



**HAL**  
open science

# L'utilisation des paradoxes probabilistes au lycée. Étude sur l'effet inhibiteur ou catalyseur des situations contre-intuitives sur les biais cognitifs

Armand Lachand

## ► To cite this version:

Armand Lachand. L'utilisation des paradoxes probabilistes au lycée. Étude sur l'effet inhibiteur ou catalyseur des situations contre-intuitives sur les biais cognitifs. Mathématiques [math]. 2022. dumas-03800646

**HAL Id: dumas-03800646**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-03800646v1>**

Submitted on 6 Oct 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## L'UTILISATION DES PARADOXES PROBABILISTES AU LYCÉE

### *Étude sur l'effet inhibiteur ou catalyseur des situations contre-intuitives sur les biais cognitifs*

Mémoire présenté pour l'obtention  
du MASTER *Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation*  
Mention second degré  
Parcours Mathématiques

Par

**Armand Lachand**

Sous la direction de

**Sylvain Beauvoir**

Membres du jury  
**Caroline Béal**  
**Sylvain Beauvoir**

Année universitaire 2021-2022  
Date de soutenance : 11 mai 2022

## Remerciements

Je remercie Sylvain Beauvoir qui a su, avec bienveillance et constance, répondre à mes questions d'ordre didactique et méthodologique. Je remercie plus généralement l'ensemble des formateurs de mathématiques de l'antenne de Saint-Étienne de l'INSPÉ de Lyon qui m'ont définitivement montré que la didactique constitue un domaine très actif de la recherche, entre psychologie et mathématiques.

Je remercie bien entendu tous les élèves que j'ai pu accompagner sur le sentier, escarpé mais néanmoins merveilleux, des mathématiques. Par leurs questions multiples "*Et pourquoi ??? Et comment ???*" qui m'ont forcé à m'interroger sur le sens profond de certains objets mathématiques, ils m'ont aussi accompagné de manière réciproque sur ce chemin. Toujours volontaires, ils n'ont jamais rechigné à se faire bousculer par quelques paradoxes !

Enfin, je remercie toutes les personnes pour les échanges que j'ai pu avoir sur ma problématique. Collègues, familles, amis, nombreux sont celles et ceux qui ont eu à résoudre telle ou telle version d'un paradoxe. Une mention spéciale à Alexandre pour la relecture et à Sophie qui testait chaque jour de nouveaux paradoxes. J'espère qu'ils comprennent aujourd'hui pourquoi il faut changer de porte !

## Résumé

Le transfert de connaissances probabilistes d'un cadre scolaire à un processus de décision constitue une difficulté récurrente. Davantage que le raisonnement, c'est l'intuition qui guide l'individu confronté à un processus stochastique. L'apprentissage de l'inhibition et le développement d'une pensée critique aident l'élève à modéliser des expériences aléatoires avec rigueur. Les paradoxes probabilistes mettent en évidence des conceptions erronées du hasard et des erreurs systématiques qui en découlent. Ce travail présente une utilisation du problème du duc de Toscane et de problèmes bayésiens (problème des deux enfants, problème de Monty Hall, problème des boîtes de Bertrand) dans un contexte didactique au lycée. Les résultats obtenus plaident pour une étude de ces paradoxes issues d'un travail entre pairs favorisant la prise d'initiative : ces modalités favorisent la dévolution et la motivation intrinsèque de l'élève et initient l'apprenant à l'art de l'argumentation.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Cadre théorique</b>	<b>2</b>
1.1 Apports épistémologiques . . . . .	2
1.1.1 Histoire des probabilités . . . . .	2
1.1.2 Les paradoxes en mathématiques . . . . .	4
1.2 Apports cognitivistes . . . . .	5
1.2.1 Conceptions de l'apprenant . . . . .	6
1.2.2 Conceptions autour de l'aléatoire . . . . .	7
1.2.3 Heuristiques de jugement et biais cognitifs . . . . .	8
1.2.4 Biais probabilistes et heuristique d'uniformité . . . . .	9
1.2.5 Systèmes de pensée et inhibition . . . . .	12
1.2.6 Les paradoxes dans l'apprentissage . . . . .	13
1.3 Les probabilités dans l'enseignement secondaire . . . . .	15
1.3.1 Les probabilités dans les textes officiels . . . . .	16
1.3.2 Les paradoxes dans les manuels . . . . .	17
<b>2 Méthodologie</b>	<b>19</b>
2.1 Présentation du contexte . . . . .	19
2.2 Élaboration du questionnaire . . . . .	21
2.3 Choix des paradoxes . . . . .	28
2.3.1 Le problème du duc de Toscane . . . . .	28
2.3.2 Les paradoxes bayésiens . . . . .	31
2.3.2.a Le problème des deux enfants . . . . .	31
2.3.2.b Le paradoxe de Monty Hall . . . . .	33
2.3.2.c Le paradoxe de la boîte de Bertrand . . . . .	35
2.3.3 Autres paradoxes probabilistes . . . . .	36
2.4 Description de la séquence en 2 <sup>nde</sup> . . . . .	38
2.4.1 Le problème du duc de Toscane . . . . .	38
2.4.2 Les paradoxes bayésiens . . . . .	40
2.5 Description de la séquence en 1 <sup>ère</sup> . . . . .	42
2.5.1 Le problème du duc de Toscane . . . . .	42
2.5.2 Les paradoxes bayésiens . . . . .	43
<b>3 Analyse de l'expérimentation</b>	<b>45</b>
3.1 Analyse des séances sur les paradoxes . . . . .	45
3.1.1 Le problème du duc de Toscane en classe de 2 <sup>nde</sup> . . . . .	45
3.1.2 Les paradoxes bayésiens en classe de 2 <sup>nde</sup> . . . . .	48
3.1.3 Analyse des séances en classe de 1 <sup>ère</sup> . . . . .	52

3.2	Analyse des réponses aux questionnaires . . . . .	53
3.3	Synthèse de l'expérimentation . . . . .	60
	<b>Conclusion</b>	<b>62</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Extraits du B.O. spécial n°1 du 22 janvier 2019</b>	<b>68</b>
<b>B</b>	<b>Référencement des paradoxes dans les manuels</b>	<b>71</b>
<b>C</b>	<b>Problème du duc de Toscane - diaporama - classe de 2<sup>nde</sup></b>	<b>72</b>
<b>D</b>	<b>Applications Geogebra</b>	<b>75</b>
<b>E</b>	<b>Paradoxes bayésiens - grille d'évaluation en 2<sup>nde</sup></b>	<b>77</b>
<b>F</b>	<b>Paradoxe de Simpson - énoncé des situations</b>	<b>78</b>
<b>G</b>	<b>Somme de dés - Classe de 1<sup>ère</sup></b>	<b>80</b>
<b>H</b>	<b>Questionnaire Pré-test</b>	<b>81</b>
<b>I</b>	<b>Questionnaire Post-test</b>	<b>83</b>
<b>J</b>	<b>Synthèse des réponses aux questionnaires</b>	<b>85</b>

# Introduction

Le concept de hasard apparaît tôt chez l'être humain : on retrouve des traces de jeu de hasard dans la plupart des civilisations antiques et la notion d'aléatoire accompagne la découverte de la causalité et du déterminisme chez l'enfant. Petit à petit, des conceptions naïves s'ancrent fortement chez l'individu et s'adaptent au gré de ses expériences et de ses apprentissages. Bien que sa construction formelle soit tardive, la notion de probabilité, mesure du caractère probable d'un événement non certain, est communément accessible. L'émergence précoce de ces concepts favorise la mise en place de schémas de pensée, ou heuristiques, qui permettent d'appréhender la solution d'un problème aléatoire. C'est le domaine de l'intuition. Ce système de décision, rapide et émotionnel, peut être la source d'erreurs caractéristiques à un type de problème et appelées biais cognitifs.

Dans la modélisation mathématique de l'aléatoire, une tension s'opère entre le développement d'un formalisme probabiliste à partir du cycle 4 et des conceptions partielles et des heuristiques inadaptées. Le transfert du savoir mathématique à la vie réelle s'opère difficilement. Ceci est révélé par la difficulté à résoudre des problèmes élémentaires de probabilités exprimés dans un langage naturel et par la surprise qui apparaît chez l'élève confronté à une situation contre-intuitive.

Nous avons décidé d'étudier le potentiel d'action du caractère paradoxal de telles situations. Dans le courant piagétien, une modification des représentations n'est possible qu'après une perturbation du système cognitif initial, effet renforcé par les paradoxes. La mise en situation didactique de ceux-ci nous a paru un levier intéressant pour faire évoluer la conception de l'apprenant et atténuer les biais probabilistes.

Nous présentons ci-après les expérimentations menées au lycée, dans le cadre du Master Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation. La première partie présentera le cadre théorique de nos travaux. Pour cela, une relecture épistémologique de la problématique évoquera une brève histoire des probabilités et décrira la place des paradoxes dans les mathématiques. Nous la compléterons par l'intégration d'éléments issus des sciences cognitives en présentant les concepts d'heuristiques, de biais et de systèmes de pensée. Une approche plus didactique viendra clore ce chapitre à travers l'étude des programmes officiels et une revue des manuels scolaires. Dans un second temps, nous décrirons la méthodologie employée pour résoudre notre problématique. Nous y présenterons notamment les paradoxes retenus ainsi que leur mise en activité proposée aux élèves de 2<sup>nde</sup> et 1<sup>ère</sup>. Nous détaillerons le protocole de l'enquête mise en place pour évaluer l'évolution des conceptions chez les élèves. Dans un dernier temps, nous présenterons et analyserons des productions d'élève et les données de l'enquête réalisée, que nous discuterons en lien avec la problématique initiale.

# 1 Cadre théorique

Notre travail s'inscrit dans une perspective pédagogique et didactique. Il étudie la mise en place d'une notion (les probabilités) chez un individu (l'adolescent) dans un cadre particulier (le lycée général). Brousseau (1983) transpose aux mathématiques les travaux de Bachelard sur l'importance des obstacles dans l'organisation des connaissances scientifiques. Les obstacles peuvent être de natures diverses : ontogéniques s'ils sont liés au développement corporel ou cognitif du sujet, didactiques s'ils dépendent d'un choix de système éducatif, et épistémologiques s'ils sont constitutifs des concepts et se retrouvent dans leur émergence historique. Dans cette partie, nous présentons les éléments issus des différents cadres (historiques, éducatifs, cognitifs) nécessaires à la compréhension de la problématique et à la mise en place d'une expérimentation pertinente. Nous suivons ainsi la méthodologie proposée par Brousseau (1983) concernant le travail sur les erreurs et conceptions :

1. trouver des obstacles épistémologiques dans l'histoire des mathématiques,
2. trouver des erreurs récurrentes (ou biais) et les regrouper autour de conceptions (ou heuristiques),
3. confronter les obstacles historiques aux obstacles d'apprentissage.

## 1.1 Apports épistémologiques

La connaissance du contexte historique ayant conduit à la définition moderne d'une notion mathématique est essentielle pour le pédagogue. Elle peut être source d'activités qui seront proposées en classe ; elle permet de préciser les obstacles épistémologiques correspondants ; elle aide à prendre du recul sur l'enseignement universitaire en comprenant la puissance du formalisme moderne.

### 1.1.1 Histoire des probabilités

Nous présentons ici un survol historique qui s'appuie sur les contributions de Henry (2009a) et Parzysz (2017).

Comme mentionné dans l'introduction, le développement des probabilités est indissociable de celui des jeux de hasard. On trouve des traces de dés et d'osselets chez les Suméro-Babyloniens (3000 av. J.-C.). L'importance de la religion dans l'Antiquité et le Moyen-Âge engendre un rapport à l'aléatoire ambigu : si la tradition polythéiste laisse une place à une divinité de la chance, le monothéisme suppose un déterminisme théique qui s'accompagnera de l'interdiction des jeux de hasard. À titre d'exemple, les jeux d'argent ne seront autorisés en France qu'à partir de 1539 par François I<sup>er</sup>. Ceci explique le développement tardif des probabilités, au regard d'autres branches des mathématiques.

Le premier ouvrage historique de probabilités semble être le *Liber de Ludo Aleae* de Cardan, un manuel décrivant les jeux de hasard et présentant une étude mathématique de certains d'entre eux. Il y décrit notamment les lois de probabilité de la somme de deux dés et trois



dés. Rapidement, des problèmes concrets intéressent les mathématiciens. Ce sera le cas du problème du duc de Toscane, résolu par Galilée, et du problème du chevalier de Méré, dont l'étude fera l'objet d'une correspondance entre Pascal et Fermat. On observe principalement un usage opératoire des probabilités au gré des problèmes rencontrés. C'est ainsi que la notion d'espérance mathématique sera introduite par Huygens comme mesure de la "valeur de la chance" d'un joueur.

Deux notions stochastiques importantes se développent conjointement dans l'école anglaise du XVIII<sup>ème</sup> siècle. Dans un premier temps, Moivre introduit dans *The Doctrine of Chances* la notion d'indépendance des événements. Bayes et Price poursuivront les travaux de leur confrère en étudiant le lien entre des distributions "a priori" et "a posteriori" (appelée aujourd'hui probabilités conditionnelles). Ils tirent de leur travail le théorème de Bayes permettant d'inverser le conditionnement en probabilités.

Il faut attendre le XIX<sup>ème</sup> siècle pour que les probabilités deviennent un sujet d'étude à part entière et acquièrent le rang d'objet. En 1812, Laplace pose les jalons de la *Théorie analytique des probabilités* dans son ouvrage du même nom. Il institutionnalise les définitions introduites depuis trois siècles en introduisant les notations et méthodes de calcul symbolique. Son *Essai philosophique sur les probabilités* propose une première axiomatisation des probabilités, à travers dix principes organisant le calcul des probabilités, dont voici les deux premiers :

I<sup>er</sup> Principe. Le premier de ces principes est la définition même de la probabilité que, comme on l'a vu est le rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles.

II<sup>ème</sup> Principe. Mais cela suppose les divers cas également possibles. S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des hasards. Alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable. [...]

Laplace, 1814, p. 12

Ces deux principes conduisent à la formule suivante, parfois appelée formule de Laplace et valide sous une hypothèse d'équiprobabilité du modèle :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre d'issues totales}}$$

Cette définition de la notion de probabilité, dite "classique" ou "cardinaliste", correspond à une approche épistémique : elle dépend des capacités du sujet à analyser le problème et à considérer les différentes issues comme équivalentes du point de vue du hasard.

L'hypothèse restrictive d'équiprobabilité et le nombre fini d'issues totales dans la définition précédente ne permettent pas d'appréhender l'ensemble des situations aléatoires. Ce sera le cas des problèmes de "probabilités géométriques" comme l'étude du jeu de franc-carreau, abordé par Buffon en 1733. Ceci a conduit les mathématiciens à développer une approche complémentaire, dite "fréquentiste" ou "objectiviste", car ne dépendant pas d'hypothèses faites par l'observateur. Dans son *Calcul des probabilités*, Rényi (1966), cité par Henry (2009b, p.79),

appelle "probabilité d'un événement le nombre autour duquel oscille la fréquence relative de l'événement considéré." Ceci opère un véritable changement de paradigme : la probabilité ne représente plus une quantité théorique calculée en amont d'une expérience aléatoire mais l'estimation d'une tendance caractérisant une expérience aléatoire issue de l'observation d'un grand nombre de ces réalisations. Cette dualité dans la notion de probabilité résulte de deux siècles de développements mathématiques autour du théorème fondamental de la Loi des Grands Nombres, qui constitue le pont entre les différentes approches. Bernoulli énoncera dans *Ars Conjectandi* une première version de ce résultat. Le Théorème Central Limite, découvert par Moivre et Laplace, vient préciser le lien entre les différents modèles en précisant la convergence des fréquences vers la probabilité théorique.

Les années 1930 voient la naissance de l'école moderne de mathématiques et du besoin de formalisme qui l'accompagne. Le développement de la théorie de la mesure offre un cadre cohérent aux lois discrètes et continues. Dans les *Fondements de la théorie des probabilités*, Kolmogorov présente en 1933 une axiomatisation des probabilités en introduisant la notion d'espaces probabilisés  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Cela engendre un changement de paradigme clé : la modélisation ne concerne plus les événements et les causes mais se concentre sur le choix d'une mesure de probabilité sur la tribu  $\mathcal{A}$ . Ces travaux permettent aux mathématiciens de disposer enfin d'un cadre formel permettant la définition rigoureuse de concepts intuitifs (espérance, indépendance, conditionnement) et peuvent s'atteler à la démonstration rigoureuse de la Loi des Grands Nombres et du Théorème Central Limite.

### 1.1.2 Les paradoxes en mathématiques

**Paradoxe** - nom masculin

1. Opinion qui va à l'encontre de l'opinion communément admise.
2. Association de deux faits, de deux idées contradictoires.

Larousse, p. d.

D'après la définition précédente, le terme paradoxe désigne en français deux notions distinctes, là où l'anglais fait une distinction entre *puzzle* (item 1) et *paradox* (item 2). À la suite de Leviatan (2002), on distinguera ainsi le vrai paradoxe, de type logique, qui s'appuie sur un raisonnement irréfutable et qui mène à une contradiction, du quasi-paradoxe, relevant d'une erreur de jugement due à l'intuition. L'un et l'autre occupent une place de choix en mathématiques, mais avec des visées différentes.

Genard (2001) explicite de manière générale les rôles des vrais paradoxes dans l'histoire des mathématiques. Ils présentent d'une part des intérêts dialectiques, permettant de dénigrer une théorie que l'on souhaite réfuter en mettant en exergue ses points faibles. C'est l'exemple de Zénon d'Élée, qui, considérant le paradoxe d'Achille et la tortue, vise à convaincre que le temps et l'atome sont indivisible par nature. D'autre part, le paradoxe peut révéler les contradictions propres à une théorie ou à une axiomatique. La paradoxe du barbier de Russell en est un exemple, qui conduira à la construction moderne de la théorie des ensembles. Les

paradoxes peuvent ainsi avoir deux effets opposés. Ils peuvent être inhibants, empêchant le développement d'une théorie : le concept d'infini mettra plusieurs millénaires avant d'être considéré comme objet mathématique par Bolzano puis Cantor. Le paradoxe peut aussi avoir un effet dynamogène et accélérer le développement d'une théorie, en introduisant, par exemple, une nouvelle axiomatique. C'est le cas de la théorie des ensembles et de son développement fécond au début du XX<sup>ième</sup> siècle.

En mathématiques, les quasi-paradoxes interviennent notamment dans la recherche des contre-exemples, dont la découverte peut susciter l'étonnement de la communauté mathématique. On peut ainsi penser à l'émotion suscitée en 1861 par la présentation par Riemann d'une fonction continue partout et dérivable seulement en un ensemble dénombrable de points.

L'intuition ne peut nous donner la rigueur, ni même la certitude, on s'en est aperçu de plus en plus.

Citons quelques exemples. Nous savons qu'il existe des fonctions continues dépourvues de dérivées. Rien de plus choquant pour l'intuition que cette proposition qui nous est imposée par la logique. Nos pères n'auraient pas manqué de dire : « Il est évident que toute fonction continue a une dérivée, puisque toute courbe a une tangente. »

Poincaré, 1911, p. 17

Le théorème de Banach-Tarski fournira un autre exemple de résultat mathématique contre-intuitif : il est possible de découper une boule de rayon 1 et de rassembler les morceaux par rotations et translations pour obtenir deux boules de rayon 1. De tels résultats eurent une incidence notable en analyse fonctionnelle et en théorie de la mesure, signe de l'importance des quasi-paradoxes dans le développement des mathématiques.

Soulignons enfin que les probabilités sont un terreau fertile aux paradoxes et aux quasi-paradoxes. On en étudiera certains en détail dans la partie 2.3.

## 1.2 Apports cognitivistes

Les sciences cognitives permettent d'éclairer les mécanismes d'apprentissage et de développement chez l'humain. Elles permettent à l'enseignant d'adapter sa pédagogie en fonction des spécificités des élèves et de la notion en jeu. Nous détaillons dans la suite deux approches en théorie de l'éducation qui, donne à l'erreur des rôles complémentaires. Il y a tout d'abord la notion de conception chez l'élève, introduite par le courant constructiviste. Plus récemment, les découvertes en neuroscience ont fait émerger l'hypothèse de systèmes de pensée pour expliquer le raisonnement humain. Pour chaque approche, nous préciserons ce que cela implique pour l'apprentissage des probabilités.

### 1.2.1 Conceptions de l'apprenant

Dans ses travaux fondateurs, Piaget a remis l'élève au centre du système éducatif, en déplaçant le curseur de l'enseignement à l'apprentissage. Parmi les concepts clés introduits, deux retiennent ici notre attention :

- le constructivisme. L'apprenant dispose d'un rôle actif dans la construction de ses connaissances.
- le développement est une suite de paliers, sur lesquels l'équilibre entre le sujet et le milieu est stable. La rupture de l'équilibre fait passer au niveau supérieur.

Chez un sujet, une représentation équilibrée de l'environnement constitue une conception. En d'autres termes, il s'agit d'une construction mentale et personnelle du réel, explicative d'une situation ou d'une observation. Formellement, Giordan et de Vecchi modélisent une conception par la figure 1 où :

- le cadre de référence est l'ensemble des connaissances activées pour formuler la conception.
- les opérations mentales sont les opérations intellectuelles maîtrisées et mobilisées par le sujet.
- le réseau sémantique est l'organisation interactive mise en place à partir du cadre de référence et des opérations mentales.
- les signifiants désignent les signes et symboles qui permettent d'explicitier la conception.

On distinguera alors deux types de conception :

- une conception naïve (ou intuition primaire), indépendante de l'éducation et liée à la perception naturelle de l'environnement,
- une conception due à l'éducation (ou intuition secondaire).

Ainsi, d'"obstacles à apprendre" pour Bachelard (cité par Eastes et Pellaud, 2004, p. 1202), les conceptions deviennent un tremplin pour l'apprentissage, selon Giordan et de Vecchi (2010).

Il reste à déterminer les conceptions présentes chez l'élève en amont d'une séquence, sur lesquelles nous pourrions agir. Brousseau souligne l'importance de l'erreur de l'apprenant pour accompagner le pédagogue dans ce travail :

L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou béhavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée.

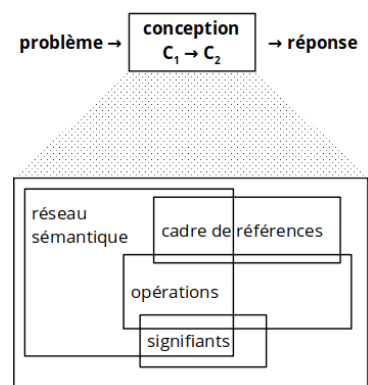


FIGURE 1 – Caractéristiques d'une conception (Giordan & de Vecchi, 2010, p. 143)

Brousseau (1983, p. 171)

## 1.2.2 Conceptions autour de l'aléatoire

Ce qui précède souligne l'intérêt de s'attarder sur les conceptions des élèves autour du hasard et des probabilités. Gauvrit a interrogé des individus autour de leur définition naïve du hasard. Les résultats (figure 2) relèvent huit types de réponses caractéristiques. L'analyse des correspondances des réponses montre que les définitions diffèrent selon deux niveaux : le pragmatisme et la subjectivité du sujet. Deux visions semblent ainsi s'opposer : l'aléatoire peut, pour certains, être appréhendé par des modèles relatifs aux probabilités ; pour d'autres, il est imprévisible.

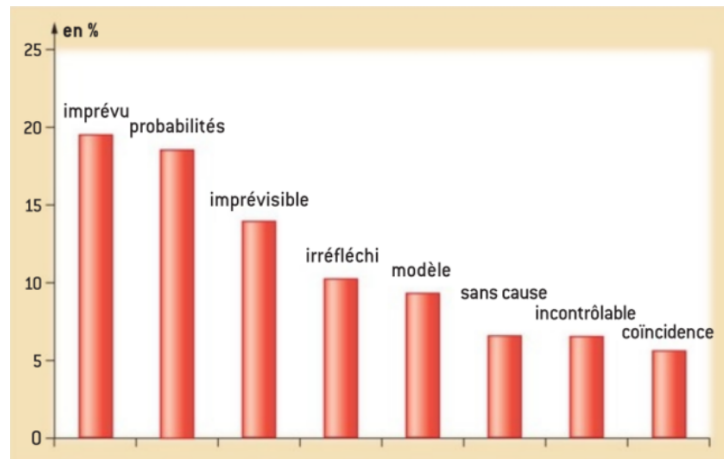


FIGURE 2 – Définitions naïves du hasard (Gauvrit, 2009, p. 15)

On retrouve chez Piaget des travaux autour du développement de la notion du hasard chez l'enfant. Piaget et Inhelder (1951) identifient ainsi trois stades dans la construction des modèles aléatoires :

1. le stade préopératoire (avant 7 ans). Il y a confusion entre les lois physiques et logiques et les lois du hasard. Le sujet ne dispose ni de la notion de mélange d'un ensemble, dont l'indépendance des éléments donne un caractère irréversible, ni de l'idée de probabilité qui permet de prédire des événements.
2. le stade opératoire (entre 7 et 12 ans). La notion de mélange d'un ensemble est acquise. Néanmoins, l'enfant ne maîtrise pas les opérations combinatoires (juxtaposition ordonnée, symétrie, etc...) Le sujet différencie le probable du nécessaire, sans qu'il lui soit possible de quantifier, et donc de comparer, des probabilités.
3. le stade des opérations formelles (à partir de 12 ans). À ce niveau, la notion de mélange est enrichie par celle de permutation, ce qui lui permet d'anticiper un désordre irréversible. L'adolescent parvient à calculer des probabilités théoriques dans des cas simples, en utilisant la proportionnalité et la comparaison de rapports. Les opérations combinatoires s'affinent et permettent au sujet de mettre en place des protocoles systématiques permettant d'énumérer les cas possibles.

Par ailleurs, l'étude épistémologique a montré la complémentarité entre les conceptions cardinale et fréquentiste des probabilités. On retrouve une telle approche dans la description qui

précède, le sujet du troisième stade ayant recours aux approximations par calcul des fréquences lorsqu'il ne dispose pas de données numériques permettant de calculer une probabilité.

Attardons-nous enfin sur la notion de probabilités conditionnelles qui est source de nombreuses confusions chez l'élève. Gras et Totohasina (1995) relèvent trois conceptions :

- la conception chronologiste. L'événement conditionnant est systématiquement antérieur à l'événement conditionné. On parle aussi d'axe passé-futur. L'élève n'est pas capable de renverser cette relation à laquelle il donne un caractère temporel.
- la conception causaliste. L'élève introduit implicitement une relation de cause à effet entre l'événement conditionnant (cause) et l'événement conditionné (conséquence). On parlera ainsi d'axe cause-conséquence. L'élève montre également une incapacité à inverser le conditionnement, une conséquence ne pouvant à son sens agir sur une cause.
- la conception cardinaliste. Elle consiste en la tendance systématique à associer la probabilité  $P_B(A)$  au rapport  $\frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}B}$ , ce qui n'est correct que dans une situation d'équiprobabilité.

Gras et Totohasina relèvent une différence importante dans l'origine de ces trois conceptions : si les deux premières constituent des obstacles épistémologiques, la conception cardinaliste est de nature didactique, conséquence de la place prépondérante de l'équiprobabilité dans les activités d'apprentissage. Par ailleurs, les variables procédurales utilisées dans les situations didactiques favorisent l'une ou l'autre des conceptions : la définition d'une probabilité composée et le recours aux tableaux à double entrée renforce la conception cardinaliste ; l'utilisation d'arbres de probabilité et de dénombrement se fait au profit des approches causalistes et chronologistes.

### 1.2.3 Heuristiques de jugement et biais cognitifs

Dans les années 70, le courant de la psychologie cognitive s'est intéressé aux mécanismes en œuvre dans les processus de décision et la résolution de problèmes. Les travaux de Tversky et Kahneman (1974) ont conduit à définir le concept d'heuristique de jugement. Ils appellent ainsi tout processus cognitif conscient ou inconscient, qui ignore une partie de l'information. Les heuristiques constituent des raccourcis cognitifs, généralement efficaces, qui visent à simplifier les opérations mentales.

La classification originale de Tversky et Kahneman identifie trois catégories d'heuristiques :

- l'heuristique de représentativité. Se basant sur la notion de situation prototypique, cette heuristique consiste à estimer l'appartenance d'un objet à une classe d'objets à partir de sa ressemblance à un cas représentatif de la classe.

Si l'on demande dans quelle faculté est probablement inscrit un étudiant dont les caractéristiques sont notamment de manquer de créativité, d'être ordonné et d'avoir un humour éculé, la plupart des gens citent beaucoup l'informatique ou les filières conduisant à devenir bibliothécaire. Pourtant, au regard du nombre d'étudiants inscrits, la probabilité qu'il soit en faculté de lettres ou en sciences sociales est beaucoup plus élevée.

Kahneman, 2012

- l'heuristique de disponibilité. Elle consiste à juger la fréquence ou la probabilité d'un événement en fonction de la facilité avec laquelle on peut se remémorer des exemples de cet événement. Elle est directement liée à l'expérience du sujet et aux capacités de représentation du sujet.

Un accident d'avion récent relayé par les médias altère temporairement l'appréciation du niveau de sécurité des voyages en avion.

Kahneman, 2012

- l'heuristique d'ancrage et d'ajustement. Le sujet réalise des estimations successives (ajustement) à partir d'une valeur de référence afin d'en déduire une valeur finale. Le seuil de la valeur initiale influe sur l'estimation finale (ancrage).

Si on vous demande si Gandhi avait plus de 114 ans à sa mort, vous lui donnerez un âge beaucoup plus élevé que si la question avait évoqué son décès à 35 ans.

Kahneman, 2012

Dans certains problèmes, les heuristiques de jugement peuvent conduire l'individu à des erreurs d'interprétation de la situation : ce sont les biais cognitifs. Le raccourci opéré par le recours à l'heuristique entraîne de manière systématique et inconsciente une distorsion dans le traitement de l'information. Il y a ainsi une distinction essentielle entre une heuristique et un biais cognitif, qui supposent des traitements didactiques différents.

Alors qu'un biais peut être vu comme une démarche ou un procédé qui engendre des erreurs systématiques, une heuristique est un mode de résolution de problème qui peut conduire à une solution incorrecte car il ne se fonde pas sur un modèle formel de celui-ci. Un biais trouverait donc sa source dans une conception erronée alors que l'emploi d'une heuristique basée sur un modèle qui se révèle inadéquat au problème ne témoignerait pas nécessairement d'une erreur conceptuelle.

Gauvrit, 2013a, p. 166

En d'autres termes, si les heuristiques sont nécessaires car elles facilitent les processus de jugement, elles peuvent être à l'origine de biais cognitifs en conduisant le sujet à commettre une erreur.

#### **1.2.4 Biais probabilistes et heuristique d'uniformité**

Depuis les années 70, de nombreux biais probabilistes ont été décrits en théorie de l'éducation et il n'existe pas de classification académiquement reconnue. Fischbein et Schnarch (1997) puis Lecoutre et Fischbein (1998) listent les principaux biais et étudient l'impact de l'âge et de l'éducation sur leur évolution. Nous les décrivons ci-dessous, en suivant la présentation de Vivier (2017). Des exemples illustrant chaque biais seront étudiés lors de la description du questionnaire à la partie 2.2. Nous retenons les biais probabilistes suivants :

- le biais de représentativité. Ce biais est directement relié à la conception du hasard chez le sujet et relève de l'heuristique de représentativité. Il consiste à affirmer qu'un

événement est d'autant plus probable qu'il semble conforme à l'a priori qu'un sujet se fait de l'aléatoire. Cette intuition erronée a tendance à disparaître avec l'âge (Lecoutre & Fischbein, 1998) et relève en cela d'une conception naïve du hasard. À titre d'exemple, ce biais se manifeste lorsqu'un joueur de loto juge moins probable le tirage "1, 2, 3, 4, 5, 6, 7" que le tirage "6, 16, 42, 34, 9, 21". Gauvrit (2013b) propose une expérimentation originale permettant de mesurer l'incidence de ce biais dans le traitement de diverses situations aléatoires, en questionnant les représentations du hasard chez des enseignants de mathématiques.

- l'effet de récence. Selon Cohen et Hansel (1955), les individus semblent avoir des difficultés à considérer un événement détaché d'une série d'événements similaires, bien qu'il soit évident que l'événement ne puisse être affecté par le résultat des autres expériences. En d'autres termes, le biais de récence consiste à anticiper un résultat aléatoire en fonction du résultat des épreuves précédentes, celles-ci étant pourtant indépendantes et identiquement distribuées. Tversky et Kahneman (1971) parle de loi des petits nombres, au regard de la loi des grands nombres : le sujet oublie le caractère indépendant des épreuves successives et considère une nouvelle loi de probabilité issue de l'observation de ce qui précède. L'effet de récence peut être négatif lorsque le sujet cherche à combler un défaut, par un processus "auto-correcteur" : après avoir obtenu 3 Piles après 3 lancers successifs de pièce, le sujet juge plus probable d'obtenir Face au quatrième lancer. L'effet de récence est dit positif lorsque le sujet juge plus probable d'obtenir au contraire Pile au quatrième lancer, en faisant l'hypothèse que la pièce n'est pas équilibrée. On peut observer une diminution du biais de récence positif avec l'âge, mais pas du biais de récence négatif (Lecoutre & Fischbein, 1998).
- le biais de disponibilité. Ce type d'erreur est directement induit par l'heuristique de disponibilité. Ainsi, la disponibilité exprime l'idée qu'une information est d'autant plus accessible qu'elle est évocable par un sujet (i.e. familière, récente ou visualisable). Ce biais dépasse largement le cadre des probabilités : on le retrouve par exemple en combinatoire ou en optimisation. Il diminue avec l'âge du sujet (Lecoutre & Fischbein, 1998).
- le biais de conjonction. Il consiste à surestimer la probabilité d'apparition simultanée (ou conjonction) de deux événements par rapport à la probabilité d'apparition de chacun d'entre eux. Ceci se réécrit mathématiquement,  $P(A \cap B) > \min(P(A), P(B))$  pour deux événements  $A$  et  $B$ , ce qui entre en contradiction avec les propriétés de croissance des probabilités. À titre d'exemple, une personne jugera ainsi plus probable qu'une personne rencontrée au hasard sur une station de ski soit un enfant portant un bonnet sur une piste verte ( $A \cap B$ ) qu'un enfant portant un bonnet ( $A$ ). Ce type de biais illustre la force des processus cognitifs de catégorisation. D'après les études (voir Lecoutre et Fischbein, 1998), ce biais semble disparaître avec l'âge, même s'il reste majoritaire dans la population adulte.
- le phénomène Falk (Falk, 1979). Ce biais est lié aux probabilités conditionnelles et à la



confusion courante entre causalité et corrélation. Selon la conception du sujet relative au conditionnement (Gras & Totohasina, 1995), le phénomène Falk se manifeste lorsqu'il y a une inversion de l'axe cause-effet (conception causaliste) ou de l'axe passé-futur (conception chronologiste). Ainsi, si  $A$  et  $B$  désignent deux événements tels que la réalisation de  $A$  influe, chronologiquement ou causalement, sur celle de  $B$ , alors le phénomène Falk apparaît lorsque, pour l'élève on a d'une part  $p_A(B) > p(B)$  mais aussi  $p_B(A) = p(A)$ . Il y a une notion d'irréversibilité : un antécédent détermine une conséquence, mais l'inverse n'est pas vrai. Ce biais semble augmenter avec l'âge des élèves (Lecoutre & Fischbein, 1998).

- le biais d'équiprobabilité. Observé initialement par Lecoutre (1985), ce biais consiste à considérer que des issues d'expériences aléatoires sont par nature équiprobables. Les recherches didactiques ont montré que le biais d'équiprobabilité relevait d'une conception cardinaliste des probabilités. Ainsi, Parzys (2011) propose d'intensifier le recours à l'approche fréquentiste pour introduire les probabilités dans le secondaire. Il y a une corrélation positive entre la présence du biais d'équiprobabilité et le niveau d'éducation du sujet (Lecoutre & Fischbein, 1998).
- le biais de la taille de l'échantillon (ou négligence du taux de base). Mis en lumière par Tversky et Kahneman (1983), il consiste à ne pas tenir compte des effectifs en jeu pour comparer deux expériences aléatoires. Il est à la source de nombreuses erreurs médicales ou juridiques. Le taux de réponse erronée augmente avec l'âge (Lecoutre & Fischbein, 1998).

D'après ce qui précède, il semblerait que l'apprentissage des probabilités dans le secondaire permette de corriger la majorité des biais, à l'exception du phénomène Falk, du biais d'équiprobabilité et du biais de la taille de l'échantillon. Au contraire, ceux-ci apparaissent puis se renforcent progressivement au cours du parcours scolaire. Il nous semble donc pertinent de s'attarder sur ces biais afin de proposer une approche pédagogique permettant d'atténuer ce phénomène. En particulier, la sélection des paradoxes à étudier en classe devra être guidée par leur potentiel d'action sur ces biais. L'ensemble des sept biais décrits précédemment constituera néanmoins le fil rouge de nos travaux, dans la mesure où ils ne sont pas indépendants. Il faudra également veiller à ce que les activités proposées ne renforcent pas les biais qui disparaissent traditionnellement avec l'âge.

Le biais d'équiprobabilité a fait l'objet de nombreux travaux (voir le panorama de Gauvrit (2013a)). Récemment des auteurs ont émis l'hypothèse de l'existence d'une heuristique d'uniformité pour l'expliquer. Introduite par Falk et Lann (2008), celle-ci consiste à choisir préférentiellement un modèle du hasard privilégiant l'équiprobabilité lorsque cela est possible ou lorsqu'aucun autre modèle connu ne semble pouvoir être invoqué pour décrire une expérience aléatoire. Cette heuristique s'inscrit dans le cadre de la théorie classique des probabilités, correspondant à l'approche cardinaliste. Confronté à une expérience aléatoire complexe, le sujet cherche à se ramener à une loi uniforme, puisque ce modèle est le plus disponible d'un point de vue cognitif.

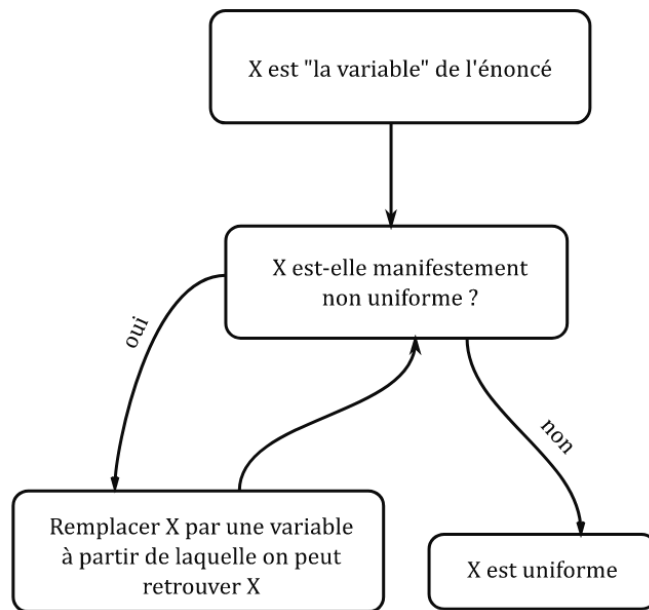


FIGURE 3 – Heuristique d'uniformité (Gauvrit, 2013a, p. 178)

### 1.2.5 Systèmes de pensée et inhibition

Il manque dans l'exposé qui précède un élément clé pour proposer un modèle cognitif de pensée cohérent et expliquer l'existence des heuristiques et des biais dans le raisonnement humain. La *Dual Process Theory* développée notamment par Kahneman (2012) a apporté le maillon manquant en introduisant le principe de systèmes de pensée. Selon cette théorie, deux systèmes cognitifs, aux caractéristiques différentes, interviennent dans la prise de décision des individus : le système 1 (ou voie lente) et le système 2 (ou voie rapide). Dans ses travaux sur l'incidence des *Dual Process Theory* en mathématiques, Rioux résume les attributs propres à ces deux systèmes.

<b>Système 1</b>	<b>Système 2</b>
Inconscient, préconscient	Conscient
Connaissance implicite	Connaissance explicite
Automatique	Contrôlé
Rapide	Lent
Parallèle	Séquentiel
Grande capacité	Faible capacité
Intuitif	Réflexif
Contextualisé	Abstrait
Pragmatique	Logique
Associatif	Basé sur des règles
Indépendant de l'intelligence générale	Lié à l'intelligence générale

TABLE 1 – Propriétés des deux systèmes cognitifs (Rioux, 2018, p. 276)

La complémentarité de ces deux systèmes est précisée par l'étude des mécanismes d'attention, de contrôle de soi et d'effort. L'humain ne dispose que d'une capacité mentale limitée, nécessaire à ces processus qui assurent l'activation et le bon fonctionnement du système 2. Afin d'économiser l'énergie physique et cognitive consommée par la résolution d'un problème, la tendance naturelle du cerveau humain est donc de recourir au système 1 : l'intuition est la motivation principale de nos prises de décision.

L'intégration de la *Dual Process Theory* en didactique des mathématiques est récente. Elle présente néanmoins un double intérêt. D'une part, elle permet de comprendre certains biais observés, corollaires de l'utilisation d'une heuristique erronée dans un contexte donné. De plus, elle montre l'importance de décharger la mémoire de travail, propre au Système 2, à travers l'acquisition d'automatismes, relatifs au Système 1.

Enfin, la théorie de l'inhibition cognitive, développée par les travaux de Houdé (2018), introduit un troisième système : l'inhibition. Cette vicariance cognitive consiste à successivement stopper l'activation, automatique, du système intuitif pour initier, de manière consciente, l'activation du système réfléchi. L'importance de l'inhibition dans l'apprentissage, et de l'apprentissage de l'inhibition, est aujourd'hui communément admise dans la communauté scientifique. Elle constituerait même pour certains auteurs la clé de l'intelligence.

### **1.2.6 Les paradoxes dans l'apprentissage**

Forts de leurs activités de médiation et de vulgarisation scientifique, Eastes et Pellaud (2004) ont étudié les expériences contre-intuitives d'un point de vue didactique. Ils entendent par expérience contre-intuitive toute situation produisant un résultat inverse ou très différent de celui auquel un sujet s'attend *a priori*, en se référant à son intuition. De telles expériences peuvent être relatives à des expérimentations (combustion du sodium par immersion dans l'eau, convection et ségrégation granulaire) ou relever d'une abstraction (démonstration mathématique) ou d'une illusion sensorielle (tableau d'Escher).

Eastes et Pellaud se sont interrogés sur les intérêts pédagogiques des expériences contre-intuitives. D'une part, elles permettent une véritable dévolution de l'apprenant dans la situation d'apprentissage. En ayant recours au paradoxal ou au sentiment de surprise, ces expériences agissent comme un levier sur la motivation intrinsèque. Par ailleurs, l'expérience contre-intuitive perturbe la conception initiale de l'apprenant, en introduisant un conflit cognitif. La modification d'une conception a un coût chez le sujet, qui peut-être représentée par une barrière cognitive. La perturbation engendrée par la situation contre-intuitive conduit l'apprenant à déconstruire sa conception initiale, qui ne permet pas d'expliquer ni de comprendre la situation vécue. C'est une approche analogue à l'intervention d'un potentiel d'action en neuroscience, comme le montre la figure 4.

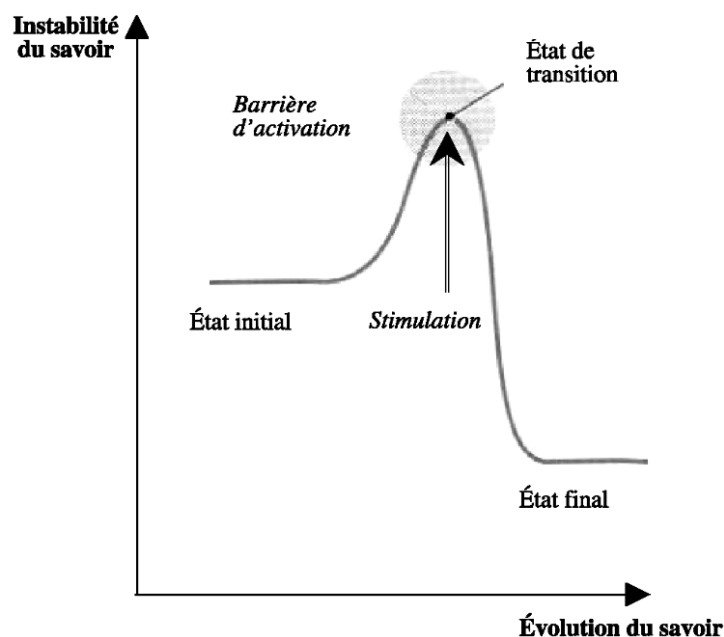


FIGURE 4 – Stabilité du savoir et apprentissage (Eastes & Pellaud, 2004, p. 1206)

Enfin, Eastes et Pellaud ont souligné l'importance de l'accompagnement de l'apprenant dans sa construction d'une nouvelle conception, afin d'éviter l'installation d'une représentation erronée. Ils identifient ainsi des conditions préalables à l'utilisation des expériences contre-intuitives en situation d'apprentissage :

- l'expérience doit être adaptée aux connaissances du sujet.
- le sujet est capable d'anticiper le résultat intuitif en amont de la réalisation de l'expérience.
- le contexte de l'expérience doit favoriser le questionnement du sujet.

L'intensité du conflit cognitif induit par de telles expériences se retrouve chez l'élève confronté à un quasi-paradoxe. Il favorise l'activation du triptyque d'apprentissage mise en avant par le courant constructiviste : l'étonnement primitif engendre une dissonance cognitive dont le besoin de résolution conduira à une restructuration des conceptions.

Dans cette direction, Mathieu a mené une expérimentation en classe de 2<sup>nde</sup> en construisant des séquences autour d'une "pédagogie de l'étonnement". Elle y définit l'étonnement comme "un sentiment, accompagnant des activités intellectuelles, qui déclenche une activité dans une voie de recherche cognitive lorsque l'intellect est face à un objet qui semble étrange ou insolite" (2010, p. 95). En cela, une pédagogie de l'étonnement constitue un outil précieux au service des apprentissages. Elle semblerait favoriser la dévolution de tous les élèves dans les activités proposées, processus préalable à toute action d'apprentissage.

La méthodologie proposée par Mathieu a consisté à faire étudier hors temps scolaire des paradoxes à des élèves de 2<sup>nde</sup> pour produire un rendu pour la séance suivante. Les paradoxes étaient alors collectivement résolus. On peut regretter que ces temps de recherche n'aient pas été vécus en classe, dans des situations didactiques de recherche entre pairs par exemple. Ceci aurait permis d'étudier plus finement les stratégies mises en place dans la résolution des

problèmes et de proposer de la remédiation, tout en s'appuyant sur le travail de groupe. Mais l'objectif de Mathieu consistait à évaluer l'intérêt pédagogique des paradoxes. L'absence du recueil de données ne permet pas de préciser les dimensions pédagogiques sur lesquelles les paradoxes ont eu un impact positif. L'auteur évoque néanmoins l'importance des paradoxes pour susciter des dissonances cognitives, nécessaire à la survenue de nouvelles conceptions, comme il a été indiqué précédemment. Les résultats de cette étude montrent également une implication des élèves dans l'étude de l'ensemble des paradoxes proposés, confirmant le caractère motivant lié à l'étonnement. Par ailleurs, l'étude des paradoxes semble avoir "renforcé leur confiance en les mathématiques comme outil privilégié de compréhension rationnelle du monde" (Mathieu, 2010, p. 103). Ceci permet de faire apparaître les biais de raisonnement qui surviennent en recourant à l'intuition (système 1) et contribue à l'apprentissage de l'inhibition.

L'étude de l'utilisation des paradoxes probabilistes en contexte pédagogique semble récente. La plupart des travaux se sont intéressés à analyser les démarches de résolution chez l'élève (Borovcnik & Kapadia, 2014 ; Leviatan, 2002 ; Morsanyi et al., 2012). Papadatos et al. (2019) ont analysé de manière systématique les biais impliqués dans deux problèmes de conditionnement qui seront étudiés dans la suite (problème des deux enfants et problème des boîtes de Bertrand). Si l'aspect didactique de certains paradoxes est bien documenté, peu de données sont disponibles concernant une approche globale des paradoxes, reposant sur une pédagogie de l'étonnement en probabilité.

Ce qui précède permet de circonscrire la problématique qui fera l'objet d'une expérimentation en classe. Nous proposons ainsi dans la suite une scénarisation pédagogique reposant en partie sur l'utilisation des paradoxes dans l'enseignement des probabilités au lycée. L'objectif de notre travail consistera à apporter des éléments de réponse aux différentes questions soulevées par la discussion qui précède. L'utilisation des paradoxes en classe diminue-t-elle l'apparition de biais cognitifs chez les apprenants ? Induit-elle des changements positifs de conception chez les élèves ? Leur étude contribue-t-elle à l'apprentissage de l'inhibition ? Ce seront autant de questionnement qui nous guiderons dans la construction de ce travail.

### **1.3 Les probabilités dans l'enseignement secondaire**

Il n'est point de science plus digne de nos méditations, et qu'il soit plus utile de faire entrer dans le système de l'instruction publique.

Laplace, 1814, p.276

Notre travail s'inscrit dans un contexte éducatif précis : celui de l'enseignement général en lycée en France. Il convient donc de préciser orientations scientifiques et didactiques prescrites par les ressources officielles. Nous préciserons dans un second temps la transposition pédagogique des programmes proposée dans les manuels scolaires.

### 1.3.1 Les probabilités dans les textes officiels

Dans l'enseignement des mathématiques en France, les probabilités présentent un statut particulier qui n'est pas sans rappeler la place croissante qu'elles ont occupé dans l'histoire des mathématiques. Henry (2010) propose un panorama chronologique sur l'évolution des probabilités dans l'enseignement secondaire français dont nous retraçons à présent les étapes marquantes. Introduites en T<sup>ale</sup> à partir des années 1960–1970, les probabilités ne sont dans un premier temps abordées qu'à travers le prisme cardinaliste, en tant qu'application de la combinatoire. Dans une direction opposée, la réforme de 1991 du programme de 1<sup>ère</sup> invite à adopter un point de vue fréquentiste pour introduire les probabilités. Il faut toutefois attendre 2001 pour que le lien entre les deux approches soit mis en exergue, avec une mise en avant de la loi des grands nombres. La place de la modélisation et le recours plus systématique à la simulation deviennent explicites, favorisés par le développement des TICE. En 2008, les probabilités font leur entrée en classe de 3<sup>ième</sup> à partir d'expérimentations familières qui permettent le calcul de fréquence. En 2016, la réforme du collège voit se développer une progressivité par cycle et privilégie le développement des compétences mathématiques : le modèle d'équiprobabilité est abordé à partir de la 5<sup>ième</sup>, complété par l'approche fréquentiste en 4<sup>ième</sup>. L'observation de la stabilisation des fréquences préfigure notamment la loi des grands nombres. Enfin, la réforme du lycée de 2019 offre aux élèves un menu à la carte. L'importance des probabilités se trouve renforcée en T<sup>ale</sup> : l'analyse vient fournir un cadre permettant l'introduction des lois continues en mathématiques complémentaires ; des outils plus avancés (graphes probabilistes, chaînes de Markov) sont abordés en mathématiques expertes.

Les expérimentations seront réalisées sur les classes dont nous avons la responsabilité, à savoir des classes de 2<sup>nde</sup> et 1<sup>ère</sup>. En conséquence, précisons les objectifs et les contenus relatifs aux probabilités dans les programmes de ces deux niveaux, reproduits à l'annexe A.

En classe de 2<sup>nde</sup>, le thème *Probabilités* est abordé de façon à poursuivre le travail initié au Cycle 4 autour des notions de base : expérience aléatoire, issue, événement, probabilité. L'explicitation de l'univers de modélisation est un élément nouveau et important du chapitre. Les opérations sur les événements sont évoquées ce qui permet d'introduire la formule du crible, à l'aide des diagrammes de Venn. Les approches fréquentistes et laplaciennes sont présentées, mises en pratique, et le passage de l'une à l'autre est exhibé à l'aide d'une version vulgarisée de la loi des grands nombres. Les tableaux et arbres sont introduits comme outil de dénombrement permettant de déterminer une loi de probabilités dans le cas équiprobable.

La classe de 1<sup>ère</sup> poursuit le travail initié dans le cas des univers finis. Les notions de conditionnement et d'indépendance sont formalisées. Cela permet de compléter la liste des représentations disponibles avec les tableaux à double entrée et les arbres de probabilité. Les démonstrations des formules et théorèmes classiques deviennent systématiques. Parallèlement, les variables aléatoires discrètes sont introduites et donnent des outils de modélisation nouveaux. Les indicateurs de dispersion classique, déjà manipulés en 2<sup>nde</sup> dans un contexte statistique, sont définis dans le cas des variables aléatoires. Ils permettront de préciser en T<sup>ale</sup> le lien entre les approches cardinalistes et fréquentistes. On note aussi une pratique plus soutenue de

Python pour réaliser les simulations, en lieu et place du tableur.

Décrivons enfin brièvement le travail de compétences susceptibles d'être mis en place par l'étude de paradoxes probabilistes :

- Rechercher. Confronté à une situation aléatoire, l'élève doit élaborer des stratégies de résolution. Villani et Torossian (2018) relèvent deux facettes intrinsèques à la phase de recherche : la dimension temporelle et la place de l'erreur. Il conviendra donc de laisser ce temps de recherche et de valoriser les erreurs, révélatrices d'une conception à adapter.
- Modéliser. Il s'agit à notre avis de la compétence centrale en probabilités. Seule la formulation d'hypothèses pertinentes, transposées en langage mathématique, permet la résolution des paradoxes. Cela se traduit notamment en exhibant les univers sous-jacents.
- Représenter. En amont de la description de l'espace probabilisé, des changements de registre peuvent être nécessaires pour une bonne compréhension du problème. Tableau à double entrée, arbre de probabilités et arbre de dénombrement sont autant d'outils que l'élève sera invité à utiliser pour illustrer son argumentation.
- Raisonner. Le lien avec la logique est évident dans le cas des vrais paradoxes. Concernant les quasi-paradoxes, l'étude de la réponse intuitive incite l'élève à déterminer ce qui fait défaut dans l'approche naïve.
- Communiquer. Certaines modalités pédagogiques se prêtent au travail de cette compétence. L'étude des paradoxes invite au débat scientifique. Nous favoriserons celui-ci, par l'expression orale notamment.
- Calculer. Le travail de cette compétence reste marginale dans les problèmes probabilistes. On pourra toutefois considérer que l'utilisation du théorème de Bayes et de la formule de Laplace rentre dans ce cadre.

### 1.3.2 Les paradoxes dans les manuels

Il est intéressant d'étudier le traitement des paradoxes stochastiques et des probabilités en général dans les manuels scolaires. Parzys (2013) relève dans une étude fournie de sept manuels de 3<sup>ème</sup>, quatre manuels de 2<sup>ème</sup> et quatre manuels de 1<sup>ère</sup> un manque de diversité dans les contextes aléatoires proposés : tirage dans une urne, lancers de dés ou de pièces. La majorité des modèles sous-jacents reposent sur des hypothèses d'équiprobabilité. En conséquence, le recours à l'approche fréquentiste reste marginale. Depuis cette étude de 2013, les manuels se sont adaptés et ont su intégrer davantage d'activités de modélisation et de simulation, au profit d'une vision plus globale, à la fois classique et fréquentiste.

Nous avons étudié différents manuels pour relever les activités correspondant à des paradoxes probabilistes. On retrouvera en annexe B un tableau présentant les résultats. En moyenne, un manuel fait référence à deux ou trois paradoxes dans l'ensemble des chapitres consacrés aux probabilités. Il est intéressant de noter que le contexte historique n'est pas systématiquement évoqué. En classe de 2<sup>ème</sup>, les paradoxes du duc de Toscane et des anniversaires sont évoqués

dans plus de la moitié des paradoxes. On retrouvera le paradoxe du duc de Toscane, ainsi que ceux de Monty Hall et de Saint-Pétersbourg dans près d'un tiers des manuels de 1<sup>ère</sup> étudié. La prépondérance du problème du duc de Toscane peut se comprendre par sa mention explicite dans le programme de 2<sup>nde</sup>.

On observe globalement une introduction progressive positive des paradoxes dans les ressources à disposition des enseignants. Toutefois, leur traitement reste incomplet, entre problème à prise d'initiative et activité guidée aux multiples questions courtes. Dans le premier cas, le livre du professeur ne lui permet généralement pas d'appréhender l'ensemble des subtilités du paradoxe et une seule stratégie de résolution, peu détaillée, est proposée. Renvoyés généralement dans des pages consacrées à la différenciation pédagogique, ces problèmes ouverts relèvent de séances d'accompagnement personnalisé, sous-entendant de ne pas les aborder avec des élèves en difficulté. Au contraire, nous verrons leur potentiel d'action sur ces élèves au cours de l'expérimentation. À l'opposé, les nombreux exercices détaillés transposent le problème dans le champ de la statistique, sans nécessairement confronter les conceptions cardinalistes et fréquentistes. Nous gageons que le manque de prise d'initiatives qui en découle chez l'élève ne favorise pas une bonne compréhension de la complémentarité entre les deux approches : il n'y a pas de prise de recul sur l'ensemble de l'activité de modélisation ainsi effectuée par l'élève. Parzysz (2017) résume une telle approche dans la figure 5.

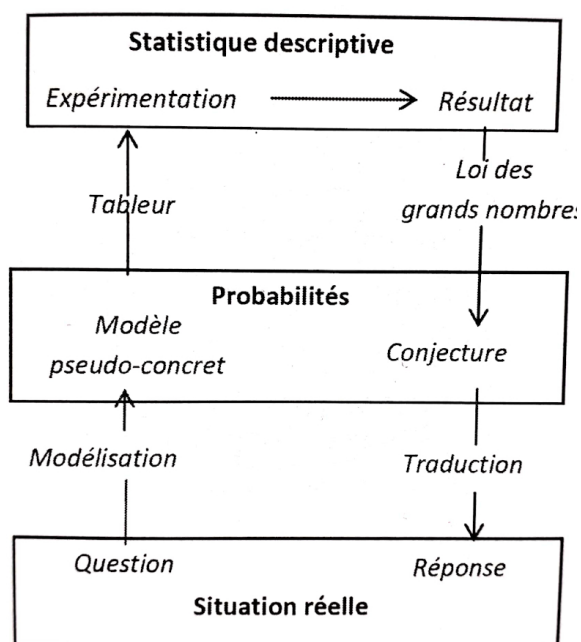


FIGURE 5 – Schéma d'une activité dans les manuels de lycée Parzysz, 2017

Au regard de ce qui précède, il nous semble au contraire essentiel de différencier les supports et les modalités pour favoriser la motivation intrinsèque mais aussi pour permettre le travail de compétences socio-comportementales. Nous veillerons ainsi à proposer des ressources permettant un véritable travail et une mise en activité concrète des élèves.



## 2 Méthodologie

Nous décrivons dans ce qui suit l'expérimentation mise en place afin d'évaluer l'influence de l'étude de paradoxes sur les biais probabilistes au lycée, en particulier les biais d'équiprobabilité, de négligence du taux de base et le phénomène Falk.

Comparons les méthodologies utilisées par Gauvrit (2013b) et Lecoutre et Fischbein (1998). Dans son travail, Gauvrit étudie l'effet d'une formation courte sur l'évolution des conceptions des enseignants. Dans cette étude longitudinale, il soumet pour cela les sujets à un questionnaire pré-test, en amont de la formation, puis à un questionnaire post-test, six mois après la formation. De leurs côtés, Lecoutre et Fischbein s'intéressent à la présence de biais probabilistes chez un sujet d'âge donné. Ne disposant pas des moyens matériels de suivre une même cohorte sur l'ensemble d'une scolarité, ils mènent une étude transversale en comparant des groupes d'âges différents à un instant donné. Il en résulte que leur étude est sujette aux évolutions de programme, fréquentes concernant le thème des probabilités : le contenu mathématique d'un cours élémentaire en 1998 pour un élève de 9 ans est différent de celui suivi par un étudiant lorsqu'il était, 10 ans plus tôt, à l'école élémentaire (voir notamment l'étude de Henry (2010) mentionnée dans la partie 1.3.1). Par ailleurs, ces auteurs invitent les élèves à fournir une justification rapide, ce qui leur permet de préciser et confirmer la conception sous-jacente à une réponse.

Pour réaliser les expérimentations, nous disposons de deux cohortes d'élèves. La méthodologie de l'enquête utilisée dans nos travaux, détaillée ci-après, combine les deux approches complémentaires présentées ci-dessus. Une connaissance des spécificités de chaque classe (niveau mathématique et linguistique, culture, motivation) et une étude des programmes d'enseignement permettent de sélectionner les paradoxes qui seront étudiés. Un questionnaire pré-test est ensuite réalisé dans chaque classe, chaque élève étant invité à justifier rapidement ses réponses. Le chapitre *Probabilités* se déroule sur 3 ou 4 semaines et intègre les paradoxes choisis, selon des modalités différentes en 2<sup>nde</sup> et en 1<sup>ère</sup>. Enfin, à l'issue des séquences respectives, chaque cohorte est soumise à un questionnaire post-test. Ce QCM avec justification permettra d'analyser les évolutions de chaque groupe et ainsi de comparer les stratégies mises en place.

### 2.1 Présentation du contexte

Les expérimentations se sont déroulées au cours du mois de mars 2022 dans une classe de 2<sup>nde</sup> et une classe de 1<sup>ère</sup> spécialité mathématiques du lycée Fauriel.

La classe de 2<sup>nde</sup> est constituée de 36 élèves, dont les deux tiers pratiquent trois langues vivantes et suivent le parcours Bachibac. Elle se caractérise par un bon niveau multidisciplinaire et un faible taux d'absentéisme. Les tests nationaux de positionnement de début de seconde donnent de premières informations sur les apprenants qui ont pu être complétées par des temps d'échange sur l'orientation. Trois profils types d'élève semblent ainsi se dégager :

- L'élève est en difficulté avec le système éducatif et le rythme du lycée général. Il n'a pas réussi à mettre en place des méthodes de travail favorisant l'apprentissage dans un

contexte scolaire. Il s'oriente, souvent par défaut, vers une 1<sup>ère</sup> STMG.

- L'élève ne dispose pas des bases mathématiques attendues à l'issue du cycle 4, ne parvient pas à donner de sens aux objets mathématiques rencontrés ou ne présente pas d'intérêt pour les matières scientifiques en général. Il souhaite abandonner les mathématiques à la fin de la 2<sup>nde</sup> et se dirige vers des filières littéraires ou en sciences humaines.
- L'élève présente une bonne maîtrise des contenus mathématiques du cycle précédent. Il est capable de produire une ébauche de raisonnement scientifique. Il s'oriente en général vers la spécialité mathématiques, conscient de l'importance de cette discipline dans la suite de son parcours.

Dans ce contexte de diversité, et afin de maintenir chaque élève en dynamique d'apprentissage, il faudra veiller à proposer des activités adaptées à chaque profil, à travers la différenciation pédagogique et le travail en groupe notamment. C'est en identifiant les leviers permettant d'agir sur la dynamique motivationnelle de l'élève que l'on facilitera sa dévolution dans les différentes activités. La manipulation et la simulation informatique pourront venir renforcer le sentiment de contrôlabilité. De plus, la mise en travail de groupe permettra une entraide par les pairs, renforçant à la fois la perception de la contrôlabilité (la réussite du groupe dépend du travail de chacun) mais aussi la perception de compétence (le groupe soutient chacun dans son apprentissage).

La seconde cohorte est constituée de 25 élèves de 1<sup>ère</sup> qui suivent la spécialité mathématiques, issus de quatre classes différentes. La cohésion entre élèves est donc moins forte qu'en 2<sup>nde</sup>, ce qui atténue le caractère émulateur du groupe. La motivation, le rapport au cadre scolaire et l'investissement en classe et hors classe des élèves sont très hétérogènes dans ce groupe, ce qui se traduit par de grandes disparités dans les résultats aux évaluations. Néanmoins, les activités de type problème ouvert proposées depuis le début de l'année ont suscité un intérêt chez la majorité des élèves, tout en illustrant de vraies capacités de recherche et de raisonnement chez les élèves réfractaires aux modes d'apprentissage traditionnels. Le thème des probabilités permet en partie de s'affranchir de certaines technicités (calcul algébrique, formules littérales) qui mettent en difficulté les élèves de 1<sup>ère</sup>. A contrario, la tête de classe illustre une appétence plus faible pour les probabilités et les statistiques, motivée par l'illusion d'une absence de formalisme et de rigueur.

La crise sanitaire du COVID 19 a entraîné l'apparition de nouvelles modalités d'apprentissage. Selon les enseignants en lycée général public, un décrochage a pu être observé chez 8 % des élèves (voir le rapport de la DEPP 2021). Parallèlement, une discussion avec les autres enseignants de mathématiques et avec les élèves ont montré que le thème des probabilités et des statistiques n'avait pas été abordé selon la même profondeur. En conséquence, tous les élèves ne présentent pas le même niveau de maîtrise des compétences correspondantes. Il conviendra donc de rappeler le contenu des années précédentes.

Les deux cohortes se caractérisent par une diversité dans l'origine culturelle et linguistique des élèves (Europe de l'Ouest, Europe de l'Est, Maghreb et Amérique du Sud). Il importe de

tenir compte de cette pluralité dans la constitution des différents groupes. En conséquence, la pratique de jeux de hasard et la conception de l'aléatoire dépendent de l'environnement de l'élève. La manipulation, à travers la réalisation pratique des différentes expériences aléatoires, et l'explicitation des règles des jeux sont donc essentiels afin de s'assurer que le problème soit compris par l'ensemble de la classe. L'importance du mode énonciatif dans l'activité mathématique a d'ailleurs été rappelée dans les orientations récentes de l'Éducation Nationale (Villani & Torossian, 2018). Compte tenu de l'importance de la communication et de la compréhension écrite et orale en probabilités, il nous a semblé nécessaire de réaliser des traductions dans les langues d'origine et de faire reformuler au maximum les énoncés par la classe.

## 2.2 Élaboration du questionnaire

Depuis les travaux initiaux de Tversky et Kahneman (1974) sur les biais cognitifs, de nombreux auteurs se sont intéressés à la didactique des probabilités (voir Vivier, 2017). Afin d'identifier les biais cognitifs et les conceptions présents chez les élèves, différents questionnaires, à réponses ouvertes ou fermées, ont été proposés dans les travaux de recherche, puis analysés avec des outils statistiques divers. Nous nous en inspirons pour proposer deux questionnaires à destination des élèves : un questionnaire pré-test, proposé comme introduction de la séquence, et un questionnaire post-test délivré une fois le chapitre terminé. Le questionnaire pré-test permet non seulement de réactiver les connaissances des années antérieures mais aussi de proposer comme un des objectifs du chapitre la résolution des différents problèmes. Les réponses correctes ne sont discutées en classe entière qu'une fois le questionnaire post-test réalisé. Ils constituent ainsi un moyen d'évaluation formative mis à disposition des élèves.

Nous détaillons ci-après les différentes questions et nous précisons le lien avec les biais probabilistes. Nous invitons le lecteur à réaliser le questionnaire disponible aux annexes H et I avant de lire la suite de cette partie : c'est en identifiant les biais cognitifs présents dans son raisonnement qu'un sujet perçoit leur ancrage.

### Biais de représentativité

Le biais de représentativité est détecté chez les élèves à partir du problème classique suivant.

Au tirage du loto, il faut choisir 6 nombres distincts parmi 49 (l'ordre n'a pas d'importance). On propose de miser sur l'un des deux tirages suivants : 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 1, 8, 17, 27, 33, 42. Que conseillez-vous ?

1. Miser sur 1, 2, 3, 4, 5, 6 car il a plus de chances de sortir.
2. Miser sur 39, 1, 17, 33, 8, 27 car il a plus de chances de sortir (biais).
3. Peu importe : les deux tirages ont la même chance de sortir (réponse correcte).

d'après Fischbein, Schnarch et Lecoutre 1997, 1998

Ce questionnaire présente un tirage non ordonné sans remise. Le calcul des probabilités de chaque issue par l'approche cardinaliste nécessite des notions de combinatoire hors de portée

des programmes de 2<sup>nde</sup> et 1<sup>re</sup>. Cela encourage une réponse intuitive du sujet ce qui favorise l'expression du biais de représentativité. Celui-ci est en œuvre lorsque l'élève choisit comme plus probable la séquence sans suite logique apparente, estimant qu'une progression arithmétique ne peut pas résulter d'une situation aléatoire. Le modèle correct correspond à un recours à l'équiprobabilité.

### Biais de récence

Cohen et Hansel (1955) semblent être les premiers à avoir étudié l'effet de récence en contexte éducatif, à l'aide du problème suivant.

Quand on lance une pièce de monnaie, on peut obtenir un des deux résultats, Pile ou Face. Suite au lancer d'une pièce quatre fois de suite, on a obtenu un Pile et trois Face. Est-ce que la chance d'obtenir Face la cinquième fois est :

1. Plus petite que celle d'obtenir Pile (biais majoritaire : effet de récence négatif).
2. Égale à celle d'obtenir Pile (réponse correcte).
3. Plus grande que celle d'obtenir Pile (effet de récence positif).

Cette question permet de questionner la notion intuitive d'indépendance chez l'élève. Conformément à la littérature, aucune hypothèse d'équilibre concernant la pièce n'est formulée. Cela permet de laisser s'exprimer une conception fréquentiste des probabilités, avec un effet de récence positif, guidé par l'heuristique de la loi des petits nombres ou par l'activation d'un modèle déterministe. Le biais qui nous intéresse est l'effet de récence négatif qui semble se renforcer avec l'âge. Nous décidons donc d'introduire une séquence avec alternances contrairement au questionnaire de Lecoutre et Fischbein (1998).

### Biais de conjonction

Tversky et Kahneman (1983) étudient différentes modalités du biais de conjonction et proposent plusieurs questionnaires afin de le détecter chez le sujet. Nous reprenons la situation suivante, devenue classique dans la littérature.

Linda a 31 ans, elle est célibataire, franche et très brillante. Elle est diplômée en philosophie. Lorsqu'elle était étudiante, elle se sentait très concernée par les questions de discrimination et de justice sociale et avait aussi participé à des manifestations antinucléaires. » Selon vous :

1. Linda est employée de banque (réponse correcte),
2. Linda est féministe et employée de banque (biais).

La description des traits de personnalité de Linda correspond au stéréotype d'une personne féministe, contrairement à celle d'une employée de banque. D'après la typologie des erreurs de conjonction décrite par Tversky et Kahneman (1983), l'énoncé relève ici du paradigme de type  $M \rightarrow A$ . Dans ce paradigme, le modèle  $M$  (la description de Linda) est associé positivement à l'événement  $A$  "être féministe" et négativement à l'événement  $B$  "être banquière".

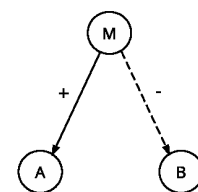


FIGURE 6 – Biais de conjonction (AB)

## Biais de disponibilité

Pour étudier le biais de disponibilité, relatif à l'influence de la disponibilité en mémoire d'une information sur l'analyse d'une situation, nous reprenons une question présentée dans l'étude initiale de Tversky et Kahneman (1973).

On tire un mot de 4 lettres au hasard dans le dictionnaire de la langue française. On veut savoir s'il y a plus de chances que la première lettre soit un R ou bien que la troisième lettre soit un R.

- Il y a plus de chances que la première lettre soit un R (biais).
- Il y a autant de chances que la première lettre ou la troisième soit un R.
- Il y a plus de chances que la troisième lettre soit un R (réponse correcte).
- On ne peut pas savoir a priori (réponse correcte).

Compte tenu de l'organisation du vocabulaire français dans un ordre lexicographique, les mots de 4 lettres commençant par la lettre R sont plus rapidement disponibles en mémoire, et donc plus facilement récupérables par le sujet, que ceux ayant un R en troisième lettre. Néanmoins, une étude statistique montre que ces derniers sont plus fréquents dans la langue française. On ne s'attend pas à ce que l'élève soit capable de donner ici la bonne réponse (c), mais qu'il reconnaisse son incapacité à se prononcer sur cette question, voire qu'il propose une approche reposant sur les statistiques inférentielles pour la résoudre. Notons que la réponse B relèverait de l'activation d'un modèle équiprobable.

Dans leurs travaux, Lecoutre et Fischbein (1998) n'utilisent pas la question précédente pour faire émerger le biais de disponibilité. Ils ont recours au problème suivant.

Le nombre de possibilités pour choisir un groupe composé de 2 personnes parmi 10 candidats est :

1. Plus petit
2. Égal (réponse correcte)
3. Plus grand (biais)

que le nombre de possibilités pour choisir un groupe de 8 personnes parmi les mêmes 10 candidats.

Sous cette forme, il s'agit d'un problème de combinatoire sans aspect probabiliste et statistique. Afin d'introduire une composante aléatoire, une reformulation aurait été nécessaire. On aurait par exemple pu comparer deux jeux de hasard : l'un consisterait à tirer deux boules dans une urne de huit couleurs différentes et à miser sur les couleurs obtenues ; pour l'autre situation, il s'agirait de tirer six boules dans la même urne et à miser également sur les couleurs obtenues. Deux approches permettraient d'appréhender ce problème : l'une consiste à dénombrer les différentes possibilités et l'autre à raisonner sur l'événement complémentaire (les couleurs de billes non tirées).

## Biais d'équiprobabilité

Parmi les situations propices au biais d'équiprobabilité, Gauvrit (2013b) relève différentes classes de problèmes, dont la difficulté semble croissante :

- les problèmes relatifs aux événements composés. Un événement composé  $A$  est la réunion de plusieurs événements élémentaires. Dans ce type de problème, les événements élémentaires  $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$  sont équiprobables à la différence des événements composés  $A_1 \cup \dots \cup A_m$  et  $B_1 \cup \dots \cup B_n$ . Le biais s'illustre lorsque les élèves utilisent un modèle d'équiprobabilité pour décrire les événements composés.
- les problèmes relatifs aux lois composées. Considérant deux variables aléatoires réelles indépendantes  $X_1$  et  $X_2$  qui suivent une même loi uniforme, il s'agit ici d'étudier la variable  $f(X_1, X_2)$  pour une fonction mesurable  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . La loi de  $f(X_1, X_2)$  n'est en général plus uniforme. Le paradoxe du duc de Toscane relève de cette situation.
- les problèmes d'ordre. Dans ce genre de tâches, on considère un univers de la forme  $\{x_1, \dots, x_n\}^k$  à  $n^k$  issues, muni d'une loi de probabilité uniforme. Dans l'illustration de ce biais, il y a confusion entre les listes et les ensembles : l'élève utilise un modèle uniforme sur l'univers constitué des ensembles, omettant le fait que plusieurs listes peuvent être associées à un même ensemble.

Nous choisissons de tester les trois situations dans les questionnaires, afin d'étudier l'effet des paradoxes sur chaque classe de problème.

### Événement composé

Pour observer l'activation erronée d'un modèle d'équiprobabilité dans le cadre des événements composés, nous utilisons le problème suivant, décrit dans Morsanyi et al. (2012)

Une classe est constituée de 23 filles et 13 garçons. Pour vous interroger, je demande à l'ordinateur de tirer au hasard une personne. Qu'est-il le plus probable ?

1. Un garçon passe au tableau.
2. Une fille passe au tableau (réponse correcte).
3. Il y a autant de chances que ce soit une fille qu'un garçon (biais).

Les événements 1. et 2. constituent des événements composés et forment une partition de la classe. Le biais d'équiprobabilité se manifeste lorsque l'élève juge équivalent que l'un des deux sexes soit sélectionné, correspondant à une dichotomie naïve Fille-Garçon.

Compte tenu des résultats observés en analysant les réponses au pré-test (95 % de réussite), il nous a semblé pertinent de tester un problème analogue lors du questionnaire post-test afin d'étudier le potentiel de transfert d'un modèle non équiprobable et de l'approche cardinaliste sous-jacente. Nous avons eu recours à l'énoncé suivant, dû à Fox et Rottenstreich (2003).

Qu'est-il le plus probable :

1. Le jour le plus chaud de la semaine sera dimanche.
2. Le jour le plus chaud de la semaine ne sera pas dimanche (réponse correcte).
3. Il y a une chance sur deux que le jour le plus chaud de la semaine soit le dimanche (biais).

## Lois composées

Pour tester le biais d'équiprobabilité dans un contexte de lois composées, nous reprenons le problème utilisé dans les travaux de Fischbein, Lecoutre et Schnarch 1997, 1998. Il fait partie du *Statistical Reasoning Assessment*, un questionnaire normalisé qui est régulièrement utilisé dans les travaux de recherche pour mesurer le niveau de raisonnement en statistique dans une population.

On lance deux dés cubiques en même temps. Lequel des deux résultats suivants a le plus de chances de se produire :

1. Obtenir deux 6.
2. Obtenir un 5 et un 6 (réponse correcte).
3. Les deux résultats ont la même chance (biais majoritaire).

Les dés peuvent être implicitement modélisés par des variables aléatoires  $D_1$  et  $D_2$  indépendantes et de loi uniforme sur  $\{1; \dots; 6\}$ . La variable aléatoire considérée est la paire  $(\min(D_1, D_2), \max(D_1, D_2))$  dont la loi n'est pas uniforme. Il faut en effet distinguer le cas où les variables prennent des valeurs distinctes de celui où elles sont égales. Puisque le lancer de plusieurs dés sera étudié en substance dans l'activité du duc de Toscane, nous décidons d'étudier dans le questionnaire post-test deux problèmes analogues. Dans le premier transfert, nous conservons le tirage d'un élément dans un ensemble constitué d'au moins 3 éléments distincts en remplaçant le lancer de dé par un tirage de cartes.

Deux amis piochent une carte chacun dans un jeu différent de 32 cartes. Lequel des deux résultats suivants a le plus de chances de se produire :

1. Les cartes piochées sont des rois de trèfle.
2. Les cartes piochées sont la dame et le roi de trèfle (réponse correcte).
3. Les deux résultats ont la même chance (biais).

Dans le second problème, nous conservons le contexte du lancer de deux dés équilibrés  $D_1$  et  $D_2$ . En prolongement du problème du duc de Toscane, nous nous attarderons sur la variable aléatoire produit  $D_1 \times D_2$  dont la loi n'est pas uniforme.

On lance deux dés cubiques en même temps et on fait le produit des faces. Lequel des deux résultats suivants a le plus de chances de se produire :

1. Le produit des faces vaut 9.
2. Le produit des faces vaut 10 (réponse correcte).
3. Les deux résultats ont la même chance (biais).

Ces deux problèmes n'ont pas été proposés dans la littérature à notre connaissance.

## Ordre

Un problème classique de type ordre est le problème des deux enfants, que nous étudierons en détail dans la suite.

M. Smith dit "J'ai deux enfants dont un au moins est un garçon". Que vous semble-t-il le plus probable :

1. L'autre enfant est un garçon.
2. L'autre enfant est une fille (réponse correcte).
3. Les deux cas sont autant probables (biais).

Sous des formulations diverses, il a été utilisé à de nombreuses reprises pour étudier le biais d'équiprobabilité, notamment par Bar-Hillel et Falk (1982), Fox et Levav (2004), Morsanyi et al. (2012). Le biais d'équiprobabilité se manifeste lorsque l'élève confond la notion de paire (ensemble non ordonné) à celle de couple (ensemble ordonné).

Ce problème fera notamment l'objet d'une activité en 2<sup>nde</sup> et en 1<sup>ère</sup>. Dans le questionnaire post-test, nous proposerons à nouveau ce problème afin de voir la trace laissée par l'étude de ce paradoxe. Afin d'éviter des réponses uniquement motivées par la mémorisation, nous transférons également l'énoncé dans un contexte de tirage dans une urne par le problème suivant (Morsanyi et al., 2012).

Dans un sac, il y a 1 Lego rouge et 1 Lego jaune. Je pioche un Lego. Dans un autre sac, il y a 1 boule rouge et 1 boule jaune. Je pioche une boule. Je vous informe qu'au moins l'un des objets est rouge. Qu'est-il le plus probable :

1. J'ai tiré deux objets rouges.
2. J'ai tiré un objet de chaque couleur (réponse correcte).
3. Les deux situations sont équiprobables (biais).

L'analogie entre les deux problèmes est la suivante : le sexe correspond à la couleur et le rang de l'enfant dans la fratrie à la nature de l'objet.

## Biais de la taille de l'échantillon

Pour mesurer le biais de la taille de l'échantillon, on propose traditionnellement au sujet de comparer deux lois binomiales  $X_1$  et  $X_2$  de même paramètre  $p = \frac{1}{2}$  et de paramètre  $n$  différents. On demande alors de comparer  $P(X_1 \geq \lambda E(X_1))$  et  $P(X_2 \geq \lambda E(X_2))$  pour un paramètre  $\lambda$ .

Nous proposons ainsi le problème suivant, issu de Lecoutre et Fischbein (1998).

En lançant trois fois une pièce de monnaie, la chance d'obtenir au moins deux Face est :

1. Plus petite
2. Égale (biais)
3. Plus grande (réponse correcte)

comparée à la chance d'obtenir au moins 200 fois Face en 300 lancers.



En utilisant les coefficients binomiaux, on peut montrer que, sous réserve de considérer une pièce équilibrée, la probabilité d'obtenir au moins deux fois Face en trois lancers est  $\frac{1}{2}$  et obtenir au moins 200 fois Face en 300 lancers est d'ordre  $10^{-9}$ . Le calcul pour  $n = 200$  n'est bien entendu pas exigible des élèves de lycée. Néanmoins, l'intuition de la loi des grands nombres (confirmée par la théorie de l'échantillonnage abordée en 2<sup>nde</sup>) devrait suggérer que la fréquence se rapproche de la probabilité théorique lorsque la taille  $n$  de l'échantillon croît.

### Phénomène Falk

L'effet Falk a été mis en évidence à l'aide du problème suivant (Falk, 1979), que nous proposerons également aux élèves.

Leslie et Jérôme reçoivent chacun une boîte contenant deux boules blanches et deux boules noires.

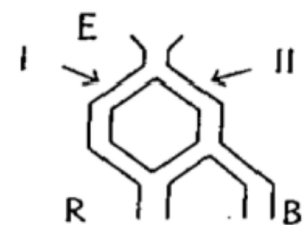
1. Leslie tire une boule de sa boîte et obtient une boule blanche. Sans remettre la première boule tirée, elle tire une seconde boule. La chance que cette seconde boule soit également blanche est :
  - (a) plus petite (bonne réponse),
  - (b) égale,
  - (c) plus grande comparée à la chance que ce soit une boule noire ?
2. Jérôme tire une première boule de sa boîte et la met de côté sans la regarder. Il tire ensuite une seconde boule et constate qu'elle est blanche. Est-ce que la chance que la première boule tirée soit blanche est :
  - (a) plus petite (bonne réponse),
  - (b) égale (biais majoritaire),
  - (c) plus grande comparée à la chance qu'elle soit noire ?

La formulation en deux étapes permet de s'assurer que le problème est dû à l'inversion de l'axe temporel : l'effet Falk se manifestera ainsi en cas de réponse (a-b). L'introduction du problème de Leslie permet de différencier l'effet Falk d'un biais d'équiprobabilité (b-b).

Il existe peu de problèmes révélateurs de l'effet Falk dans la littérature. Nous avons pu relever le problème suivant, dû à Ojeda (1996). Il nous a semblé intéressant de l'introduire dans un second temps, d'une part en raison de son impact sur notre propre raisonnement, d'autre part sur sa complémentarité avec le problème proposé initialement, que ce soit en termes de registre, de contexte et de formulation.

On lâche une boule à l'entrée E d'un labyrinthe vertical. La boule sort par l'issue R. Quelle est la probabilité qu'elle soit passée par le conduit I ?

1.  $\frac{1}{2}$
2.  $\frac{1}{3}$
3.  $\frac{2}{3}$
4. On ne peut pas savoir.



Soulignons enfin que la didactique des probabilités a montré l'influence de la formulation des questions (Maury, 1985) ou de l'énoncé (Huerta & Lonjedo, 2007) d'un problème sur sa résolution par un élève. Ceci justifie le caractère essentiel du travail préparatoire que nous venons de décrire et il faudra tenir compte de cet aspect lors de l'analyse des résultats.

## 2.3 Choix des paradoxes

Nous avons pu aborder la place centrale des paradoxes en mathématiques. Un grand nombre de ceux-ci ont trait aux statistiques ou aux probabilités. Leur formulation simple et relative à des situations concrètes ne sauraient toutefois cacher la technicité des outils permettant leur résolution. Parmi l'ensemble des situations contre-intuitives ayant trait aux probabilités, il convient de sélectionner celles dont la formulation favorisera l'intérêt des élèves et dont la résolution leur sera accessible, en cohérence avec le programme officiel. Par ailleurs, on veillera à proposer une hétérogénéité des situations rencontrées afin de diversifier les biais susceptibles d'être modifiés. Nous présentons ci-après les paradoxes qui seront abordés puis mentionnerons d'autres situations contre-intuitives en donnant des éléments justifiant leur retrait de l'étude.

### 2.3.1 Le problème du duc de Toscane

La naissance de la théorie des probabilités est indissociable du développement des jeux de hasard au XVI<sup>ième</sup> et XVII<sup>ième</sup> siècle. On peut considérer que deux problèmes de jeu ont préfiguré la création de la théorie classique des probabilités : le problème des partis et le problème du duc de Toscane. C'est le second qui nous intéresse ici car sa résolution par Galilée, bien qu'éditée tardivement, est antérieure à la correspondance entre Fermat et Pascal au sujet du problème des partis.

Au XVI<sup>ième</sup> siècle, l'un des jeux en vogue à la cour de Florence est le Passe-Dix. Il consistait à lancer trois dés cubiques et à faire la somme des nombres portés par les trois faces supérieures. Le Grand Duc de Toscane Cosme II avait observé le paradoxe suivant :

— le 9 et le 10 se décomposent chacun de 6 façons différentes, à savoir

$$9 = 6 + 2 + 1 = 5 + 3 + 1 = 5 + 2 + 2 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 3 + 3 + 3$$

$$10 = 6 + 3 + 1 = 6 + 2 + 2 = 5 + 4 + 1 = 5 + 3 + 2 = 4 + 4 + 2 = 4 + 3 + 3$$

— l'observation d'un grand nombre de lancers montre que la somme 10 est obtenue légèrement plus souvent que la somme 9.

Bien que cela soit loin d'être formalisé à cette époque, le duc de Toscane entrevoyait donc une contradiction de la loi des grands nombres : il y aurait équiprobabilité des sommes 9 et 10 selon le modèle cardinaliste mais pas selon l'approche fréquentiste.

Ce paradoxe a été résolu par Galilée 1898. Pour expliquer l'erreur du duc de Toscane, Galilée observe que la probabilité d'apparition de chaque triplet n'est pas la même selon la répétition ou non des faces :

Jusqu'ici se sont donc déclarés ces trois principes : premièrement, que les triplicités, c'est-à-dire le nombre de découvertes des trois dés, qui se composent de trois nombres égaux ne se produisent que d'une seule façon ; deuxièmement, que les triplicités qui naissent de deux nombres égaux et d'un troisième différent, se produisent en trois manières ; troisièmement, que ceux qui naissent de trois nombres tous différents, se forment en six manières.

Galilei, 1898, p. 593

Galilée conclut son exposé en dressant dans un tableau les 216 triplets possibles (ou plus précisément la moitié du tableau, l'autre s'obtenant par symétrie).

1																
3	<b>10</b>		<b>9</b>		<b>8</b>		<b>7</b>		<b>6</b>		<b>5</b>		<b>4</b>		<b>3</b>	
6																
10	6 3 1	6	6 2 1	6	6 1 1	3	5 1 1	3	4 1 1	3	3 1 1	3	2 2 1	3	1 1 1	1
15	6 2 2	3	5 3 1	6	5 2 1	6	4 2 1	6	3 2 1	6	2 2 1	3				
21	5 4 1	6	5 2 2	3	4 3 1	6	3 3 1	3	2 2 2	1						
25	5 3 2	6	4 4 1	3	4 2 2	3	3 2 2	3								
27	4 4 2	3	4 3 2	6	3 3 2	3										
108	4 3 3	3	3 3 3	1												
108		27		25		21		15		10		6		3		1
216																

FIGURE 7 – Lancers de trois dés possibles (Galilei, 1898, p. 594)

Sans parler de probabilités, et en observant que 27 triplets conduisent à la somme 10 contre 25 triplets à la somme 9, Galilée conclut que la somme 10 a davantage de chance de survenir.

Nous avons choisi d'utiliser ce problème en classe pour son potentiel d'action contre le biais d'équiprobabilité. C'est en effet ce biais qui est en jeu dans l'approche cardinaliste du duc de Toscane : il convient d'identifier quel univers pourra être muni de la loi uniforme, afin d'appliquer la formule de Laplace. Ce problème est donc idéal pour aborder la question du choix du modèle probabiliste et celle de l'équiprobabilité.

Soulignons que ce paradoxe historique permet également de s'intéresser à des objets centraux en combinatoire. D'une part, le duc de Toscane considère le nombre de partitions d'un entier  $n$  en trois parts, noté traditionnellement  $p(n, 3)$ , c'est-à-dire le nombre de triplets d'entiers strictement positifs  $(a, b, c)$  tels que  $a \leq b \leq c$  et  $a + b + c = n$ . De son côté, Galilée s'intéresse aux compositions en trois parts de l'entier  $n$ , c'est-à-dire au nombre de triplets d'entiers strictement positifs  $(a, b, c)$  tels que  $a + b + c = n$ . On peut montrer que le nombre de telles compositions de  $n$  en  $k$  parts est  $\binom{n-1}{k-1}$ . L'étude des partitions et des compositions peut être intéressante en activité de recherche pour des lycéens et font régulièrement l'objet d'ateliers MATH.en.JEANS en 2<sup>nde</sup>.

Ce paradoxe permettant de travailler sur le biais d'équiprobabilité, analysons de quelle classe de problèmes elle résulte, selon la typologie de Gauvrit (2013a). Une première approche erronée susceptible d'apparaître en classe est relative aux lois composées : nous nous intéressons ici à la loi  $X + Y + Z$  où  $X, Y, Z$  sont des variables aléatoires i.i.d de loi uniforme sur  $\{1, \dots, 6\}$ . Galilée mentionne cette erreur possible dans son analyse.

Que dans le jeu de dés, quelques-uns des points soient plus avantageux que d'autres, la raison en est très manifeste, qui est que l'un peut plus facilement et plus fréquemment être découvert que l'autre, laquelle dépend de la possibilité qu'ils ont de se former avec plusieurs sortes de nombres. Galilei, 1898, p. 591

Pour remédier à ce genre d'argument, on peut inviter les élèves à exhiber le nombre de

sorties possibles pour obtenir 3 ("Les trois dés valent 1") et obtenir 5 (c'est la réunion des événements "on obtient un 3 et deux 1" et "on obtient deux 2 et un 1").

À notre sens, l'erreur du duc de Toscane relève plutôt d'un problème d'ordre : il y a confusion entre listes et ensembles ou, de manière similaire, entre partitions et compositions. Pour remédier à cette particularité du biais, il convient de différencier les trois dés : Dé1, Dé2 et Dé3. Il faut être vigilant sur la manière dont cette individualisation des dés a lieu : on peut les colorier et les lancer simultanément, ou bien considérer trois lancers successifs d'un même dé. Afin de donner un rôle symétrique à chaque dé, nous privilégions un lancer simultané de trois dés discernables. Cela évite notamment un recours intuitif à du conditionnement et à une conception chronologiste qui risqueraient de perdre l'élève dans son raisonnement.

Attardons-nous enfin sur la présentation de ce problème dans les différentes ressources pédagogiques. D'une part, le programme officiel (voir annexe A) fait explicitement référence à ce paradoxe.

L'histoire des probabilités fournit un cadre pour dégager les éléments de la mathématisation du hasard. Un exemple est le problème des partis, dit aussi du chevalier de Méré, l'échange de lettres entre Pascal et Fermat sur ce point puis les travaux de Pascal, Fermat et Huygens qui en découlent. Le problème du duc de Toscane ou les travaux de Leibniz sur le jeu de dés peuvent aussi être évoqués.

On retrouve également la mention du problème du duc de Toscane dans les documents ressources Eduscol relatifs à la semaine des Mathématiques (2017, 2019). Il est donc naturel de retrouver ce problème dans la grande majorité des manuels de 2<sup>nde</sup>. Toutefois, le traitement de celui-ci et la mise en activité correspondante diffèrent d'un manuel à l'autre. Il fait l'objet :

- d'un problème ouvert dans Le Livre Scolaire,
- d'un TP en trois parties dans Déclic, MathX et Transmath : approche du duc de Toscane via la description des partitions en trois parts de 9 et de 10, simulation de l'expérience aléatoire à l'aide d'un tableur (Declic) ou d'un programme Python (MathX et Transmath) puis modélisation du problème à l'aide d'un arbre de probabilités,
- d'un exercice guidé dans Hyperbole, Indice et Metamath dans lesquels sont étudiés successivement les approches cardinalistes du duc de Toscane et de Galilée (à l'aide d'un arbre).

Il est intéressant de souligner que tous les manuels concluent en demandant à l'élève d'expliquer l'erreur commise par le grand-duc. Ils illustrent en cela le caractère paradoxal *a priori* de la situation et montrent que l'utilisation d'un modèle adéquat permet de résoudre des problèmes probabilistes historiques. Mentionnons qu'aucune ressource ne reproduit de passage de l'écrit de Galilée, ni ne propose le tableau de la figure 7. Par ailleurs, seuls deux ouvrages proposent de différencier les trois dés par la couleur (Transmath) ou par un numéro (Déclic). Dans la mesure où ce problème concerne le biais d'équiprobabilité et où la recherche illustre l'importance de recourir à une approche fréquentiste pour le diminuer, il est regrettable d'observer le faible nombre de manuels qui proposent une simulation pour aborder le problème.

### 2.3.2 Les paradoxes bayésiens

Le concept de probabilités conditionnelles est en général difficile à acquérir chez l'apprenant. Il s'agit d'une notion propice au biais d'équiprobabilité, à l'effet Falk ou au biais de négligence du taux de base. Bar-Hillel et Falk (1982) s'intéressent à une série de problèmes relatifs au conditionnement relevant de la même catégorie : ils étudient la probabilité pour deux éléments d'une paire de posséder une caractéristique étant donnée une information sur un des deux éléments. Ils s'attardent en particulier sur le problème des deux enfants, le problème des prisonniers et le problème des boîtes de Bertrand, que nous présentons ci-après. Bien que ces paradoxes soient relatifs à du conditionnement, il est possible de les résoudre sans recourir au formalisme de la théorie bayésienne des probabilités, en considérant des modèles appropriés.

Dans le cadre du programme de 2<sup>nde</sup>, l'étude de ces différents paradoxes permettra de travailler sur la modélisation d'une part et mettra en exergue l'importance de se méfier de la réponse intuitive d'autre part. En classe de 1<sup>ère</sup>, ils permettront de mettre en application les notions de probabilités conditionnelles et de voir l'efficacité de ce formalisme dans la résolution de problèmes. Cela permettra d'aborder une difficulté de cette notion, à savoir la sélection du paramètre de conditionnement. Bar-Hillel et Falk (1982) ont en effet souligné que cela constituait l'obstacle majeur des élèves dans le processus de modélisation.

Dans la continuité de cette étude, Fox et Levav (2004) établissent que la résolution d'un problème de conditionnement suit chez un grand nombre de sujets la stratégie suivante, notée PEC dans la suite :

1. *Partitionnement* : l'univers  $\Omega_1$  est partitionné en événements équiprobables,
2. *Édition* : les événements qui ne correspondent pas au problème sont retirés pour constituer un univers restreint  $\Omega_2$ ,
3. *Comptage* : le sujet dénombre les événements restants dans l'univers restreint, puis il applique la formule de Laplace dans cet univers  $\Omega_2$ , en ayant recours à une hypothèse implicite d'équiprobabilité.

Cette démarche semble être la plus spontanément utilisée, y compris chez les personnes disposant du formalisme des probabilités conditionnelles.

#### 2.3.2.a Le problème des deux enfants

La première catégorie de problème proposée s'inspire du paradoxe des deux enfants. Ce problème a été formulé pour la première fois par Gardner sous la forme suivante :

M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

M. Smith a deux enfants, dont au moins l'un est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

d'après Gardner (1961)

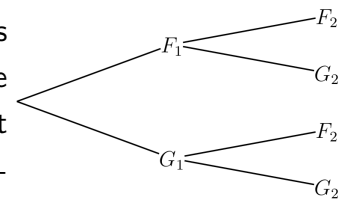
A priori, les deux énoncés du problème invitent à une réponse similaire : la probabilité d'avoir deux enfants de sexe opposé vaudrait  $\frac{1}{2}$  dans les deux cas. Cette réponse, correcte pour M. Jones, est erronée pour M. Smith, ce qui révèle le caractère paradoxal de la situation. Pour Gauvrit (2013a), la situation de M. Smith constitue un problème de type ordre susceptible de révéler le biais d'équiprobabilité chez les élèves.

Il convient d'explicitier les hypothèses de modélisation qui sont implicites dans l'énoncé. On suppose ainsi que chaque enfant peut être, de manière équiprobable, une fille ou un garçon. De plus, on imagine que les sexes des enfants sont indépendants d'un enfant à l'autre au sein d'une même famille (ce ne sont pas des jumeaux homozygotes). La notion d'indépendance n'étant pas formalisée en classe de 2<sup>nde</sup>, nous n'insisterons pas davantage sur cette hypothèse pour cette classe.

Dans la stratégie de résolution de type PEC, Fox et Levav, 2004 recensent trois univers initiaux  $\Omega_1$  possibles :  $\{F, G\}$  l'univers du sexe de l'"autre" enfant,  $\{FF, FG, GG\}$  l'univers sexe des deux enfants, sans relation d'ordre, et  $\{FF, FG, GF, GG\}$  l'univers du sexe des deux enfants, avec relation d'ordre. Soulignons que les deux premiers univers révèlent un biais d'équiprobabilité et conduisent à donner une réponse de  $\frac{1}{2}$  tandis que le dernier univers correspond à une modélisation correcte.

Pour notre part, nous complétons ces approches en proposant trois méthodes complémentaires de résolution du problème des deux enfants :

- simulation d'un grand nombre de tirages d'enfants parmi les familles à deux enfants. Ceci peut se faire à l'aide d'un tableur en utilisant les fonctions ALEA.ENTRE.BORNES(0 ; 1), SOMME et NB.SI, outils à la disposition des élèves au Lycée. Il est possible de créer un algorithme permettant de simuler un grand nombre de réalisations de ce problème à l'aide de Python ou de Geogebra (voir la figure 29).
- représentation de l'expérience aléatoire par un tableau à double entrée ou un arbre. Ceci permet de dénombrer les différentes issues élémentaires en vue d'appliquer la formule de Laplace. Cette approche relève de la stratégie PEC et favorise la considération d'un univers adéquat avec la distinction des issues  $(F_1; G_2)$  et  $(G_1; F_2)$ .
- utilisation de la définition des probabilités conditionnelles. Introduisons les événements  $G_1$  "Le premier enfant est un garçon" et  $G_2$  "Le deuxième enfant est un garçon". On a, par indépendance des événements  $G_1$  et  $G_2$ ,



$$P_{G_1 \cup G_2}(G_1 \cap G_2) = \frac{P(G_1 \cap G_2)}{P(G_1 \cup G_2)} = \frac{P(G_1 \cap G_2)}{P(\overline{G_1} \cap G_2)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

L'énoncé du problème des deux enfants est la source de nombreux débats qui s'ouvrent sur des formulations alternatives. Dans sa présentation du paradoxe, Delahaye (2005) observe ainsi que, en ajoutant une information supplémentaire (par exemple un prénom), le problème se

ramène à celui de M. Jones. Par ailleurs, le fait qu'"au moins un des enfants est un garçon" est régulièrement interprété par un sujet comme "seulement un enfant est un garçon" (M. Smith aurait dit "j'ai deux garçons" le cas échéant), ce qui sera vérifié au cours des expérimentations. Une formulation sous la forme "sachant que ce ne sont pas toutes les deux des filles" serait susceptible d'atténuer le caractère contre-intuitif du problème. Néanmoins, l'interprétation d'un énoncé fait partie intégrante du processus de modélisation, essentiel en probabilité.

Enfin, soulignons que ce qui précède s'applique à l'étude de *Pillow Problem n°5* de Lewis Carroll énoncé ci-après, dont le problème des 2 enfants (M. Smith) est une recontextualisation.

Un sac contient un jeton noir ou blanc. Un jeton blanc est ajouté dans le sac. Le sac est mélangé puis un jeton blanc est tiré du sac.

Quelle est la probabilité que le jeton restant soit blanc ?

d'après Carroll (1893)

### 2.3.2.b Le paradoxe de Monty Hall

Le paradoxe de Monty Hall est un problème présenté par Selvin, 1975 puis popularisé par vos Savant, 1990, dont nous considérons la version suivante.

À un jeu télévisé, on vous propose de choisir entre trois portes : derrière une porte se trouve une voiture ; derrière les autres, des chèvres. Vous choisissez une porte, disons la n° 1, et le présentateur, qui sait ce qu'il y a derrière les portes, ouvre une autre porte, disons la n° 3, qui est une chèvre. Il vous dit alors : "Voulez-vous choisir la porte n°2 ?"

Qu'en pensez-vous ?

La réponse au paradoxe de Monty Hall, guidée par l'intuition majoritaire, est de considérer que, puisqu'il ne reste que deux portes, la voiture a autant de chance d'être derrière l'une des deux portes. Une stratégie de type PEC se dessine implicitement derrière ce raisonnement par la considération de l'univers des portes susceptibles de cacher la voiture  $\Omega_1 = \{\text{porte 1, porte 2, porte 3}\}$ . À l'issue du choix d'une porte puis de la révélation d'une autre par le présentateur, l'erreur consisterait alors à considérer un univers restreint  $\Omega_2$  composé de deux portes. Peu importerait alors de changer ou non de porte et des études de psychologie montrent que les sujets conservent leur choix initial, par peur de regretter le choix initial (Krauss & Wang, 2003 ; Petrocelli & Harris, 2011).

Il apparaît toutefois que, s'il y a bien équiprobabilité sur  $\Omega_1$ , ce n'est plus le cas une fois révélée l'une des portes, dans  $\Omega_2$ . Là encore, plusieurs méthodes permettent de résoudre ce problème, avec ou sans le formalisme des probabilités conditionnelles :

- Un argument naturel pour justifier du bien-fondé de changer de porte repose sur un argument de symétrie : le changement de choix convertit un choix initialement perdant en choix gagnant (2 cas sur 3) et un choix initialement gagnant en choix perdant (1 sur 3). En revanche, avec le maintien de la porte, un choix initialement perdant reste perdant (2 cas sur 3) tandis qu'un choix gagnant demeure gagnant (1 cas sur 3). La

probabilité de gagner avec la stratégie de changement de porte est donc de  $\frac{2}{3}$  contre  $\frac{1}{3}$  avec maintien de la porte. Cette approche est détaillée dans Gauvrit et Morsanyi (2014). Cette approche peut se formaliser à l'aide des probabilités conditionnelles, en utilisant la formule des probabilités totales  $P(G) = P_B(G) \times P(B) + P_{\bar{B}}(G)P(\bar{B})$  avec  $P(B) = \frac{1}{3}$ . Une stratégie de conservation, modélisée par l'hypothèse  $P_B(G) = 0$  et  $P_{\bar{B}}(G) = 1$ , entraînera que  $P(G) = \frac{1}{3}$ .

- Il est possible d'associer à ce raisonnement un arbre de dénombrement (voir figure 8), au programme de 2<sup>nde</sup> afin d'énumérer l'ensemble des scénarios envisageables. Le premier niveau ( $v$ ) correspond à la distribution de la voiture derrière les portes, le second ( $j_1$ ) au choix initial du joueur, le troisième ( $a$ ) à la porte révélée et le dernier ( $j_2$ ) au choix final du joueur. Il convient d'être vigilant dans l'utilisation d'un tel arbre : tous les chemins ne sont pas équiprobables et il n'est pas possible d'utiliser directement la formule de Laplace. Un arbre de probabilités permet d'éviter cet écueil.

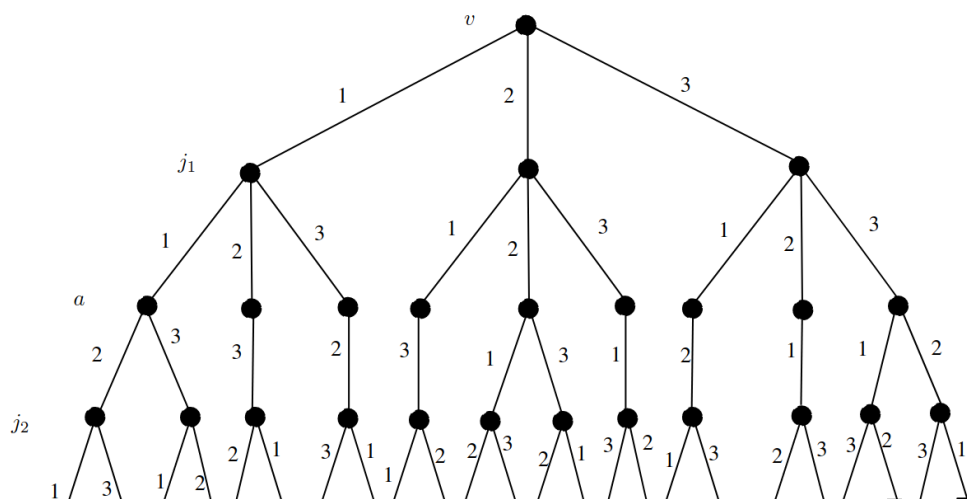


FIGURE 8 – Problème de Monty Hall - arbre des scénarios (Wehenkel, 2012, p? 2.20)

- l'utilisation des TICE permet de simuler le jeu de Monty Hall pour le faire vivre en classe. On note par exemple une cinquantaine d'applications Geogebra relatives à ce problème (voir par exemple la figure 31).
- il est enfin possible d'utiliser le théorème de Bayes pour calculer les probabilités recherchées. En notant  $F_i$  la probabilité que la voiture soit derrière la porte  $i$  et  $O_3$  la probabilité que le présentateur ouvre la porte 3, il vient par exemple

$$\begin{aligned}
 P_{O_3}(F_2) &= \frac{P(F_2) \times P_{F_2}(O_3)}{P(F_1) \times P_{F_1}(O_3) + P(F_2) \times P_{F_2}(O_3) + P(F_3) \times P_{F_3}(O_3)} \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Le problème de Monty Hall est conceptuellement et mathématiquement équivalent au problème des trois prisonniers.



Trois prisonniers sont dans une cellule. Ils savent que deux vont être condamnés à mort et un gracié, mais ils ne savent pas qui. L'un d'entre eux va voir le gardien et lui demande :

"Je sais bien que tu ne peux rien me dire, mais tu peux au moins me montrer un de mes compagnons qui sera exécuté."

Le gardien réfléchit, se dit que de toute manière au moins l'un des deux autres prisonniers sera condamné, et s'exécute. Le prisonnier lui répond alors :

"Merci, avant, j'avais une chance sur trois d'être gracié, et maintenant, j'ai une chance sur deux."

Qu'en pensez-vous ?

d'après Gardner (1961)

### 2.3.2.c Le paradoxe de la boîte de Bertrand

En 1889, Bertrand publie le *Calcul des probabilités* dans lequel il résume une série de leçons faites au Collège de France. C'est l'occasion pour lui d'y introduire deux paradoxes : le paradoxe des cordes de Bertrand et le paradoxe des boîtes de Bertrand. Nous nous intéressons ici au second paradoxe.

On dispose de trois urnes contenant respectivement deux pièces d'or, deux pièces d'argent et une pièce de chaque métal. On choisit une urne au hasard, puis on tire une pièce dans cette urne, toujours au hasard. La pièce sélectionnée est en or.

Quelle est la probabilité que la pièce restante dans l'urne soit en argent ?

d'après Bertrand (1889)

Là encore, l'intuition suggère une probabilité de  $\frac{1}{2}$ . En effet, la pièce étant en or, elle ne peut provenir que du sac contenant deux pièces d'or ou de celui contenant deux pièces différentes. Dans l'un des cas, la pièce restante est en or tandis qu'elle est en argent dans l'autre. Le résultat s'en déduirait par des considérations d'équiprobabilité sur l'univers des pièces restantes possibles  $\Omega = \{\text{Or}; \text{Argent}\}$ . Cette approche résulte du biais d'équiprobabilité, qui s'exprime ici dans un problème de type ordre. On peut aussi considérer que le phénomène Falk est en œuvre : le problème se ramène à déterminer le sac initialement tiré, connaissant l'une des pièces contenues et donc à inverser l'axe passé-futur.

Ce problème a été repris par Bar-Hillel et Falk (1982), puis Fox et Levav (2004) dans leurs études sur la modélisation du conditionnement en probabilités sous la formulation suivante :

Trois cartes sont dans un chapeau. Une a les deux côtés rouges, une autre les deux côtés blancs et la dernière un côté de chaque couleur (rouge et blanc). Une carte est tirée puis posée sur une table.

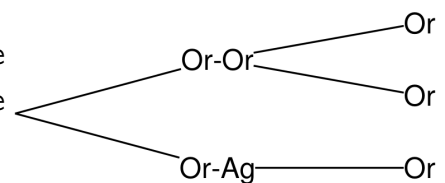
Sachant que la face visible est rouge, quelle est la probabilité que la face cachée soit également rouge ?

Fox et Levav estiment que le biais d'équiprobabilité résulte d'une stratégie PEC dans laquelle l'étape de partitionnement est erronée. Implicitement, l'élève considère dans ce cas l'univers  $\{\text{Or-Or}; \text{Or-Ag}; \text{Ag-Ag}\}$  et ne différencie pas les pièces de même couleur. Il est possible de corriger cette approche en introduisant l'univers  $\Omega_1 = \{\text{Or}_1; \text{Or}_2; \text{Or}_3; \text{Ag}_1; \text{Ag}_2; \text{Ag}_3\}$  où  $\text{Or}_1$  et  $\text{Or}_2$  désignent les pièces d'un sac,  $\text{Or}_3$  et  $\text{Ag}_1$  celles d'un autre sac et  $\text{Ag}_2$  et  $\text{Ag}_3$  celles du dernier sac. Compte tenu de l'information sur la pièce tirée, le problème se ramène à considérer l'univers restreint  $\Omega_2 = \{\text{Or}_1; \text{Or}_2; \text{Or}_3\}$  pour le choix de la pièce tirée, ce qui permet de déduire la couleur de la pièce restante.

Là encore, des stratégies complémentaires permettent d'arriver au résultat correct :

- la simulation d'un grand nombre de tirages est possible, y compris par une réalisation réelle de l'expérience aléatoire, contrairement au problème des deux enfants. Nous avons développé une application Geogebra afin de réaliser cela (voir la figure 33). L'inclusion de compteurs permet également de réaliser des statistiques en vue de recourir à l'approche fréquentiste. Notons que la modélisation de la situation par un tableur, quoique possible, relève d'un degré de complexité plus avancé que dans le cas des 2 enfants.

- la situation peut-être représentée à l'aide de l'arbre de dénombrement suivant. Il s'agit là encore d'une modalité relevant de la démarche PEC.



- le recours aux probabilités conditionnelles permet également d'obtenir la probabilité correcte. Considérons l'événement  $A$  "La pièce tirée est en Or",  $B$  "Le sac choisi contient 2 pièces différentes",  $C$  "Le sac choisi contient 2 pièces d'Or" et  $D$  "Le sac choisi contient 2 pièces d'Argent", on montre que  $P_A(B) = \frac{1}{3}$  en appliquant la formule de Bayes :

$$P_A(B) = \frac{P(B) \times P_B(A)}{P(B) \times P_B(A) + P(C) \times P_C(A) + P(D) \times P_D(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0}$$

### 2.3.3 Autres paradoxes probabilistes

Au cours du travail préparatoire, d'autres problèmes contre-intuitifs de probabilité ont été abordés, mais n'ont pas fait l'objet d'une expérimentation en classe.

Le paradoxe de la corde de Bertrand constitue un véritable paradoxe au sens de la logique mathématique.

Étant donné un triangle équilatéral inscrit dans un cercle, quelle est la probabilité qu'une corde du cercle tirée au hasard soit de longueur plus grande qu'un côté du triangle ?

(Bertrand, 1889, p. 5)

Selon le protocole considéré pour la construction d'une corde (à partir des extrémités de la corde, à partir du milieu de la corde), on est amené à étudier des espaces probabilisés différents. Chacune de ces hypothèses de modélisation conduit à une distribution des milieux

différentes, et donc à des réponses diverses au problème de Bertrand. Ce paradoxe souligne l'importance de préciser les arguments conduisant à la sélection d'un modèle probabiliste. Une approche fréquentiste de ce problème peut être réalisée dès la classe de 2<sup>nde</sup> à l'aide de l'outil informatique. Néanmoins, une approche théorique rigoureuse nécessite de disposer des lois de probabilités continues, introduites en classe de T<sup>ale</sup> à la suite du calcul intégral. Par ailleurs, son potentiel d'action sur les biais cognitifs nous a paru moins marqué que les autres paradoxes. En effet, la complexité de ce problème réduit le champ des réponses intuitives. Le caractère perturbant de ce problème, nécessaire à la diminution des biais, s'en trouve en conséquence restreint.

Le paradoxe de Simpson (1951) constitue un exemple classique de problème contre-intuitif avec lequel l'esprit humain échoue même après une étude approfondie. Ce paradoxe peut-être énoncé dans le cadre théorique suivant. On considère deux événements  $A$  et  $B$  sur un espace probabilisé  $(\Omega, P)$  et l'on cherche à étudier la corrélation entre ces événements.

Supposons qu'il existe un événement  $C$  tel que d'une part  $P_{A \cap B}(C) > P_{A \cap B}(\bar{C})$   
 et d'autre part  $P_{\bar{A} \cap B}(C) > P_{\bar{A} \cap B}(\bar{C})$ . A-t-on nécessairement  $P_B(C) \leq P_B(\bar{C})$  ?

On pourrait supposer que ce paradoxe illustre le biais de négligence de la taille de l'échantillon. Il semblerait toutefois qu'il soit davantage relatif à une heuristique issue du *Sure-Thing Principle* : si  $A$  implique  $B$  et non  $\bar{A}$  implique  $B$ , alors  $B$  est vrai. Une application erronée de ce principe au problème de Simpson conduirait à donner une réponse positive. Il apparaît toutefois que  $P_B(C) > P_B(\bar{C})$  dans environ 1,92 % des situations (en particulier lorsque  $P(A)$  et  $P(\bar{A})$  sont très différentes). Nous avons initialement envisagé d'inclure ce paradoxe dans notre expérimentation. Sa formulation dans un contexte statistique permet de travailler le calcul fractionnaire et la manipulation de pourcentages, inclus dans le chapitre *Information chiffrée* en classe de 2<sup>nde</sup>. De plus, il est directement lié aux probabilités conditionnelles au programme de 1<sup>ère</sup>. Nous avons pour cela prévu une activité en classe puzzle, où chaque membre d'un groupe devait étudier une situation révélatrice du paradoxe de Simpson (voir l'annexe F). La réalisation de l'activité en classe de 2<sup>nde</sup> a été source de confusions chez les élèves qu'il n'a pas été possible de lever dans le temps disponible. Il ne nous a pas semblé pertinent d'en tenir compte lors de l'analyse de nos travaux. Le problème n'a par ailleurs pas été abordé en classe de 1<sup>ère</sup>. Le lecteur intéressé pour approfondir ce paradoxe pourra consulter l'article de Delahaye (2013) ou l'application Setosa qui utilise la visualisation de données pour illustrer le phénomène.

Enfin, le paradoxe de Condorcet (1785) peut-être énoncé sous la forme suivante.

Étant données trois variables aléatoires réelles  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  définies sur  $\{1, \dots, n\}$   
 telles que  $P(Y \geq X) \geq \frac{1}{2}$  et  $P(Z \geq Y) \geq \frac{1}{2}$ . A-t-on  $P(Z \geq X) \geq \frac{1}{2}$  ?

Une heuristique de transitivité de la relation d'ordre pourrait laisser penser qu'il est en effet probable que  $Z \geq X$  : si  $Z$  l'emporte souvent devant  $Y$  et  $Y$  l'emporte souvent devant  $X$ , il semble probable que  $Z$  l'emporte souvent devant  $X$ . Ce n'est en général pas le cas, pour environ 8,7% des cas (si  $n$  est grand). On pourra pour s'en convaincre considérer le cas de

variables  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  de lois uniformes respectivement sur  $\{1;6;8\}$ ,  $\{3;5;7\}$  et  $\{2;4;9\}$ . Ce paradoxe présente l'avantage de pouvoir être traité dès la classe de 2<sup>nde</sup> en ayant recours à des tableaux à double entrée. En 1<sup>ère</sup>, il permet de manipuler les notations propres aux variables aléatoires. Toutefois, la nature du biais probabiliste en jeu semble moins évidente que dans les problèmes traités en classe. Nous envisageons d'évoquer ce paradoxe en fin d'année, afin de faire le lien avec l'actualité électorale et de participer ainsi à l'éducation à la citoyenneté des élèves.

## 2.4 Description de la séquence en 2<sup>nde</sup>

Le travail sur les paradoxes en classe de 2<sup>nde</sup>, présentées ci-après, se déroulent à la fin du chapitre intitulé *Probabilités*. Les élèves sont à l'aise avec l'approche fréquentiste et avec l'approche cardinaliste. Cette dualité des approches a été abordée à travers l'activité du lancer de cauri, décrite par Parzysz (2011), et l'étude d'une marche aléatoire sur le tétraèdre (voir le problème de la fourmi de l'équipe DREAMaths). La notion d'équiprobabilité a été explicitée, manipulée et institutionnalisée. Le tableur a déjà été utilisé pour simuler un grand nombre d'expériences aléatoires.

Nous veillons à diversifier les modalités des situations d'apprentissage pour l'étude des paradoxes : problème ouvert avec prise d'initiative, travail oral de groupe, classe puzzle. Ceci permet de donner du rythme à la séquence et de profiter des avantages propres à chacune des stratégies pédagogiques.

### 2.4.1 Le problème du duc de Toscane

Le problème du duc de Toscane constitue le premier paradoxe étudié dans la séquence. Nous structurons la séance de la manière suivante, en nous appuyant sur le diaporama présenté en annexe C :

- Présentation de la séance et des objectifs (5 min). La séance est présentée comme la partie intégrante d'une étude scientifique sur les conceptions et démarches des élèves face à des paradoxes. Un bref échange sur la définition de paradoxe peut être mené. Des feuilles de brouillon sont distribuées à chacun, qui seront ramassées en fin d'heure. La classe étant habituée aux travaux de groupe, il conviendra d'insister sur le caractère individuel de la séance.
- Présentation de la situation aléatoire (5 min). La vidéoprojection de la première diapositive permet de présenter le problème aux élèves, sous l'énoncé court suivant.

Le jeu de passe-dix consiste à lancer trois dés et à miser sur la somme des faces.

Est-il plus probable d'obtenir 9 ou 10 ?

En invitant les élèves à reformuler le problème, on s'assurera de la bonne compréhension des élèves. De plus, on invitera quelques élèves à réaliser l'expérience aléatoire correspondante à l'aide de trois dés homochromes. La réalisation du lancer est projetée pour

- l'ensemble de la classe à l'aide d'un visualiseur. Cette manipulation, phase préliminaire à toute activité mathématique, facilitera la dévolution des élèves.
- Phase de recherche individuelle (10 min). Les élèves réfléchissent individuellement sur le problème. L'enseignant passe dans les rangs pour identifier les différentes procédures. Il encourage les élèves pour lesquels la mise en activité est difficile, particulièrement en situation de recherche. Ce sera aussi l'occasion de vérifier auprès des élèves allophones ou issus des outre-mers la bonne compréhension du problème.
  - Présentation d'une première modélisation (5 min). Ayant identifié les productions relatives à l'utilisation d'un modèle équiprobable sur l'univers  $\{3; 4; \dots; 17; 18\}$ , l'enseignant vidéoprojette la seconde diapositive, en invitant le reste de la classe à décrire le raisonnement utilisé. Les élèves ayant proposé une équiprobabilité sur un univers à 16 issues valident le raisonnement. La classe est invitée à commenter la pertinence de ce résultat : il n'y a qu'une seule manière d'obtenir 3 (trois dés de 1) mais plusieurs manières d'obtenir 9 (un dé de 6, un dé de 2 et un dé de 1 ou trois dés de 3 par exemple). On recense par un sondage les élèves ayant adopté cette stratégie et, par la reformulation, on s'assure qu'ils aient compris le défaut du modèle.
  - Phase de recherche individuelle (10 min). Les élèves sont invités à continuer leur recherche. On demandera aux élèves pensant avoir résolu le problème à rédiger une solution détaillée et autocontenue.
  - Présentation d'une seconde modélisation (10 min). L'enseignant interroge un élève ayant mis en place le raisonnement du duc de Toscane, puis sonde la classe pour savoir qui a suivi la même stratégie. Il projette un portrait du duc de Toscane (troisième diapositive) qui présente la démarche correspondante. Il propose alors de confronter ce résultat à la réalisation d'un grand nombre d'expériences (quatrième diapositive). Il demande aux élèves si une dizaine de lancers est significative, puis interroge sur une manière de procéder afin de disposer de données pertinentes (réalisation effective ou simulation). L'enseignant résume les résultats d'une simulation sous la forme d'un diagramme en barres puis attendra le calcul des fréquences observées et l'observation de la symétrie. On demandera aux élèves de rappeler le lien entre fréquences et probabilités théoriques. Enfin, les élèves ayant mis en place la stratégie de Galilée expliquent l'erreur commise par le duc de Toscane.
  - Phase de recherche individuelle (5 min). Les élèves étudient cette dernière stratégie en dressant la liste des issues favorables puis en calculant les probabilités correspondantes.
  - Phase de mise en commun (5 min). L'enseignant demande aux élèves comment ils ont pu lister les issues favorables. C'est l'occasion de rappeler la notion d'arbre de dénombrement à la classe, même si le tracé de l'arbre complet est fastidieux. On demandera notamment s'il est pertinent de tracer tout l'arbre en étudiant : cela invite à limiter le nombre de nœuds terminaux. Enfin, on vidéoprojette la dernière diapositive dans laquelle l'univers est explicité et l'équiprobabilité validée.
- À l'issue de cette phase de mise en commun, il sera demandé aux élèves de lire à la maison

le cours correspondant aux expériences à plusieurs épreuves et aux arbres de dénombrement. Une mise en application directe du cours s'effectue par l'exerciceur en ligne Labomep puis par des exercices du manuel relatif aux tirages de boules numérotées avec remise (Sesamath, exercice 119 p. 337).

On peut se questionner sur l'intérêt pédagogique de recourir à un diaporama plutôt que de s'appuyer sur des productions d'élèves dans cette activité. Ceci est motivé par l'activité proposée sur l'étude des paradoxes bayésiens (voir infra) qui nécessite de montrer aux élèves une présentation d'un paradoxe et sa résolution sous la forme d'un diaporama, afin de présenter un exemple de livrable attendu par l'enseignant.

#### **2.4.2 Les paradoxes bayésiens**

À travers une formulation simple et courte, les paradoxes bayésiens incitent généralement au recours de la voie rapide, intuitive et émotionnelle de la pensée (Kahneman, 2012). Néanmoins, leur résolution nécessite un traitement du problème par la voie lente, réfléchie et logique. Il nous a semblé intéressant de mettre en exergue cette dichotomie.

Décrivons la scénarisation pédagogique envisagée afin de travailler ces paradoxes en classe de 2<sup>nd</sup>e. Chaque demi-groupe de la classe est séparé en cinq groupes constitués par l'enseignant de manière à assurer une mixité de genre, une pluralité culturelle et une diversité dans l'orientation en 1<sup>ère</sup> et les niveaux de maîtrise. Chaque groupe a en charge l'étude d'un paradoxe bayésien parmi les suivants : problème des deux enfants, Pillow problem n°5, problème du prisonnier, problème de Monty Hall, problème de la boîte de Bertrand. Les groupes sont formés de trois élèves pour le problème des deux enfants et le Pillow problem n°5 et de quatre élèves pour les autres problèmes, les deux premiers étant conceptuellement plus faciles à aborder et plus simples à résoudre. Il est généralement accepté que ces tailles de groupe sont optimales pour une bonne implication de chacun et une collaboration efficace : le travail ne peut être effectué que par un investissement de chacun. Cela renforce le sentiment de responsabilité de l'élève, levier de la motivation intrinsèque.

Au début du chapitre, un lien hypertexte vers une application Geogebra (voir l'annexe D) a été communiqué aux membres de chaque groupe afin qu'ils s'approprient le problème. L'application fournit un cadre favorisant la dévolution et la manipulation par les élèves. Elle permet également de faire émerger le caractère paradoxal et d'orienter les élèves vers la résolution. Ces applications sont adaptées d'un travail de Jean-Paul Berroir, enseignant en lycée dans l'académie d'Aix-Marseille. Il a notamment fallu adapter le contexte, étant initialement celui de Monty Hall. Le code informatique (variables, boucles, etc...) a dû être modifié en conséquence. L'icône ? donne un énoncé du problème. Le bouton Nouvelle Partie permet de générer une nouvelle simulation, tandis que le bouton Remise à Zéro réinitialise les compteurs. Ces derniers permettent de mémoriser le nombre de réalisations de chaque issue, ainsi que le nombre de simulations totales, ce qui peut-être utilisé pour estimer les probabilités à travers l'approche fréquentiste.

Les élèves disposent enfin d'un temps de trois semaines pour étudier le problème. Au

cours de cette période, les élèves s'organisent pour mettre en place des temps de travail en groupe hors classe, ce qui sera favorisé par l'absence de plusieurs enseignants. Ils peuvent également échanger avec l'enseignant à l'issue des diverses séances de Mathématiques ou par la messagerie académique. Cela permet de faire des points d'étapes réguliers. De manière récurrente, l'enseignant rappellera l'échéance en classe entière ainsi que sa disponibilité en cas de besoin.

Ce travail fera l'objet d'une évaluation. Afin d'illustrer les attendus, un diaporama a été utilisé par l'enseignant pour présenter le paradoxe du duc de Toscane (voir l'annexe C). La structure attendue est la suivante :

1. Présentation du problème (énoncé) et du contexte historique,
2. Description de l'approche naïve ou intuitive,
3. Résolution du problème par l'approche fréquentiste,
4. Résolution du problème par l'approche théorique.

La grille d'évaluation, fournie aux élèves, est présentée à l'annexe E. Il est demandé aux élèves de déposer sur l'Espace Numérique de Travail les différents diaporamas au plus tard la veille de la présentation orale.

Les présentations se déroulent en séance en demi-classe, en conclusion de la séquence, selon le déroulement suivant :

1. concertation par groupe (5 min). Les élèves n'étant pas habitués à ce type d'activité en contexte scientifique, ce temps permettra à chacun de se rassurer en relisant ses notes avant la présentation. S'il y a lieu, des modifications de dernière minute dans la répartition des rôles pourront être effectuées. La groupalité pourra ainsi s'en trouver renforcée.
2. rappel des consignes (5 min). L'enseignant rappelle les règles préalables à toute présentation en classe : une écoute respectueuse du groupe conférencier et une prise de note active des différentes idées présentées. Ceci contribue à instaurer un climat scolaire serein et participe à l'éducation émotionnelle et relationnelle des élèves.
3. passage des groupes (5×8 min). Le groupe dispose de 6 à 7 minutes pour exposer son travail. À l'issue de cette présentation, le reste de la classe et l'enseignant sont invités à poser des questions, que ce soit de compréhension ou de méthodologie. Deux minutes de battement sont prévues pour permettre de mettre en place le matériel du groupe suivant.

La modalité d'apprentissage proposée permet de faire découvrir aux élèves deux facettes du métier de mathématicien.ne en adoptant successivement le statut de conférencier et celui d'auditeur. Par ailleurs, elle prépare les élèves au Grand Oral de spécialité de T<sup>alé</sup>, en particulier les deux premiers temps, à savoir la présentation d'une question et le temps d'échange avec le jury. À ce titre, nous avons repris des items de la grille d'évaluation indicative (B.O. spécial n°2 du 13 février 2020). Le caractère sommatif de l'évaluation invite l'élève à adopter une

posture sérieuse, à maintenir un investissement continu et à développer une gestion du stress. En complément des compétences mathématiques travaillées, la mise en place du travail de groupe permet à l'élève de développer des compétences socio-comportementales (confiance, coopération, autonomie).

## 2.5 Description de la séquence en 1<sup>ère</sup>

Le chapitre intitulé *Probabilités conditionnelles* a été traité au mois d'octobre, à l'exception de la notion d'indépendance. L'expérimentation débute en amont de l'introduction de l'indépendance et se poursuit jusqu'à la fin du chapitre *Variables aléatoires*.

Pour des raisons d'alignement pédagogique, les activités proposées en classe de 1<sup>ère</sup> diffèrent de celles réalisées en 2<sup>nde</sup> décrites précédemment. Ceci permettra de comparer l'efficacité des modalités utilisées dans les deux niveaux, en tenant compte néanmoins de la différence intrinsèque des publics.

### 2.5.1 Le problème du duc de Toscane

Pour introduire la notion de variable aléatoire, nous avons proposé une activité autour du problème du duc de Toscane (voir l'annexe G) inspirée d'une ressource disponible sur le site de Numworks. En considérant le lancer de trois dés comme trois épreuves successives, il est naturel de considérer la somme des faces comme variable aléatoire discrète. Soulignons que la somme d'un lancer de dés est utilisée comme activité introductive des variables aléatoires dans la majorité des manuels étudiés : Lelivrescolaire (p. 308), Declic (p. 342), Variations (p. 314), Metamath (p.270).

Le déroulement de la séance est le suivant :

1. Présentation de l'activité et des objectifs (5 min). L'enseignant explique aux élèves qu'un nouvel objet et de nouvelles notations vont être introduits. Le chapitre consistera à les appréhender en gardant en fil rouge les jeux de hasard. Intuitivement, les variables aléatoires ont permis de formaliser la notion de gain algébrique d'un jeu et donc de comparer des stratégies. Nous partons de l'hypothèse que cette approche par les sciences du jeu favorisera la dévolution des élèves.
2. Étude du lancer de deux dés. Afin d'amorcer le travail, nous proposons d'étudier un problème relatif aux lois composées.
  - (a) Explication des modalités de la classe puzzle (5 min). Les élèves ne sont pas familiers de ce type d'activité. Les consignes sont projetées, discutées puis reformulées par les élèves.
  - (b) Phase de recherche des experts (20 min). Par groupe de quatre élèves, les élèves vont travailler sur l'une des stratégies d'étude (cardinaliste ou fréquentiste) présentées à l'annexe G. Les élèves qui envisagent de continuer la spécialité mathématique en T<sup>ale</sup> sont invités à réaliser sur leur calculatrice la simulation de l'expérience aléatoire



avec Python. L'enseignant s'assure du bon fonctionnement de l'activité et donne des pistes, si nécessaires, aux groupes en difficulté.

- (c) Mise en commun des groupes experts (10 min). De nouveaux groupes de quatre élèves (deux par stratégie) sont à nouveau constitués. Les experts expliquent le fruit de leur recherche au reste du groupe puis comparent les résultats selon chaque méthode.
  - (d) Synthèse en plénière (10 min). Les résultats de chaque groupe sont réalisés en classe entière. La notion de variable aléatoire est définie dans le cours, puis un exemple relatif au nombre de Pile lors de lancers successifs d'une pièce équilibrée est considéré.
3. Étude du problème du duc de Toscane.

- (a) Présentation du problème (10 min). L'enseignant énonce le problème et présente le contexte historique.

Grand amateur de jeu, le duc de Toscane interpelle Galilée sur un curieux résultat qu'il obtient aux dés. En effet, il fait les observations suivantes :

- Il existe autant de façons d'obtenir par la somme de trois dés les nombres 9 et 10.
- Le nombre 10 est obtenu plus fréquemment que le nombre 9.

L'enseignant peut effectuer un sondage à main levée pour déterminer l'ancrage de l'équiprobabilité chez les élèves.

- (b) Étude du problème en groupe (15 min). Par groupe de quatre, les élèves vérifient chaque affirmation du duc de Toscane, en dressant la liste des partitions en trois parts de 9 et de 10, puis en adaptant le programme Python précédemment étudié au cas de trois lancers.
- (c) Synthèse en plénière (15 min). Les approches des différents groupes sont mises en commun puis comparées. Pour chaque partition, le nombre de combinaisons est précisé. L'enseignant explicite l'importance de tenir compte de l'ordre et explique que ce sera abordé en détail en T<sup>ale</sup> : l'étude de tels problèmes constitue une branche des mathématiques nommée combinatoire.

### 2.5.2 Les paradoxes bayésiens

Nous étudions également quelques paradoxes bayésiens en classe de 1<sup>ère</sup>, à savoir le problème des deux enfants, le problème de Monty Hall et le paradoxe de Bertrand. L'étude d'un problème se réalise sous la forme d'un rituel filé sur deux séances :

1. Présentation du problème (Séance 1 - 10 min). L'expérience aléatoire est présentée au tableau en vidéoprojetant l'application Geogebra correspondante (voir l'annexe D). Il est demandé à plusieurs élèves d'effectuer une réalisation de l'expérience aléatoire en utilisant l'outil fourni. Cette phase de manipulation permet de s'assurer la bonne compréhension du problème.

2. Sondage *a priori* de la classe (Séance 1 - 5 min). L'enseignant demande aux élèves ce qu'ils pensent du problème évoqué. Le faible nombre de simulations ne leur permet pas de recourir à la loi des grands nombres. Quelques justifications orales sont proposées par des volontaires s'il y a lieu.
3. Étude facultative du paradoxe hors classe. Un lien vers l'application est déposé dans le cahier de texte numérique. Il est demandé à ceux qui le souhaitent de réaliser quelques simulations chez eux et de réfléchir à nouveau au problème.
4. Rappel du problème (Séance 2 - 5 min). L'application Geogebra est à nouveau projetée afin d'activer la trace mnésique. Deux élèves sont invités à effectuer une simulation. Cela permet d'attendre d'éventuels retardataires tout en proposant une mise en activité originale au reste du groupe.
5. Débat scientifique pour résoudre le problème (Séance 2 - 15 min). Un nouveau sondage de la classe est effectué ce qui permet à l'enseignant d'apprécier l'évolution des conceptions. Les élèves proposent des stratégies de résolution. Chacun est invité à développer son argumentation en utilisant le tableau pour support, si nécessaire. Les élèves, ou l'enseignant, questionnent les différentes argumentations. Cet exercice de maïeutique se poursuit jusqu'à obtenir l'adhésion d'une majorité au sein de la classe. Cela permet d'illustrer la notion de résistance psychologique à des argumentations scientifiques.

Cette approche des probabilités bayésiennes partage le même objectif que la séance analogue en classe de 2<sup>nde</sup> : s'exercer à l'argumentation, expérimenter le débat d'idées, développer des compétences socio-comportementales. Cela participe également à la préparation du Grand Oral en classe de T<sup>ale</sup>, dont nous rappelons les modalités lors des séances.

### 3 Analyse de l'expérimentation

Nous présentons à présent les différents résultats obtenus à l'issue de notre protocole d'expérimentation. Nous étudions tout d'abord le déroulement de chaque activité, en insistant sur les productions d'élèves en classe de 2<sup>nd</sup>e. Nous étudions ensuite les résultats aux questionnaires pré-test et post-test. L'analyse des résultats pré-test en classe de 1<sup>ère</sup> nous permettra notamment de disposer d'un échantillon représentatif d'élèves ayant suivi un cours traditionnel de probabilités de 2<sup>nd</sup>e, c'est-à-dire dans lequel les paradoxes n'occupent pas une place centrale. Nous comparerons les résultats obtenus avec ceux de la littérature et insisterons sur l'évolution des conceptions des apprenants entre le début et la fin de l'expérimentation.

#### 3.1 Analyse des séances sur les paradoxes

##### 3.1.1 Le problème du duc de Toscane en classe de 2<sup>nd</sup>e

La séance, prévue en classe entière, se tiendra avec un effectif réduit (28 élèves), compte tenu des difficultés d'acheminement des élèves pour raisons météorologiques. Il est explicité aux élèves que la séance n'est pas évaluée et qu'ils ont droit à l'erreur. La distribution de copies de brouillon permet de travailler a posteriori sur les productions des élèves pour étudier les stratégies et conceptions en œuvre. Nous en décrivons quelques-unes ci-dessous, caractéristiques de ce qui a pu être observé sur l'ensemble de la classe.

Certains élèves dont les jeux de dés ne semblaient pas relever de la culture, ont eu beaucoup de difficultés à rentrer dans l'activité et ont nécessité un suivi plus marqué de la part de l'enseignant (manipulation de dés, pistes de réflexion, etc.). Néanmoins, l'ensemble de la classe est rentrée de manière volontaire dans l'activité. La classe étant habituée aux travaux de groupe, il a fallu préciser à plusieurs reprises que les temps de recherche étaient individuels.

On a pu relever sur quelques copies un biais d'équiprobabilité de type loi composée, comme l'illustre la figure ci-contre. Un univers (somme des faces) est précisé. L'hypothèse d'équiprobabilité n'est pas explicitée bien que l'élève ait manifestement recours à la formule de Laplace.

$$\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$$

$\frac{1}{16}$  d'avoir 9 ou 10 -

FIGURE 9 – Univers des sommes

Une majorité des élèves reproduit spontanément l'erreur du duc de Toscane. On l'observe sur les copies reproduites aux figures 10 et 11. À défaut de manipulation pour dénombrer l'ensemble des combinaisons, certains ont recours à des figures de dés tandis que d'autres se ramènent spontanément à l'étude des partitions d'un entier en trois parts. Il est intéressant de voir qu'une grande majorité des élèves choisit d'ordonner de manière décroissante les parts de chaque partition. On pourrait s'attendre à ce que l'écriture numérale, par automatisation de l'associativité de la somme, soit propice à la stratégie du duc de Toscane. Ce n'est pas le cas puisque la moitié des copies relatives à cette conception sont figuratives.

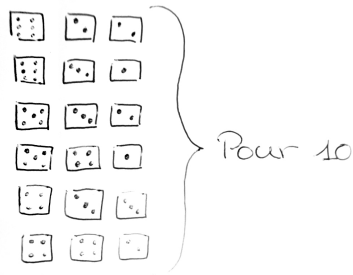


FIGURE 10 – Partition en 3 parts (représentation figurative)

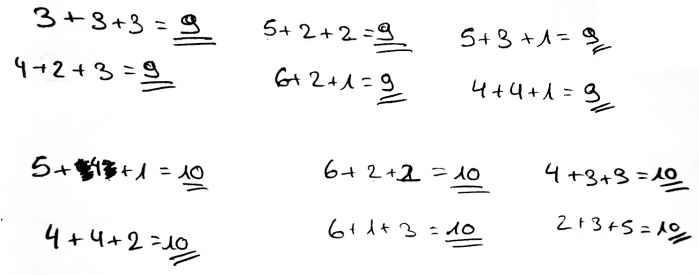


FIGURE 11 – Partition en 3 parts (représentation numérale)

Deux types de stratégies sont à mettre en parallèle et concernent le transfert des partitions aux combinaisons ou le transfert réciproque. Dans le premier cas (figure 12), l'élève liste les partitions possibles en somme de trois parts. Sous l'intuition implicite que les partitions ne constituent pas des issues équiprobables, l'élève dénombre le nombre de lancers de trois dés pouvant conduire à chaque partition. Il applique alors la formule de Laplace. Même si l'élève n'explique pas l'équiprobabilité sur l'univers des triplets (ordonnés)  $\{1; \dots; 6\}^3$ , c'est bien cette hypothèse de modélisation qui est faite. A contrario, la figure 13 montre que l'élève ne parvient pas à individualiser les trois dés. Il liste tout d'abord les combinaisons correspondant à chaque somme, puis retire celles qui correspondent à une partition déjà comptée. L'heuristique d'associativité conduit là aussi au biais d'équiprobabilité.

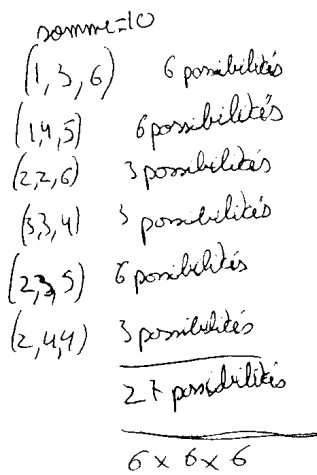


FIGURE 12 – Des partitions aux combinaisons

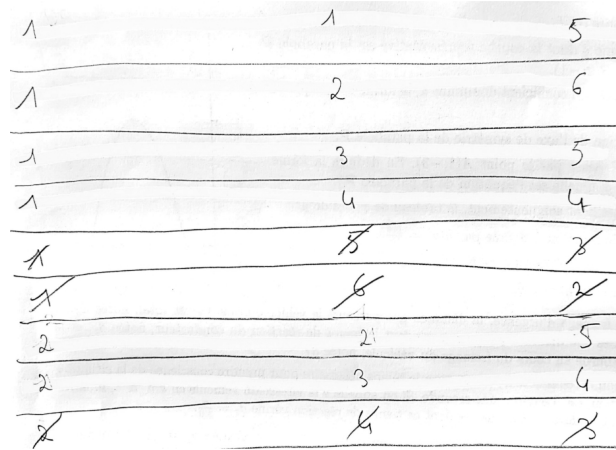


FIGURE 13 – Des combinaisons aux partitions

On dénotera enfin trois stratégies de dénombrement direct des combinaisons, à la différence de la stratégie indirecte de la figure 12. La première a recours à l'usage de tableau à double entrée (figure 14). Si ceux-ci sont parfaitement adaptés à la représentation d'une expérience aléatoire à deux épreuves, leur utilisation dans le cadre d'un plus grand nombre d'épreuves nécessite davantage de vigilance. Dans le cadre de notre problème, il conviendrait de considérer 6 tableaux de dénombrement terminaux à 36 cellules, un pour chaque résultat

possible du troisième dé. Confronté à cette difficulté, l'élève ne réalise qu'un tableau terminal, celui correspondant à la face 1. On peut se questionner sur le sens de la colonne  $D_3$  qui aurait pourtant suggéré d'ajouter 1 à la première ligne, 2 à la deuxième, etc.. Il y a confusion sur le rôle du tableau intermédiaire ( $D_1-D_2$ ) puisque l'élève tient compte du nombre de 9 et de 10 apparaissant dans ce tableau lors de l'utilisation de la formule de Laplace. Une autre approche relève d'un dénombrement par liste de toutes les combinaisons possibles (figure 15). Malgré quelques exceptions, l'élève semble suivre l'ordre croissant pour organiser la procédure. Là encore, aucune explicitation de l'univers n'est proposée. Enfin, on a pu trouver la réalisation d'arbres de dénombrement (voir 16). Le nombre de nœuds terminaux n'a pas permis aux élèves de résoudre le problème avec la seule utilisation cet outil, illustrant ainsi ces limites.

$D_1$	1	2	3	4	5	6	$D_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$D_3$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

On a 3 dés de 6.10.6  
 $3 \times 6 \times 3 \times 6 = 72$  essai nombre de lancers total est de  
 donc pour obtenir 10 on a  $\frac{7}{72} = 0,097$   
 pour obtenir 9 on a  $\frac{9}{72} = 0,125$

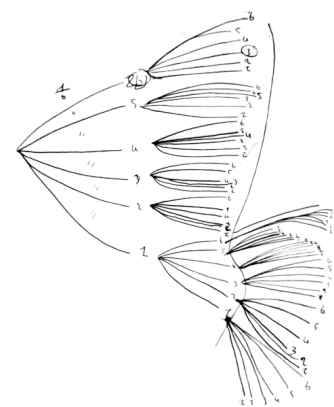
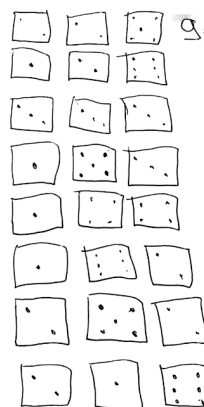


FIGURE 14 – Tableau à entrées multiples

FIGURE 15 – Dénombrement par liste

FIGURE 16 – Arbre de dénombrement

En conclusion, on note l'hégémonie de la conception cardinaliste. En effet, aucun élève ne s'est lancé dans la réalisation physique ou la simulation d'un grand nombre de lancers, les dés et le tableur demeurant néanmoins à leur disposition. Aucun élève ne note la symétrie autour de 10 et 11, y compris lors de la présentation des résultats de simulation. Enfin, les hypothèses de modélisation sont très rarement formulées, alors qu'il s'agit d'un fil rouge aux différentes séances du chapitre. À l'exception d'une élève, l'univers n'est pas explicité. La production de cette élève (figure 17) démontre toutefois la difficulté de formaliser l'univers dans le cadre de plusieurs épreuves indépendantes, se traduisant par l'introduction de trois univers distincts, un pour chaque épreuve.

$$\Omega_1 = \{1x_1; 1x_2; 1x_3; 1x_4; 1x_5; 1x_6\}$$

$$\Omega_2 = \{2x_1; 2x_2; 2x_3; 2x_4; 2x_5; 2x_6\}$$

$$\Omega_3 = \{3x_1; 3x_2; 3x_3; 3x_4; 3x_5; 3x_6\}$$

FIGURE 17 – Un univers par dé

### 3.1.2 Les paradoxes bayésiens en classe de 2<sup>nd</sup>e

La séance de présentation des travaux de groupe se déroule en demi-classe. Cela présente l'avantage de faciliter la prise de notes, de maintenir un niveau d'attention élevé chez les élèves tout en rendant les phases de débat et de questions plus fluides.

Après accord du principal du lycée et en expliquant la démarche aux élèves, un dispositif de capture audio est mis en place afin de pouvoir garder une trace des présentations orales en vue de l'analyse *a posteriori*. Une capture vidéo aurait permis aux élèves de travailler leurs compétences à l'oral. Ceci n'a pas été possible compte tenu du nombre de démarches à effectuer pour disposer des autorisations. Les supports ont été récupérés auprès des élèves et nous en étudions quelques-uns ci-après. Enfin, une prise de note en continu par l'enseignant a permis d'une part de conserver les éléments importants à confronter avec la grille d'évaluation critériée, mais a aussi été utile pour retranscrire des éléments liés à l'utilisation du tableau blanc.

L'interprétation du problème des deux enfants a posé des difficultés pour les deux groupes concernés. Le premier groupe semble s'être uniquement intéressé au problème de M. Jones ("sachant que l'aîné est une fille"). Les élèves expliquent que la réponse intuitive de  $\frac{1}{2}$ , qui est pourtant la réponse correcte dans le cas de M. Jones, serait dû à l'oubli de la connaissance du sexe de l'aîné. Ils proposent ensuite une réponse théorique de  $\frac{1}{3}$ , basée sur la formule de Laplace et une hypothèse d'équiprobabilité sur l'univers des couples  $\Omega = \{FG, GG, GF, \cancel{FF}\}$ . Bien qu'erronée, la réponse proposée relève essentiellement de la démarche Partitionnement-Édition-Comptage (PEC) présentée précédemment. On note globalement une confusion entre les deux problèmes et une difficulté à prendre de la distance avec les documents qu'ils ont pu trouver sur le Web, essayant de transposer l'étude du problème de M. Smith au cas de M. Jones. Le second groupe manifeste des difficultés d'organisation : le concepteur du diaporama est absent pour la présentation et les autres élèves semblent découvrir le contenu en même temps que le public. Les hypothèses de modélisation sont explicitées (indépendance entre les deux enfants, équiprobabilité de sexe pour un enfant donné). Le groupe insiste sur le caractère ambigu de l'énoncé et la polémique qui accompagna la publication du problème en 1959. Les élèves affirment que le problème a deux solutions théoriques correctes, selon l'interprétation de l'énoncé. La séance de questions montrera que la justification d'une probabilité égale à  $\frac{1}{2}$  pour M. Smith d'avoir deux garçons n'est pas comprise par les élèves, à la différence d'une probabilité  $\frac{1}{3}$ . Ils s'appuient sur le tableau à double entrée ci-contre pour illustrer la justification. La formulation du problème semble avoir posé problème pour les deux groupes. À la suite de Fox et Levav Fox et Levav, 2004, il aurait pu être intéressant de proposer l'énoncé suivant pour M. Smith.

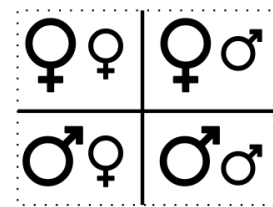


FIGURE 18 – Problème des deux enfants

M. Smith a deux enfants Sachant que M. Smith n'a pas deux filles, quelle est la probabilité qu M. Smith ait deux garçons ?

Néanmoins, le problème ainsi formulé perdrait en partie son caractère paradoxal, même s'il s'agit encore d'un problème de type ordre permettant de faire émerger le biais d'équiprobabilité. Reprenant la conclusion du premier groupe, ce qui est intéressant ici est de montrer que "de nombreux problèmes en probabilité existent qui sont contre-intuitifs ou qui présentent différents résultats selon l'interprétation que l'on peut faire de l'énoncé parmi plusieurs possibilités légitimes ou non".

Le Pillow problem n°5, qui consiste essentiellement en une reformulation du problème des deux enfants, a engendré moins de difficulté d'interprétation. L'approche intuitive a été correctement introduite par les deux groupes. On peut noter deux différences dans le traitement de la solution. Le premier groupe sépare le problème en deux cas équiprobables, selon la couleur du jeton initialement présent. Il dresse ensuite un arbre de probabilités (voir la figure 19) qui est corrigé en supprimant le cas exclu, ce qui correspond à la démarche PEC. Le second groupe considère l'univers des paires  $\{(B_1, B_2), (B_2, B_1), (N_1, B_2), (B_2, N_1)\}$ . Il n'y a pas d'explication des différentes notations, mais l'on peut considérer que, d'une part, la première coordonnée correspond à la boule tirée et la seconde à la boule restante et, d'autre part,  $B_1$  et  $N_1$  indiquent la boule initialement présente et  $B_2$  la boule blanche ajoutée. L'hypothèse d'équiprobabilité sur la couleur de la boule initialement présente dans l'urne est alors implicite.

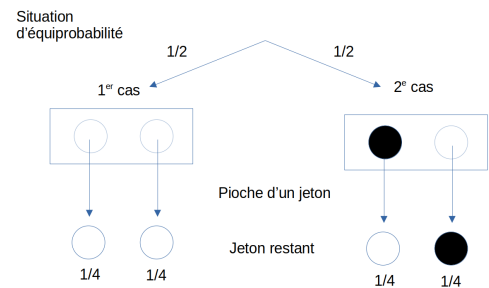


FIGURE 19 – Pillow problem - arbre de probabilités

La présentation du problème de Monty Hall est similaire entre les deux groupes. Le jeu est présenté en classe par les orateurs : chacun est invité à donner sa stratégie (changement ou conservation de porte). Conformément à la littérature, la majorité des élèves souhaite changer de porte "parce [qu'ils] auraient trop peur de le regretter sinon". La réalisation de l'expérience aléatoire permet la bonne compréhension du problème. Les élèves insistent sur le fait que le présentateur sait où se trouve la porte ce qui constitue le nœud du paradoxe. Un univers est proposé pour illustrer l'approche intuitive, composé de trois issues avant ouverture de la porte  $\Omega_1 = \{V; C; C\}$  puis de deux issues après ouverture  $\Omega_2 = \{V; C\}$ . Les élèves mentionnent que, s'il y a bien équiprobabilité avant ouverture, ce n'est plus le cas ensuite et qu'il n'est plus valide de "diviser les cas favorables par les cas totaux". Notons que cette approche, qui est la plus répandue, relève d'une heuristique PEC erronée (Fox & Levav, 2004). Pour justifier théoriquement que la probabilité de gain est de  $\frac{2}{3}$  en cas de changement de porte contre  $\frac{1}{3}$  en cas de maintien, chaque groupe considère que le candidat a choisi la porte A et considère les trois scénarios suivants :

1. "Le 1er scénario est que tu sélectionnes la chèvre 1, sans le savoir. L'animateur te montre la chèvre 2. Si tu changes d'avis, tu gagnes.

2. Le 2<sup>ème</sup> scénario est que tu sélectionnes la chèvre 2, sans le savoir. L'animateur te montre la chèvre 1. Si tu changes d'avis, tu gagnes.

3. Le dernier scénario est que tu sélectionnes la voiture, sans le savoir. L'animateur élimine l'une des deux chèvres. Si tu changes d'avis, tu prends l'autre chèvre, donc tu perds.

En conclusion, si tu changes de portes, tu gagnes 2 fois sur 3."

L'explication accueillera l'adhésion de l'ensemble de la classe, malgré le manque de formalisme utilisé.

Bien qu'il s'agisse d'une situation similaire, le problème des trois prisonniers fera l'objet d'un traitement sensiblement différent par les groupes correspondants. Ceux-ci réalisent dans un premier temps une présentation puis une justification de l'approche intuitive analogue à ce qui a été observé dans le cas de Monty Hall. Le premier groupe produit tout d'abord un arbre de probabilités (figure 20) et recourt à la formule des probabilités composées pour calculer les probabilités aux feuilles. Le premier niveau correspond à l'identité de la personne graciée et le second niveau à celui de la personne désignée par le gardien, le prisonnier posant la question étant le prisonnier A. Au lieu de s'arrêter à ces derniers calculs, les élèves cherchent à conditionner par la réponse du gardien, égale à B dans l'énoncé de leur problème et appliquent la définition des probabilités conditionnelles en divisant par la probabilité que la réponse soit B. Cette approche qui dépasse le programme de 2<sup>ème</sup> suscitera l'incompréhension du reste de la classe "Les calculs, vraiment, là, je comprends pas" et le groupe ne saura apporter d'autres éléments que la formule de Laplace "Parce que nombre de cas favorables sur nombre de cas total", bouée à laquelle les élèves semblent se raccrocher à défaut d'autres éléments théoriques. La justification du second groupe est encore plus hasardeuse et démontre une incompréhension globale du paradoxe. Ils produisent un arbre de probabilités (qui est aussi un arbre de dénombrement ici), reproduit en figure 21. La signification qu'ils donnent à chaque niveau, à savoir le nom de la première personne exécutée, puis de la seconde, montre qu'ils ne tiennent pas compte de l'information donnée par le gardien. On peut donc noter que les deux groupes présentent une difficulté pour prendre de la distance avec le contenu trouvé sur le Web, que ce soit en utilisant des outils qu'ils ne maîtrisent pas ou des termes qui ne font pas sens pour eux : "L'analyse bayésienne est un outil de l'inférence statistique..."

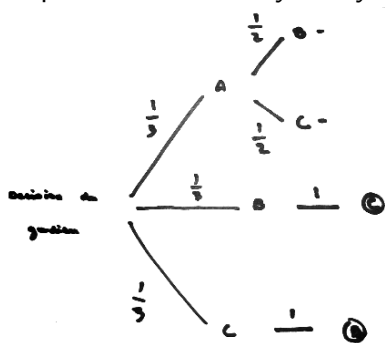


FIGURE 20 – Problème des prisonniers - arbre de probabilités

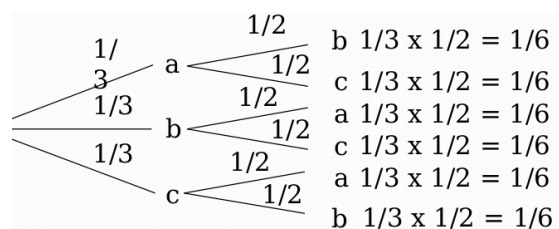


FIGURE 21 – Problème des prisonniers - arbre de probabilités (2)



Enfin, le paradoxe de Bertrand est traité de manière similaire par les deux groupes restants. L'approche naïve est présentée en précisant l'univers  $\Omega = \{\text{Or}; \text{Argent}\}$  et en spécifiant qu'il y a équiprobabilité sur  $\Omega$ . Il s'agit d'une justification partielle au raisonnement intuitif. Selon l'approche chronologiste, celui-ci consiste plutôt à considérer qu'il y a équiprobabilité du tirage des sacs et que, en conséquence, la pièce d'Or provient soit du sac Or-Argent, soit du sac Or-Or. Pour présenter le raisonnement correct, les deux groupes recourent à un arbre de dénombrement (voir figure 22) en vue d'appliquer, par une approche PEC, la formule de Laplace. L'univers considéré est systématiquement décrit en différenciant les pièces dans le sac  $\{O_1, O_2\}$  et en utilisant des couples ordonnés  $\{(O_1; O_2); (O_2; O_1); (O; A)\}$ .

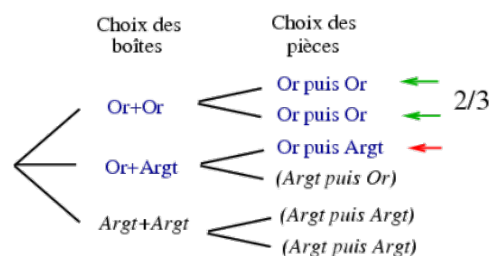


FIGURE 22 – Boîtes de Bertrand - arbre de dénombrement

Dans l'ensemble des groupes, on peut noter que l'ensemble des consignes a été respectée et que les élèves ont tenu compte de la grille critériée fournie (voir l'annexe E). Le contexte historique a été mentionné brièvement. Les élèves ont souligné l'importance de ne pas confondre leurs problèmes avec des homonymes (le dilemme du prisonnier, le paradoxe des cordes de Bertrand), ce qui traduit une recherche bibliographique sérieuse. La majorité des groupes a proposé des statistiques concernant le taux de réponse intuitive, issues de recherche Web, de sondages effectués pendant la présentation ou d'expérience autour de leurs familles. L'approche fréquentiste a été présentée dans tous les groupes. Deux groupes ont utilisé le tableur, le reste réalisant un nombre élevé de simulations (entre 100 et 500) via les applications Geogebra mises à disposition. Ceci peut être dû à la difficulté de transposer les situations en problèmes de tirages de nombres, difficulté que nous avons éprouvé lors de la conception des applications. Enfin, l'intégralité des justifications théoriques abouties relevaient de la stratégie Partitionnement-Édition-Comptage, approche la plus accessible en classe de 2<sup>nde</sup>.

On peut observer des phénomènes similaires chez les groupes ayant traité les mêmes paradoxes. La recontextualisation des paradoxes permet de confirmer l'influence de l'énoncé dans la résolution d'un problème. Ainsi, l'ambiguïté de l'énoncé du problème des deux enfants est source de difficultés d'interprétation, ce qui n'est pas le cas du Pillow problem. Le phénomène est accentué dans le cas du problème des prisonniers où l'absence de modélisation correcte et le recours à des outils mathématiques hors de portée entraîneront une incompréhension des exposés dans le public. La situation inverse se produira pour le problème de Monty Hall où une énumération des différents scénarios par les élèves suffira à convaincre leurs pairs.

En conclusion, les élèves ont bien investi cette activité et ont, à l'exception d'un groupe, fourni un travail de qualité. Les élèves en difficulté avec la discipline ont tous été impliqués

dans l'activité, à la fois en tant qu'orateur et auditeur. Cela a permis d'*illustrer les limites de l'instinct dans le domaine des probabilités* en soulevant le caractère *contre-intuitif de certains problèmes mathématiques*". Le travail a favorisé la mise en avant la diversité des représentations disponibles pour modéliser un problème de mathématiques (arbre, univers, tableau à double entrée).

### 3.1.3 Analyse des séances en classe de 1<sup>ère</sup>

Un manque de méthodologie et d'anticipation n'a pas permis de mettre en place un dispositif adapté à la récupération de productions d'élèves lors des séances en classe de 1<sup>ère</sup>. Ce constat a permis d'adapter le protocole afin de permettre différentes modalités de captation en 2<sup>nde</sup>. Nous pouvons néanmoins présenter les points essentiels observés lors des différentes activités.

Non rompus à la classe puzzle, la compréhension des consignes de l'activité relative au problème de Toscane a été compliquée chez la plupart des élèves. L'étape de mise en commun des différents experts a ainsi été remplacée par un partage des résultats en plénière. Compte tenu de la difficulté à produire les fonctions nécessaires à la simulation, celles-ci ont été projetées et les experts concernés ont décrit l'utilité de chaque instruction en langage naturel. La plupart a découvert à cette occasion l'environnement fourni par leur calculatrice. La difficulté de produire du code sur cet outil aurait mérité une séance dédiée en salle informatique. Les élèves qui ont réalisé la modélisation théorique, pourtant en difficulté la plupart avec l'enseignement traditionnel, ont entrepris spontanément de réaliser un arbre de dénombrement ou un tableau à double entrée. Ils ont ainsi pu décrire la loi de probabilité correspondant à la somme des deux dés et venir successivement au tableau expliquer leur démarche et les points de vigilance, relatifs à la non-équiprobabilité de la loi composée. Par manque de temps, le prolongement de l'activité au problème du duc de Toscane a été renvoyé à un travail hors classe.

L'étude des paradoxes bayésiens a donné des résultats plus convaincants. Les élèves étaient volontaires pour donner leur avis et des pistes de justification aux différents problèmes. Malgré le caractère facultatif, plusieurs d'entre eux ont cherché à le résoudre et sont venus détailler leur réflexion. Nous pouvons toutefois regretter que cette modalité, à la différence de celle employée en classe de 2<sup>nde</sup>, ait révélé un phénomène récurrent lors des débats scientifiques : une prise de parole deux fois plus fréquentes chez les garçons que chez les filles (Collet, 2015). Consécutivement à la manipulation favorisée par les applications Geogebra, cette démarche leur a montré l'importance de la verbalisation en se pliant à un exercice de maïeutique. En particulier, plusieurs élèves qui jusque-là n'étaient pas volontaires pour s'exprimer publiquement étaient désireux de faire valoir leur position. Des conceptions erronées ont également pu être discutées. Il est intéressant d'observer que l'intégralité des résolutions présentées par les élèves relevaient d'une stratégie de type Partitionnement-Édition-Comptage. Soulignons enfin qu'il aurait été pertinent de réaliser les différents sondages à l'aide d'un outil numérique (type QCMcam). Cela aurait permis de préciser l'évolution des conceptions chez les élèves.

## 3.2 Analyse des réponses aux questionnaires

Nous décrivons ci-après les résultats des questionnaires pré-test et post-test en analysant les différentes justifications proposées par les élèves. Celles-ci permettent d'identifier les différentes conceptions et heuristiques conduisant aux différentes réponses.

### Biais de représentativité

Les fréquences des réponses biaisées correspondent à celles observées dans la littérature (Lecoutre & Fischbein, 1998). On peut observer étrangement un meilleur taux de réponses correctes au pré-test en 2<sup>nde</sup> qu'en 1<sup>ère</sup>. Ceci peut être dû à la proximité du cycle 4, dont l'un des objectifs majeurs est le développement de la notion de hasard. Au vu de l'évolution des réponses correctes en classe de 2<sup>nde</sup> (perte de 8 points), il semblerait que l'enseignement des probabilités au lycée nuise à une bonne conception du hasard. Parmi les justifications conduisant au biais de représentativité, on retrouve la notion de variété, de dispersion et d'espacement comme caractéristique d'une suite aléatoire. Pour d'autres, une suite de chiffres successifs ou ordonnés ne peut être le résultat d'un tirage aléatoire. Ces deux conceptions vont à l'encontre du modèle fréquentiste qui montre qu'un tirage sans logique apparente (aucun chiffre ne se suit) ou traduisant des statistiques de l'univers (autant de nombres pairs que de nombres impairs) apparaissent rarement (Gauvrit, 2009).

La justification théorique correcte apparaît chez les élèves justifiant l'équiprobabilité en observant que chaque tirage présente le même nombre de boules. Une autre approche consiste à calculer la probabilité de chaque issue en utilisant le dénombrement d'arrangements sans répétition. Bien que les outils pour faire aboutir cette méthode ne soient pas disponibles en classe de 2<sup>nde</sup> ou 1<sup>ère</sup>, certains élèves essaient néanmoins de calculer cette probabilité par des modélisations erronées naïves "*Chaque tirage a 7 chances sur 49 de se produire*" ou relatives à un tirage ordonné "*La probabilité est  $1/49 \times 1/48 \dots$* ". Cela révèle l'ancrage de la conception cardinaliste des probabilités.

Enfin, certaines réponses illustrent la difficulté pour l'élève de se défaire de son intuition malgré un raisonnement mathématique cohérent "*Les deux ont la même chance de sortir mais il est extrêmement rare d'avoir des nombres qui se suivent.*" Chez certains élèves, la notion d'équiprobabilité relève du caractère imprévisible du hasard : "*On ne peut pas prédire le hasard*" ou encore "*C'est le Loto*". Ces justifications questionnent sur l'intégration du concept de probabilités chez ses élèves.

On constate un changement dans la réponse de la moitié des élèves à l'issue de l'expérimentation. L'effet de la séquence sur l'évolution des conceptions des élèves est mitigé : si un tiers des élèves présentant le biais corrigent leur intuition à l'issue du chapitre, la même proportion d'élèves développent le biais de représentativité, ce qui est plus inquiétant.

## Biais de récence

Là encore, nous obtenons un taux de réponses correctes au questionnaire pré-test dans des fréquences similaires à ceux des travaux précédents (Lecoutre & Fischbein, 1998). Toutefois, l'effet de récence semble plus marqué positivement que négativement chez nos élèves. Rappelons que l'effet de récence positif repose sur la loi des petits nombres : le sujet déduit d'un faible nombre de lancers que la pièce est équilibrée ou biaisée. L'effet de récence négatif est la tendance à supposer que les futurs lancers tiennent compte des tirages précédents en vue d'obtenir une proportion de Pile égale à la proportion de Face.

Comme l'ont souligné Lecoutre et Fischbein, la réponse correcte attendue traduit l'activation d'un modèle correct d'indépendance des événements issus d'épreuves aléatoires successives dans un processus stochastique. Cette hypothèse d'indépendance entre les deux lancers est exprimée dans le quart des bonnes réponses en classe de 1<sup>ère</sup> et de manière marginale en 2<sup>nde</sup>. La définition de l'indépendance des événements ayant été introduite en 1<sup>ère</sup>, il est naturel d'observer cette différence. Parmi les autres justifications, les formulations du type " $P=1/2$ " ou "*après l'équiprobabilité*" reviennent régulièrement, bien que le caractère équilibré de la pièce ne soit jamais mentionné. Là encore, la notion de "*hasard imprévisible*" peut devenir synonyme d'équiprobabilité. Plus rarement, les univers sont précisés et des arbres de probabilité sont dressés, traduisant une indépendance sous-jacente. Les réponses correspondant à l'un des biais de récence sont rarement justifiées ou confirment le modèle sous-jacent correspondant (pièce truquée ou équilibre du nombre de Pile et de Face).

Près de 80 % des élèves maintiennent leur réponse entre les deux questionnaires : la séquence semble avoir peu d'effet sur ce biais ce qui traduit des conceptions reliées à l'indépendance ancrées chez les élèves. Soulignons toutefois une correction positive de près de la moitié des conceptions erronées chez les élèves de 2<sup>nde</sup> à l'issue de l'expérimentation.

## Biais de conjonction

Il est ici délicat de comparer les résultats obtenus avec ceux de Lecoutre et Fischbein, la question proposée étant différente. On observe une grande disparité entre les réponses chez les élèves de 2<sup>nde</sup> et ceux de 1<sup>ère</sup>. De manière générale, il y a une faible variabilité (20 %) entre les réponses au pré-test et au post-test, signe de conceptions ou de biais ancrés chez les sujets. Parmi les changements de réponse, il semble y avoir une dominance d'une évolution négative (21 %) sur une évolution positive (12 %).

Compte tenu du faible nombre de réponses justifiées (20 % en 2<sup>nde</sup> et 52 % en 1<sup>ère</sup>) et de la taille de l'échantillon, les statistiques méritent d'être traitées avec précaution. Les justifications révèlent qu'une très grande majorité des élèves produisent une réponse correcte parce qu'ils ne disposent pas du stéréotype de la militante féministe "*Il n'y a pas de lien entre être féministe et lutter contre les discriminations*". Au-delà de la problématique étudiée ici, cela questionne sur la perception de l'égalité filles-garçons chez les lycéen.ne.s, objectif d'éducation devenue prioritaire dans la convention interministérielle 2019-2024. Au-delà de cet inquiétant constat,

cette justification révèle néanmoins que, pour ces élèves, l'ensemble est plus grand que ces parties *"Il y a moins de chances qu'elle soit les 2"*. Seuls deux élèves utilisent le formalisme des probabilités  $P(A \cap B) \leq P(B)$ , l'un invoquant l'indépendance (erronée) entre les événements  $A$  et  $B$  et le fait que  $P(A) \leq 1$ . Cette analyse est à mettre en parallèle avec l'observation de Lecoutre et Fischbein (1998) du fait que les justifications ne sont pas liées à l'activation d'un modèle correct au lycée. L'ensemble des justifications relatives au fait que Linda soit féministe renvoie à son vécu *"car elle était une étudiante engagée"*.

À la lumière de cette analyse, cela justifie le changement de contexte suivant opéré par Lecoutre et Fischbein (1998) qu'il aurait été intéressant de proposer.

Emmanuel rêve de devenir médecin. Il aime aider les gens. Quand il était lycéen, il était volontaire à la « Croix Rouge ». Il a fait de brillantes études et a servi dans l'armée en tant qu'assistant médical. A la fin de son service militaire, Emmanuel s'est inscrit à l'Université. Qu'est-ce qui vous semble le plus vraisemblable ?

1. Emmanuel est étudiant à l'université de médecine (biais majoritaire).
2. Emmanuel est étudiant (réponse correcte).

## Biais de disponibilité

L'analyse des réponses à la question relative au biais de disponibilité relève une faible présence du biais en amont de la séquence :  $\frac{2}{3}$  des élèves estiment qu'il n'est pas possible de répondre à la question. Par ailleurs, près de 60 % des élèves maintiennent leur réponse, ce qui traduit une certaine robustesse des conceptions. Une seule réponse sur trois est justifiée.

Parmi les erreurs rencontrées, on note une dominance du biais d'équiprobabilité (réponse B) qui ne faisait pourtant pas l'objet de cette question. Les justifications pour cet item relèvent exclusivement de ce modèle *"Il y a 1 chance sur 26 d'avoir un R à la première position et 1 chance sur 26 d'avoir un R à la troisième position"*. L'un des élèves invoque d'ailleurs un modèle d'équiprobabilité en conditionnant implicitement par l'événement "sachant que l'une des lettres est un R" : *"Il y a une chance sur 4 qu'un R soit à chaque position"*. Assumant leur incapacité à répondre à la question (réponse D), les élèves mettent en avant *"le manque d'information"* et proposent des stratégies, relatives au modèle cardinaliste *"il faudrait compter tous les mots du dico"* ou fréquentiste *"on tire plein de mots au hasard et on calcule"*. D'autres s'avouent vaincus puisque *"les mots sont innombrables"*. Il est intéressant de questionner les conceptions derrière la réponse C qui peuvent provenir d'un biais de représentativité : *"si le R est en troisième position, toutes les pages du dico sont possibles"* ou *"Les mots qui ne commencent pas par R sont moins concentrés dans le dictionnaire"*. Les justifications correspondant au biais de disponibilité sont finalement rares : un seul élève fournit la justification témoignant de ce biais de ce biais, constatant que *"beaucoup de mots commencent par un R"*. Afin de stimuler davantage l'apparition de ce biais en activant l'aire cognitive du langage, il aurait convenu de demander aux élèves de trouver le plus possible de mots de quatre lettres commençant par R ou ayant un R en troisième lettre.

## Biais d'équiprobabilité

### Événements composés

Les résultats au questionnaire pré-test laissent présager d'une absence de biais d'équiprobabilité pour les problèmes de type événements composés, avec seulement deux erreurs, sans justification, sur l'ensemble des réponses. Pour le reste des élèves, la réponse résultait de l'observation qu' "*il y a plus de filles que de garçons*" ou de l'application de la formule de Laplace. Ces deux approches équivalentes relèvent d'une conception cardinaliste et sous-tendent une équiprobabilité au niveau des événements élémentaires. Néanmoins, aucun élève ne juge nécessaire de préciser l'univers sur lequel cette hypothèse s'applique.

Compte tenu de ces résultats, il nous a semblé pertinent de changer le contexte de la question pour le questionnaire post-test afin d'étudier la présence du biais d'équiprobabilité en situation de transfert. Les résultats au problème de la météo sont notablement moins bons que dans le contexte initial. On note la présence du biais d'équiprobabilité chez près de 20 % des élèves, notamment en 2<sup>nde</sup> (25 % des élèves). La grande majorité des réponses correctes relève du même modèle que le problème initial "*On a 1 chance sur 7 qu'il fasse plus chaud le dimanche contre 6 chances sur 7 les autres jours*" ou "*Il y a un dimanche et six autres jours*". On a pu noter deux justifications en classe de 2<sup>nde</sup> relevant de l'approche fréquentiste et invitant "*à faire des statistiques sur une année*". Certaines justifications correspondant au biais d'équiprobabilité soulèvent un manque d'information ou le caractère très aléatoire de la météo, relevant d'une conception imprévisible du hasard déjà observée dans le cas des biais de récurrence et de représentativité. D'autres énoncent une pensée dichotomique qui s'applique au jour le plus chaud qui "*peut être un dimanche ou pas*" ou au climat qu'il fera un jour donné "*soit il fait beau, soit il fait moche*". Notons enfin une justification empirique et surprenante à ce niveau d'étude, plaidant pour une température maximale le dimanche : "*Les dimanches, il fait toujours beau*".

Les résultats de cette question soulèvent l'importance du contexte dans la manifestation du biais d'équiprobabilité. Ceci rejoint les travaux de Fox et Rottenstreich (2003) qui avaient observé que ce biais est plus prégnant en cas d'incompétence du sujet sur un thème donné (par exemple l'évolution du cours d'une action) que sur un sujet maîtrisé (l'évolution du climat). Ils ont également montré que la formulation du problème influait sur la réponse des participants, en observant qu'en utilisant l'énoncé suivant, le biais était encore plus manifeste.

Il est plus probable que

1. Dimanche soit le jour le plus chaud de la semaine,
2. Dimanche ne sera pas le jour le plus chaud de la semaine,
3. Dimanche a une chance sur 2 d'être le jour le plus chaud de la semaine.

## Lois composées

Les résultats observés au pré-test sont similaires à ceux de Lecoutre et Fischbein (1998) : environ 80 % des réponses traduisent un biais d'équiprobabilité contre moins de 10 % de réponses correctes. Certains élèves associent une propriété uniforme par nature à l'aléatoire : *"c'est le hasard"*. D'autres justifient leur réponse par l'indépendance des deux lancers car *"il n'y a pas de lien entre les faces"*. En classe de 2<sup>nde</sup>, la plupart des élèves transfèrent l'équiprobabilité propre à chaque dé - *"1/6 d'obtenir 5 comme 6"* - directement au problème considéré *"on a 1/6 de tomber sur le bon chiffre, donc chaque cas a cette probabilité"* ou en considérant un univers à douze issues : *"il y a 1 chance sur 12 d'obtenir deux 6 comme un 5 et un 6"*. En classe de seconde, l'indépendance des événements se traduit par des considérations du type *"on a 2 chances sur 12 de tomber sur chaque résultat"*. Il est difficile de déterminer la conception derrière de tels résultats : erreur dans la somme de fractions, application de la formule de Laplace sous une modélisation erronée, etc. Chez les élèves de première, qui ont manipulé les arbres pondérés en début d'année, la somme est remplacée par un produit *"1/6 × 1/6 = 1/36 dans les 2 cas"* qui met en exergue le biais d'équiprobabilité. De rares élèves listent les issues possibles et utilisent un argument combinatoire puisque *"il y a deux manières de faire un 5 et un 6 et une seule manière d'obtenir deux 6"*. Aucune réponse ne semble être guidée par une approche fréquentiste qui résulterait d'une pratique régulière de jeux de dés.

Le premier problème du questionnaire post-test est un transfert dans un contexte de tirage de deux cartes dans des paquets différents. On note une amélioration sensible des résultats : 25 % des réponses erronées sont corrigées en 2<sup>nde</sup> pour 40 % en 1<sup>ère</sup>. Le changement de réponse est plus élevé que dans les items précédents, signe d'un changement de conception en cours pour environ la moitié des élèves. Notons un nombre élevé de réponses qui semblent liées à des problèmes de compréhension de la question puisqu'en effet, *"il n'y a qu'un seul roi de trèfle dans un jeu de cartes"*. On observe aussi un ancrage du modèle équiprobable, notion introduite au cours du chapitre, la réponse c) étant relative à *"une situation équilibrée"*.

Concernant le second problème, on peut observer qu'un certain nombre d'élèves ont mal interprété la question, traitant le cas de la somme en lieu et place du produit de deux dés. Nous avons corrigé les résultats en conséquence, puisque la somme de deux dés est plus probablement 9 que 10. On retrouve comme justification aux différentes réponses les stratégies évoquées dans l'analyse de l'activité sur le duc de Toscane : tableau à double entrée et dénombrement avec et sans ordre. En classe de 2<sup>nde</sup>, certains justifient leur réponse en invoquant *"la loi de Toscane"* ou en rappelant que ce problème a été *"vu en cours"*. Il serait raisonnable de questionner cet item plus tard pour voir la trace mnésique laissée par ce paradoxe. Notons que les observations effectuées dans le cadre du transfert de contexte semblent se renforcer ici : l'activation d'un modèle adéquat (43 %) dépasse le recours au modèle équiprobabiliste (37 %). Par ailleurs, près de la moitié des réponses erronées au pré-test sont corrigées pour ce problème. Il s'agit donc de résultats encourageants et plaidant en faveur d'une étude approfondie du duc de Toscane. En revanche, les résultats ne semblent pas dépendre de la modalité proposée (problème ouvert individuel en 2<sup>nde</sup> ou activité puzzle en 1<sup>ère</sup>).

## Ordre

Le paradoxe des deux enfants est le problème de type ordre proposé dans les deux questionnaires. Les taux de réponses obtenues au pré-test sont de l'ordre de ceux rencontrés dans la littérature, puisque plus de  $\frac{2}{3}$  des élèves présentent le biais d'équiprobabilité. De rares élèves explicitent les hypothèses d'indépendance entre les deux enfants et l'équiprobabilité du sexe pour chaque enfant. Toutes les justifications de l'équiprobabilité relèvent d'une différenciation entre les enfants puisque *"le deuxième enfant a une chance sur deux d'être un garçon"*. Par ailleurs, toutes les réponses correctes sont motivées par un défaut de compréhension du contexte ou des tentatives de raisonnement psychologique puisque *"M. Smith a au moins un garçon donc pas deux car sinon il l'aurait dit"*. Là encore, le poids imprévisible du hasard justifie l'équiprobabilité chez certains, à défaut d'arguments plus convaincants : *"C'est la vie"*.

Les résultats du questionnaire post-test à ce problème sont encourageants puisque près de 40 % des élèves corrigent le biais d'équiprobabilité. Mentionnons que l'évolution négative des réponses n'est pas ici un indicateur significatif de changement de conception, les bonnes réponses au pré-test étant peu nombreuses et ne relevant pas d'une conception correcte. L'étude du problème semble avoir à minima entraîné une meilleure compréhension de la question, puisqu'aucune réponse ne semble ici issue d'une interprétation erronée. Les stratégies de résolution relèvent toutes, là encore, de la démarche Partitionnement-Édition-Comptage, que ce soit à travers la description de l'univers ou par le dessin d'un arbre de dénombrement. L'explicitation d'équiprobabilité sur l'univers des paires ordonnées reste toutefois marginale. Si on peut imaginer que certains élèves répondent en activant uniquement la mémoire du chapitre, peu de justification relèvent d'une référence directe au cours, contrairement à ce qui a pu être observé dans le cas du problème des lois composées (lois de Toscane).

À ce titre, il est intéressant d'étudier le transfert de ce problème dans le contexte de la question 7b. Les justifications fournies pour les réponses correctes reposent également sur la production d'arbre et l'écriture d'univers. Il est intéressant de noter que certains élèves continuent de calculer les probabilités dans l'univers non restreint : *"Il y a 2 chances sur 4 que les objets n'aient pas la même couleur et 1 chance sur 4 que les deux objets soient rouges."* Comme dans le cas des deux enfants, aucun élève de 1<sup>ère</sup> n'a recours au formalisme des probabilités conditionnelles pour appréhender la question. Si près de 75 % des élèves de 1<sup>ère</sup> parviennent à transférer le raisonnement correct dans le contexte du tirage d'objets de couleurs, ce n'est le cas que d'un tiers des élèves de 2<sup>nde</sup>. Cela laisse supposer que le biais d'équiprobabilité reste plus fortement ancré chez ces derniers. Cette observation est d'autant plus étonnante que les problèmes de ce type ont fait l'objet d'un travail plus soutenu en classe de 2<sup>nde</sup>. Ce phénomène se confirme si l'on regarde les réponses des élèves ayant étudié le problème des deux enfants ou le Pillow problem n°5 : seule la moitié résout le problème de M. Smith dans le questionnaire post-test et seulement une élève sur les douze parvient à transférer son raisonnement dans le cas d'un tirage d'objets.



## Biais de la taille de l'échantillon

On observe des résultats au pré-test similaires à ceux obtenus par Lecoutre et Fischbein (1998) pour la même tranche d'âge. Pour quelques-uns, l'augmentation du nombre de lancers justifie que Face sortira proportionnellement un plus grand nombre de fois. À défaut d'autres modèles, la majorité invoque la proportionnalité en comparant les rapports *"C'est pareil car  $2/3=200/300$ "* ou *"Les deux sont proportionnels"*. On peut y voir un théorème en acte, inspiré de la formule de Laplace. Parmi les rares justifications aux réponses correctes, on peut noter quelques élèves qui justifient avec des arguments du type *"Avoir 2 Faces sur 3 est plus facile que 200 Faces sur 300"*. On peut même observer que des élèves tentent de comparer les probabilités, de manière plus ou moins réussie *"On a 3 chances sur 8 d'avoir deux Faces contre beaucoup plus"*. D'autres enfin combinent les différentes approches *" $2/3=200/300$  mais l'expérience est plus significative pour 300"*.

Ce biais est particulièrement robuste comme le montrent les résultats du questionnaire pré-test. Il semble moins affirmé à l'issue de la séquence chez les 1<sup>ère</sup> (de 68 % à 39 %), le score de bonnes réponses étant presque doublé (de 23 % à 39 %). Compte tenu des activités proposées et du contenu du cours, l'hypothèse la plus probable semble de relier ce phénomène avec l'introduction de l'espérance et son introduction dans la loi des grands nombres *"dans le premier cas on regarde la proba et dans l'autre l'espérance car il y a plus d'essais"*. En revanche, le phénomène inverse tend à s'observer en 2<sup>nde</sup> : le taux de réponses biaisées se maintient vers 60 %. On note surtout un transfert important de la réponse a (plus facile d'obtenir au moins 2 Face en 3 lancers) que de la réponse c (plus facile d'obtenir au moins 200 Face en 300 lancers). La méthode fréquentiste, abordée en détail dans le chapitre, est invoquée par une majorité des répondants, témoignant du réflexe de recourir à cette approche lorsque le calcul des probabilités leur paraît hors de portée *"si on fait plus de lancers, ce sera plus précis"*, *"il faut faire beaucoup de simulations pour approcher la probabilité"* ou encore *"C'est la loi des grands nombres!"*.

## Phénomène Falk

La manifestation de l'effet Falk dans le questionnaire pré-test atteint des taux comparables aux observations de Lecoutre et Fischbein (environ 50 %). On note cependant une proportion de résultats corrects sensiblement plus élevée (environ 40 %). On peut relever un plus faible nombre de justifications à cette question : seul un quart des élèves fournissent une indication précisant sa conception. Le biais se manifeste par le fait que *"La boule cachée a été tirée avant"* ou qu' *"au début, il a 2/4 d'avoir une boule noire et 2/4 d'avoir une boule blanche"*. Quelques élèves proposent un univers du type  $\Omega = \{b_1; b_2; n_1; n_2\}$  ou dressent un d'arbre de dénombrement. Cela relève d'une stratégie PEC pour laquelle l'étape d'édition est erronée. Les réponses correctes sont quant à elles accompagnées de considérations combinatoires : *"Il y a plus de boules noires que de boules blanches"*. Les activités de l'expérimentation ne semblent pas avoir agi sur ce biais puisque les taux restent similaires entre les deux questionnaires.

Il est intéressant d'étudier le transfert du problème dans le contexte du labyrinthe : plus de  $\frac{2}{3}$  des élèves valident la réponse correspondant à l'effet Falk. L'ancrage de ce biais semble si fort que seuls deux élèves avouent ne pas pouvoir savoir (réponse d). Remarquons de meilleurs résultats en 1<sup>ère</sup>, dont le programme est propice aux problèmes bayésiens : 70 % d'entre eux maintiennent une réponse cohérente entre les questions 9a et 9b et la moitié de ceux qui ont résolu le problème 9a transfèrent correctement leur raisonnement en 9b. Les bonnes réponses sont systématiquement justifiées à l'aide d'un arbre, selon l'approche PEC. Parmi les réponses erronées, on relève le recours à un modèle d'équiprobabilité sans conditionnement puisque "*Il y a trois chemins à la fin*" ou encore  $\Omega = \{EIR, EIIR; EIB\}$ . Enfin, pour justifier une probabilité de  $\frac{1}{2}$ , tous les élèves expliquent qu'*"il y a deux tunnels menant de E à R"*.

### 3.3 Synthèse de l'expérimentation

Le questionnaire pré-test a montré une présence des biais probabilistes chez les élèves de 2<sup>nde</sup> et de 1<sup>ère</sup> en correspondance avec ceux obtenus par Lecoutre et Fischbein (1998) sur les élèves de 16-17 ans. Cela valide la pertinence de la version actualisée des énoncés que nous avons utilisé. Par ailleurs, on pourrait penser que les réformes successives des programmes d'enseignement, notamment l'introduction progressive du modèle fréquentiste, n'ait eu qu'un impact limité sur l'amélioration de l'apprentissage des élèves depuis 1998. On se gardera d'une telle conclusion, trop réductrice, qui ne tiendrait pas compte du contexte scolaire et sociétal.

Les formats d'activité proposés ont permis d'observer chez les élèves des stratégies et des représentations différentes pour aborder des problèmes contre-intuitifs. Néanmoins, si la prise en compte du caractère paradoxal a été observé dans l'ensemble à l'aide de l'approche fréquentiste, la justification théorique n'a pu être comprise que partiellement, en particulier dans le travail de présentation des paradoxes bayésiens. Cela soulève l'importance de penser en amont le rôle du pédagogue. C'est à ce titre seulement que les expériences font trace dans l'esprit des élèves et impliquent des changements de conception. On notera enfin une perspective positive sur le décrochage ou l'anxiété mathématique puisque une grande majorité des élèves en retrait ou en retard dans l'acquisition des compétences mathématiques se sont mobilisées pour les activités. Il serait intéressant de questionner cette observation au regard d'autres expérimentations qui s'appuieraient sur un enseignement magistral ou très guidé des paradoxes probabilistes.

L'analyse des questionnaires post-test a révélé des conclusions ambivalentes. Aucune différence majeure entre les deux classes n'a été observé. Cela laisse augurer une action similaire des différentes modalités proposées pour l'étude des paradoxes. L'expérimentation a pu renforcer certains biais, pourtant reliés dans les travaux de Lecoutre et Fischbein (1998) à des conceptions naïves. En revanche, on note un effet globalement positif sur le biais d'équiprobabilité. La présence de l'effet Falk reste néanmoins inchangée à l'issue de la séquence.

Soulignons que nos résultats ne permettent pas de conclure sur l'apprentissage de l'inhibition. En effet, la demande de justification dans les questionnaires, essentielles pour analyser les

conceptions des élèves, avaient un effet intrinsèquement inhibant. Ceci ne permettait pas de différencier le recours spontané au système lent (par inhibition de la voie rapide) des réponses guidées par le besoin d'explication. Il est intéressant d'observer l'ancrage des conceptions chez les élèves, compte tenu de la similarité entre les justifications aux deux questionnaires (parfois au mot près). De plus, le lien entre les différents biais n'a pas été abordé dans cette étude. D'après Gauvrit (2013b), la correction d'un biais probabiliste se fait en général au détriment d'autres biais. On peut relier cette connexion à la complémentarité entre les approches classiques et fréquentistes.

Il convient toutefois de garder de la distance avec les assertions qui précèdent. En effet, d'autres variables, didactiques ou liées au contexte, n'ont pas été étudiées et pourraient avoir un rôle explicatif dans ce qui a été observé : rythme de la séquence, progression annuelle, confiance entre les élèves et l'enseignant, etc. Il serait intéressant de poursuivre l'expérimentation afin de préciser l'incidence de ces facteurs. Ceci ouvre des perspectives de prolongement de nos travaux. Par ailleurs, la taille de l'échantillon ne saurait être représentatif. Il serait malvenu de recourir à la loi des petits nombres alors même que nous proposons des activités visant à lutter contre un tel biais.

Dans ce contexte, le meilleur indicateur semble être le retour réflexif des élèves à l'issue de l'expérimentation. Il leur a été demandé de commenter en quelques mots leur ressenti face aux activités proposées, les réponses étant anonymes. La figure 23 présente un nuage de mots évoquant les idées fortes des retours (rassemblées par champ lexical). Si les caractères ludique, appliqué et collaboratif des activités ont été appréciés, certains semblent être perdus par tous ces paradoxes. Ceci rejoint le constat de Mathieu (2010) : "[l'étude des paradoxes] a fait naître, chez certains élèves, des réactions attentatoires à l'apprentissage et une amplification inquiétante de la confusion de leurs idées." Chez tous les élèves, ces activités auront toutefois permis le développement de l'esprit critique en montrant les limites de l'intuition, en suscitant la curiosité et en illustrant la force de l'argumentation mathématique.



FIGURE 23 – Retour des élèves

## Conclusion

L'enseignement des probabilités au lycée ne saurait faire abstraction des obstacles épistémologiques qui ont émaillé leur formalisation. Conditionnement, suites aléatoires, équiprobabilité ou encore échantillonnage sont autant de notions dont la difficulté de compréhension et de maîtrise se retrouve chez nos élèves et, plus inquiétant, chez nombre d'enseignants. Les conceptions erronées et le recours aux heuristiques constituent alors le terreau de biais cognitifs systématiques.

Les paradoxes probabilistes constituent des outils précieux pour mettre en exergue ces biais chez l'apprenant. Source de conflit cognitif, ils invitent l'élève à un questionnement de ses conceptions et représentations. En nous appuyant sur des questions ouvertes et sur des approches collaboratives, nous avons proposé des modalités pédagogiques qui exploitent cette tension dans l'esprit des élèves. Cette approche, à rebours de ce qui est classiquement rencontré dans la littérature scolaire, favorise ainsi l'implication personnelle et le débat d'idées et développe à la fois des compétences mathématiques et socio-comportementales. Compte tenu de l'importance récente acquise par la manipulation dans l'enseignement mathématique et par la simulation dans les probabilités, il nous a semblé essentiel de proposer un support permettant une mise en scène des différents paradoxes, à l'aide de Geogebra.

Les résultats obtenus restent contrastés mais ne sauraient suffire à invalider l'hypothèse d'une action bénéfique des paradoxes sur les biais probabilistes. L'absence de groupe contrôle, la fiabilité intra-examineur, l'effectif des cohortes, le nombre limité de paradoxes étudiés, l'influence des séances sans paradoxe dans la séquence constituent autant de variables dont il faut tenir compte et qui mériteraient un approfondissement. On notera toutefois que les activités proposées participent à l'éducation à l'esprit critique, propice à l'apprentissage de l'inhibition et au développement de la logique mathématique et de la curiosité scientifique.

Les difficultés rencontrées dans la compréhension des paradoxes, parfois de manière systématique (problème des deux enfants, problème des trois prisonniers), permettent de soulever l'épineuse question de la modélisation, une étape difficile et essentielle en probabilité. Ceci rappelle la naissance des probabilités modernes avec Kolmogorov et rejoint les résultats de Fox et Levav (2004) qui avaient observé chez les individus le recours à l'heuristique d'uniformité pour simplifier une situation probabiliste. Nous l'avons vu dans nos classes, il convient d'insister sur l'explicitation systématique de l'univers retenu. Les paradoxes permettent en particulier d'illustrer qu'il est possible de produire des raisonnements rigoureux sur des univers différents. Le choix conscient d'une hypothèse de modélisation explicite nécessite alors l'activation du système lent.

On peut se questionner sur les traces que laissera l'expérimentation sur les élèves. Comment se comporteront-ils face à des paradoxes, nouveaux ou étudiés, l'an prochain ? Seront-ils capables d'en proposer une étude théorique ou échoueront-ils à inhiber les heuristiques ? Plus globalement, les séances auront-elles suscité un goût pour la recherche de problèmes logiques ou au contraire renforceront-elles chez certains le sentiment d'une complexité intrinsèque dans

les mathématiques ? Ce sont autant de questions qui restent en suspens mais qui devraient constituer la clé de voûte de l'apprentissage.

Par ces questions, on observe l'importance d'interroger les conceptions des élèves. Le pédagogue doit non seulement pouvoir les identifier chez l'élève mais aussi connaître les processus cognitifs en action. Ce sont autant de points que nous souhaitons développer dans la suite de notre pratique professionnelle. Cela sous-tend une formation continue de l'enseignant en didactique, en pédagogie et en psychologie, qui vienne compléter le savoir disciplinaire. Par ce travail de recherche, un nouvel équilibre se met ainsi en place entre les élèves et l'enseignant. Le travail de maïeutique des élèves pour le pédagogue devient manifeste. Un apprentissage symétrique s'opère, à condition que l'enseignant accepte la posture d'apprenant. Ceci a pu être manifeste dans nos travaux où nous considérons systématiquement les élèves comme nos collaborateurs. On retrouve là une caractéristique essentielle de la recherche-action. Plus concrètement, la question se pose naturellement d'étudier le recours aux paradoxes dans d'autres contextes : cycle 3, cycle 4, supérieur. La diversité des mathématiques permet également d'envisager une utilisation des paradoxes dans d'autres thèmes, afin de concourir au développement de l'inhibition chez l'élève. Nous espérons pouvoir mener à bien l'étude de ces différentes problématiques dans notre environnement professionnel futur.

## Références

- BAR-HILLEL, M. & FALK, R. (1982). Some teasers concerning conditional probabilities. *Cognition*, 11(2), 109-122.
- BERTRAND, J. (1889). *Calcul des probabilités*. Paris, Gauthier-Villars et fils.
- BOROVČNIK, M. & KAPADIA, R. (2014). From Puzzles and Paradoxes to Concepts in Probability. In E. J. CHERNOFF & B. SRIRAMAN (Éd.), *Probabilistic Thinking* (p. 35-73). Dordrecht, Springer Netherlands.
- BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 4(2), 164-198.
- CAROLL, L. (1893). *Curiosa Mathematica, Part II/ Pillow Problems*. London, MacMillan.
- COHEN, J. & HANSEL, C. E. M. (1955). The idea of independence. *British Journal of Psychology*, 46(3), 178-190.
- COLLET, I. (2015). Faire vite et surtout le faire savoir. Les interactions verbales en classe sous l'influence du genre. *Revue Internationale d'Ethnographie*, 4, 6-22.
- CONDORCET, J. (1785). *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. Hachette Livre - BNF.
- DELAHAYE, J.-P. (2005). Le trésor et les Sophies. *Pour la Science*, 336, 90-94.
- DELAHAYE, J.-P. (2013). L'embarrassant paradoxe de Simpson. *Pour la Science*, 429, 80-85.
- DEPP. (2021). *Continuité pédagogique de mars à mai 2020 : résultats de l'enquête auprès des enseignants du second degré* (Document de travail 2021-E05). DEPP.
- EASTES, E. & PELLAUD, F. (2004). Un outil pour apprendre : l'expérience contre-intuitive. *Union des professeurs de physique et de chimie*, 98, 1197-1208.
- FALK, R. (1979). Revision of probabilities and the time axis. *Proceedings of the third international conference for the psychology of mathematics education*, 64-66.
- FALK, R. & LANN, A. (2008). The allure of equality: Uniformity in probabilistic and statistical judgment. *Cognitive Psychology*, 57(4), 293-334.
- FISCHBEIN, E. & SCHNARCH, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), 96-105.
- FOX, C. R. & LEVAV, J. (2004). Partition-Edit-Count : Naive extensional reasoning in judgment of conditional probability. *Journal of Experimental Psychology: General*, 133(4), 626-642.
- FOX, C. R. & ROTTENSTREICH, Y. (2003). Partition priming in judgement under uncertainty. *Psychological Science*, 14(3), 195-200.
- GALILEI, G. (1898). Scritture et Frammenti di data incerta (J.-F. PICHARD, Trad.). In, *Opere de Galileo Galilei* (p. 591-594). Firenze.
- GARDNER, M. (1961). *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*. New-York, Simon & Schuster.
- GAUVRIT, N. (2009). *Vous avez dit hasard ? Entre mathématiques et psychologie*. Paris, Belin - Pour la Science.

- GAUVRIT, N. (2013a). A propos du « biais d'équiprobabilité ». *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 33(2), 163-182.
- GAUVRIT, N. (2013b). Conceptions du hasard et biais probabilistes chez les enseignants du second degré : effet d'une formation courte. *Statistique et Enseignement*, 4(2), 53-66.
- GAUVRIT, N. & MORSANYI, K. (2014). The equiprobability bias from a mathematical and psychological perspective. *Advances in Cognitive Psychology*, 10(4), 119-130.
- GENARD, S. (2001). Rôles des paradoxes dans l'évolution des mathématiques. *Expressions*, 18, 67-86.
- GIORDAN, A. & DE VECCHI, G. (2010). *Aux origines du savoir. La méthode pour apprendre*. Ovadia.
- GRAS, R. & TOTOHASINA, A. (1995). Conceptions d'élèves sur la notion de probabilité conditionnelle révélées par une méthode d'analyse des données : Implication - similarité - corrélation. *Educational Studies in Mathematics*, 28(4), 337-363.
- HENRY, M. (2009a). Émergence de la probabilité et enseignement : définition classique, approche fréquentiste et modélisation. *REPERES - IREM*, 74, 67-89.
- HENRY, M. (2009b). Émergence de le probabilité et enseignement. *REPERES - IREM*, 74, 67-89.
- HENRY, M. (2010). Évolution de l'enseignement secondaire français en statistique et probabilités, 1(1), 35-45.
- HOUDÉ, O. (2018). Chapitre III. Inhiber pour raisonner : le Système 3 (exécutif). Paris, Presses Universitaires de France.
- HUERTA, M. P. & LONJEDO, Á. (2007). The same problem in three presentation formats: Different percentages of success and thinking processes. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 732-741.
- KAHNEMAN, D. (2012). *Système 1, système 2 . Les deux vitesses de la pensée*. Paris, Flammarion.
- KRAUSS, S. & WANG, X. T. (2003). The psychology of the Monty Hall problem: Discovering psychological mechanisms for solving a tenacious brain teaser. *Journal of Experimental Psychology: General*, 132(1), 3-22.
- LAPLACE, P. S. (1814). *Essai philosophique sur les probabilités*. Paris, Bachelier.
- LAROUSSE. (p. d.). Paradoxe. Larousse en ligne.
- LECOUTRE, M.-P. (1985). Jugements probabilistes chez des adultes : pratique des jeux de hasard et formation en théorie des probabilités. *Bulletin de Psychologie*, 372(38), 891-900.
- LECOUTRE, M.-P. & FISCHBEIN, E. (1998). Évolution avec l'âge de "misconceptions" dans les intuitions probabilistes en France et en Israël. *Rcherches en Didactique des Mathématiques*, 18(3), 311-332.
- LEVIATAN, T. (2002). On the use of paradoxes in the teaching of probability, In *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 6)*.

- MATHIEU, A. (2010). Pratique d'une pédagogie de l'étonnement en Mathématiques en classe de seconde. *Expressions*, 35, 93-117.
- MAURY, S. (1985). Influence de la question dans une épreuve relative à la notion d'indépendance. *Educational Studies in Mathematics*, 16(3), 283-301.
- MORSANYI, K., HANDLEY, S. J. & SERPELL, S. (2012). Making heads or tails of probability: An experiment with random generators: *Training with random generators*. *British Journal of Educational Psychology*, 83(3), 379-395.
- OJEDA, A. M. (1996). Contextos, representaciones y la idea de probabilidad condicional. In *Investigaciones en matemáticas educativas* (p. 291-310). Grupo Editorial Iberoamericano.
- PAPADATOS, C., BAKOGIANNI, D. & ZACHARIADES, T. (2019). Students' attitudes towards two famous paradoxes. Emerged strategies in various school grades, In *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.
- PARZYSZ, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 127-147.
- PARZYSZ, B. (2013). Exemple, modèle, simulation en probabilités. *Cahiers du LDAR*, 83-90.
- PARZYSZ, B. (2017). Les probabilités dans l'enseignement secondaire, d'hier à demain. In *Les probabilités et la statistique au lycée - Pour un enseignement et une formation sans alea... ou presque* (p. 17-55). Besançon, Presses universitaires de Franche-Comté.
- PETROCELLI, J. V. & HARRIS, A. K. (2011). Learning inhibition in the Monty Hall problem : The role of dysfunctional counterfactual prescriptions. *Personality and Social Psychology Bulletin*, 37(10), 1297-1311.
- PIAGET, J. & INHELDER, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Presses Universitaires de France.
- POINCARÉ, H. (1911). L'intuition et la logique en mathématiques. In *La valeur de la science* (p. 11-34). Paris, Flammarion.
- RÉNYI, A. (1966). *Calcul des probabilités*. Paris, Dunod.
- RIOUX, M. (2018). Pensée intuitive en classe de Mathématiques, In *Mathématiques en scène des ponts entre les disciplines*. Gennevilliers, IREM de Paris.
- SELVIN, S. (1975). A problem in probability. *The American Statistician*, 29(1), 67-71.
- SIMPSON, E. H. (1951). The interpretation of interaction in contingency tables. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 13(2), 238-241.
- TVERSKY, A. & KAHNEMAN, D. (1971). Belief in the law of small numbers. *Psychological Bulletin*, 76(2), 105-110.
- TVERSKY, A. & KAHNEMAN, D. (1973). Availability : A heuristic for judging frequency and probability. *Cognitive Psychology*, 5(2), 202-232.
- TVERSKY, A. & KAHNEMAN, D. (1974). Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science*, 185(4157), 1124-1131.
- TVERSKY, A. & KAHNEMAN, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, 90(4), 293-315.



- VILLANI, C. & TOROSSIAN, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des Mathématiques* (rapp. tech.). Ministère de l'Éducation Nationale.
- VIVIER, L. (2017). Un panorama des études didactiques sur les probabilités. In *Les probabilités et la statistique au lycée - Pour un enseignement et une formation sans alea... ou presque* (p. 57-82). Besançon, Presses universitaires de Franche-Comté.
- VOS SAVANT, M. (1990). Ask Marilyn. *Parade Magazine*, 15.
- WEHENKEL, L. (2012). *Éléments du calcul des probabilités* (rapp. tech.). Université de Liège.

# A Extraits du B.O. spécial n°1 du 22 janvier 2019

Classe de 2<sup>nde</sup>

## Statistiques et probabilités

### • Objectifs

En matière d'information chiffrée, les élèves ont travaillé au cycle 4 effectifs, fréquences, proportions, pourcentages, coefficient de proportionnalité, taux d'évolution, coefficient multiplicateur. L'objectif est de consolider et de prolonger ce travail par l'étude de situations multiplicatives : proportion de proportion, évolutions successives ou réciproques. Les élèves doivent distinguer si un pourcentage exprime une proportion ou une évolution.

Au cycle 4, les élèves ont travaillé sur les notions élémentaires de probabilité : expérience aléatoire, issue, événement, probabilité. Ils ont construit leur intuition sur des situations concrètes fondées sur l'équiprobabilité, puis en simulant la répétition d'épreuves identiques et indépendantes pour observer la stabilisation des fréquences. Ils sont capables de calculer des probabilités dans des contextes faisant intervenir une ou deux épreuves.

En classe de seconde, on formalise la notion de loi (ou distribution) de probabilité dans le cas fini en s'appuyant sur le langage des ensembles et on précise les premiers éléments de calcul des probabilités. On insiste sur le fait qu'une loi de probabilité (par exemple une équiprobabilité) est une hypothèse du modèle choisi et ne se démontre pas. Le choix du modèle peut résulter d'hypothèses implicites d'équiprobabilité (par exemple, lancers de pièces ou dés équilibrés, tirage au hasard dans une population) qu'il est recommandable d'explicitier ; il peut aussi résulter d'une application d'une version vulgarisée de la loi des grands nombres, où un modèle est construit à partir de fréquences observées pour un phénomène réel (par exemple : lancer de punaise, sexe d'un enfant à la naissance). Dans tous les cas, on distingue nettement le modèle probabiliste abstrait et la situation réelle.

### • Histoire des mathématiques

L'histoire des probabilités fournit un cadre pour dégager les éléments de la mathématisation du hasard. Un exemple est le problème des partis, dit aussi du chevalier de Méré, l'échange de lettres entre Pascal et Fermat sur ce point puis les travaux de Pascal, Fermat et Huygens qui en découlent. Le problème du duc de Toscane ou les travaux de Leibniz sur le jeu de dés peuvent aussi être évoqués.

### • Modéliser le hasard, calculer des probabilités

*L'ensemble des issues est fini.*

#### Contenus

- Ensemble (univers) des issues. Événements. Réunion, intersection, complémentaire.
- Loi (distribution) de probabilité. Probabilité d'un événement : somme des probabilités des issues.
- Relation  $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ .
- Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres.

#### Capacités attendues

- Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité dans une population) en comprenant que les probabilités sont définies a priori.
- Construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.
- Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves.

# Classe de 1<sup>ère</sup>

## Probabilités et statistiques

### • Objectifs

L'enseignement dispensé en classe de seconde a abordé le modèle probabiliste, dans le cas d'un univers fini. En première, on développe l'étude de ce modèle. L'enseignement s'organise autour des buts suivants :

- introduire la notion de probabilité conditionnelle, sous-jacente dans toute modélisation probabiliste, et mettre en évidence la problématique de l'inversion des conditionnements ;
- formaliser la notion d'indépendance ;
- introduire la notion de variable aléatoire, en lien étroit avec les applications des probabilités ;
- introduire les notions d'espérance, de variance et d'écart type d'une variable aléatoire.

Comme en seconde, on distingue nettement modèle et réalité. Ainsi, une hypothèse d'indépendance fait partie d'un modèle : elle peut être un point de départ théorique ou être la conséquence d'autres hypothèses théoriques. Lorsque le modèle est appliqué à une situation réelle (par exemple, lancer de deux dés physiques), l'indépendance fait partie de la modélisation et résulte de l'analyse de la situation physique.

Les notions de statistique descriptive vues en seconde sont articulées avec le cours de probabilités. Une population statistique peut être étudiée d'un point de vue probabiliste en considérant l'expérience aléatoire de tirage au sort avec équiprobabilité dans la population. Un lien est ainsi fait entre des notions statistiques (sous-population, proportion, moyenne, écart type) et les notions probabilistes analogues (événement, probabilité, espérance, écart type). La notion de fréquence conditionnelle ne fait pas l'objet d'une étude, mais on donne des situations de calcul de probabilité conditionnelle à partir d'un tableau croisé d'effectifs. Les arbres pondérés sont introduits à partir des arbres de dénombrements vus en seconde.

### • Histoire des mathématiques

Les probabilités conditionnelles peuvent être l'objet d'un travail historique en anglais ; elles apparaissent en effet dans des travaux de Bayes et de Moivre, écrits en anglais au XVIII<sup>e</sup> siècle, même si c'est Laplace qui en a élaboré la notion. Les questions traitées par ces auteurs peuvent parfois surprendre (exemple : quelle est la probabilité que le soleil se lève demain, sachant qu'il s'est levé depuis le commencement du monde ?) ; néanmoins, les probabilités conditionnelles sont omniprésentes dans la vie courante et leur utilisation inappropriée mène facilement à de fausses affirmations.

L'histoire des probabilités contribue à la réflexion sur la codification d'une théorie scientifique. On peut considérer que les origines du « calcul des probabilités » remontent au XVII<sup>e</sup> siècle. Pascal, Huygens, Moivre, Bernoulli, Euler, d'Alembert appliquent les notions de variable aléatoire et d'espérance à des problèmes issus de questions liées aux jeux, aux assurances et à l'astronomie.

Ce n'est que vers 1930 que la description actuelle, en termes d'univers, s'est imposée. Elle permet une formalisation souple dans laquelle l'univers joue le rôle de « source d'aléas ».

La notion de variable aléatoire, présente sans définition précise depuis l'origine de la discipline, apparaît alors comme une fonction définie sur l'univers.

### • Probabilités conditionnelles et indépendance

#### Contenus

- Probabilité conditionnelle d'un événement  $B$  sachant un événement  $A$  de probabilité non nulle. Notation  $P_A(B)$ . Indépendance de deux événements.
- Arbres pondérés et calcul de probabilités : règle du produit, de la somme.
- Partition de l'univers (systèmes complets d'événements). Formule des probabilités totales.
- Succession de deux épreuves indépendantes. Représentation par un arbre ou un tableau.

### Capacités attendues

- Construire un arbre pondéré ou un tableau en lien avec une situation donnée. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Utiliser un arbre pondéré ou un tableau pour calculer une probabilité.
- Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs (tirage au sort avec équiprobabilité d'un individu dans une population).
- Dans des cas simples, calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales.
- Distinguer en situation  $P_A(B)$  et  $P_B(A)$ , par exemple dans des situations de type « faux positifs ».
- Représenter une répétition de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.

### Exemple d'algorithme

- Méthode de Monte-Carlo : estimation de l'aire sous la parabole, estimation du nombre  $\pi$ .

### Approfondissements possibles

- Exemples de succession de plusieurs épreuves indépendantes.
- Exemples de marches aléatoires.

## • Variables aléatoires réelles

*Le programme ne considère que des univers finis et des variables aléatoires réelles.*

L'objectif est simultanément de développer une intuition autour de l'idée de nombre dépendant du hasard et de formaliser la notion mathématique de variable aléatoire comme fonction numérique définie sur un univers, permettant d'affecter des probabilités aux valeurs possibles de la variable.

### Contenus

- Variable aléatoire réelle : modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire ; formalisation comme fonction définie sur l'univers et à valeurs réelles.
- Loi d'une variable aléatoire.
- Espérance, variance, écart type d'une variable aléatoire.

### Capacités attendues

- Interpréter en situation et utiliser les notations  $\{X = a\}$ ,  $\{X \leq a\}$ ,  $P(X = a)$ ,  $P(X \leq a)$ . Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire.
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- Calculer une espérance, une variance, un écart type.
- Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème (mise pour un jeu équitable...).

### Exemples d'algorithmes

- Algorithme renvoyant l'espérance, la variance ou l'écart type d'une variable aléatoire.
- Fréquence d'apparition des lettres d'un texte donné, en français, en anglais.

### Approfondissements possibles

- Formule de König-Huygens.
- Pour  $X$  variable aléatoire, étude de la fonction du second degré  $x \mapsto E((X - x)^2)$ .

## B Référencement des paradoxes dans les manuels

	Toscane	Bertrand	Anniversaire	Simpson	Condorcet	Benford	Monty Hall
Barbazo	×	×	×	×	×	×	×
Déclic	p. 358	×	×	×	×	×	×
Hyperbole	p. 324	×	p. 325	×	×	×	×
Indice	p. 351	×	p. 350	×	×	×	×
Le Livre Scolaire	p. 319	p. 308	×	p. 280	×	×	×
Mathx	p. 271	×	p. 247	×	p. 256	×	p. 276
Metamath	p. 307	p. 309	×	×	×	×	×
Sésamath	×	×	×	×	×	×	×
Transmath	p. 346	×	p. 326	p. 292	×	×	p. 349
Variations	×	×	p. 354	×	p. 350	p. 353	×

TABLE 2 – Liste des paradoxes dans les manuels de 2<sup>nde</sup>

	Toscane	Anniversaire	Simpson	Monty Hall	2 enfants	St-Petersbourg
Barbazo	p. 288	×	×	p. 291	×	×
Déclic	p. 342	p. 377	×	×	×	×
Hyperbole	p. 303	×	×	p. 282	×	×
Indice	×	×	×	p. 303	×	p. 307
Le Livre Scolaire	×	×	p. 293	×	p. 305	p. 331
Metamath	×	×	×	×	×	×
Sésamath	p. 78	×	×	p. 81	×	×
Transmath	×	×	×	×	×	×
Variations	×	×	×	×	p. 310	p. 340

TABLE 3 – Liste des paradoxes dans les manuels de 1<sup>ère</sup>

## C Problème du duc de Toscane - diaporama - classe de 2<sup>nde</sup>

# Problème du duc de Toscane

Florence, au XVIII<sup>ème</sup> siècle

Le jeu de passe-dix consiste à lancer 3 dés et à miser sur la somme des faces.



Est-il plus probable d'obtenir 9 ou 10 ?

FIGURE 24 – Problème du duc de Toscane - diaporama (page 1)

# Problème du duc de Toscane



## 1<sup>ère</sup> approche :

Univers des possibles :

$\Omega = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18\}$



A : « Obtenir 9 »  
B : « Obtenir 10 »  
C : « Obtenir 3 »

Il y a 16 issues possibles :  
→ équiprobabilité  
→  $P(A) = P(B) = P(C) = 1/16$

FIGURE 25 – Problème du duc de Toscane - Diaporama (page 2)

# Problème du duc de Toscane



Autant de combinaisons pour 9 et 10...



Duc de Toscane

## 2ième approche :

Univers des possibles :

$\Omega$  : l'ensemble 3 faces : {3 dés de 1, 1 dé de 1 et 2 de 2, ...}

Il y a 76 issues possibles :

- 6 avec 3 faces identiques
- 30 avec 2 faces différentes
- 40 avec 3 faces différentes

$$9 = 1+2+6=1+3+5=1+4+4=2+2+5=2+3+4=3+3+3$$

$$10 = 1+3+6=1+4+5=2+2+6=2+3+5=2+4+4=3+3+4$$

→ équiprobabilité

→  $P(\ll \text{Obtenir } 9 \gg) = P(\ll \text{Obtenir } 10 \gg) = 10/76$

FIGURE 26 – Problème du duc de Toscane - diaporama (page 3)

# Problème du duc de Toscane



... mais le 10 sort plus souvent



Les joueurs de dés, de La Tour, 1650

## Simulation numérique:

`ALEA.ENTRE.BORNES(1,6)` et `NB.SI()`

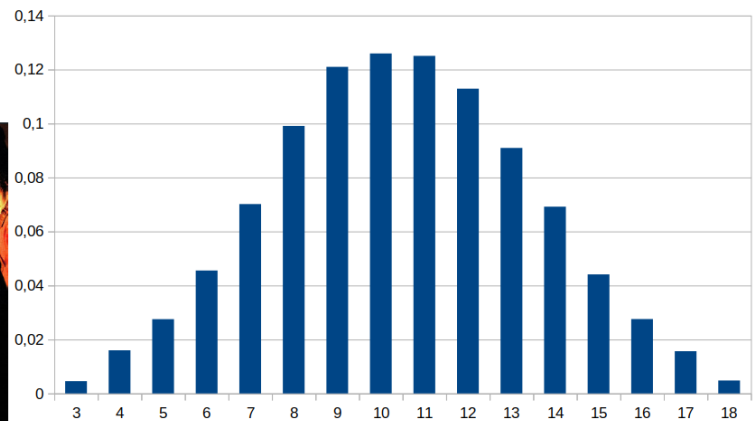


FIGURE 27 – Problème du duc de Toscane - diaporama (page 4)

# Problème du duc de Toscane



## 3ième approche :

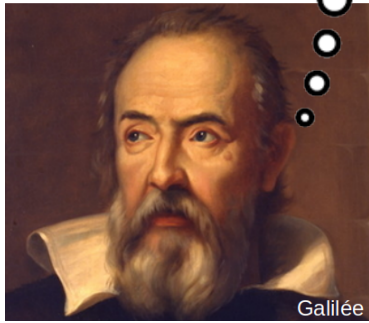
Univers des possibles :

$\Omega : \{(1,2,2), (2,2,1), (2,1,2), \dots\}$

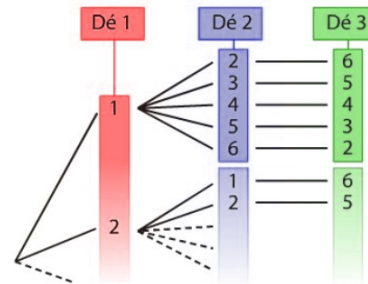
Il y a  $6^3=216$  issues possibles :

→ équiprobabilité

L'ordre des dés importe !



Galilée



$P(\ll \text{Obtenir } 9 \gg) = 25/216$

$P(\ll \text{Obtenir } 10 \gg) = 27/216$

FIGURE 28 – Problème du duc de Toscane - diaporama (page 5)



## D Applications Geogebra

? Nouvelle famille Remise à zéro

Une fille et un garçon

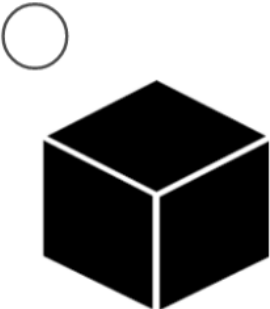
5 familles ayant au moins 1 garçon dont :  
- 3 familles avec un garçon et une fille  
- 2 familles avec deux garçons

FIGURE 29 – Application Geogebra Problème des deux enfants

? Nouvelle partie Remise à zéro

Quelle est la couleur de l'autre jeton ?

Blanc Noire



Le jeton blanc est sorti 6 fois au premier tirage dont :  
- 5 fois avec un jeton blanc au 2ième tirage  
- 1 fois avec un jeton noir au 2ième tirage

FIGURE 30 – Application Geogebra Pillow Problem

? Nouvelle partie Remise à zéro

**Nombre de parties: 1**  
**En gardant son choix : gagné 0 perdu 0**  
**En changeant d'avis : gagné 0 perdu 1**

**J'ouvre la porte : 3**  
**Changez-vous d'avis ou gardez-vous la porte 2 ?**


1 2 

FIGURE 31 – Application Geogebra Problème de Monty Hall

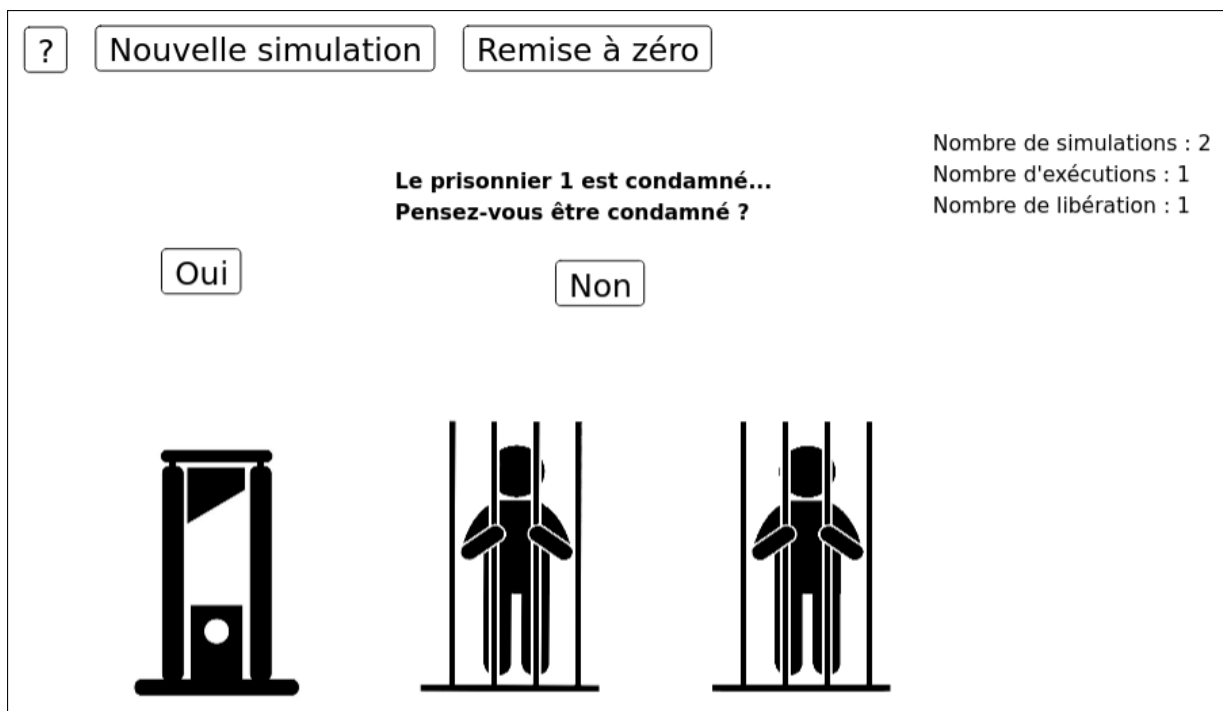


FIGURE 32 – Application Geogebra Problème du prisonnier



FIGURE 33 – Application Geogebra Paradoxe de Bertrand

## E Paradoxes bayésiens - grille d'évaluation en 2<sup>nde</sup>

	Niveau très insuffisant	Niveau insuffisant	Niveau satisfaisant	Niveau très satisfaisant
<b>Respect des consignes</b>	Aucun rendu	Document rendu le jour J	Document rendu en amont au format propriétaire	Document rendu en amont au format ouvert
<b>Énoncé du problème</b>	Non présenté	Énoncé imprécis ou incorrect	Énoncé correct	Énoncé correct. Présentation historique. Réalisation de l'expérience aléatoire.
<b>Approche intuitive</b>	Non présentée	Mention de la probabilité intuitive	Explication de la probabilité intuitive	Sondage de la classe. Étude de la réponse intuitive
<b>Approche fréquentiste</b>	Non présentée	Brève évocation de fréquences	Présentation des simulations. Protocole expliqué sur demande	Présentation graphique. Protocole décrit. Lien avec loi des grands nombres.
<b>Approche théorique</b>	Non présentée ou erronée.	Probabilités correctes mais justification erronée.	Justification correcte intégrant des éléments de formalisme	Justification développée. Explication des éléments de modélisation mathématique (univers, équiprobabilité)
<b>Structure de l'exposé</b>	Absence de structure	Structure présente. Allers-retours entre les parties	Structure cohérente. Amorce de conclusion	Structure élaborée : introduction, plan, développement et conclusion
<b>Diaporama</b>	Absence de diaporama	Diaporama confus et brouillon	Diaporama cohérent	Diaporama complet. Équilibre entre éléments textuels et visuels. Mise en page soignée
<b>Expression orale</b>	Discours inaudible et improvisé	Lecture des notes en continu. Voix monocorde.	Variations dans l'utilisation de la voix. Lexique adapté	Bonne maîtrise de la voix. Qualités prosodiques. Vocabulaire riche et précis. Distance vis à vis des notes.
<b>Qualité de l'interaction</b>	Absence de réponse aux questions.	Réponses courtes ou rares.	Répond, contribue, réagit.	Réactions pertinentes. Prises d'initiatives.

## F Paradoxe de Simpson - énoncé des situations

### Situation 1

Un patient est atteint de calculs aux reins. Son médecin lui propose deux alternatives : le traitement A est une chirurgie ouverte tandis que le traitement B se pratique par petits trous percés à travers la peau. Pour l'aider à faire son choix, le médecin l'informe qu'une étude a été menée sur 700 patients. La moitié d'entre eux ont reçu le traitement A, pour lequel on constate 273 guérisons, et les autres le traitement B, pour lequel on constate 289 guérisons.

On sait également qu'il y a deux types de calculs : les petits et les gros.

- Le traitement A a fonctionné dans 81 cas sur 87 pour les petits calculs, et dans 192 cas sur 263 pour les gros.
- Le traitement B a fonctionné dans 234 cas sur 270 pour les petits calculs, et dans 55 cas sur 80 pour les gros.

1. Sans tenir compte de la taille, pour quel traitement vous semble-t-il plus probable que le patient survive ?
2. On tire au hasard un patient ayant un petit calcul, vous semble-t-il plus probable qu'il survive s'il a reçu le traitement A ou le traitement B ?
3. On tire au hasard un patient ayant un gros calcul, vous semble-t-il plus probable qu'il survive s'il a reçu le traitement A ou le traitement B ?
4. En confrontant les taux moyens de réussite des deux traitements calculés aux questions 1, 2 et 3, faire apparaître un paradoxe.
5. établir le type de calculs le plus difficile à guérir. Proposez une explication au paradoxe observé.
6. De manière générale, pourquoi ne peut-on pas comparer les probabilités d'un événement apparaissant dans des groupes n'ayant pas la même structure.

### Situation 2

En 1973, l'université de Berkeley fut poursuivie pour discrimination envers les filles. On donne ci après le détail des admissions, dans les six départements les plus importants, notés ici de A à F.

Département	Garçons	Admis	Filles	Admises
A	825	511	108	89
B	560	353	25	17
C	325	120	593	202
D	417	138	375	131
E	191	53	393	94
F	272	16	341	24

1. Comparer la proportion de filles admises et celle de garçons admis. A a-t-il discrimination a priori ?
2. Calculer, pour chaque filière, la probabilité qu'une personne soit admise si c'est un garçon et la probabilité qu'une fille soit admise si c'est une fille ?
3. En confrontant les résultats précédents, faire apparaître un paradoxe.
4. À votre avis, vous semble-t-il y avoir discrimination de genres dans cette université ?
5. À l'aide de considérations sociologiques, proposer une explication à ce phénomène.
6. De manière générale, pourquoi ne peut-on pas comparer les probabilité d'un événement apparaissant dans des groupes n'ayant pas la même structure.

### Situation 3

Dans son édition du 11 mars 1979, le New-York Times publie les données concernant 4764 homicides perpétrés en Floride entre 1973 et 1979.

Les variables considérées sont la couleur de peau du meurtrier, celle de la victime et la condamnation à la fin du jugement.

Meurtrier	Victime	Peine de mort	Autre peine
Blanc	Blanche	72	2074
Blanc	Noire	0	111
Noir	Blanche	48	239
Noir	Noire	11	2209

1. Calculer la probabilité qu'un meurtrier soit condamné à mort s'il est blanc et la probabilité qu'un meurtrier soit condamné à mort s'il est noir. Vous semble-t-il y avoir un problème de racisme envers la communauté afro-américaine dans la justice américaine en 1970 ?
2. On tire au hasard un coupable d'homicide envers une personne de peau noire. Quelle est la probabilité que le coupable soit condamné à mort s'il est blanc ? Et s'il est noir ?
3. On considère les coupables d'homicide envers une personne de peau blanche. Quelle est la probabilité que le coupable soit condamné à mort s'il est blanc ? Et s'il est noir ?
4. À votre avis, vous semble-t-il y avoir discrimination raciale dans la justice américaine en 1970 ? Proposer une explication à ce phénomène.
5. De manière générale, pourquoi ne peut-on pas comparer les probabilité d'un événement apparaissant dans des groupes n'ayant pas la même structure.

## G Somme de dés - Classe de 1<sup>ère</sup>

### Un défi sur deux dés

Frédérique et Gaëlle jouent aux dés. Frédérique défie Gaëlle : "Si en faisant la somme des chiffres obtenus sur deux dés, tu obtiens 8, je te donne 10€. Si tu obtiens 7, c'est toi qui me donne 10€. Et nous relançons le dé jusqu'à la victoire de l'une d'entre nous."

On veut déterminer si Frédérique a eu raison de lancer ce défi.

On définit une fonction  $X$  dont l'ensemble de définition est l'univers de l'expérience aléatoire qui, à chaque issue, associe la somme des deux dés.  $X$  est appelée une **variable aléatoire**. L'événement  $\{X = x\}$  est l'événement "la variable aléatoire  $X$  prend la valeur  $x$ " et est constitué de toutes les issues qui permettent d'obtenir la valeur  $x$ . Par exemple, l'événement  $\{X = 2\}$  est obtenu en obtenant 1 sur chaque dé.

À l'aide d'une des stratégies suivantes, répondez aux questions ci-dessous.

#### Stratégie 1 : Étude théorique du problème

On représente la situation par un arbre de probabilités ou un tableau à double entrée.

#### Stratégie 2 : Étude fréquentiste du problème

On utilise le programme Python ci-contre pour simuler le lancer de 2 dés.

```
from math import *
from random import *
from matplotlib.pyplot import *

def resultat():
    return randint(1,6)+randint(1,6)

def lancers(n):
    lancers=[]
    bins=[x+0.5 for x in range(1,13)]
    for i in range(n):
        lancers.append(resultat())
    hist(lancers,bins)
    show()
```

1. Recopier et compléter le tableau suivant, appelé **loi de probabilité** de  $X$ .

$x$	2	3	...
$P(X = x)$			...

2. Pensez-vous que Frédérique ait eu raison de lancer ce défi ?
3. Calculer  $P(X \geq 4)$
4. Calculer, de deux façons différentes,  $P(X < 4)$ .

### Le paradoxe du duc de Toscane

Grand amateur de jeu, le duc de Toscane interpelle Galilée sur un curieux résultat qu'il obtient aux dés. En effet, il fait les observations suivantes :

- Il existe autant de façons d'obtenir par la somme de trois dés les nombres 9 et 10.
  - Le nombre 10 est obtenu plus fréquemment que le nombre 9.
5. Vérifier chacune de ces affirmations.
  6. Proposer une explication mathématique à ce phénomène.

## H Questionnaire Pré-test

1. Au tirage du loto, il faut choisir 6 nombres distincts parmi 49 (l'ordre n'a pas d'importance). On propose de miser sur l'un des deux tirages suivants : 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 1, 8, 17, 27, 33, 42. Quelle stratégie choisissez-vous ?
  - (a) Miser sur 1, 2, 3, 4, 5, 6 car il a plus de chances de sortir.
  - (b) Miser sur 1, 8, 17, 27, 33, 42 car il a plus de chances de sortir.
  - (c) Peu importe : les deux tirages ont la même chance de sortir.
2. Quand on lance une pièce de monnaie, on peut obtenir un des deux résultats, Pile ou Face. Suite au lancer d'une pièce quatre fois de suite, on a obtenu un Pile et trois Face. Est ce que la chance d'obtenir Face la cinquième fois est :
  - (a) Plus petite que celle d'obtenir Pile,
  - (b) Égale à celle d'obtenir Pile,
  - (c) Plus grande que celle d'obtenir Pile.
3. Linda a 31 ans, elle est célibataire, franche et très brillante. Elle est diplômée en philosophie. Lorsqu'elle était étudiante, elle se sentait très concernée par les questions de discrimination et de justice sociale et avait aussi participé à des manifestations antinucléaires. Selon vous :
  - (a) Linda est employée de banque,
  - (b) Linda est féministe et employée de banque.
4. On tire un mot de 4 lettres au hasard dans le dictionnaire de la langue française. On veut savoir s'il y a plus de chances que la première lettre soit un R ou bien que la troisième lettre soit un R.
  - (a) Il y a plus de chances que la première lettre soit un R.
  - (b) Il y a autant de chances que la première lettre ou la troisième soit un R.
  - (c) Il y a plus de chances que la troisième lettre soit un R.
  - (d) On ne peut pas savoir a priori.
5. Une classe est constituée de 23 filles et 13 garçons. Pour vous interroger, je demande à l'ordinateur de tirer au hasard une personne. Qu'est-il le plus probable ?
  - (a) Une fille passe au tableau.
  - (b) Un garçon passe au tableau.
  - (c) Il y a autant de chance que ce soit une fille qu'un garçon.
6. On lance deux dés cubiques en même temps. Lequel des deux résultats suivants a le plus de chances de se produire :
  - (a) Obtenir deux 6.
  - (b) Obtenir un 5 et un 6.

- (c) Les deux résultats ont la même chance.
7. M. Smith dit "J'ai deux enfants dont un au moins est un garçon". Que vous semble-t-il le plus probable :
- (a) l'autre enfant est un garçon.  
(b) l'autre enfant est une fille.  
(c) les deux cas sont autant probables.
8. En lançant trois fois une pièce de monnaie, la chance d'obtenir Face au moins deux fois est :
- (a) Plus petite, (b) Égale, (c) Plus grande,  
comparée à la chance d'obtenir au moins 200 fois Face si on lance la pièce 300 fois.
9. Leslie et Jérôme reçoivent chacun une boîte contenant deux boules blanches et deux boules noires.
- (a) Leslie tire une boule de sa boîte et obtient une boule blanche. Sans remettre la première boule tirée, elle tire une seconde boule. La chance que cette seconde boule soit également blanche est :
- i. plus petite, ii. égale,  
iii. plus grande comparée à la chance que ce soit une boule noire.
- (b) Jérôme tire une première boule de sa boîte et la met de côté sans la regarder. Il tire ensuite une seconde boule et constate qu'elle est blanche. Est-ce que la chance que la première boule tirée soit blanche est :
- i. plus petite, ii. égale,  
iii. plus grande comparée à la chance qu'elle soit noire ?



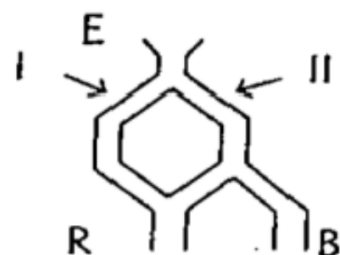
# I Questionnaire Post-test

1. Au tirage du loto, il faut choisir 6 nombres distincts parmi 49 (l'ordre n'a pas d'importance). On propose de miser sur l'un des deux tirages suivants : 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 1, 8, 17, 27, 33, 42. Quelle stratégie choisissez-vous ?
  - (a) Miser sur 1, 2, 3, 4, 5, 6 car il a plus de chances de sortir.
  - (b) Miser sur 1, 8, 17, 27, 33, 42 car il a plus de chances de sortir.
  - (c) Peu importe : les deux tirages ont la même chance de sortir.
2. Quand on lance une pièce de monnaie, on peut obtenir un des deux résultats, Pile ou Face. Suite au lancer d'une pièce quatre fois de suite, on a obtenu un Pile et trois Face. Est ce que la chance d'obtenir Face la cinquième fois est :
  - (a) Plus petite que celle d'obtenir Pile,
  - (b) Égale à celle d'obtenir Pile,
  - (c) Plus grande que celle d'obtenir Pile.
3. Linda a 31 ans, elle est célibataire, franche et très brillante. Elle est diplômée en philosophie. Lorsqu'elle était étudiante, elle se sentait très concernée par les questions de discrimination et de justice sociale et avait aussi participé à des manifestations antinucléaires. Selon vous :
  - (a) Linda est employée de banque,
  - (b) Linda est féministe et employée de banque.
4. On tire un mot de 4 lettres au hasard dans le dictionnaire de la langue française. On veut savoir s'il y a plus de chances que la première lettre soit un R ou bien que la troisième lettre soit un R.
  - (a) Il y a plus de chances que la première lettre soit un R.
  - (b) Il y a autant de chances que la première lettre ou la troisième soit un R.
  - (c) Il y a plus de chances que la troisième lettre soit un R.
  - (d) On ne peut pas savoir a priori.
5. Qu'est-il le plus probable ?
  - (a) Le jour le plus chaud de la semaine sera dimanche.
  - (b) Le jour le plus chaud de la semaine ne sera pas dimanche.
  - (c) Il y a une chance sur 2 que le jour le plus chaud de la semaine soit le dimanche.
6. a. Deux amis piochent une carte chacun dans un jeu différent de 32 cartes. Lequel des deux résultats suivants a le plus de chances de se produire :
  - (a) Les cartes piochées sont des rois de trèfle.
  - (b) Les cartes piochées sont la dame et le roi de trèfle.
  - (c) Les deux résultats ont la même chance.

6. b. On lance deux dés cubiques en même temps et on fait le produit des faces. Lequel des deux résultats suivants a le plus de chances de se produire :
- (a) Le produit des faces vaut 9. (b) Le produit des faces vaut 10.  
 (c) Les deux résultats ont la même chance.
7. a. M. Smith dit "J'ai deux enfants dont un au moins est un garçon". Que vous semble-t-il le plus probable :
- (a) l'autre enfant est un garçon. (b) l'autre enfant est une fille.  
 (c) les deux cas sont autant probables.
7. b. Dans un sac, il y a 1 Lego rouge et 1 Lego jaune. Je pioche un Lego. Dans un autre sac, il y a 1 boule rouge et 1 boule jaune. Je pioche une boule. Je vous informe qu'au moins l'un des objets est rouge. Qu'est-il le plus probable :
- (a) J'ai tiré deux objets rouges. (b) J'ai tiré un objet de chaque couleur.  
 (c) Les deux situations sont équiprobables.
8. En lançant trois fois une pièce de monnaie, la chance d'obtenir Face au moins deux fois est :
- (a) Plus petite, (b) Égale, (c) Plus grande,  
 comparée à la chance d'obtenir au moins 200 fois Face si on lance la pièce 300 fois.
9. a. Leslie et Jérôme reçoivent chacun une boîte contenant deux boules blanches et deux boules noires.
- (a) Leslie tire une boule de sa boîte et obtient une boule blanche. Sans remettre la première boule tirée, elle tire une seconde boule. La chance que cette seconde boule soit également blanche est :
- i. plus petite, ii. égale,  
 iii. plus grande comparée à la chance que ce soit une boule noire.
- (b) Jérôme tire une première boule de sa boîte et la met de côté sans la regarder. Il tire ensuite une seconde boule et constate qu'elle est blanche. Est-ce que la chance que la première boule tirée soit blanche est :
- i. plus petite, ii. égale,  
 iii. plus grande comparée à la chance qu'elle soit noire ?

9. b. On lâche une boule à l'entrée E d'un labyrinthe vertical. La boule sort par l'issue R. Quelle est la probabilité qu'elle soit passée par le conduit I ?

- (a)  $\frac{1}{2}$  (b)  $\frac{1}{3}$  (c)  $\frac{2}{3}$  (d) On ne peut pas savoir.



## J Synthèse des réponses aux questionnaires

Les tableaux ci-contre présentent les statistiques issus des résultats aux questionnaires pré-test (Pré) et post-test (Post) en classes de 2<sup>nde</sup>, 1<sup>ère</sup> et sur l'ensemble des 2 classes (global). La réponse correspondant au biais majoritaire est indiquée en gras et la réponse correcte en italique. Le taux de réponse identique entre le pré-test et le post-test est indiqué dans la ligne Idem. Les taux relevés dans Évolution + indiquent le taux de réponse correcte au post-test chez les élèves ayant une mauvaise réponse au pré-test. Les taux relevés dans Évolution - indiquent le taux de réponse erronée au post-test chez les élèves ayant la réponse correcte au pré-test.

	Lecoutre	2nde		1ère		Global	
		Pré (1)	Post (1)	Pré (1)	Post (1)	Pré (1)	Post (1)
Réponse A	.02	.06	0	.13	.13	.09	.06
<b>Réponse B</b>	<b>.39</b>	<b>.26</b>	<b>.40</b>	<b>.30</b>	<b>.35</b>	<b>.28</b>	<b>.38</b>
<i>Réponse C</i>	<i>.58</i>	<i>.68</i>	<i>.60</i>	<i>.57</i>	<i>.43</i>	<i>.63</i>	<b>.53</b>
Idem			.53		.61		.56
Évolution -			.15		.06		.11
Évolution +			.30		.12		.22

TABLE 4 – Question 1 - Biais de représentativité

	Lecoutre	2nde		1ère		Global	
		Pré (2)	Post (2)	Pré (2)	Post (2)	Pré (2)	Post (2)
<b>Réponse A</b>	<b>.22</b>	<b>.03</b>	<b>.06</b>	<b>.05</b>	<b>.10</b>	<b>.04</b>	<b>.08</b>
<i>Réponse B</i>	<i>.73</i>	<i>.81</i>	<i>.84</i>	<i>.90</i>	<i>.85</i>	<i>.85</i>	<i>.84</i>
Réponse C	.04	.16	.10	.05	.05	.11	.08
Idem			.74		.86		.79
Évolution -			.12		.14		.13
Évolution +			.50		0		.27

TABLE 5 – Question 2 - Biais de récence

	Lecoutre	2nde		1ère		Global	
		Pré (3)	Post (3)	Pré (3)	Post (3)	Pré (3)	Post (3)
<b>Réponse A</b>	<b>.69</b>	<b>.17</b>	<b>.40</b>	<b>.55</b>	<b>.71</b>	<b>.17</b>	<b>.19</b>
<i>Réponse B</i>	<i>30</i>	<i>.83</i>	<i>.60</i>	<i>.45</i>	<i>.29</i>	<i>.83</i>	<i>.81</i>
Idem		.88		.65		.80	
Évolution -		.40		.11		.21	
Évolution +		.08		.25		.12	

TABLE 6 – Question 3 - Biais de conjonction

	2nde		1ère		Global	
	Pré (4)	Post (4)	Pré (4)	Post (4)	Pré (4)	Post (4)
<b>Réponse A</b>	<b>.03</b>	<b>.10</b>	<b>.09</b>	<b>.05</b>	<b>.06</b>	<b>.07</b>
Réponse B	.16	.10	.26	.14	.20	.12
Réponse C	.10	.14	.04	.09	.07	.12
<i>Réponse D</i>	<i>.71</i>	<i>.66</i>	<i>.61</i>	<i>.68</i>	<i>.67</i>	<i>.67</i>
Idem		.62		.52		.68
Évolution -		.20		.25		.22
Évolution +		.44		.56		.50

TABLE 7 – Question 4 - Biais de disponibilité

	2nde		1ère		Global	
	Pré (5)	Post (5)	Pré (5)	Post (5)	Pré (5)	Post (5)
Réponse A	.03	0	0	.04	.02	.02
<i>Réponse B</i>	<i>.94</i>	<i>.74</i>	<i>1</i>	<i>.87</i>	<i>.96</i>	<i>.80</i>
<b>Réponse C</b>	<b>.03</b>	<b>.26</b>	<b>0</b>	<b>.09</b>	<b>.02</b>	<b>.18</b>
Idem		.70		.87		.78
Évolution -		.27		.13		.20
Évolution +		0		0		0

TABLE 8 – Question 5 - Biais d'équiprobabilité (événements composés) - Toscane

	Lecoutre	2nde		1ère		Global	
		Pré (6)	Post (6a)	Pré (6)	Post (6a)	Pré (6)	Post (6a)
Réponse A	.09	.10	.07	.04	.19	.08	.11
<i>Réponse B</i>	<i>.16</i>	<i>.03</i>	<i>.27</i>	<i>.17</i>	<i>.44</i>	<i>.09</i>	<i>.33</i>
<b>Réponse C</b>	<b>.72</b>	<b>.87</b>	<b>.66</b>	<b>.78</b>	<b>.38</b>	<b>.83</b>	<b>.57</b>
Idem			.53		.38		.48
Évolution -			0		0		0
Évolution +			.25		.39		.31

TABLE 9 – Question 6 - Biais d'équiprobabilité (lois composées)

	Lecoutre	2nde		1ère		Global	
		Pré (6)	Post (6b)	Pré (6)	Post (6b)	Pré (6)	Post (6b)
Réponse A	.09	.10	.19	.04	.22	.08	.20
Réponse B	.16	.03	.42	.17	.43	.09	.43
<b>Réponse C</b>	<b>.72</b>	<b>.87</b>	<b>.39</b>	<b>.78</b>	<b>.35</b>	<b>.83</b>	<b>.37</b>
Idem			.39		.39		.39
Évolution -			0		0		0
Évolution +			.45		.42		.44

TABLE 10 – Question 6 - Biais d'équiprobabilité (lois composées) - transfert

	Fox (adulte)	2nde		1ère		Global	
		Pré (7)	Post (7a)	Pré (7)	Post (7a)	Pré (7)	Post (7a)
Réponse A		0	.03	.04	.35	.2	.17
Réponse B	.15	.23	.47	.30	.39	.26	.43
<b>Réponse C</b>	<b>.85</b>	<b>.77</b>	<b>.50</b>	<b>.66</b>	<b>.26</b>	<b>.72</b>	<b>.40</b>
Idem			.63		.21		.45
Évolution -			.29		.83		.54
Évolution +			.39		.38		.39

TABLE 11 – Question 7 - Biais d'équiprobabilité (ordre)

	Fox (adulte)	2nde		1ère		Global	
		Post (7a)	Post (7b)	Post (7a)	Post (7b)	Post (7a)	Post (7b)
Réponse A		0	.10	.04	.05	.2	.8
Réponse B	.15	.23	.20	.30	.41	.26	.29
<b>Réponse C</b>	<b>.85</b>	<b>.77</b>	<b>.70</b>	<b>.66</b>	<b>.54</b>	<b>.72</b>	<b>.63</b>
Idem			.63		.50		.58
Transfert +			.36		.73		.52

TABLE 12 – Question 7 - Biais d'équiprobabilité (ordre) - transfert

	Lecoutre	2nde		1ère		Global	
		Pré (8)	Post (8)	Pré (8)	Post (8)	Pré (8)	Post (8)
Réponse A	.14	.10	.29	.09	.22	.10	.26
<b>Réponse B</b>	<b>.58</b>	<b>.59</b>	<b>.61</b>	<b>.68</b>	<b>.39</b>	<b>.63</b>	<b>.52</b>
Réponse C	.25	.31	.11	.23	.39	.27	.22
Idem			.50		.39		.45
Évolution -			.78		.67		.75
Évolution +			.06		.43		.23

TABLE 13 – Question 8 - Biais de la taille de l'échantillon

	Lecoutre	2nde		1ère		Global	
		Pré (9a)	Post (9a)	Pré (9a)	Post (9a)	Pré (9a)	Post (9a)
Réponse aa	.25	.42	.43	.35	.43	.39	.43
<b>Réponse ab</b>	<b>.56</b>	<b>.45</b>	<b>.47</b>	<b>.52</b>	<b>.48</b>	<b>.48</b>	<b>.47</b>
Autres réponses	.14	.13	.10	.13	.08	.13	.10
Idem			.62		.52		.58
Évolution -			.23		.25		.24
Évolution +			.23		.21		.25

TABLE 14 – Question 9a - Effet Falk

	Lecoutre	2nde		1ère		Global	
		Post (9a)	Post (9b)	Post (9a)	Post (9b)	Post (9a)	Post (9b)
Réponse (aa)a	.25	.42	.14	.35	.26	.39	.19
<b>Réponse (ab)b</b>	<b>.56</b>	<b>.45</b>	<b>.66</b>	<b>.52</b>	<b>.70</b>	<b>.48</b>	<b>.67</b>
Autres réponses	.14	.13	.20	.09	.04	.13	.14
Idem			.45		.70		.56
Transfert +			.25		.50		.36

TABLE 15 – Question 9b - Effet Falk - transfert

Armand Lachand (Auteur)

# L'UTILISATION DES PARADOXES PROBABILISTES AU LYCÉE

## Étude sur l'effet inhibiteur ou catalyseur des situations contre-intuitives sur les biais cognitifs

89 Pages

Mémoire de Master *Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation*

Université Claude Bernard Lyon 1 - Inspé - Lyon 2022

---

### RÉSUMÉ

---

Le transfert de connaissances probabilistes d'un cadre scolaire à un processus de décision constitue une difficulté récurrente. Davantage que le raisonnement, c'est l'intuition qui guide l'individu confronté à un processus stochastique. L'apprentissage de l'inhibition et le développement d'une pensée critique aident l'élève à modéliser des expériences aléatoires avec rigueur. Les paradoxes probabilistes mettent en évidence des conceptions erronées du hasard et des erreurs systématiques qui en découlent. Ce travail présente une utilisation du problème du duc de Toscane et de problèmes bayésiens (problème des deux enfants, problème de Monty Hall, problème des boîtes de Bertrand) dans un contexte didactique au lycée. Les résultats obtenus plaident pour une étude de ces paradoxes issues d'un travail entre pairs favorisant la prise d'initiative : ces modalités favorisent la dévolution et la motivation intrinsèque de l'élève et initient l'apprenant à l'art de l'argumentation.

---

### MOTS-CLÉS

---

Probabilités, paradoxes, biais cognitifs, hasard, lycée

---

### DIRECTEUR DE RECHERCHE

---

Sylvain Beauvoir

---

### MEMBRES DU JURY

---

Caroline Béal  
Sylvain Beauvoir

---

### DATE DE SOUTENANCE

---

11 mai 2022