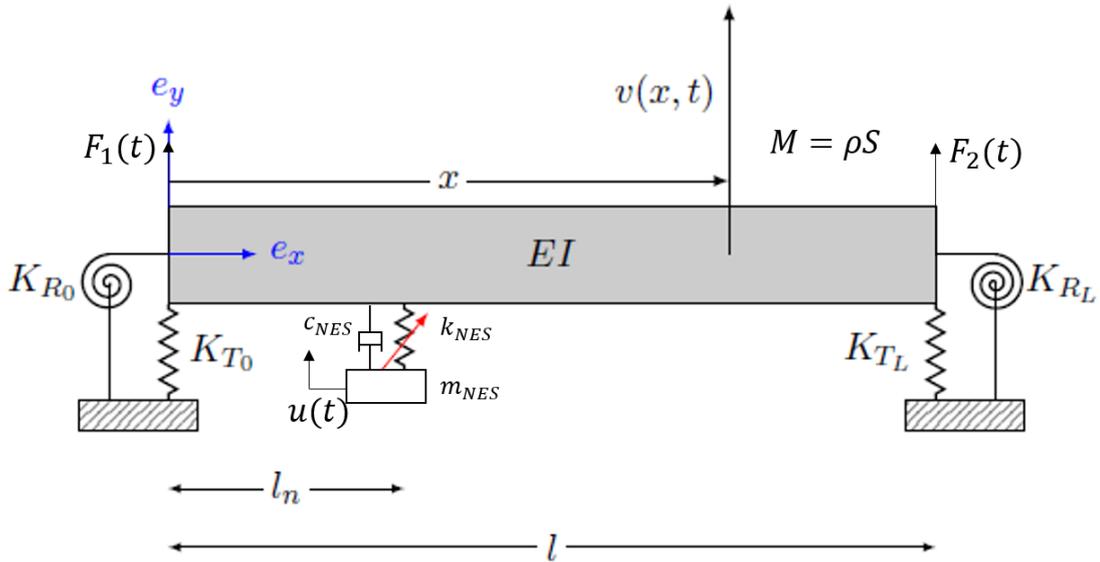


FIGURE 30 – Poutre aux conditions aux limites élastiques couplée à un oscillateur non-linéaire

réalisée avec le logiciel Code_Aster, un logiciel de modélisation par éléments finis développé par EDF (Electricité de France). Dans cette partie, les différentes étapes de la modélisation seront détaillées, c'est-à-dire, le maillage et le fichier de commande. L'idée est de modéliser les différentes parties du système avec les éléments les plus adaptés. Nous utiliserons des éléments de poutre d'Euler (POU_D_E), des éléments discrets (DIS_TR et DIS_T) pour les amortisseurs et ressorts linéaires et des éléments de câble (CABLE) pour le ressort non-linéaire. Nous verrons dans un premier temps la modélisation de la poutre puis celle de l'oscillateur non-linéaire.

3.1.1 Poutre aux conditions aux limites élastiques

Pour modéliser la poutre aux conditions aux limites élastiques, nous allons utiliser deux types d'éléments différents. On modélise la poutre par des éléments de poutre d'Euler (POU_D_E) qui sont des éléments 1D dont les nœuds supports disposent de 6 degrés de liberté. Puis, on modélise les ressorts d'extrémité par des éléments discrets (DIS_TR) qui sont des éléments auxquels on peut attribuer des caractéristiques de masse, de raideur et d'amortissement.

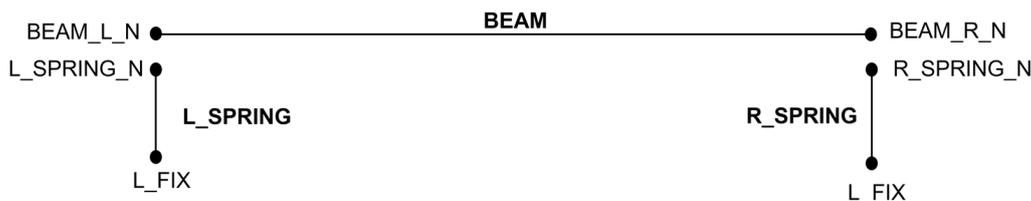


FIGURE 31 – Poutre aux conditions aux limites élastiques couplée à un oscillateur non-linéaire

Comme on peut le voir sur la figure 31, le groupe d'éléments « BEAM » qui modélise la poutre d'une longueur de 4 mètres est constitué de 100 éléments « POU_D_E ». Les éléments L_SPRING et « R_SPRING » sont deux éléments « DIS_TR ». Les Nœuds « L_FIX » et « R_FIX » sont encastrés et le nœud « L_SPRING_N » (respectivement « R_SPRING_N ») est lié au nœud « BEAM_L_N » (respectivement « BEAM_R_N »), c'est-à-dire que tous leurs degrés de libertés sont égaux. On peut réaliser cette opération grâce à la commande « LIAISON_DDL ».

Le but étant de modéliser un câble de ligne de transport avec la poutre, nous allons assigner les paramètres d'un certain câble à la poutre. Nous choisissons un câble ACSR Crown dont les caractéristiques sont inscrites sur le tableau 3.

E (Module d'Young)	68,3 GPa
I (Moment d'inertie)	9,3923.10 ⁻⁹ m^4
ρ (Masse volumique)	3342,3 $Kg.m^{-3}$
S (Surface de la section)	409,6.10 ⁻⁶ m^2

TABLE 3 – paramètres de la poutre

Les autres paramètres qui restent à fixer sont les 4 raideurs (2 en rotation et 2 en translation) des ressorts aux extrémités de la poutre. L'idée étant de modéliser un mode de galop de câble, la fréquence doit être de l'ordre du Hertz. De plus, la poutre modélise une petite partie du câble donc le mode de la poutre doit être cohérent avec le mode global du câble. Nous choisissons les valeurs qui sont inscrites sur le tableau 4.

\bar{k}_0	2,04	k_0	18,27 $N.m^{-1}$
k_{R0}	2	k_{R0}	286,6 $N.m.rad^{-1}$
k_L	2,04	k_L	18,27 $N.m^{-1}$
k_{RL}	2	k_{RL}	286,6 $N.m.rad^{-1}$

TABLE 4 – Paramètres des ressorts aux extrémités de la poutre

De cette manière la fréquence du premier mode est 0,407 Hz et on peut voir la déformée modale sur la figure 32. Pour des raisons de convergence du calcul, nous allons donner de l'amortissement à la poutre. On définit un amortissement proportionnel à la masse et à la raideur. En effet la matrice d'amortissement est définie comme une combinaison linéaire de la matrice de masse et de la matrice de raideur $C = \alpha K + \beta M$ avec M la matrice de masse, K la matrice de raideur et C la matrice d'amortissement. Le coefficient d'amortissement dépend de la pulsation [29].

$$\xi_n = \frac{\alpha \omega_n}{2} + \frac{\beta}{2\omega_n} \quad (52)$$

On peut choisir α et β pour avoir un coefficient d'amortissement relativement constant sur une certaine gamme de fréquence. On choisit $\alpha = 0.0406$ et $\beta = 0.24$ pour avoir un amortissement

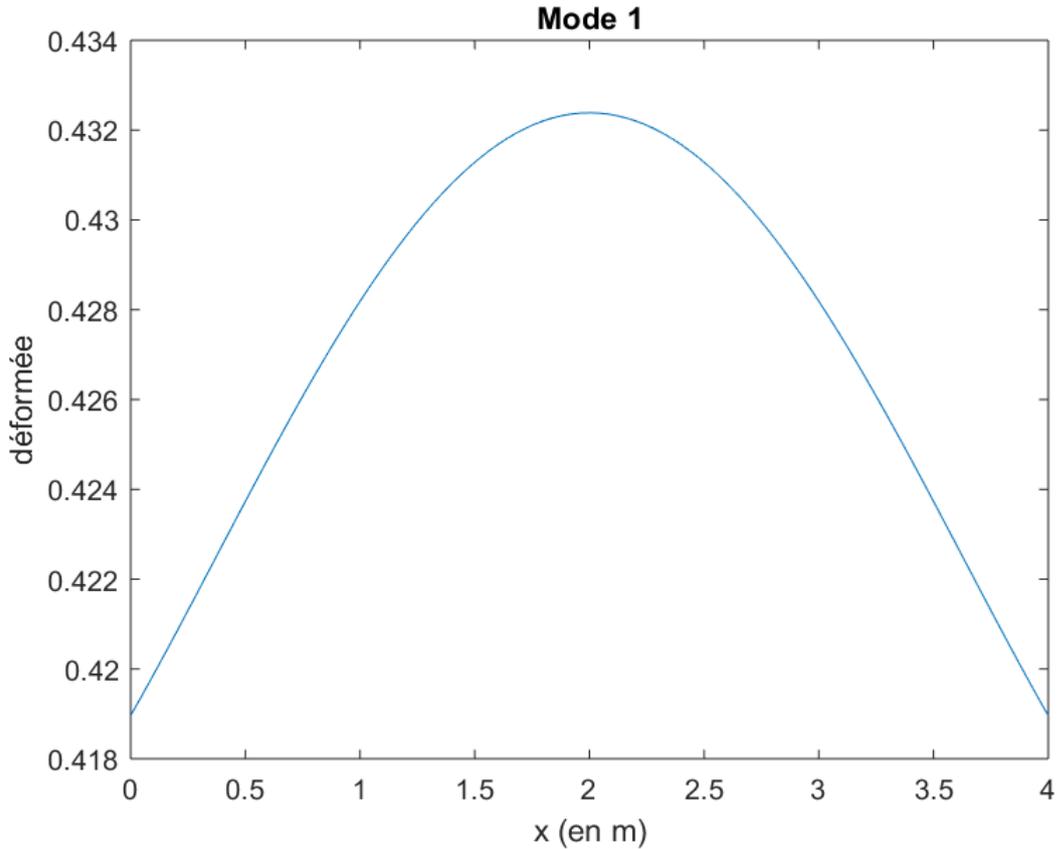


FIGURE 32 – Forme du premier mode de la poutre

d'environ 10% sur une bande de fréquence autour de $0.407Hz$. On observe sur la figure 33 le coefficient d'amortissement en fonction de la fréquence.

3.1.2 Oscillateur non-linéaire.

Nous voulons modéliser un oscillateur non-linéaire cubique, c'est-à-dire que la force de rappel élastique est égale à une constante multipliée par le déplacement à la puissance 3. Une manière de réaliser ce type d'oscillateur est d'utiliser une non-linéarité géométrique. Comme on peut le voir sur la figure 34, on utilise deux ressorts linéaire attachés de part et d'autre de la masse et on étudie le déplacement vertical de la masse. On peut calculer la force F en fonction du déplacement u . La définition du ressort linéaire nous permet d'écrire :

$$F_1 = k(L_i - L_0) \quad (53)$$

On projette cette force sur l'axe horizontal :

$$\frac{F}{2} = F_1 \cos(\alpha) \quad \text{avec} \quad \cos(\alpha) = \frac{u}{L_i} \quad (54)$$

Donc $F = 2ku \frac{L_i - L_0}{L_i}$. Or on a $u^2 + L_0^2 = L_i^2$ donc $L_i = \sqrt{u^2 + L_0^2}$. De plus on a :

$$\frac{1}{L_i} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + L_0^2}} = \frac{1}{L_0} \left(1 + \frac{u^2}{L_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{L_0} \left(1 - \frac{u^2}{2L_0^2} + o\left(\frac{u^2}{L_0^2}\right)\right) \quad (55)$$

$$L_i - L_0 = \sqrt{u^2 + L_0^2} - L_0 = L_0 \left(\left(1 + \frac{u^2}{L_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) = L_0 \left(1 + \frac{u^2}{2L_0^2} - 1 + o\left(\frac{u^2}{L_0^2}\right)\right) \quad (56)$$

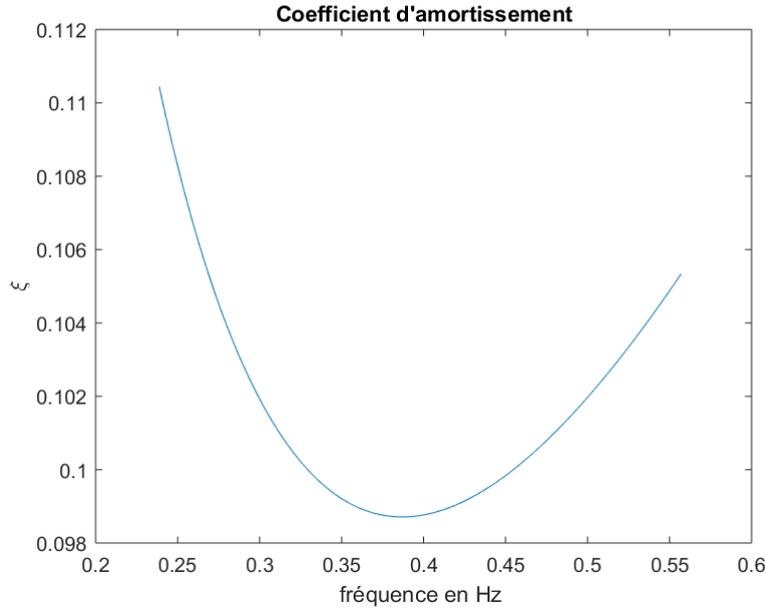


FIGURE 33 – Coefficient d’amortissement en fonction de la fréquence.

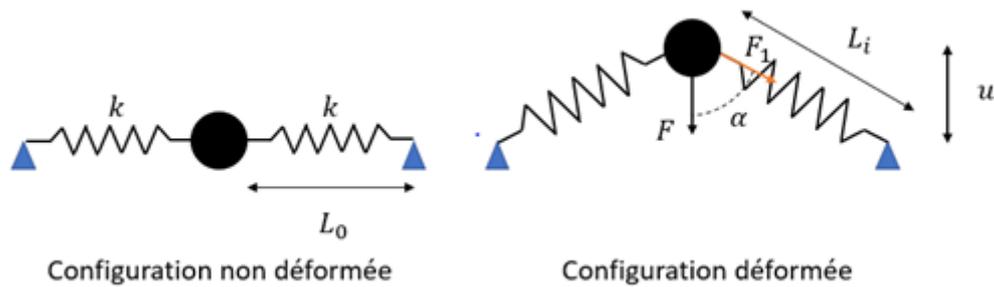


FIGURE 34 – Schéma de principe de l’oscillateur non-linéaire.

Donc,

$$F = 2kL_0 \left(\frac{u^2}{L_0^2} + o\left(\frac{u^2}{L_0^2}\right) \right) \frac{1}{L_0} \left(1 - \frac{u^2}{2L_0^2} + o\left(\frac{u^2}{L_0^2}\right) \right) u \quad (57)$$

Finalement,

$$F = \frac{ku^3}{L_0^2} + o(u^3) \quad (58)$$

On voit donc que si les ressorts sont à leur longueur à vide lors de la configuration non-déformée, on peut dire que ce système se rapproche d’un oscillateur dont la raideur est cubique.

Pour la modélisation sur Code Aster, on utilise des éléments de câbles (« CABLE ») pour modéliser les ressorts linéaires et on utilise des éléments discrets pour modéliser la masse et l’amortisseur (DIS_T). On utilise des éléments de câble pour modéliser les ressorts car ils prennent en compte les grands déplacements et convergent facilement pour des déplacements très grands. Ils sont analogues à des éléments de barres, mais ne reprennent pas de compression. Ici la reprise de compression n’est pas nécessaire, car le ressort s’étire peu importe le sens de

l'oscillation. La figure 35 décrit le maillage, les deux groupes d'éléments « NES_L_SPRING » et « NES_R_SPRING » ont une longueur de 1 mètre et sont composées de 15 éléments de câble (« CABLE »). Les éléments « AMOR » et « NES_MASS » sont deux éléments discrets. On va venir définir une masse à l'élément « NES_MASS » (« M_T_D_N ») et un coefficient d'amortissement à l'élément « AMOR » (« A_T_D_L »). Pour modéliser la connexion entre les ressorts et la masse, tous les degrés de liberté des nœuds aux extrémités centrales des câbles sont égaux aux degrés de liberté de l'élément de masse (« LIAISON_DDL »). On va définir pour notre modèle 3 paramètres (voir tableau 5) qui sont la raideur de

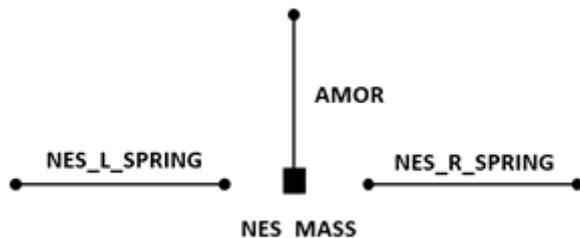


FIGURE 35 – Maillage de l'oscillateur non-linéaire.

l'oscillateur non-linéaire, la masse et le coefficient d'amortissement. On va pouvoir choisir la raideur souhaitée en définissant le module d'Young du matériau qui constitue les câbles. En effet, la raideur en allongement de l'élément de câble est $k = SE$ avec S la section du câble et E le module d'Young du matériau qui constitue le câble. La longueur des éléments NES_L_SPRING et NES_R_SPRING est 1 mètre donc $L_0 = 1 \text{ m}$. La raideur k_{NES} est définie par $k_{NES} = \frac{k}{L_0^2} = \frac{SE}{L_0^2}$ on peut donc ajuster S et E pour avoir la raideur k_{NES} souhaitée. On choisit $S = 1 \text{ m}^2$ et $E = 1,37.10^{-2} \text{ Pa}$.

k_{NES}	$1,37.10^{-2} \text{ N.m}^{-1}$
c_{NES}	$8,75.10^{-2} \text{ N.s.m}^{-1}$
m_{NES}	$1,37.10^{-1} \text{ Kg}$

TABLE 5 – paramètres de l'oscillateur non-linéaire

Grâce à une analyse statique du système et en appliquant une rampe de force, on peut vérifier que la relation force déplacement est bien cubique. En effet sur la figure 36 on voit que la courbe théorique se superpose avec la courbe donnée par l'analyse statique.

3.1.3 Système couplé

Les deux parties du système sont bien définies, à savoir, la poutre aux conditions aux limites élastiques et l'oscillateur non-linéaire. Nous allons maintenant coupler les deux systèmes. Comme on peut le voir sur la figure 37, certains nœuds de l'oscillateur sont liés à la poutre. Les nœuds indiqués par un triangle rouge sont des nœuds pour lesquels tous les degrés de liberté sont liés, et cela grâce à la commande « LIAISON_DDL ». De cette manière, les deux systèmes sont couplés. Dans toutes les analyses que nous faisons, nous considérons que le NES est à mi-travée de la poutre. De cette manière on a : $l_n = 2 \text{ m}$ et $\frac{l_n}{L} = 0,5$.

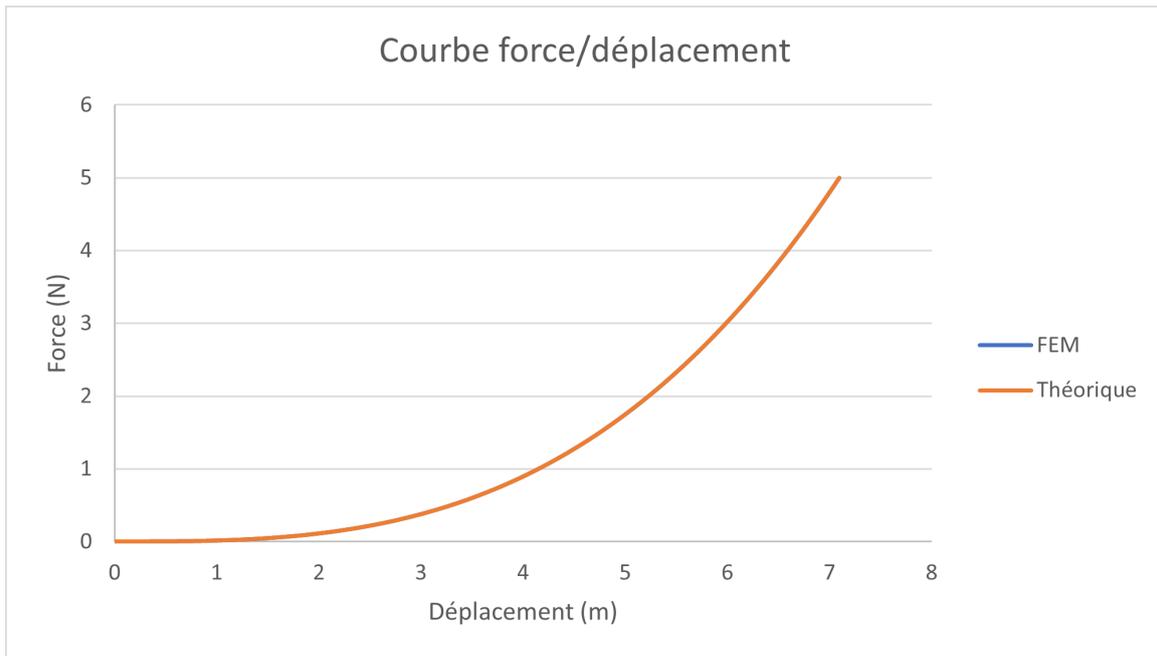


FIGURE 36 – Loi de comportement de l'oscillateur non-linéaire.

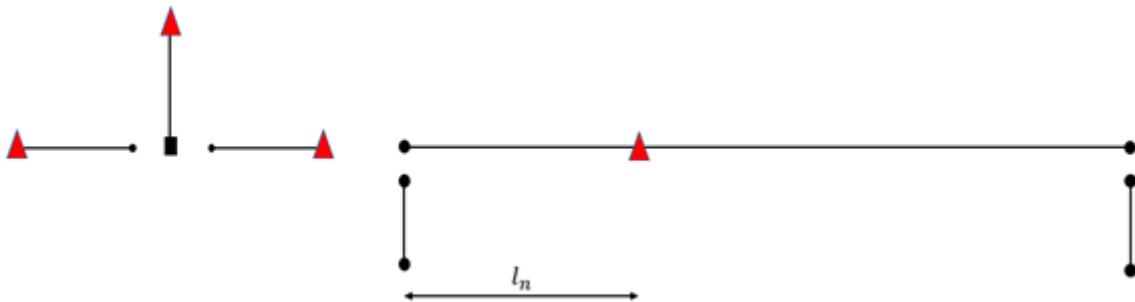


FIGURE 37 – Maillage du système couplé.

3.2 Résultats et comparaison avec le modèle analytique

Dans cette partie, nous allons exploiter notre modèle à éléments finis. Nous avons réalisé une analyse modale de la poutre avec des conditions aux limites élastiques. Nous avons également réalisé des analyses temporelles du système complet avec le NES couplé à la poutre. Dans le premier cas, le système n'est pas soumis à une sollicitation mais on éloigne le système de sa position d'équilibre à l'instant initial. Dans un deuxième temps nous avons soumis le système à une sollicitation harmonique et le système est à sa position d'équilibre (déplacement nul) à l'instant initial. Tout d'abord, nous allons pouvoir comparer les fréquences propres et les déformées modales que l'on obtient avec la méthode analytique et avec la méthode des éléments finis. On pourra également comparer les résultats de l'analyse temporelle avec l'intégration numérique des équations et les autres résultats analytiques (SIM, points d'équilibres). Comme nous voulons comparer les résultats, on fait en sorte que les deux modèles soient cohérents, c'est à dire que les paramètres soient les mêmes. Ainsi, nous avons bien fait attention de choisir des paramètres physiques qui conduisent aux paramètres analytiques que nous avons choisis dans la partie analytique. Pour appliquer une sollicitation harmonique à notre modèle à éléments finis, aux extrémités de la poutre on applique deux forces d'amplitude égale. Pour avoir $\gamma = 9$,

on a $F_1 = F_2 = 4,063 \text{ N}$. Nous résumons tous les paramètres dans le tableau 6.

k_{NES}	$1,37.10^{-2} \text{ N.m}^{-1}$	k	1
c_{NES}	$8,75.10^{-2} \text{ N.s.m}^{-1}$	c	0,5
m_{NES}	$1,37.10^{-1} \text{ Kg}$	ϵ	0,1
$M = \rho S$	$1,37 \text{ Kg.ml}^{-1}$	ω_0	2
f_1 (fréquence mode 1)	0,40 Hz	α	1,024
$F_1; F_2$	4.063 N	γ	9

TABLE 6 – Paramètres physiques à gauche et paramètres analytiques correspondant à droite.

3.2.1 Comparaison des modes propres.

Grâce à la modélisation par éléments finis, nous obtenons les fréquences propres et les modes propres de la poutre aux conditions aux limites élastiques. Avec la commande `NORME_MODE` nous pouvons normaliser les modes par rapport à la masse ce qui nous permet de comparer les déformées modales. Étant donné que le calcul des fréquences propres avec la méthode analytique est long, nous allons uniquement comparer les quatre premiers modes. Comme on peut voir sur le tableau 7 les fréquences que l'on obtient avec les deux méthodes sont très proches car pour le premier mode, là où on a la plus grosse différence, on a un écart de 0,002% ce qui est très faible. Pour diminuer l'écart, il faudrait augmenter le paramètre de précision de la méthode de Newton-Raphson qui nous permet de calculer les fréquences propres dans la méthode analytique.

Numéro du mode	fréquence (méthode analytique)	fréquence (méthode à éléments finis)	Écart relatif
Mode 1	$4,07094.10^{-1} \text{ Hz}$	$4,07086.10^{-1} \text{ Hz}$	0,002%
Mode 2	1,33565 Hz	1,33564 Hz	$< 10^{-5}\%$
Mode 3	5,67396 Hz	5,67395 Hz	$< 10^{-5}\%$
Mode 4	13,8407 Hz	13,8407 Hz	$< 10^{-5}\%$

TABLE 7 – Comparaison des fréquences propres.

Nous pouvons aussi comparer les déformées modales qui ont été normalisées de la même manière, c'est à dire $\int_0^L m(x)\phi_i^2(x)dx = 1$ avec $m(x)$ la masse linéique de la poutre. On remarque sur les figures 38 à 40 où on a tracé les déformées modales obtenues par les deux méthodes, que l'on obtient les mêmes résultats. On peut donc valider nos formules analytiques de la partie analytique.

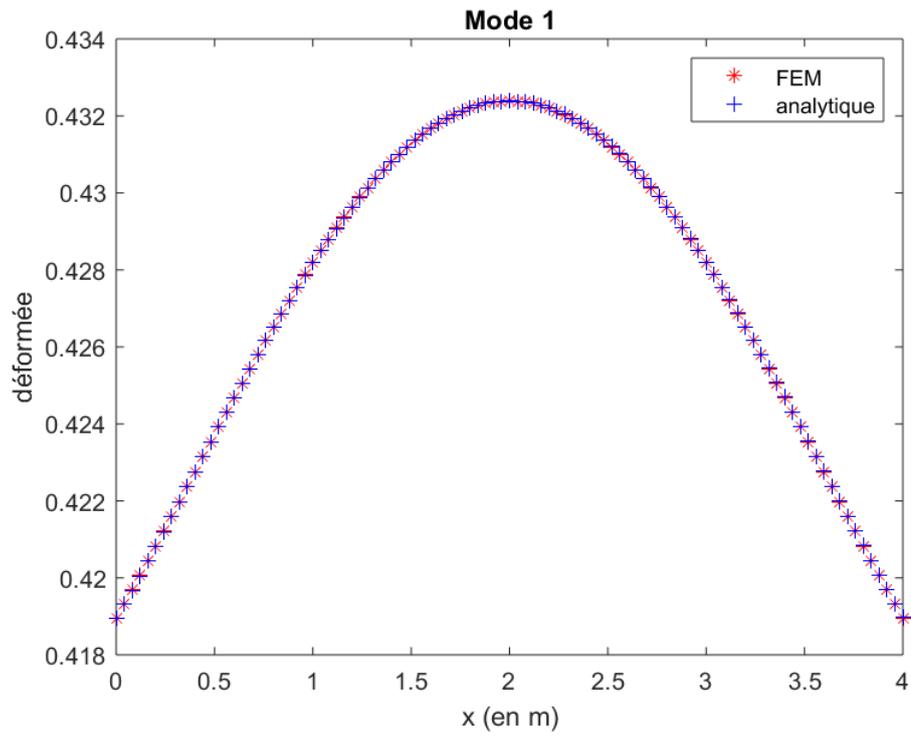


FIGURE 38 – Comparaison du mode 1.

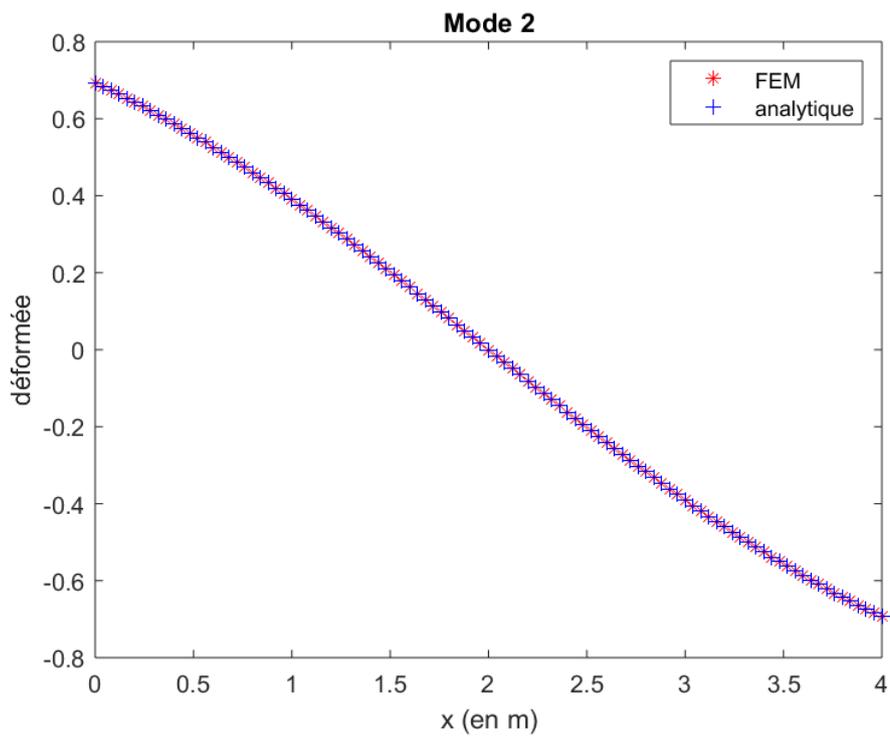


FIGURE 39 – Comparaison du mode 2.

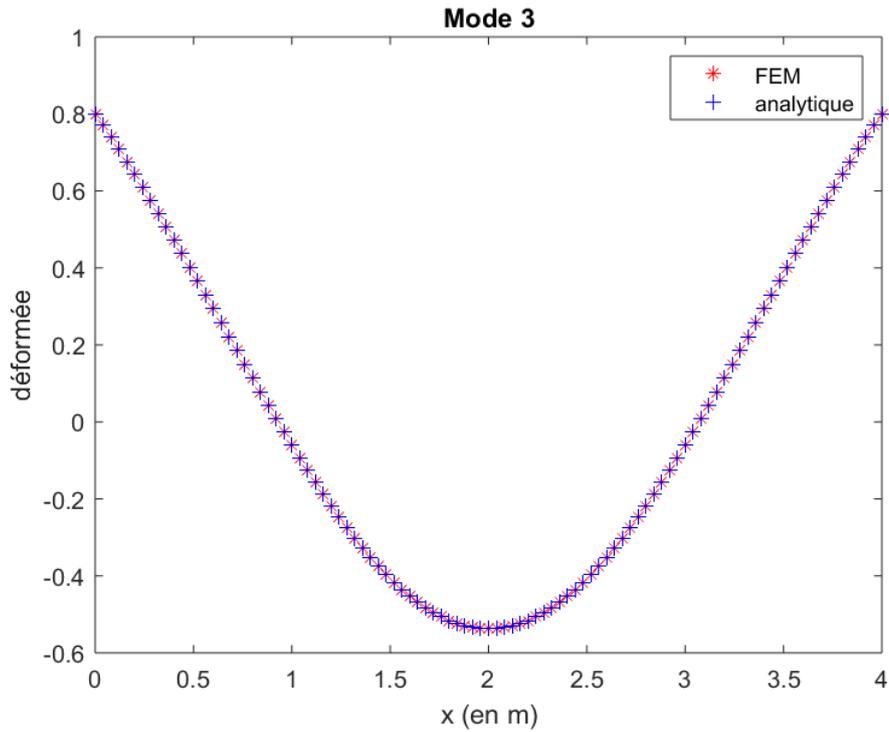


FIGURE 40 – Comparaison du mode 3.

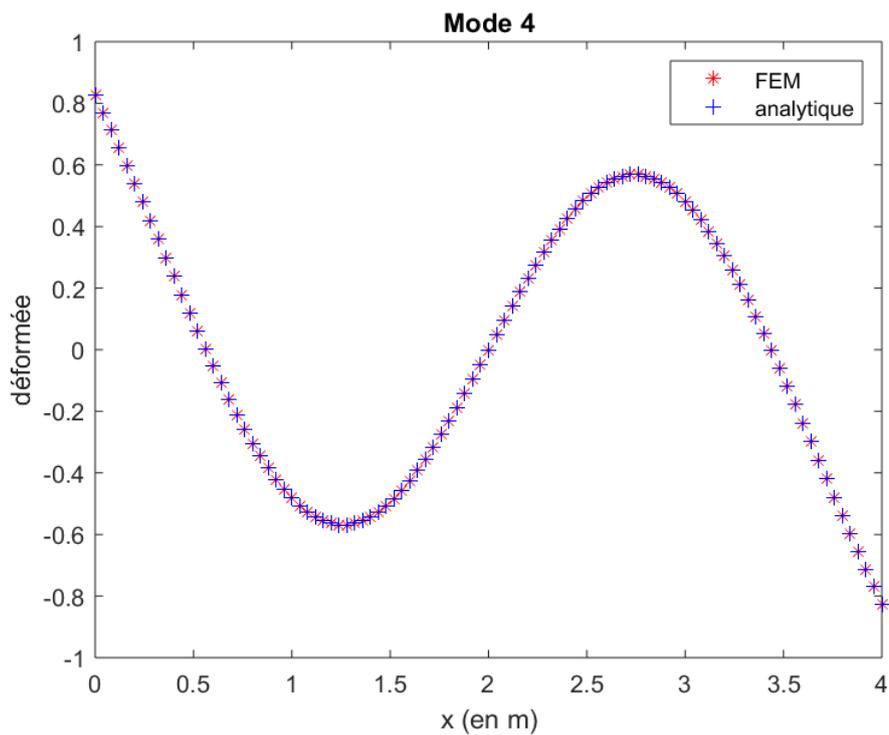


FIGURE 41 – Comparaison du mode 4.

3.2.2 Réponse temporelle du système aux conditions initiales non nulles.

Dans la partie analytique, nous avons intégré numériquement les équations du système dans le cas où celui-ci n'est pas soumis à une sollicitation, mais où on lui impose des conditions initiales non nulles. Avec le modèle à éléments finis, nous pouvons réaliser la même chose en écartant le système de sa position d'équilibre à l'instant initial. Concrètement sur Code_Aster,

on crée un champ de déplacement où on impose un déplacement donné à tous les nœuds de la poutre et un autre déplacement au nœud de la masse du NES. On applique ce champ de déplacement grâce à la commande ETAT_INIT dans DYNA_NON_LINE. Pour calculer le déplacement à imposer, on utilise les formules suivantes où d_{poutre} et d_{NES} sont le déplacement initial de la poutre et le déplacement initial de la masse du NES :

$$d_{poutre} = \frac{L(N_1(0) + \epsilon N_2(0))}{\omega_0(1 + \epsilon)} \quad (59)$$

$$d_{NES} = L \left(\frac{(N_1(0) + \epsilon N_2(0))}{\omega_0(1 + \epsilon)} - \frac{N_2(0)}{\omega_0} \right) \quad (60)$$

Nous allons étudier les mêmes cas que dans la partie analytique, les valeurs des déplacements à l'instant $t = 0$ sont dans le tableau 8.

Différents cas	$N_1(0)$	$N_2(0)$	d_{poutre}	d_{NES}
Cas 1	7	3	13,27 m	7,27 m
Cas 2	7	10	14,54 m	-5,45 m
Cas 3	3	1	5,64 m	3,64 m
Cas 4	1,5	1	2,9 m	0,9 m

TABLE 8 – Différents cas de conditions initiales.

Sur les figures 42 à 45 on a tracé la réponse du système non excité dans les différents cas du tableau 8. On a tracé la réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 après avoir calculé les variables de Manevitch. On aurait pu tracer la réponse temporelle du déplacement de la poutre mais on n'aurait eu aucun moyen de comparaison avec d'autres résultats. Si on compare ces graphiques aux figures 16 à 19, on remarque des similitudes et des différences. Tous d'abord pour le cas 1, avec la méthode des éléments finis il y a beaucoup moins d'oscillations autour du SIM. Toutefois on note que la courbe bleu est attirée par le SIM de la même manière que pour l'intégration numérique. Pour le cas 2, avec la méthode des éléments finis on ne peut pas dire que la courbe bleu soit attirée par le SIM. Cependant pour les cas 3 et 4, la réponse donnée par la méthode éléments finis est très similaire à celle donnée par l'intégration numérique. En particulier pour le cas 3, on voit clairement que la courbe bleu est attirée par les parties stables du SIM. Malgré de nombreuses différences entre les deux modèles, notamment la présence d'amortissement sur le modèle à éléments finis, on observe le même comportement du système, à savoir celui décrit sur la figure 20. En effet, le système est attiré par la branche stable du SIM qui se trouve à la même ordonnée que le point initial. Le système rejoint l'origine qui est le point d'équilibre du système non excité, en passant par les branches stables du SIM.

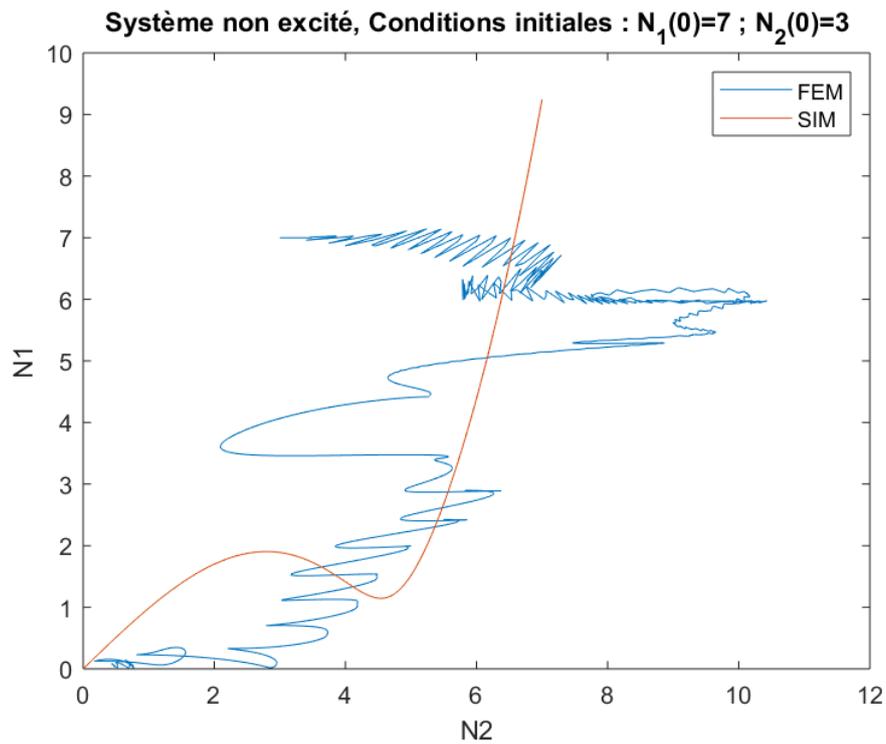


FIGURE 42 – Réponse du système non excité dans le domaine des variables N_1 et N_2 (Cas 1).

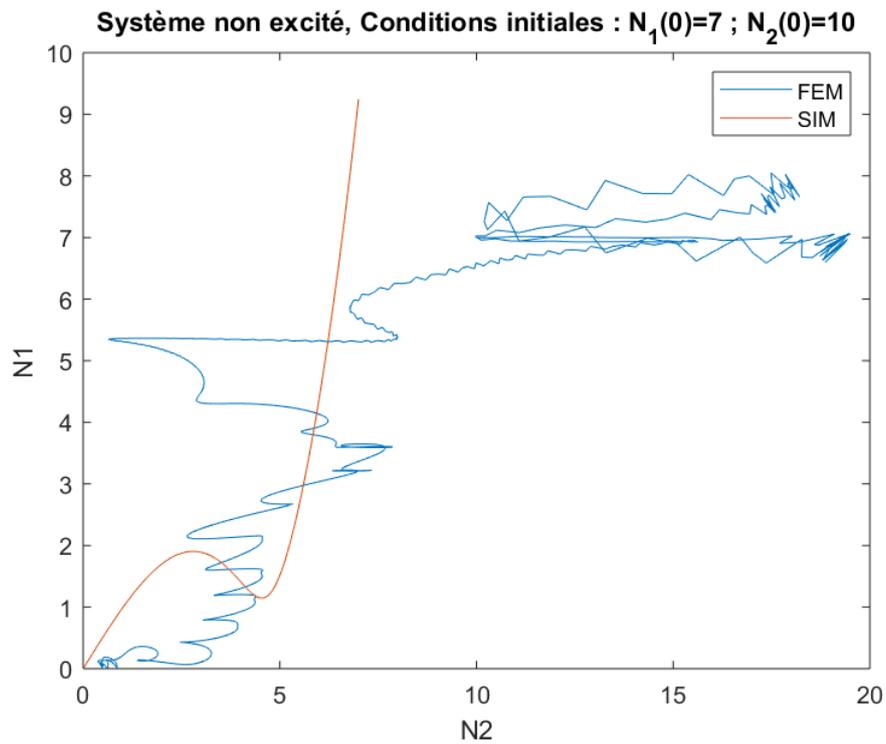


FIGURE 43 – Réponse du système non excité dans le domaine des variables N_1 et N_2 (Cas 2).

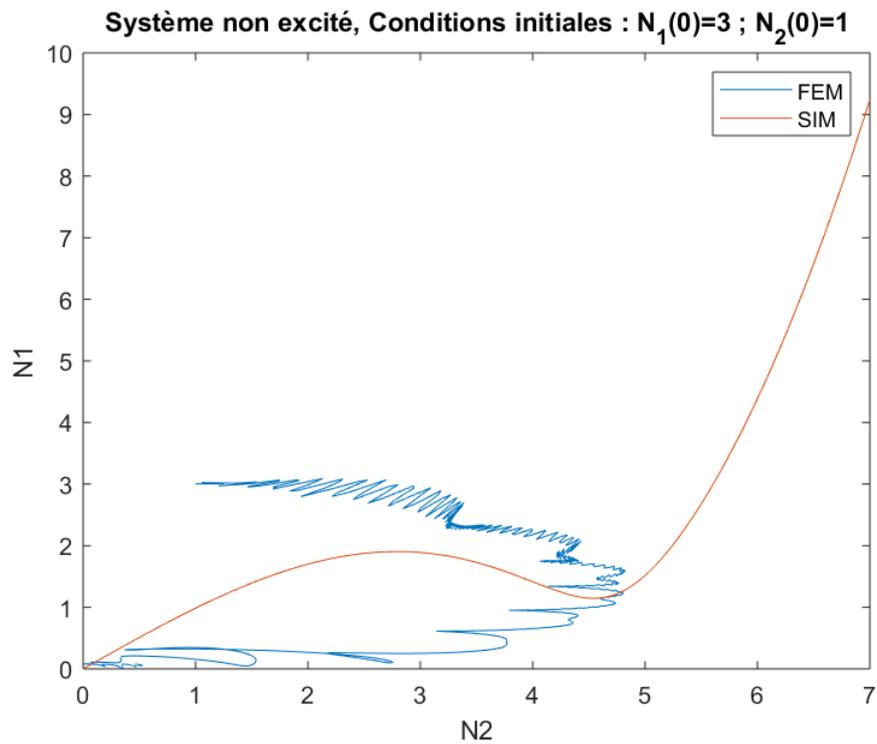


FIGURE 44 – Réponse du système non excité dans le domaine des variables N_1 et N_2 (Cas 3).

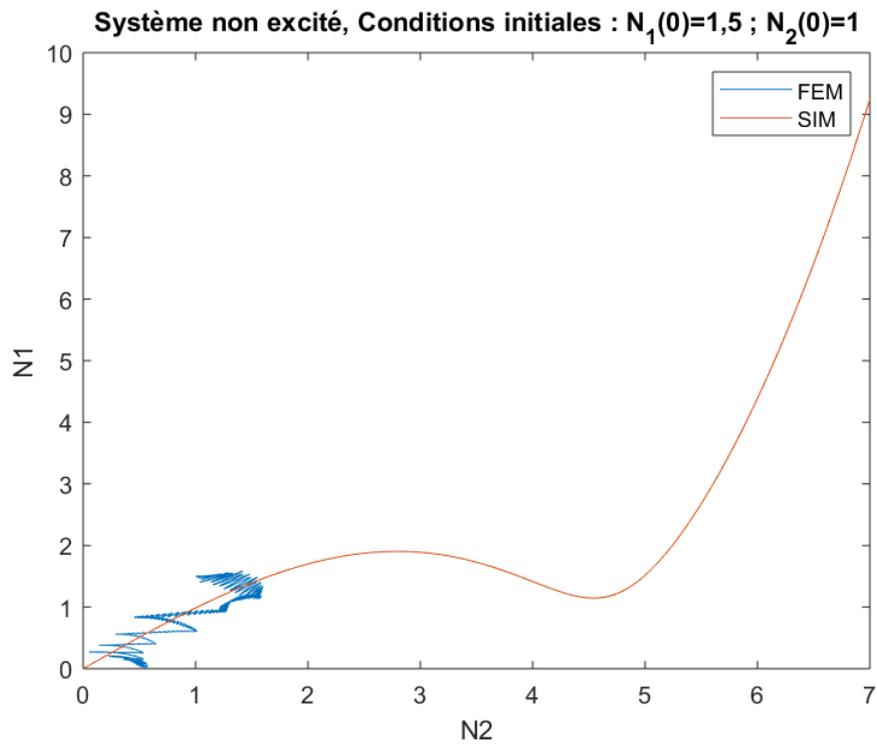


FIGURE 45 – Réponse du système non excité dans le domaine des variables N_1 et N_2 (Cas 4).

3.2.3 Réponse temporelle du système sous sollicitation harmonique.

Dans cette partie, nous allons exploiter les analyses DYNA_NON_LINE du système soumis à une sollicitation harmonique. On rappelle que dans la partie 1 nous avons vu plusieurs résultats analytiques, ils sont comparés avec les résultats de cette partie. Tout d'abord, nous avons déterminé le SIM qui est une courbe asymptotique ou attracteur dans le domaine des variables

de Manevitch des variables N_1 et N_2 . Nous avons également calculé les points d'équilibres pour le système excité avec une force harmonique, et avons notamment tracé la courbe (figure 22) des points d'équilibres en fonction du paramètre σ dépendant de la fréquence d'excitation. Le but de cette partie est de comparer les résultats que l'on obtient avec la méthode des éléments finis et les résultats de la partie analytique. Le but étant de contrôler les vibrations du premier mode de la poutre, nous allons solliciter la poutre à une fréquence proche de la fréquence propre du premier mode de la poutre. Etant donné que les analyses prennent du temps, nous ne pouvons pas tester toutes les fréquences. Nous choisissons un certain nombre de fréquence à tester, dans le tableau 9 sont indiquées les différentes fréquences que nous appliquons au système. Dans ce tableau Ω_r est la pulsation réelle de la sollicitation, Ω est la pulsation réduite et σ est le paramètre tel que : $\omega = \omega_0 + \epsilon\sigma$.

σ	Ω	Ω_r en $rad.s^{-1}$
-5	1,5	1,918
-4	1,6	2,046
-3	1,7	2,174
-2	1,8	2,302
-1	1,9	2,430
0	2	2,558
1	2,1	2,686
2	2,2	2,814
3	2,3	2,941
4	2,4	3,069
5	2,5	3,197

TABLE 9 – Les différents fréquences de la sollicitation.

Tous d'abord, nous voulons comparer les points d'équilibres que nous avons déterminé dans la partie analytique avec ceux que nous trouvons grâce à la méthode des éléments finis. nous avons choisis comme amplitude de sollicitation $\gamma = 9$. Nous devons choisir F de telle sorte qu'on ait $\gamma = 0$. On rappelle que l'on applique deux forces verticales de même amplitude F telle que les deux forces s'écrivent $f(t) = F \sin(\Omega_r t)$. Pour passer de γ à F on a la relation suivante :

$$\epsilon\gamma = \frac{\Phi_1(\bar{x} = 0, 5)L^3}{\beta_{21}EI} F(\Phi_1(\bar{x} = 0) + \Phi_1(\bar{x} = 1)) \quad (61)$$

Donc,

$$F = 4,063 \quad N \quad (62)$$

L'analyse dynamique de Code_Aster nous permet de calculer le déplacement de la poutre à mi-travée et le déplacement de la masse du NES. On peut par exemple tracer sur la figure 46 ces déplacements en fonction du temps pour le cas où la pulsation réduite est $\Omega = 1,5$.

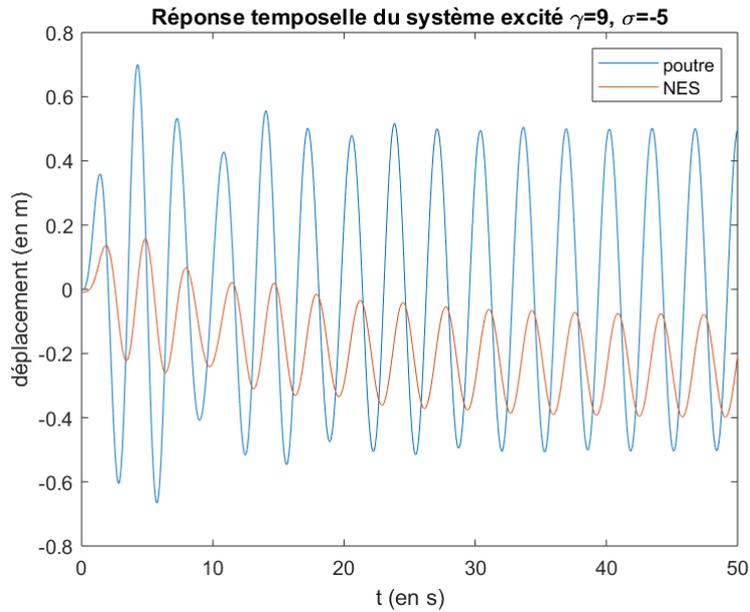


FIGURE 46 – Réponse temporelle $\gamma = 9$ et $\Omega = 1,5$.

On voit sur ce graphique qu'on atteint un régime permanent. Pour pouvoir représenter ce point d'équilibre, nous allons calculer les variables de Manevitch. Nous allons tracer la réponse temporelle dans le domaine N_1/N_2 , nous allons aussi tracer la courbe de SIM. On peut voir sur la figure 47 la même réponse que sur la figure 46 mais dans le domaine des variables de Manevitch.

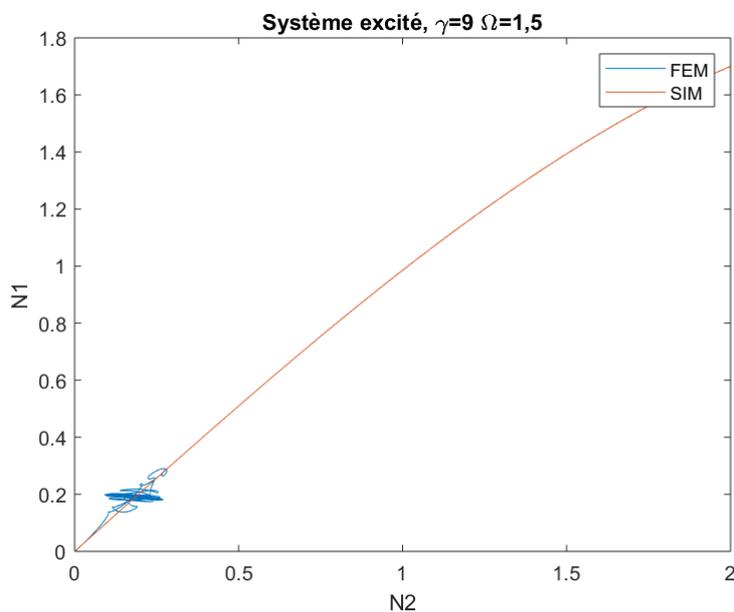


FIGURE 47 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité : $\gamma = 9$ et $\Omega = 1,5$.

On voit sur ce graphique que l'on obtient un point d'équilibre qui se trouve sur le SIM et que celui-ci est bien un attracteur. On peut refaire cette expérience pour toutes les valeurs de Ω du tableau 9, on mettra en annexe 1 les courbes de réponses dans le domaine des variables N_1 et N_2 pour les différentes valeurs de Ω . On va repérer les points d'équilibre et tracer sur un

graphique les valeurs de N_2 en fonction de σ . On trace sur la figure 48 ces points d'équilibre, on a fait une interpolation linéaire entre les différents points. On remarque qu'on a bien un pic pour $\sigma = 0$ à cause de la résonance, de plus, la courbe est légèrement dissymétrique par rapport à l'axe $\sigma = 0$.

Dans la partie analytique nous avons déterminé les points d'équilibres de ce système sous sollicitation harmonique ($\gamma = 9$), la seule différence était que nous n'avons pas considéré d'amortissement dans la poutre. On représente sur la figure 49 les points d'équilibre que nous avons pu déterminer grâce aux deux méthodes. Les points d'équilibres que l'on obtient avec la méthode FEM ont des valeurs de N_2 beaucoup plus faibles par rapport à ceux que l'on obtient avec la méthode analytique. Ceci est cohérent avec le fait que nous considérons l'amortissement du système primaire dans la méthode FEM. On voit également que les formes des deux courbes sont différentes, il semble donc que l'amortissement de la poutre change considérablement les points d'équilibre. Il y a aussi d'autres différences entre les deux modèles qui pourraient expliquer cette différence, notamment le fait que dans le modèle à éléments finis, nous prenons en compte toutes les harmoniques tandis que dans le modèle analytique nous avons projeté le système sur le premier mode.

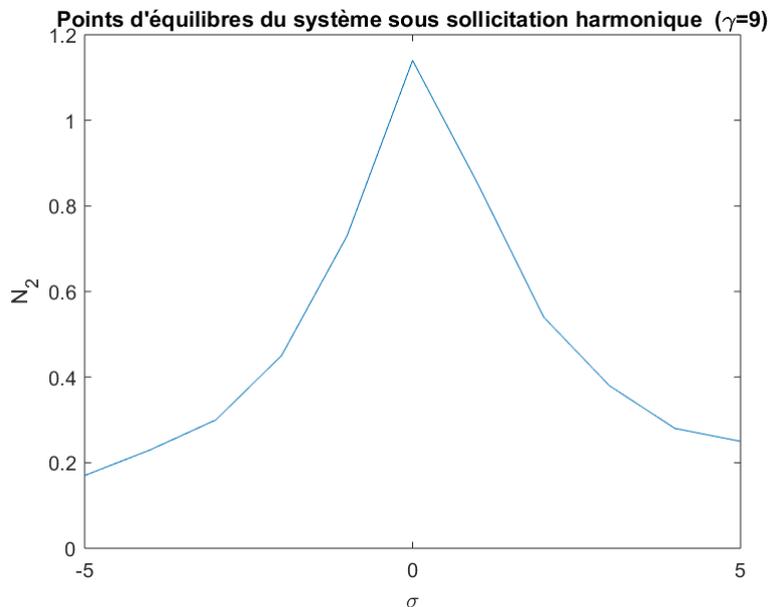


FIGURE 48 – Points d'équilibres obtenues avec la méthode des éléments finis, $\gamma = 9$.

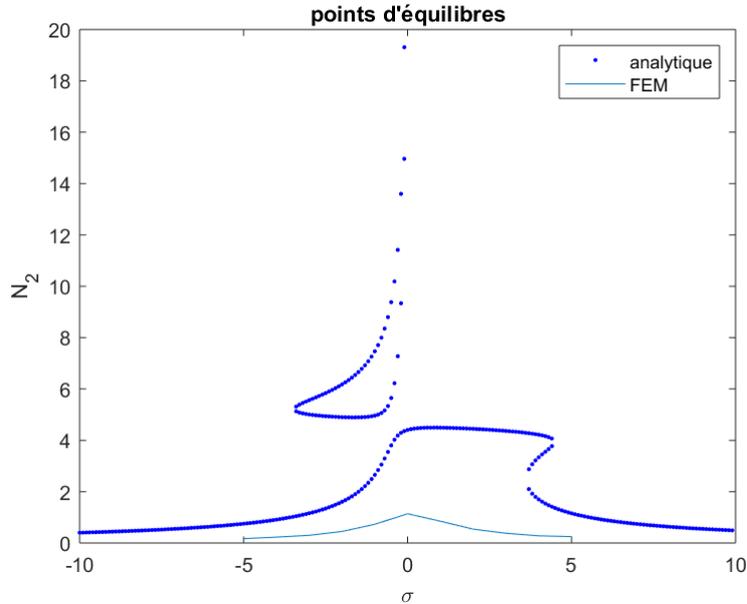


FIGURE 49 – Points d'équilibres obtenues avec les deux méthodes, $\gamma = 9$.

Comme on peut le voir sur la figure 47 et sur les graphiques pour d'autres fréquence d'excitation (voir annexe 1). Avec la force de $4.063 N$, nous n'avons atteint que la première branche stable du SIM. Nous ne pouvons donc pas voir comment le système se comporte s'il est soumis à une sollicitation plus élevée. Nous allons donc refaire les calculs avec une force de sollicitation plus élevée. Nous appliquons au système toujours une force sinusoïdale aux extrémités de la poutre, mais cette fois l'amplitude F sera de $25 N$. Nous appliquons toujours les pulsations du tableau 9. On trace le résultat de ces simulations numériques dans le domaine des variables N_1 et N_2 . On peut voir par exemple sur la figure 50 la réponse pour une pulsation réduite de sollicitation $\Omega = 1, 5$. On remarque que le point d'équilibre ne se trouve pas sur la courbe de SIM, on peut faire la même observation pour d'autres fréquences. On mettra en annexe 2 les graphiques où on a tracé le résultat de la simulation pour les autres fréquences.

Avec toutes les simulations que nous avons effectués nous pouvons représenter sur un graphique les points d'équilibre en fonction de la fréquence de la sollicitation, nous traçons N_2 en fonction du paramètre σ sur la figure 51. Nous remarquons sur la figure 51 qu'il y a un pic d'amplitude. Cependant, contrairement à ce qu'on a pu observer sur la figure 48 le pic n'est pas centré sur la fréquence propre ($\sigma = 0$). Grâce à ces simulations, on remarque que le comportement de notre système n'avait pas été prévu par l'étude analytique. Cela veut dire que les différences entre les deux système sont significatives et qu'elles ont une grande influence sur le comportement du système. Les différences majeures entre les deux modélisations sont : la présence d'amortissement sur le système primaire et la projection sur le premier mode. En effet, dans la partie analytique nous n'avons pas considéré d'amortissement dans le système primaire (poutre), tandis que pour la modélisation par éléments finis nous avons un amortissement de 10% dans la poutre. Dans la méthode analytique, nous avons projeté le système sur le premier mode propre de la poutre, tandis que pour le modèle à éléments finis nous prenons en compte tous les modes de vibration de la poutre.

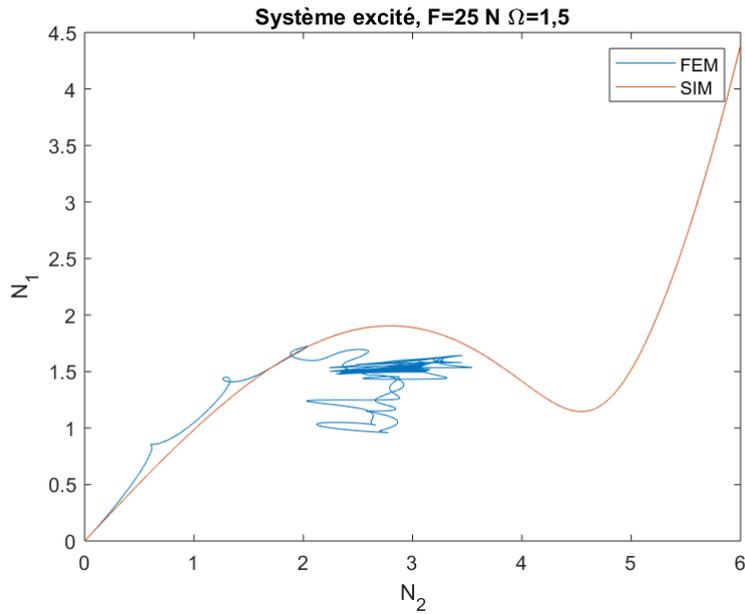


FIGURE 50 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité : $F = 25 \text{ N}$ et $\Omega = 1,5$.

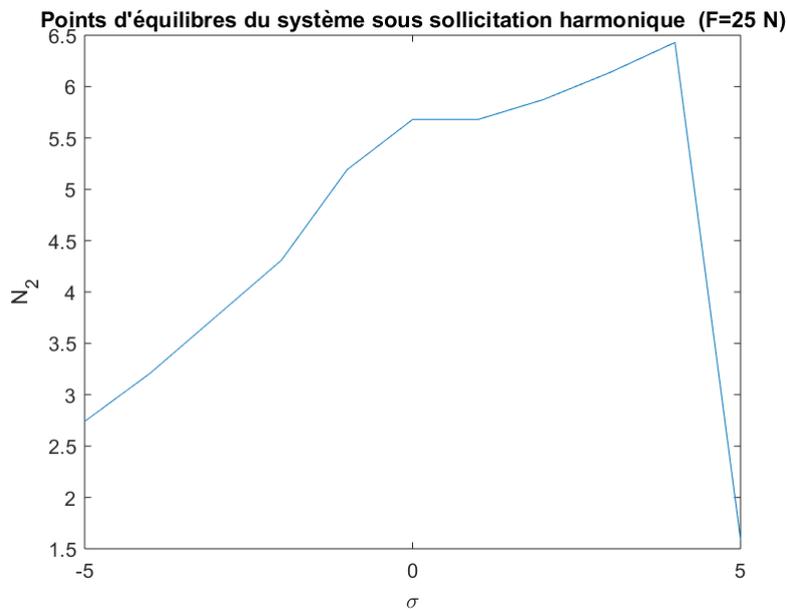


FIGURE 51 – Points d'équilibres obtenues avec la méthode des éléments finis, $F = 25 \text{ N}$.

Pour revenir à la problématique initiale qui est la réduction des vibrations de la poutre, on peut regarder l'efficacité du NES en terme d'amplitude de vibration. Avec le modèle à éléments finis nous avons calculé le déplacement de la poutre à mi-travée lorsqu'elle est soumise à une sollicitation sinusoïdale. Nous avons fait ces calculs pour la poutre couplé au NES et pour la poutre seule. Sur la figure 52, nous comparons les amplitudes de vibration à l'équilibre pour les deux systèmes. On a mis en abscisse le paramètre σ de la fréquence d'excitation. On remarque que l'effet du NES est positif pour les fréquences supérieures à la fréquence propre du premier mode mais le NES à un effet négatif pour les fréquences inférieures. Ces résultats ne sont pas

représentatifs des possibilités qu'offre ce type de dispositif car il n'a pas été étudié dans un but de réduction des vibrations.

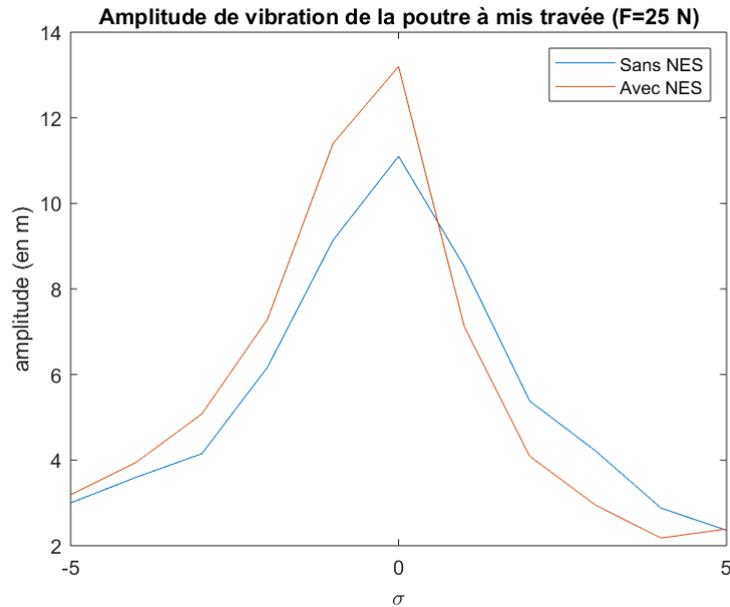


FIGURE 52 – Impact du NES sur l'amplitude de vibration de la poutre.

Pour conclure sur cette partie, nous avons vu le modèle à éléments finis du système constitué d'une poutre aux conditions aux limites élastiques couplée à un oscillateur non linéaire. Grâce à une analyse modale, nous avons vérifié que les modes trouvés dans la partie analytique sont exactement ceux que nous obtenons avec Code_Aster. Nous avons également comparé les autres résultats analytiques avec les résultats donnés par le modèle FEM. Tout d'abord nous avons vu que dans le cas où le système est écarté de sa position initiale, la méthode des éléments finis nous donne des résultats similaires aux résultats de l'intégration numérique. Cependant, pour le cas où le système est soumis à une sollicitation harmonique, il y a de grosses différences avec les résultats de la partie analytique, en particulier avec les points d'équilibre.

4 Conclusion

Au Québec, à cause des précipitations de givre, les lignes de transport subissent de gros dommages. Cela entraîne un coût de maintenance très élevé, d'autant plus que le réseau d'électricité d'Hydro-Québec s'étend sur des milliers de kilomètres. Le galop, un phénomène sévère causé par le vent et les précipitations de givre provoque des pannes électriques et la rupture des câbles en fatigue. Le galop se traduit par des oscillations des conducteurs dont l'amplitude peut atteindre 15 mètres. La problématique globale de ce projet de recherche est la réduction des vibrations de galop grâce à un oscillateur non-linéaire. Dans le cadre de ce travail de fin d'études, nous modélisons un conducteur de manière simplifiée par une poutre de Euler-Bernoulli aux conditions aux limites élastiques. Nous avons étudié le système de la poutre aux conditions aux limites élastiques couplée à un oscillateur non-linéaire.

Tout d'abord, nous avons étudié le système grâce à une résolution analytique. Nous avons déterminé les modes propres de vibration de cette poutre. Ensuite, nous avons étudié le couplage de la poutre et de l'oscillateur non linéaire grâce à la méthode de complexification de Manevitch. L'étude du système à différentes échelles de temps nous a permis de calculer le SIM (Slow Invariant Manifold), l'attracteur du système. Elle nous a aussi permis de déterminer les points d'équilibre stables et instables. Ensuite, en intégrant numériquement les équations nous avons validé le comportement du système vis-à-vis du SIM et des points d'équilibres.

Nous avons développé un modèle à éléments finis avec le logiciel Code_Aster. Nous avons modélisé une poutre aux conditions aux limites élastiques couplée à un oscillateur non linéaire. L'analyse modale du système montre que les modes calculés analytiquement sont en accord avec le modèle à éléments finis. L'analyse dynamique sous sollicitation harmonique nous a donné un outil de comparaison avec le modèle analytique. Nous avons montré que sur certains aspects, les résultats de la partie analytique sont en accord avec ceux que nous obtenons avec Code_Aster. Néanmoins, nous remarquons des différences significatives entre les deux modélisations, en particulier pour l'équilibre du système. Nous pouvons dire que ces différences sont dû au fait que la modélisation par éléments finis comporte des différences par rapport au modèle analytique. Elle prend en compte de l'amortissement dans la poutre et la réponse temporelle ne prend pas seulement en compte le premier mode mais tous les modes.

Dans des travaux futurs, la modélisation analytique pourrait être affinée afin d'avoir une comparaison plus intéressante avec le modèle à éléments finis. On pourrait étudier un modèle de poutre avec de l'amortissement et en prenant en compte tous les modes de vibration de la poutre. On pourrait également prendre en compte l'effet de la gravité dans les deux modélisations pour voir si celle-ci a un effet sur l'efficacité du NES. Malgré de grosses différences entre les deux modélisations que nous avons faites, les résultats montrent que l'on peut dans une certaine mesure prédire le comportement de notre système. La modélisation analytique, en particulier la méthode de Manevitch serait un bon outil pour concevoir un dispositif de type NES. La modélisation par éléments finis pourrait nous permettre de modéliser une travée entière de conducteur plutôt qu'une petite partie comme nous avons fait ici. Dans des prochaines études on pourrait par exemple prendre en compte le comportement non linéaire du câble de ligne de transport et on pourrait également étudier d'autres types d'oscillateurs non linéaires tels que les oscillateurs linéaires par morceaux.

Références

- [1] P. Van Dyke, D. Havard, and A. Laneville, *Effect of Ice and Snow on the Dynamics of Transmission Line Conductors*, pp. 171–228. Dordrecht : Springer Netherlands, 2008.
- [2] V. Strouhal, “on aeolian tones,” *Ann of Phys*, vol. 5, p. 216, 1878.
- [3] D. Brika and A. Laneville, “Vortex-induced vibrations of a long flexible circular cylinder,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 250, p. 481–508, 1993.
- [4] E. S. Doocy, A. R. Hard, C. B. Rawlins, and R. Ikegami, “Transmission line reference book : wind-induced conductor motion,” 1 1979.
- [5] D. Loudon, “Vibration control of fjord crossings in norway,” in *Proc. of Third International Symposium on Cable Dynamic*, pp. 183–187, 1999.
- [6] C. Hardy and P. Van Dyke, “Field observations on wind-induced conductor motions,” *Journal of Fluids and Structures*, vol. 9, no. 1, pp. 43–60, 1995.
- [7] R. Wardlaw, K. Cooper, and R. Scanlan, “Observations on the problem of subspan oscillation of bundled power conductors (analysis of aerodynamically induced oscillations of bundled power conductors resulting from effect of wind on transmission power lines),” 1973., pp. 1–20, 1973.
- [8] J. P. D. Hartog, “Transmission line vibration due to sleet,” *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 51, pp. 1074–1076, Dec 1932.
- [9] O. Nigol, G. Clarke, and D. Havard, “Torsional stability of bundle conductors,” *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 96, no. 5, pp. 1666–1674, 1977.
- [10] P. Yu, Y. Desai, A. Shah, and N. Popplewell, “Three-degree-of-freedom model for galloping. part i : Formulation,” *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 119, no. 12, pp. 2404–2425, 1993.
- [11] Z. Yan, Z. Yan, Z. Li, and T. Tan, “Nonlinear galloping of internally resonant iced transmission lines considering eccentricity,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, no. 15, pp. 3599–3616, 2012.
- [12] D. G. Havard and J. C. Pohlman, “Five years’ field trials of detuning pendulums for galloping control,” *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-103, no. 2, pp. 318–327, 1984.
- [13] R. Keutgen and J.-L. Lilien, “A new damper to solve galloping on bundled lines. theoretical background, laboratory and field results,” *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 13, no. 1, pp. 260–265, 1998.
- [14] A. Edwards and R. Ko, “Interphase spacers for controlling galloping of overhead conductors,” in *IEEE Symposium on Mechanical Oscillations of Overhead Conductors, Vancouver*, 1979.
- [15] A. Zhou, X. Liu, S. Zhang, F. Cui, and P. Liu, “Wind tunnel test of the influence of an interphase spacer on the galloping control of iced eight-bundled conductors,” *Cold Regions Science and Technology*, vol. 155, pp. 354–366, 2018.
- [16] W. Lou, C. Huang, M. Huang, H. Liang, and J. Yu, “Galloping suppression of iced transmission lines by viscoelastic-damping interphase spacers,” *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 146, no. 12, p. 04020135, 2020.
- [17] J. Si, X. Rui, B. Liu, L. Zhou, and S. Liu, “Study on a new combined anti-galloping device for uhv overhead transmission lines,” *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 34, no. 6, pp. 2070–2078, 2019.

- [18] C. Zhang, M. Wang, J. Xu, H. Zhao, and M. Xu, “Design of electromagnetic anti-galloping device for application of high voltage transmission lines,” in *2019 22nd International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS)*, pp. 1–5, 2019.
- [19] R. E. Roberson, “Synthesis of a nonlinear dynamic vibration absorber,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 254, no. 3, pp. 205–220, 1952.
- [20] Y. S. Lee, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, D. M. McFarland, G. Kerschen, F. Nucera, S. Tsakirtzis, and P. N. Panagopoulos, “Passive non-linear targeted energy transfer and its applications to vibration absorption : A review,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K : Journal of Multi-body Dynamics*, vol. 222, no. 2, pp. 77–134, 2008.
- [21] A. F. Vakakis, O. V. Gendelman, L. A. Bergman, D. M. McFarland, G. Kerschen, and Y. S. Lee, *Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems*, vol. 156. Springer Science & Business Media, 2008.
- [22] O. Gendelman, L. I. Manevitch, A. F. Vakakis, and R. M’Closkey, “Energy Pumping in Nonlinear Mechanical Oscillators : Part I—Dynamics of the Underlying Hamiltonian Systems ,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 68, pp. 34–41, 05 2000.
- [23] A. F. Vakakis and O. Gendelman, “Energy Pumping in Nonlinear Mechanical Oscillators : Part II—Resonance Capture ,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 68, pp. 42–48, 05 2000.
- [24] E. Gourdon, N. Alexander, C. Taylor, C. Lamarque, and S. Pernot, “Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling : Theoretical and experimental results,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 300, no. 3, pp. 522–551, 2007.
- [25] A. T. Savadkoohi, B. Vaurigaud, C.-H. Lamarque, and S. Pernot, “Targeted energy transfer with parallel nonlinear energy sinks, part ii : theory and experiments,” *Nonlinear dynamics*, vol. 67, no. 1, pp. 37–46, 2012.
- [26] R. D. Blevins and R. Plunkett, “Formulas for Natural Frequency and Mode Shape,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 47, p. 461, Jan. 1980.
- [27] V. V. Smirnov and L. I. Manevitch, “Complex envelope variable approximation in nonlinear dynamics,” *arXiv preprint arXiv :2004.08354*, 2020.
- [28] A. T. Savadkoohi, C.-H. Lamarque, M. Weiss, B. Vaurigaud, and S. Charlemagne, “Analysis of the 1 : 1 resonant energy exchanges between coupled oscillators with rheologies,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 86, no. 4, pp. 2145–2159, 2016.
- [29] R. W. Clough and J. Penzien, *Dynamics of structures*. Computers and Structures, Inc., California, USA, 1995.

Annexes

Annexe 1 : Réponse du système excité par une sollicitation harmonique avec $\gamma = 9$

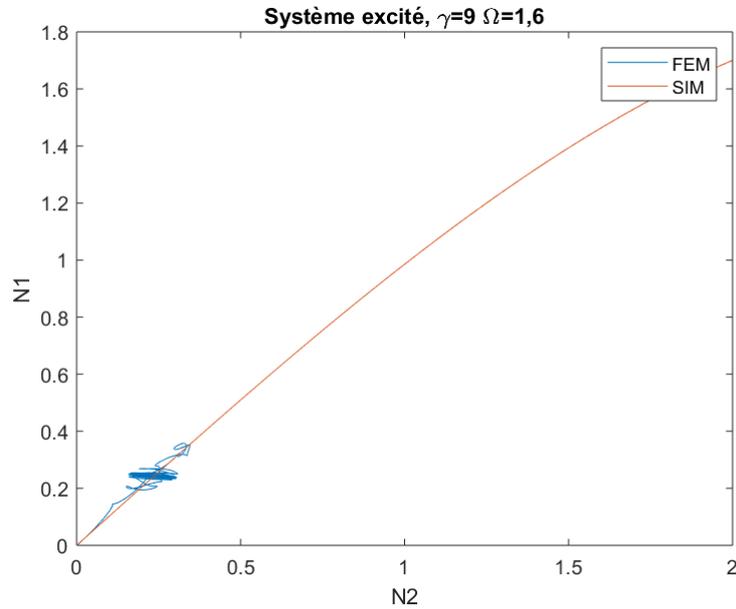


FIGURE 53 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 1,6$.

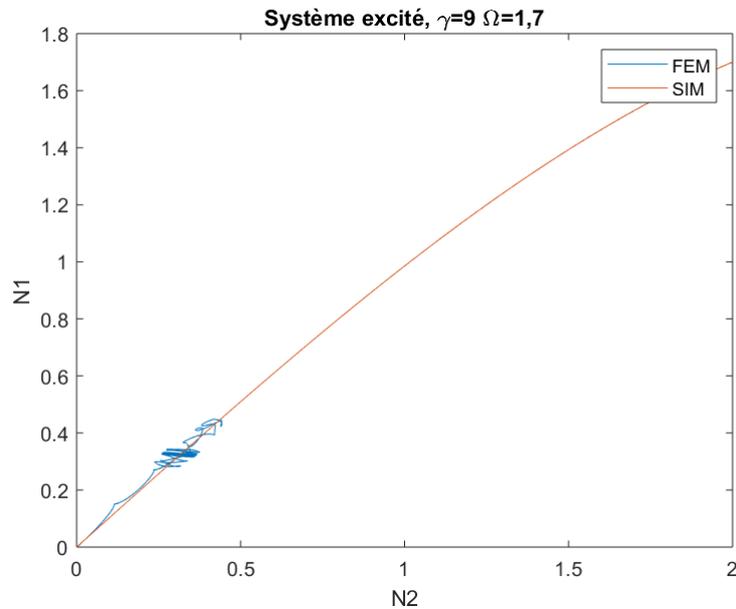


FIGURE 54 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 1,7$.

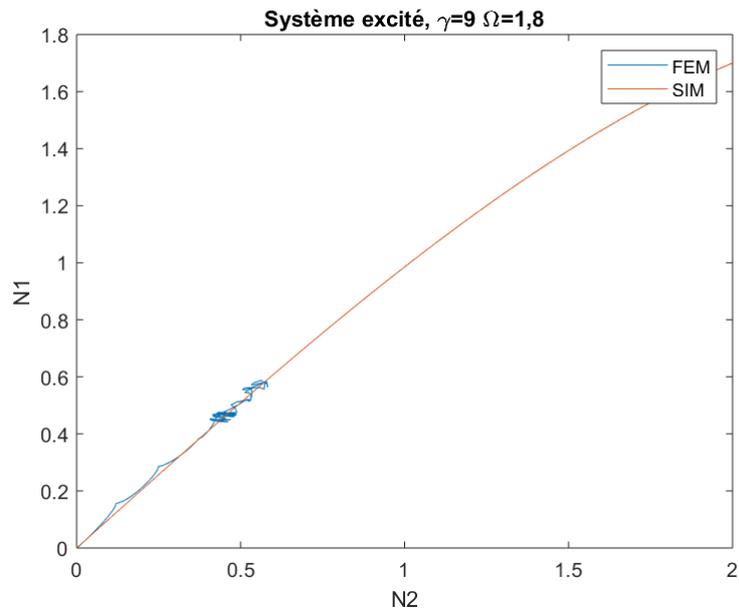


FIGURE 55 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 1,8$.

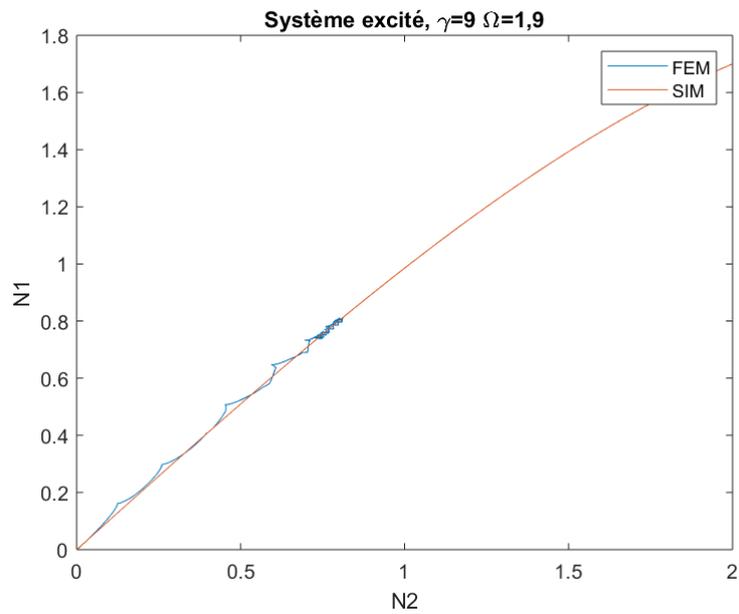


FIGURE 56 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 1,9$.

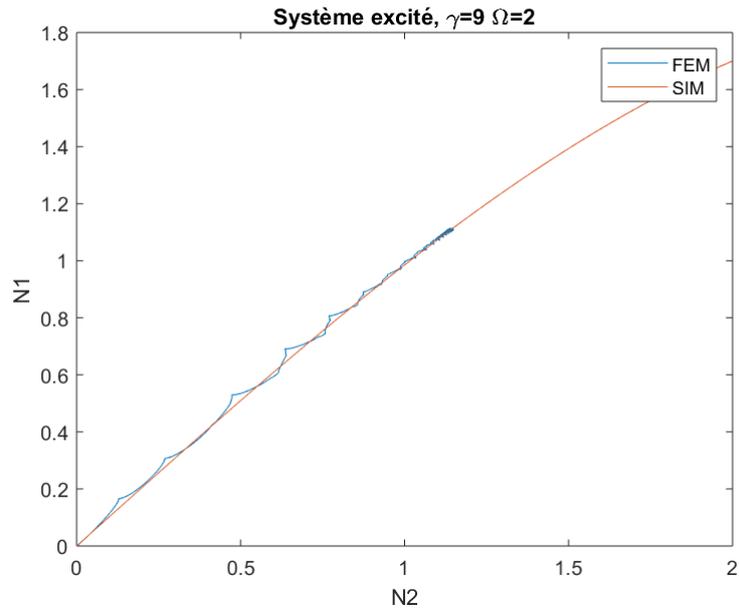


FIGURE 57 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 2$.

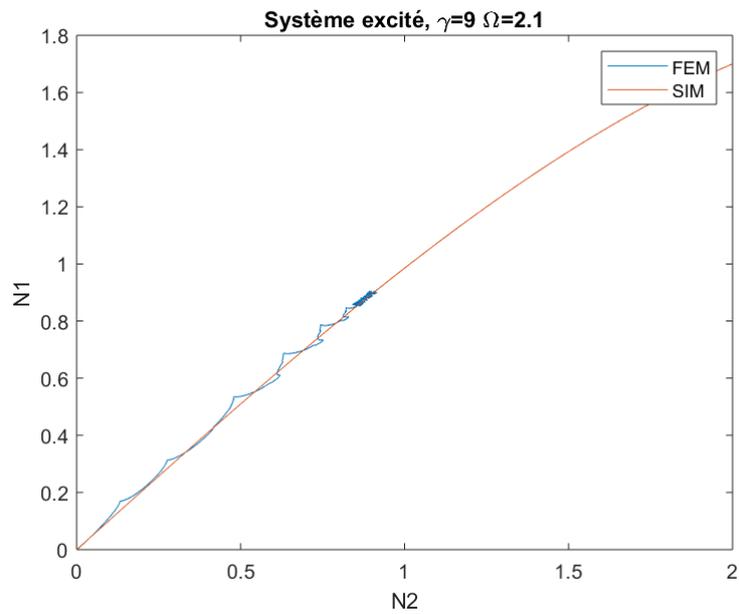


FIGURE 58 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 2,1$.

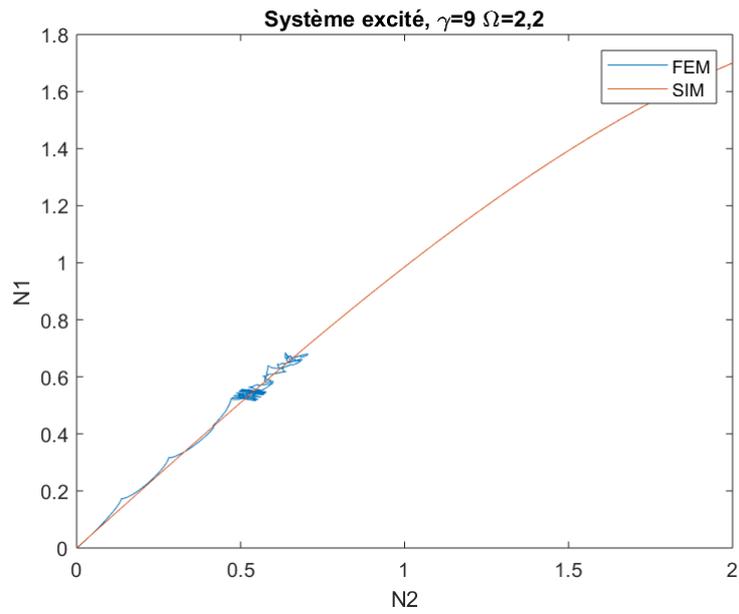


FIGURE 59 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 2, 2$.

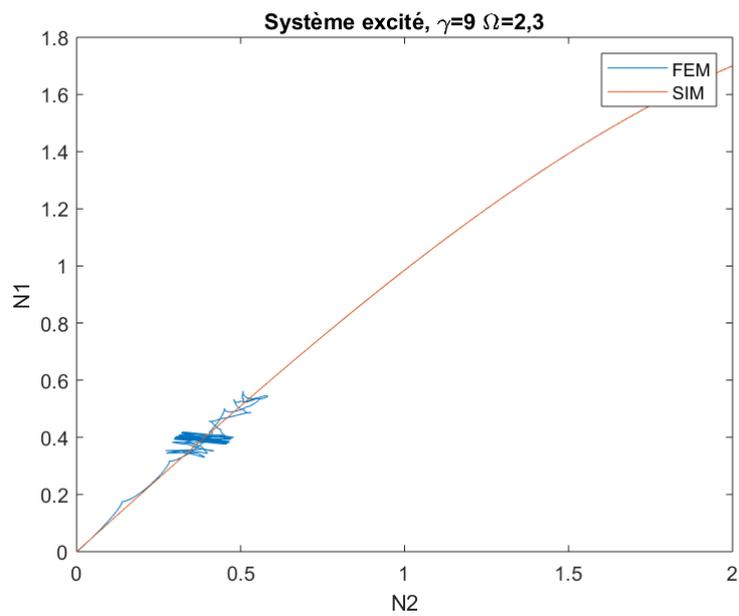


FIGURE 60 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 2, 3$.

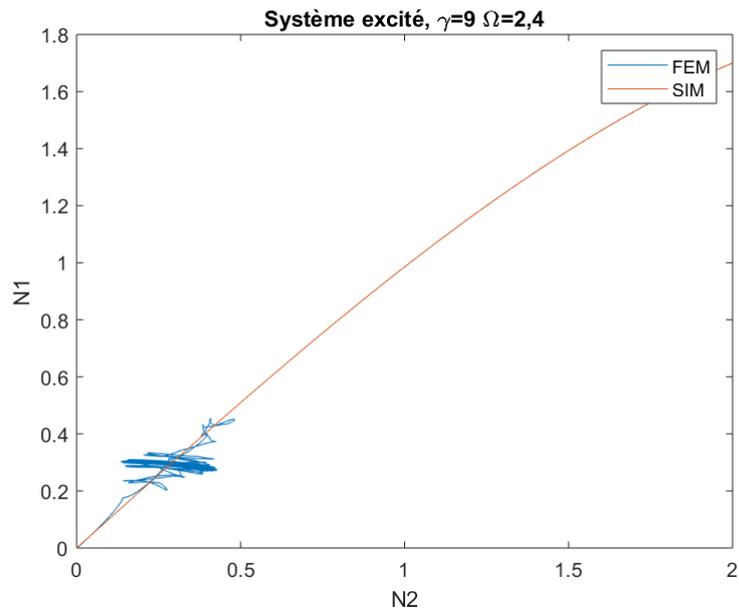


FIGURE 61 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 2,4$.

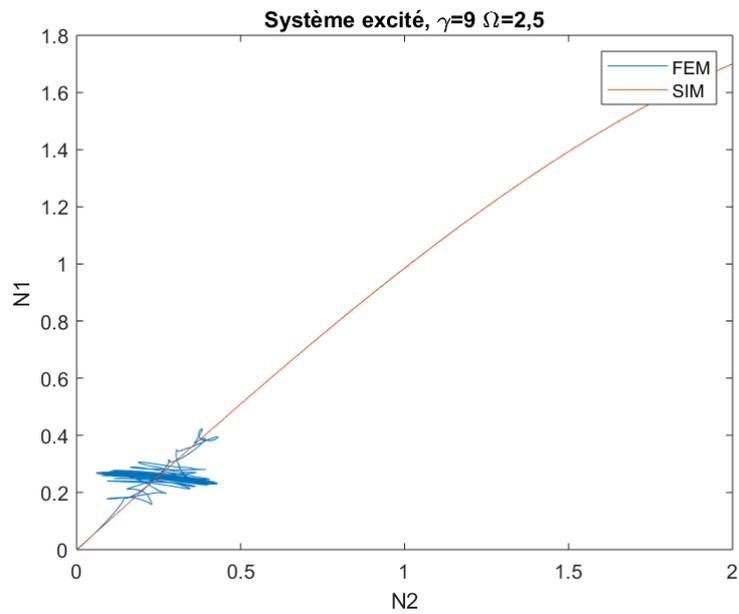


FIGURE 62 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $\gamma = 9$ et $\Omega = 2,5$.

Annexe 2 : Réponse du système excité par une sollicitation harmonique avec $F = 25 \text{ N}$

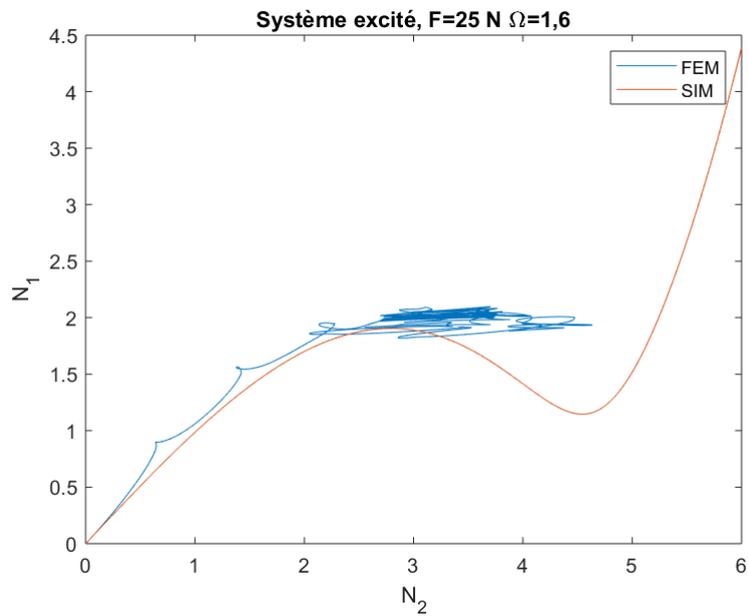


FIGURE 63 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25 \text{ N}$ et $\Omega = 1,6$.

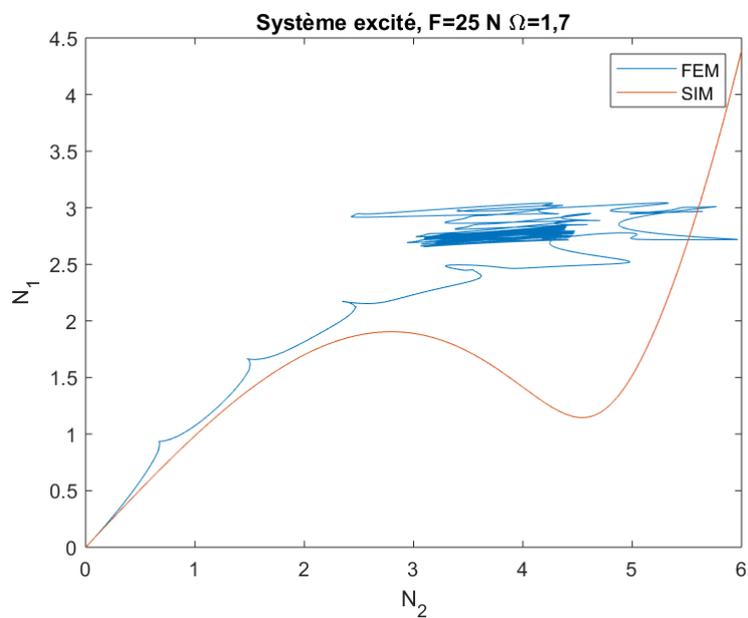


FIGURE 64 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25 \text{ N}$ et $\Omega = 1,7$.

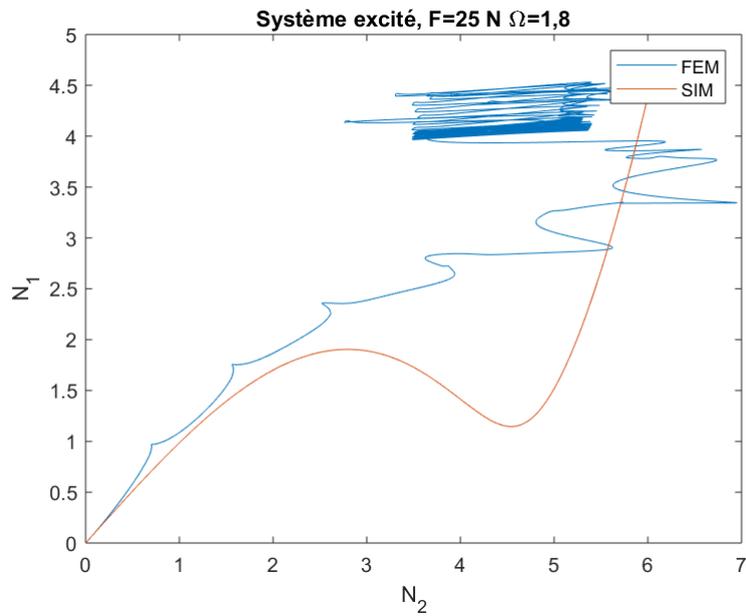


FIGURE 65 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25 \text{ N}$ et $\Omega = 1,8$.

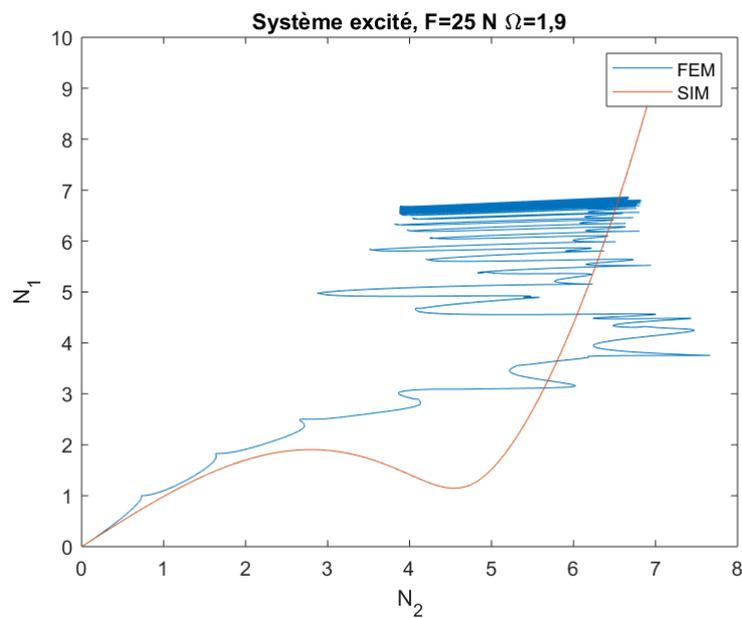


FIGURE 66 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25 \text{ N}$ et $\Omega = 1,9$.

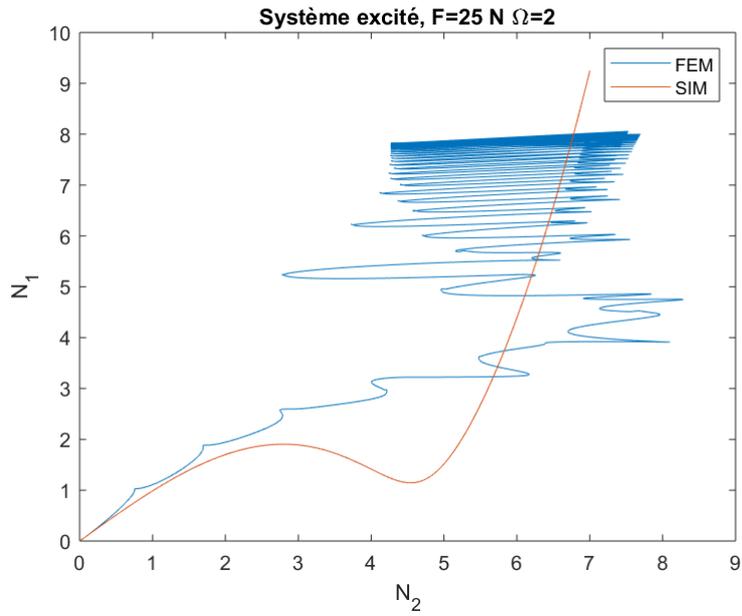


FIGURE 67 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25 \text{ N}$ et $\Omega = 2$.

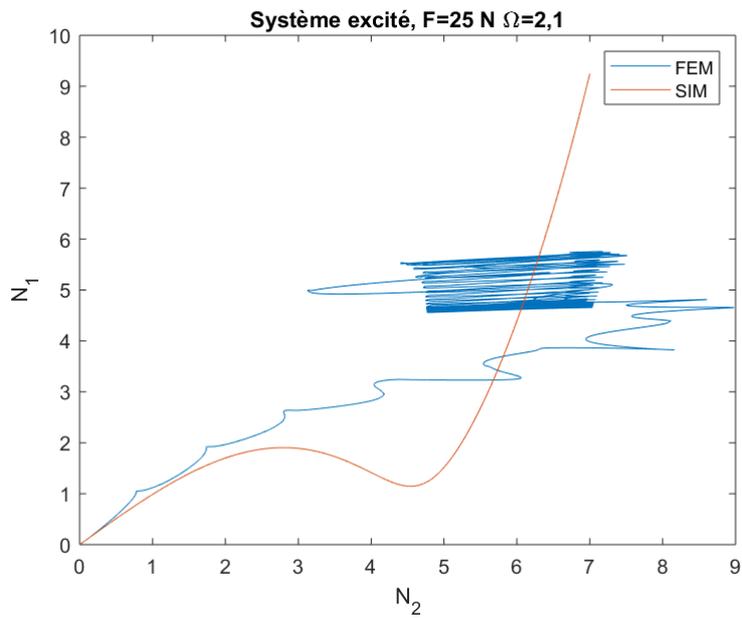


FIGURE 68 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25 \text{ N}$ et $\Omega = 2,1$.

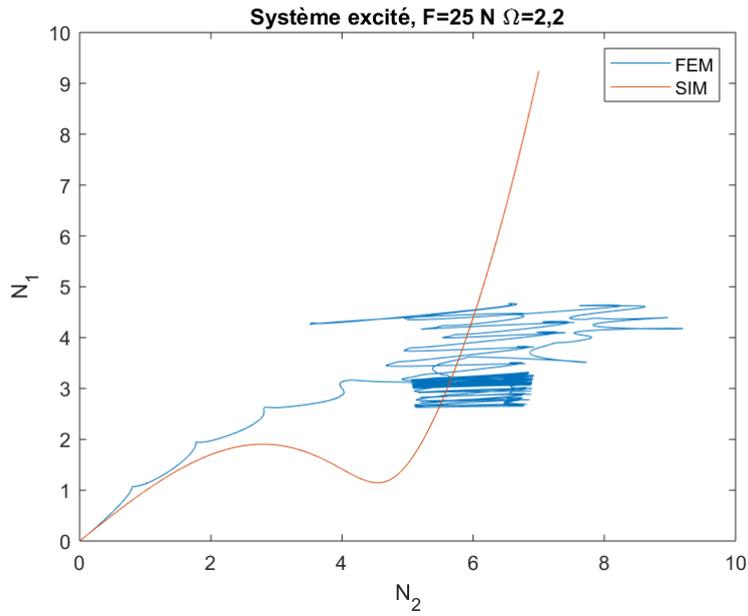


FIGURE 69 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25 \text{ N}$ et $\Omega = 2,2$.

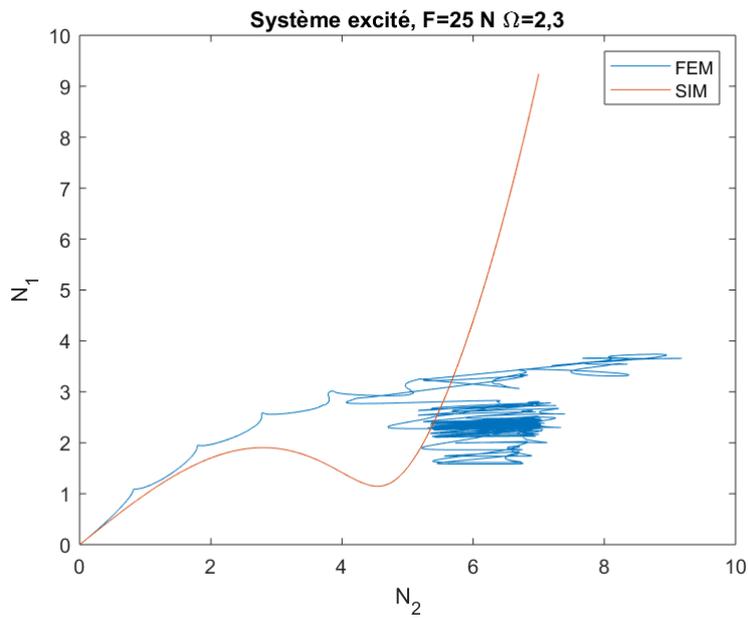


FIGURE 70 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25 \text{ N}$ et $\Omega = 2,3$.

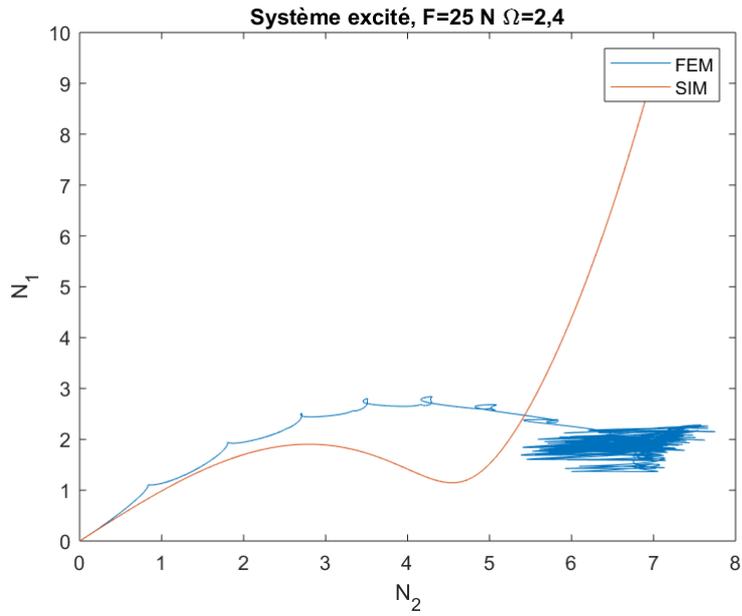


FIGURE 71 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25\text{ N}$ et $\Omega = 2,4$.

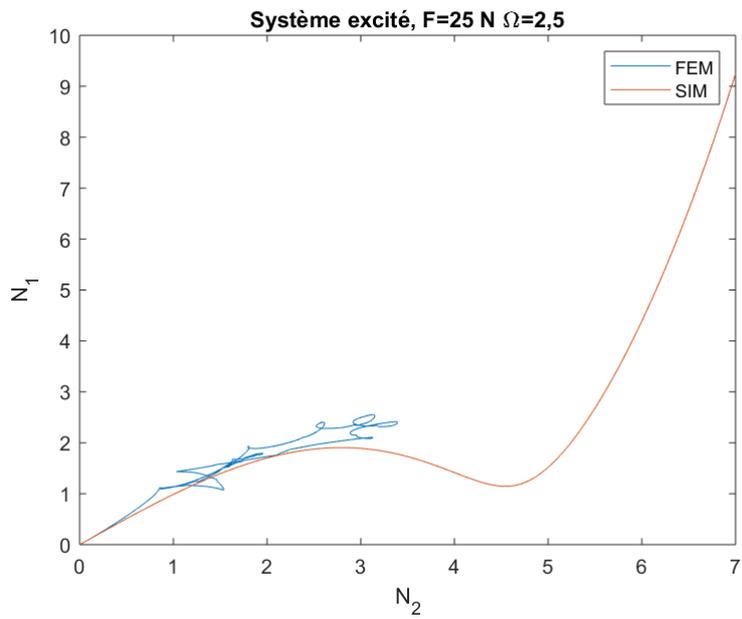


FIGURE 72 – Réponse dans le domaine des variables N_1 et N_2 du système excité par une sollicitation harmonique : $F = 25\text{ N}$ et $\Omega = 2,5$.