



**HAL**  
open science

# Quel est le rôle de la manipulation dans l'enrichissement de la mémoire des problèmes arithmétiques verbaux, additifs de comparaison en une étape pour une meilleure réussite ?

Camille Delautre

## ► To cite this version:

Camille Delautre. Quel est le rôle de la manipulation dans l'enrichissement de la mémoire des problèmes arithmétiques verbaux, additifs de comparaison en une étape pour une meilleure réussite ?. Education. 2023. dumas-04154136

**HAL Id: dumas-04154136**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-04154136>**

Submitted on 6 Jul 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# MASTER 2 MEEF

Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation

Mention **Premier degré**

*Année universitaire 2022 - 2023*

Quel est le rôle de la manipulation dans l'enrichissement de la mémoire des problèmes arithmétiques verbaux, additifs de comparaison en une étape pour une meilleure réussite ?

**DOSSIER UE C2**

**SEMESTRE 4**

**SESSION 1**

Prénom et Nom de l'étudiant : Camille Delautre

Site de formation : ARRAS

Section : Section 4

Nom de l'enseignant : Mme Chenevotot, M. Hennebique

## Sommaire :

<b>Introduction.....</b>	<b>p2</b>
<b>Partie théorique.....</b>	<b>p3</b>
<b>A) Résolution de problèmes arithmétiques verbaux.....</b>	<b>p3</b>
a) Définitions .....	p3
b) Les typologies des problèmes arithmétiques verbaux.....	p4
c) Les programmes.....	p5
d) Résoudre un problème : c'est quoi ?.....	p6
i) 4 phases fondamentales .....	p6
ii) Les schémas de problèmes, la mémoire de problèmes .....	p7
iii) Le rôle des analogies .....	p10
e) Les principaux facteurs de difficultés.....	p11
<b>B) La manipulation .....</b>	<b>p13</b>
a) Définitions.....	p13
b) Les programmes .....	p14
c) Les bienfaits de la manipulation .....	p14
d) Vers l'abstraction .....	p16
<b>Présentation de la problématique .....</b>	<b>p17</b>
<b>Méthodologie de recueil de données .....</b>	<b>p18</b>
<b>Méthodologie de traitement des données .....</b>	<b>p19</b>
<b>Traitement des données.....</b>	<b>p20</b>
a) Présentation des problèmes.....	p20
b) Analyse a priori des problèmes.....	p21
c) Analyse quantitative des questionnaires .....	p26
d) Analyse qualitative des procédures.....	p27
e) Analyse de l'utilisation du matériel.....	p31
f) Comparaison des résultats du début et de la fin de la séquence.....	p32
<b>Présentation des résultats .....</b>	<b>p34</b>
<b>Conclusion.....</b>	<b>p35</b>
<b>Liste des figures .....</b>	<b>p38</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>p39</b>
<b>Annexes .....</b>	<b>p42</b>

## **Remerciements**

Je tiens tout d'abord à remercier mes tuteurs de mémoire, Madame Chenevotot, Monsieur Hennebique, enseignants à l'INSPE d'Arras qui durant mes deux années de Master m'ont donné de nombreux conseils pour affiner ma problématique. Mais également pour la conception et la mise en place de ma séquence.

Je tenais ensuite à remercier l'enseignante titulaire de la classe d'expérimentation qui m'a permis de modifier sa programmation afin de mettre en œuvre librement ma séquence.

Enfin, je tiens à remercier ma mère, pour ses conseils, ses encouragements et pour avoir participé à la relecture et à la correction de mon mémoire.

## **Introduction**

Les mathématiques ont toujours été une source de plaisir pour moi, c'est donc tout naturellement que j'ai choisi cette discipline pour mon mémoire. Durant mes différents stages en école primaire, j'ai constaté que de nombreux élèves étaient en difficulté en mathématiques et plus particulièrement face à la résolution de problèmes. À la suite de recherches, j'ai constaté que cela était malheureusement très courant. En effet, les résultats de l'étude TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) de 2019 mettent en avant ces difficultés. C'est une étude internationale qui compare les différents niveaux de connaissances scolaires en mathématiques et en sciences des élèves en CM1 (pour la France). La France obtient un score moyen de 485 en mathématiques (sur 800) pour une moyenne des pays membres de l'UE (Union Européenne) de 527 et pour les pays membres de l'OCDE (Organisation de Coopération et de Développement Economique) de 529. On constate donc que la France se situe en dessous de la moyenne des pays les plus proches économiquement (pays membres de l'OCDE), politico-économiquement et géographiquement (pays membres de l'UE). Dans cette étude, on constate également que les élèves français sont surreprésentés parmi les élèves européens les plus faibles. Au regard de ces résultats, j'ai donc poussé ma recherche en me concentrant uniquement sur la France avec les premiers résultats des évaluations nationales de la rentrée 2021. Les évaluations nationales sont des évaluations standardisées et organisées par le ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports qui s'effectuent à l'école primaire en CP et en CE1. Au CP, c'est l'exercice « résoudre des problèmes » qui fait partie des moins réussis. En CE1, c'est l'exercice « résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul » qui est le moins bien réussi. À la vue de ces difficultés rencontrées par les élèves français, j'ai donc décidé d'axer mon mémoire sur la résolution de problèmes. Sur ce sujet, de par mes cours reçus à l'INSPÉ mais aussi grâce à mes stages, je disposais de quelques connaissances avant de commencer mes recherches. En effet, je savais que la résolution de problèmes est présente dans les 3 cycles de l'école primaire et qu'elle a un rôle central dans les différents apprentissages. Qu'il existe une progression au niveau des opérations mises en jeu dans un problème. Par exemple, d'abord les problèmes additifs (d'addition ou de soustraction), puis les problèmes multiplicatifs (de multiplication et de division). Mais aussi que la résolution de problèmes n'est pas spécifique à un domaine mathématiques particulier : elle est transversale et constitue une activité emblématique en mathématiques. Mais certaines questions ont émergé : Qu'est-ce qu'un problème ? Quels sont les différents types de problèmes ? Comment les élèves résolvent-ils un

problème ? Quelles sont les erreurs les plus fréquentes des élèves dans la résolution de problèmes additifs ?

Aujourd'hui, au sein de mes cours de l'INSPÉ ou lors de mes stages, nous entendons beaucoup parler des bienfaits de la manipulation dans l'apprentissage des savoirs. Mais qu'est-ce que la manipulation ? Quels sont les intérêts et limites de la manipulation ? Est-il possible de lier manipulation et résolution de problèmes pour essayer de remédier aux difficultés des élèves ?

Au regard de ces différentes questions, j'ai choisi de lier, pour le thème de mon mémoire, la manipulation et la résolution de problèmes et plus particulièrement la résolution de problèmes arithmétiques verbaux : les problèmes additifs de comparaison.

Certaines réponses à ces questions se trouvent rapidement en consultant les ressources adaptées. C'est le cas pour les définitions, les typologies des problèmes, les erreurs les plus fréquentes ainsi que les intérêts et limites de la manipulation. A l'inverse, certaines questions demandent des recherches plus poussées et une réflexion plus importante. Notamment pour les mécanismes en jeu dans la résolution de problèmes ainsi que pour le recours à la manipulation en résolution de problèmes à des fins de remédiations.

Dans un premier temps, nous fixerons le cadre théorique. Tout d'abord celui de la résolution de problèmes puis celui de la manipulation. Ensuite, je présenterai ma problématique puis la méthodologie de recueil des données et enfin la méthodologie de traitement des données.

Les mathématiques à l'école élémentaire se découpent en 3 domaines : nombres et calculs, grandeurs et mesures et espace et géométrie. Bien que la résolution de problèmes soit présente dans les 3 domaines, celui d'espace et géométrie ne sera pas abordé dans ce mémoire.

## **Partie Théorique**

### **A) Résolution de problèmes arithmétiques verbaux**

#### **a) Définitions**

Le terme « problème » est un mot de la vie quotidienne. Dans le dictionnaire Hachette (2010, p1307) nous trouvons comme définitions « 1. Question à résoudre, d'après un ensemble de données, dans une science. 2. Exercice scolaire consistant à résoudre un problème. 3. Difficulté ; situation compliquée. ». Il existe aussi de nombreuses définitions pour un problème au sens mathématique. Je me suis donc plutôt attachée à ces 3 caractéristiques qui

reviennent à chaque fois pour le définir :

- L'existence d'un écart : entre une situation présente jugée insatisfaisante et une situation désirée ou un but à atteindre.
- Une absence d'évidence : le sujet doit mettre en place une démarche cognitive active d'élaboration et de vérification d'hypothèses sur la nature même de l'écart et sur les moyens possibles de le réduire.
- Le caractère subjectif : une même situation peut être un problème pour une personne mais pour une autre, il s'agira simplement d'exécuter une procédure. Suivant le niveau et les connaissances déjà acquises, le statut d'un problème n'est donc pas forcément le même d'un élève à l'autre. <sup>1</sup>

Pour les problèmes arithmétiques verbaux, nous nous attacherons à la définition du guide « La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen » :

Problèmes proposés sous forme d'un texte, éventuellement accompagné d'une illustration, contenant des données numériques qu'il faut mettre en relation et avec lesquelles il faut faire des opérations mathématiques pour obtenir ce qui permet de donner la ou les réponses à une question posée (ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2022 c, p10).

### **b) Les typologies des problèmes arithmétiques verbaux**

Mon mémoire portant sur les problèmes arithmétiques verbaux et plus précisément les problèmes additifs de comparaison, il est donc nécessaire de s'intéresser aux différentes typologies afin de catégoriser les problèmes. Ces typologies apportent une classification des problèmes, ce sont des outils qui aident les enseignants à structurer leur enseignement (mais la typologie en elle-même n'est pas un objet d'enseignement). J'ai fait le choix de m'intéresser aux typologies de Catherine Houdement, celle du guide « La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen » du ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports et celle de Gérard Vergnaud.

Catherine Houdement distingue 3 catégories : les problèmes basiques (2 données et il faut trouver la 3<sup>ème</sup> valeur, ils ont un énoncé court, une syntaxe simple et pas d'information superflue), les problèmes complexes (ce sont plusieurs problèmes basiques qui forment 1 seul problème) et les problèmes atypiques (il faut créer une nouvelle stratégie pour les

---

<sup>1</sup> Cette « définition » est inspirée d'un cours dispensé à l'INSPÉ par Mme Mangiante.

résoudre). Cette classification a fortement inspiré la typologie que l'on retrouve dans le guide du ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports : « La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen ». Le guide distingue les problèmes en une étape (une seule opération pour les résoudre), en plusieurs étapes (succession de problèmes en une étape) et les problèmes atypiques (les problèmes qui ne rentrent dans aucune des catégories précédentes). A l'intérieur des problèmes en une étape, le guide différencie les problèmes suivant l'opération en jeu : les problèmes additifs (d'addition ou de soustraction) et les problèmes multiplicatifs (de multiplication et de division). Mais il différencie aussi les problèmes de parties-tout (2 parties distinctes vont former ensemble un tout) et ceux de comparaison (2 entités sont mises en relation et sont comparées). Nous pouvons distinguer 2 types de problèmes de comparaison : les 2 mesures sont connues et 1 mesure ainsi que la comparaison sont connues. Tandis que la typologie de Gérard Vergnaud de 1981, distingue dès le départ 2 grands groupes : les problèmes additifs et les problèmes multiplicatifs. Dans cette partie, ne seront développés que les problèmes additifs. Gérard Vergnaud différencie 6 catégories de problèmes additifs : composition de mesures (c'est 2, ou plus, mesures qui sont réunies), transformation de mesure (l'opération porte sur une mesure pour aboutir à une nouvelle mesure), comparaison de mesures (2 mesures simultanées de 2 objets différents sont comparées l'une à l'autre), composition de transformation (c'est la recherche d'une transformation lorsque 2 transformations successives ont eu lieu), transformation d'une relation et composition de relations. Ces 2 dernières catégories ne sont pas (ou très peu) présentes à l'école primaire car elles portent sur des états relatifs. Grâce à ces différentes typologies nous comprenons bien que quelle que soit l'opération mise en jeu la classe d'un problème dépend de sa structure.

Pour la suite de mon travail, j'ai choisi d'utiliser la typologie issue du guide : La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen.

### **c) Les programmes**

La résolution de problèmes est un thème transversal que l'on retrouve dans les 3 cycles de l'école primaire. Au cycle 1, le nombre est utilisé pour résoudre des problèmes et surtout des problèmes concrets (qui sont perceptibles par les différents sens des élèves). Il y a un attendu de fin de cycle en rapport avec la résolution de problèmes « Commencer à résoudre des problèmes de composition de deux collections, d'ajout ou de retrait, de produit ou de partage (les nombres en jeu sont tous inférieurs ou égaux à 10) » (ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2021, p16). Au cycle 2, la résolution de problèmes est

considérée comme une activité scolaire fondamentale, elle est au centre de l'activité mathématique. Les problèmes permettent de découvrir de nouvelles notions et de consolider celles déjà connues. Cela va aussi contribuer à donner du sens aux différents apprentissages comme pour les 4 opérations. C'est dans les programmes du cycle 2 que l'on voit apparaître pour la première fois les décompositions additives (au cycle 1, cela n'est pas évoqué explicitement dans le programme mais les élèves en rencontrent déjà avec les situations d'ajout ou de retrait). Dans le domaine nombres et calculs, nous retrouvons l'attendu « Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul » (ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2020, p58). Dans celui des grandeurs et mesures, l'attendu en lien avec la résolution de problèmes est : « Résoudre des problèmes impliquant des longueurs, des masses, des contenances, des durées, des prix » (ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2020, p61). Au cycle 3, les élèves apprennent en plus que la résolution de problèmes peut-être un outil pour résoudre certaines situations. Dans le domaine nombres et calculs, nous retrouvons l'attendu : « Résoudre des problèmes en utilisant des fractions, des nombres décimaux et le calcul » (ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2020 b, p93) et dans le domaine grandeurs et mesures : « Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux » (ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2020 b, p95). Nous constatons donc qu'il existe une progression en résolution de problèmes entre les 3 cycles de l'école primaire notamment au niveau de la nature des nombres mis en jeu.

Cela ne sera pas détaillé ici mais la résolution de problèmes s'inscrit bien dans le socle commun de connaissances, de compétences et de culture avec les domaines : 1 (les langages pour penser et communiquer), 2 (les méthodes et outils pour apprendre), 3 (la formation de la personne et du citoyen) et 4 (les systèmes naturels et les systèmes techniques).

#### **d) Résoudre un problème : c'est quoi ?**

Intéressons-nous maintenant aux processus que mettent en place les élèves lors de la résolution d'un problème.

#### **i) 4 phases fondamentales**

Retenons le processus en 4 phases fondamentales pour la résolution de problèmes : comprendre, modéliser, calculer et répondre (issu du « Guide pour les mathématiques : La

résolution de problèmes mathématiques au cours moyen »). (ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2022 c, p44).

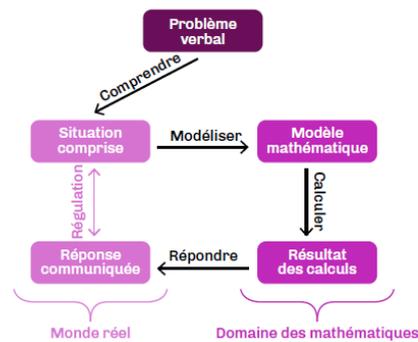


Figure 1:Modèle en quatre phases pour la résolution de problèmes.

Ce schéma n'est pas linéaire, les élèves peuvent faire des allers-retours entre les phases.

## ii) Les schémas de problèmes, la mémoire de problèmes

Pour traiter ce sujet, l'article « Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? » écrit par Jean Julo (2002) me semble un bon point de départ. Cet article parle des processus spécifiques à l'activité de résolution de problèmes. Plus particulièrement de leur versant représentationnel : les schémas de problèmes. Il s'agit de la présentation de résultats de recherche. Il a été écrit par Jean Julo, maître de conférences en sciences de l'éducation et enseignant-chercheur à l'université de Rennes I où il participe aux travaux de l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Rennes. L'objectif de J. Julo est « d'apporter une contribution au débat alimenté par plusieurs articles (...) au cours des années passées ». (Julo, 2002 p32-33)

La problématique de cet article est « Dans quelle mesure est-il possible d'agir par un apprentissage provoqué sur la formation de ces connaissances spécifiques que constituent les schémas de problème ? » (Julo, 2002, p38). Elle découle de la première partie durant laquelle l'auteur rejette l'idée que résoudre intelligemment des problèmes ne s'apprendrait pas. Pour lui, il existe des processus spécifiques à la base de l'activité de résolution de problèmes. Il fait 2 hypothèses :

- Les connaissances qui interviendraient de manière décisive dans l'activité de représentation sont les schémas de problèmes. C'est au sein même de l'activité de représentation que se formeraient les schémas de problèmes.
- La représentation particulière construite pour un problème contribuerait de manière déterminante à la formation de nos schémas et à leur évolution (cette dernière ne sera pas développée dans l'article).

Tout au long de cet écrit, J. Julo fait de nombreuses références à d'autres chercheurs (Turquin, Polya...). Il évoque la théorie volontariste (qui mise sur un entraînement à la catégorisation des problèmes) et celle constructiviste (qui mise sur l'aide à la représentation du problème). Il évoque aussi la théorie de la Gestalt (les processus de la perception et de la représentation mentale traitent les phénomènes comme des formes globales plutôt que comme l'addition d'éléments simples). Les données recueillies sont principalement des données de la psychologie cognitive pour l'activité de résolution de problèmes et des résultats de recherche. Il n'explique pas sa méthode de recueil à l'exception du problème « Les crêpes » où il s'appuie sur des travaux portés sur des élèves de 6<sup>ème</sup> et 5<sup>ème</sup>. Il fait une analyse qualitative en faisant principalement de la catégorisation. Il part également d'exemples concrets (notamment pour les difficultés des élèves).

Cet article traite des processus spécifiques à la base de l'activité de résolution de problèmes.

Dans un premier temps l'auteur, Jean Julo, exclut l'idée que résoudre intelligemment des problèmes ne s'apprendrait pas. Puis il va faire l'état des lieux des travaux déjà effectués depuis la fin des années 80. Il regroupe ces différentes approches autour de 3 axes : du transfert d'apprentissage au raisonnement par analogie ; l'heuristique, le problem solving et la métacognition ; les classes de problèmes, la catégorisation et l'apprentissage des schémas. De cela, il en déduit qu'il existe des processus spécifiques à la base de l'activité de résolution de problèmes et qu'ils ont 2 versants : un opératoire (les stratégies) et un représentationnel (les schémas de problèmes), c'est sur ce dernier que va se concentrer l'auteur pour la suite de l'article.

Il distingue 3 natures pour ces schémas :

- Type cas : les problèmes laissent une trace sémantique en mémoire à long terme et la mémoire crée progressivement une bibliothèque de cas. Ils interviennent la plupart du temps de façon implicite.
- Type regroupements : de par les traits de surface (habillage) et/ou de par la structure (exemples les problèmes de recettes, dépenses) qui se ressemblent, on regroupe ces problèmes ensemble.
- Type « catégorie abstraite » : en percevant la ressemblance de structure qui existe entre 2 problèmes, on serait capable de transférer la solution d'un problème connu à un nouveau problème.

J. Julo s'est ensuite posé la question : dans quelle mesure est-il possible d'agir par un apprentissage provoqué sur la formation des connaissances spécifiques que constituent les schémas de problèmes ? Il a tout d'abord analysé les méthodes d'apprentissage, d'enseignement, régulièrement mises en œuvre : recourir à des représentations symboliques conventionnelles,

expliciter la structure des problèmes et/ou agir sur la catégorisation. Puis il a fait l'hypothèse que les connaissances qui interviendraient de manière décisive dans l'activité de représentation sont les schémas de problèmes, c'est au sein même de l'activité de représentation qu'ils se formeraient. C'est pourquoi il faudrait intervenir au moment où s'élabore cette représentation sous la forme d'une aide à la résolution du problème. Cela dans le but de permettre l'invention d'une procédure et d'induire une évolution des schémas. Pour respecter ces objectifs, l'aide proposée doit respecter 3 critères : ne pas contenir d'indices sur la solution, ne pas orienter vers une procédure de résolution et ne pas suggérer une modélisation du problème. Il propose, en aide, la multi-présentation, c'est-à-dire le fait de proposer d'autres énoncés strictement isomorphes (même structure, mêmes valeurs numériques et même solution). Cette aide répond bien aux 3 critères. Il évoque également l'idée d'une aide consistant à ajouter une tâche mais il faut toujours veiller à ne pas orienter vers une procédure, une modélisation particulière. Il en conclut qu'il n'existe pas d'apprentissage spécifique à la résolution de problèmes d'un point de vue de séquences didactiques dédiées à des méthodes de résolution de problèmes. Mais il existe bien des environnements spécifiques conçus à la fois comme ensembles de problèmes auxquels l'élève sera confronté sur une période donnée et comme ensembles d'aides permettant, par le biais d'une meilleure représentation, la résolution d'un problème donné. Néanmoins l'auteur nuance ses propos. En effet, parfois, il vaut mieux prendre plus de risques dans l'aide proposée aux élèves afin d'éviter qu'ils ne restent dans l'échec permanent tout en gardant à l'esprit que l'élève doit réussir par initiative, invention, d'une procédure de résolution, en suggérant par exemple plusieurs mathématisations. En proposant une mathématisation on intervient dans la phase « modéliser » (figure 1), il donc important de proposer à l'élève différentes procédures de résolution (et donc différentes mathématisations).

L'article a des points forts : l'auteur fait une approche cognitive, il part de travaux scientifiques, il s'appuie sur de nombreux chercheurs et il nuance ses propos. L'un des gros points forts est la partie didactique avec une solution concrète d'aide qui répond aux 3 critères. Cet écrit a aussi des points faibles : il s'appuie sur des élèves de 6<sup>ème</sup> et 5<sup>ème</sup> or il est destiné aux enseignants du primaire. De plus l'auteur n'explique pas la mise en place de l'activité en classe, il reste trop général à ce sujet.

Il existerait donc bien des processus d'apprentissage propres à la résolution de problèmes mais pas d'un point de vue de séquences didactiques dédiées à des méthodes de résolution de problèmes. Ce serait plutôt des environnements spécifiques conçus comme des ensembles de problèmes auxquels l'élève sera confronté sur une période donnée mais aussi comme ensembles

d'aides permettant la résolution de problèmes. L'aide à la représentation a donc 2 objectifs : permettre l'invention d'une procédure et induire une évolution des schémas.

En tant que futur enseignant, si l'on veut respecter les 3 critères, le nombre d'aides que l'on peut proposer semble minime. L'auteur nous propose une solution, elle semble assez facile et applicable en classe : la multi-présentation. Il est également important qu'un élève ne reste pas dans l'échec quitte à prendre plus de risques dans l'aide. Il faut amener les élèves à voir comment il faut penser le problème plutôt que comment il faut le résoudre.

Pour J. Julo, les élèves doivent se représenter le problème avant de le résoudre (c'est ce qu'il appelle les schémas de problèmes) mais cette représentation est ponctuelle. En effet, elle dépend des attributs de la situation et des connaissances mathématiques dont disposent les élèves sur la notion en jeu. La réussite du problème va alors enrichir leur mémoire de problèmes, puis celui-ci servira de problème de référence. Dans cette mémoire, les problèmes seront classés sous forme de schémas de problèmes qui peuvent avoir 3 natures (cas, regroupement et « catégorie abstraite »). Lorsqu'un élève va faire face à un nouveau problème « soit il active dès la lecture un schéma adéquat qu'il associe (...) au problème à résoudre, soit, en l'absence (...) d'un schéma, l'élève doit construire « de toutes pièces » une représentation *ad hoc* du problème. (C. Houdement, 2017, p63). Ces schémas interviendraient dans la phase fondamentale de modélisation (évoquée dans la partie d)i ). C. Houdement insiste sur le fait que les élèves doivent mener à terme la résolution d'un problème, sinon celui-ci ne s'inscrit pas dans leur mémoire de problèmes. De plus pour elle, ces problèmes de références doivent être des problèmes qu'elle appelle des problèmes basiques soit des problèmes en une étape (voir la partie A)b ci-dessus). D'où l'importance de présenter aux élèves tous les types de problèmes, afin qu'ils se constituent une mémoire de problèmes « complète ».

### **iii) Le rôle des analogies**

Grâce à notre mémoire de problèmes, nous appréhendons un nouveau problème à l'aide de connaissances antérieures. Pour cela nous faisons donc des analogies qui peuvent être facilitatrices ou obstructives. Pour J. Julo, ces analogies se font à l'aide des schémas de problèmes. Emmanuel Sander, lors d'une conférence sur les mathématiques en 2019, lui, parle d'analogies intuitives. Il en distingue 3 : de substitution (lorsque des notions familières de la vie quotidienne se substituent à des notions mathématiques), de scénario (le scénario évoqué par exemple va inviter plus à une addition ou à une soustraction car les objets font

partie d'une même catégorie subordonnée) et de simulation (simuler mentalement la situation évoquée par le problème).

### **e) Les principaux facteurs de difficultés**

Le guide pour les mathématiques : La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen (ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports) distingue 3 principaux facteurs de difficultés pour les élèves en résolution de problèmes. Tout d'abord l'énoncé du texte, en effet sa compréhension peut poser problème : degré de familiarité lexicale, scénario évoqué facilitant ou non la perception des relations mathématiques en jeu, ou encore l'inscription ou non dans le champ de validité de la conception intuitive des opérations, par exemple, le gain souvent associé à une addition peut aussi donner une soustraction. Le champ numérique peut aussi être source de difficultés pour les élèves, ce sont les nombres en jeu (leur grandeur, leurs écritures, les unités etc.), la structure mathématique du problème (problèmes en une ou plusieurs étapes, problèmes atypiques) est aussi un facteur de difficultés. L'article « Une séquence sur les problèmes additifs au cycle 2, le cas des comparaisons de mesures » de Martine Floc'h & Nathalie Pfaff, évoque la difficulté de la structure mathématique du problème au travers des problèmes de comparaison.

Cet article a pour thème général la résolution de problèmes additifs au cycle 2 et plus précisément le cas des comparaisons de mesures. Il a été écrit par Martine Floc'h qui est maîtresse formatrice à l'IUFM de Créteil, ainsi que par Nathalie Pfaff agrégée de mathématiques, docteure en sciences de l'éducation et professeure de mathématiques à l'INSPÉ de Créteil. Il s'agit de la diffusion d'une séquence sur les problèmes additifs (de comparaison de mesures) expérimentée en classe de cycle 2 (CE1), accompagnée d'une analyse didactique de celle-ci.

Dans cet article il n'y a pas de problématique, mais les auteures justifient leur choix de travailler sur les comparaisons de mesures avec les travaux de Riley (1983). Ces travaux ont montré que ce sont ces problèmes (au sein des problèmes additifs) qui posent le plus de difficultés aux élèves. L'article fait référence à la théorie des champs conceptuels (de Vergnaud) : un champ conceptuel est un espace de problèmes ou de situations problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion. Les données recueillies par les auteures sont : des productions d'élèves et les résultats des évaluations (diagnostique et finale) de la séquence. Nous savons que les données ont été recueillies dans une classe de CE1 de 22 élèves qui se situe en zone d'éducation prioritaire mais il n'est pas explicité si les auteures étaient présentes ou si c'est l'enseignant qui a réalisé l'expérimentation. La méthode d'analyse de ces données est la comparaison. En effet, elles comparent les résultats des évaluations mais aussi par

exemple l'évaluation diagnostique et la réussite des élèves pour la séance 2. Cela leur permet d'identifier les progrès des élèves.

L'article est consacré aux problèmes additifs au cycle 2 et plus précisément aux comparaisons de mesures. Pour traiter ce sujet, les auteures ont analysé une séquence portant sur ce sujet dans une classe de CE1. Avant d'expliciter la séquence, elles ont choisi de faire un rappel notionnel. Nous pouvons donc diviser cet article en 3 parties : une partie notionnelle, une partie qui présente et explique le choix de la séquence et enfin une partie sur l'analyse de la séquence. Dans la première partie, nous apprenons donc que la distinction entre les différentes classes de problèmes ne dépend pas de l'opération qui est mise en jeu (soustraction ou addition) mais de la structure même du problème. M. Floc'h et N. Pfaff présentent la classification de G. Vergnaud. Dans la seconde partie, les auteures expliquent leur choix de travailler sur les problèmes additifs de comparaison de mesures à partir des travaux de Riley. Puis elles présentent la séquence en explicitant l'objectif : « résoudre, par des procédures personnelles, des problèmes de comparaison de mesures » (M. Floc'h et N. Pfaff, 2005, p22) mais aussi les objectifs des séances. Enfin dans la dernière partie de l'article, elles analysent les progrès et les régressions des élèves en comparant les résultats des évaluations diagnostique et finale. Elles constatent que les progrès les plus importants portent sur le problème dont la mesure est « dans le sens inverse » de la comparaison (exemple : Jérémie a 12 billes. Il a 4 billes de moins que Philippe. Combien Philippe a-t-il de billes ?). Elles remarquent aussi une progression dans les procédures utilisées. En effet, beaucoup moins d'élèves utilisent le dessin pour résoudre ce problème lors de l'évaluation finale. Au sujet de ces progressions, elles vont retenir 3 facteurs : le rôle de la manipulation qui permet de proposer un contexte compréhensible aux élèves mais aussi la validation de leur réflexion (notamment au moment de la mise en commun et de la synthèse, qui sont des étapes à ne pas négliger) ; le contexte inchangé sur l'ensemble des séances ; la non-institutionnalisation d'une procédure particulière. M. Floc'h et N. Pfaff vont aussi constater une régression dans un des exercices mais cela serait dû à la non-compréhension de la question causée par une mauvaise formulation du problème (une bonne formulation de l'énoncé est donc primordiale).

Elles vont conclure qu'il existe de nombreux types de problèmes additifs et qu'il faut tous les présenter aux élèves. Pour leur apprentissage, il faut construire une situation qui permet aux élèves de s'engager dans le problème puis de progresser dans la résolution. Mais d'autres facteurs entrent en jeu tels que : le rôle de la mise en commun, des synthèses, de la manipulation, sans oublier le rebrassage avec le réinvestissement de ce qu'ils ont déjà appris.

Analysons cet article, les points forts : les auteures nuancent leurs propos, elles s'appuient sur

des travaux d'élèves, elles prennent en compte également les facteurs extérieurs pour leur analyse. Celle-ci porte sur le pourquoi les élèves ont réussi mais aussi sur le pourquoi ça n'a pas fonctionné. Le fait que les évaluations diagnostique et finale portent sur les mêmes exercices est aussi un point fort. Tout comme le choix de travailler sur les comparaisons de mesures, là où les élèves rencontrent le plus de difficultés. De plus, le fait que le contexte des évaluations ne soit pas le même que celui des séances permet de voir la progression des élèves pour une situation de comparaison et pas uniquement dans un contexte spécifique (ici les jeux de cartes).

A l'inverse, l'absence de problématique et d'hypothèse peut être considérée comme un point faible. De manière générale, l'article m'a convaincue, grâce au cheminement de la pensée des auteures mais surtout parce qu'elles ont un regard critique face à leur travail.

L'intérêt de la manipulation est mis en avant pour la progression des élèves dans leur réussite face à la résolution de problèmes additifs. La manipulation est un facteur qui a permis la progression des élèves. Ici, elle a 2 rôles :

- Proposer un contexte compréhensible aux élèves : comme les élèves savent ce qu'ils doivent faire ils vont s'engager plus facilement dans le problème.
- Valider une réflexion : reprendre les calculs effectués par les élèves en les expérimentant.

Néanmoins ce n'est pas la manipulation qui fait l'activité mathématique mais les questions qu'elle suggère, elle doit être progressivement amenée à disparaître.

Au travers de cet article, nous comprenons ainsi que certaines structures de problèmes posent plus de difficultés aux élèves, c'est le cas des problèmes de comparaison.

Dans cette partie « Résolution de problèmes arithmétiques verbaux » nous avons donc vu : qu'il existe différents types de problèmes, l'importance des schémas, l'importance de la mémoire de problèmes. Nous avons aussi constaté que certains facteurs sont sources de difficultés pour les élèves. M. Floc'h et N. Pfaff en guise de remédiation proposent la manipulation. Mais qu'est-ce que la manipulation ? C'est ce que nous allons détailler dans la partie suivante.

## **B) La manipulation**

### **a) Définitions**

Thierry Dias définit la manipulation comme quelque chose qui « consiste à agir sur un matériel [tangible] sans intention précise ni projet bien déterminé » (2017, p22). Il

différencie la manipulation de l'expérimentation qui est « un processus scientifique qui est guidé par une volonté de tester ou de vérifier par l'exemple » (2017, p22). La manipulation serait donc du hasard, du tâtonnement tandis que l'expérimentation serait guidée par la pensée avec une intention et une organisation.

### **b) Les programmes**

Au cycle 1, l'apprentissage mathématique va se faire notamment à travers la manipulation d'objets. Notamment pour la résolution de problèmes où l'enseignant doit « [mettre] à disposition un matériel varié (cubes, gobelets, boîtes, jetons, petites voitures, etc.) que les élèves peuvent manipuler » (ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2021, p15). Au cycle 2, on met l'accent sur le fait d'articuler le concret et l'abstrait ainsi la manipulation va mener à la représentation. Pour la résolution de problèmes, la contextualisation des actions porte en premier sur des objets matériels. Au cycle 3, tout comme au cycle 2, la manipulation va permettre de donner du sens à l'utilisation des symboles mathématiques. Dans les trois cycles, la manipulation d'objets concrets doit être présente dans les apprentissages mathématiques.

### **c) Les bienfaits de la manipulation**

La « manipulation peut concerner des outils spécifiques aux mathématiques, notamment pour mieux comprendre les nombres et les calculs en jeu (matériel multibase, réglettes Cuisenaire ©, etc.), mais aussi du matériel adapté pour jouer la situation-problème et ainsi mieux la comprendre (images, monnaie, cubes, jetons, bandelettes de papier, etc.) » (ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2022 b, p105).

Catherine Berdonneau dans l'article « De l'importance des gestes pour l'apprentissage des concepts mathématiques » expose les bienfaits de la manipulation. Le thème général de cet article est la construction d'un concept mathématique (de manière générale) et l'importance de la manipulation dans cette construction. Il a été écrit par Catherine Berdonneau, docteure en didactique des mathématiques et professeure de mathématiques à l'IUFM de Versailles. Cet écrit est un compte rendu, un texte, d'une conférence pédagogique qui a eu lieu en juin 2006. Il n'y a pas de problématique générale, l'auteure part de la définition de ce qu'est apprendre les mathématiques : « Ce n'est pas mémoriser des règles ou des informations, mais s'entraîner à raisonner sur des objets abstraits, pour établir des propriétés sans avoir à recourir à l'expérience pour valider ses conclusions » (Berdonneau, 2006, p1). Néanmoins C. Berdonneau fait une hypothèse qui n'est pas explicite mais qui correspond au titre : l'importance des gestes dans

l'apprentissage des mathématiques. Puis elle se pose 3 questions : « Quels types d'activités sont nécessaires ? » ; « Comment choisir les supports en réponse à des contraintes fonctionnelles ? » ; « Pourquoi est-il si important de travailler avec de vrais objets et non avec des représentations planes ? » (Berdonneau, 2006, p 1,2,3). Dans cet article, il n'y a pas de données. Pour justifier ses propos, l'auteure s'appuie sur des exemples, des références à des travaux d'autres chercheurs, on suppose à certaines études, expérimentations, mais qui ne sont pas explicitées (notamment lorsque l'on nous parle de la maîtrise de l'acte grapho-moteur en cycle 3). L'auteure s'appuie aussi sur des documents institutionnels (programmes et documents d'application).

Dans cet article, Catherine Berdonneau, parle de l'importance des gestes pour l'apprentissage des concepts mathématiques. Nous pouvons découper son article en 2 parties : une partie plutôt notionnelle et une autre plutôt argumentative. Dans la première partie, l'auteure donne tout d'abord la définition « d'apprendre les mathématiques ». Puis elle définit les deux phases indispensables pour construire un concept mathématique : une phase d'action (qui permet de donner du sens à l'apprentissage, d'ébaucher une première tentative de réponse, d'observer les conséquences de l'action) et une phase de représentation mentale (phase d'abstraction, d'élaboration des concepts, principalement au travers du geste mental d'évocation). Elle pointe également l'importance pour cette construction des contre-exemples, de l'action de l'enseignant, du temps mais aussi de la répétition.

C. Berdonneau donne également la définition du terme « manipulation » : l'activité s'exerce sur des objets relativement petits par rapport à la taille de l'enfant et les gestes de l'enfant sont finalisés (c'est-à-dire que ses mains sont guidées par sa pensée, ce n'est pas du hasard). Elle nous apprend ensuite pourquoi la manipulation est très importante pour l'enfant : la manipulation va l'aider à donner du sens à des concepts abstraits. Elle explique aussi pourquoi la manipulation est importante pour l'enseignant : elle permet de mieux gérer l'hétérogénéité d'une classe (avec la différenciation), mais aussi de reconstituer le raisonnement de l'élève car suivant les gestes qu'il a effectués, l'enseignant va pouvoir voir comment il a réfléchi. C'est aussi un moyen d'évaluer l'élève de façon sûre car suivant ses gestes cela va montrer les compétences acquises ou non. Mais C. Berdonneau insiste sur le fait que la manipulation seule ne contient pas le savoir et que les professeurs des écoles ont un rôle de médiation à jouer. Elle donne ensuite les 2 types de supports pour la manipulation : le « matériel » avec un enjeu de type « réussir » et le « jeu » avec un enjeu de type « gagner ». Enfin dans la dernière partie qui lui sert donc d'argumentation, l'auteure va opposer le support papier/crayon et la manipulation. Pour cela, elle va plutôt décrire les points négatifs de l'utilisation du papier/crayon comme par exemple avec le fait que l'acte grapho-moteur requiert une part importante de l'énergie et de l'attention disponibles. De plus,

elle insiste sur le « passage au papier » qui ne constitue absolument pas une étape, ni un passage obligé vers l'abstraction. A l'inverse, elle explicite les nombreux avantages de la manipulation, notamment le fait que les gestes pour celle-ci sont simples ou encore qu'elle aide à la mémorisation mais aussi à la conceptualisation. Pour en arriver à la conclusion que la manipulation est un outil pédagogique précieux du point de vue de l'élève et de l'enseignant et qu'elle est donc à privilégier face à l'acte grapho-moteur. Puisque cela répond à un besoin de sensorialité, permettant de communiquer sur le canal sensoriel privilégié par chaque élève (l'apprentissage est multi-sensoriel) mais aussi, car cela canalise l'attention, libère l'élève de la plupart des tâches annexes et offre la possibilité d'expériences nombreuses.

Les points forts de cet article sont qu'il s'appuie sur des textes institutionnels, il parle de l'évaluation et il effectue des relations de causalité. Il a aussi des points faibles avec l'absence de problématique et de donnée. Il aurait aussi fallu faire référence à des chiffres concrets (par exemple sur la non-maitrise de l'acte grapho-moteur). C. Berdonneau ne nuance pas ses propos, nous avons l'impression qu'il faut presque totalement exclure le papier/crayon (nous ressentons une sorte d'apologie de la manipulation). L'auteure ne parle pas des limites de la manipulation. Il manque aussi des exemples concrets testés en classe et aucune partie didactique n'est abordée. Les éléments apportés, tout au long de l'article, permettent de conclure que les gestes et la manipulation sont extrêmement importants dans la construction de concepts mathématiques chez les élèves. Donc, on peut le supposer aussi dans la résolution de problèmes.

Ici C. Berdonneau utilise le terme manipulation pour des gestes qui sont finalisés, c'est donc pour T. Dias de l'expérimentation. Grâce à cet article nous pouvons comprendre les bienfaits de l'expérimentation du point de vue de l'élève et de l'enseignant. Expérimenter rend actifs les élèves, ils sont acteurs de leurs apprentissages (cela renvoie à la théorie constructiviste de Piaget). Des pédagogies comme celles de Freinet ou encore de Montessori accordent une place centrale à la manipulation et l'expérimentation. Mais nous pouvons alors nous demander si faire uniquement de l'expérimentation avec les élèves est suffisant et quelles en sont les limites ?

#### **d) Vers l'abstraction**

La manipulation doit être intégrée à un processus d'apprentissage. « Si le résultat peut être obtenu par l'action, les élèves n'ont pas à engager un travail cognitif. Ils se bornent à faire des constats qui restent attachés au contexte. » (Briand, 2019). Dans un premier temps la manipulation va aider à se représenter le problème, puis il faut bloquer la manipulation et l'utiliser uniquement pour la validation (ce qui permet à l'élève de valider ou non son résultat

sans l'aide d'un adulte). L'élève doit être actif intellectuellement sinon il n'apprendra pas. L'objectif est d'aller vers l'abstraction puisque les mathématiques par définition sont des connaissances abstraites. L'expérimentation est une des étapes qui va permettre un passage progressif vers l'abstraction. La verbalisation, les mises en commun et les traces laissées dans le cahier de l'élève vont également jouer un rôle pour aller vers celle-ci.

« Abstraire correspond à l'opération mentale qui consiste à isoler une (ou plusieurs) propriété(s) d'un objet afin de la (les) considérer pour elle(s)-même(s). Cela nécessite donc de se détacher du réel, du contexte dans lequel on a manipulé et/ou représenté l'objet. » (ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2022 b, p82 )

La manipulation ne doit pas être passive, elle doit elle-même engager un travail cognitif de la part de l'élève. Il faut donc choisir le matériel adéquat à la situation. De plus, il faut savoir qu'expérimenter en mathématiques n'est pas inné chez les élèves, il faut donc les amener à passer de la manipulation à l'expérimentation (d'après les définitions de T.Dias).

Au cours de cette partie sur la manipulation, nous avons donc pu voir l'importance de celle-ci mais aussi ses limites que ce soit pour les élèves ou pour l'enseignant. Pour la suite de ce mémoire, nous utiliserons le vocabulaire des documents institutionnels, c'est à dire : le mot manipulation. Mais, pour nous, le mot manipulation sera associé à la définition d'expérimentation de Thierry Dias qui est aussi la définition de C. Berdonneau : l'activité s'exerce sur des objets relativement petits par rapport à la taille de l'enfant et les gestes de l'enfant sont finalisés (c'est-à-dire que ses mains sont guidées par sa pensée, ce n'est pas du hasard).

Cette partie théorique sur la résolution de problèmes et la manipulation, nous a permis d'approfondir nos connaissances sur ces sujets et d'enrichir notre réflexion, dans l'objectif d'élaborer une problématique.

### **Présentation de la problématique**

Suite à mes questions initiales et au regard de mes diverses recherches et lectures, j'ai décidé de proposer pour mon mémoire la problématique suivante :

*Quel est le rôle de la manipulation dans l'enrichissement de la mémoire des problèmes arithmétiques verbaux, additifs de comparaison (en une étape) pour une meilleure réussite?*

L'objectif de ce mémoire sera alors de valider ou non 2 hypothèses :

- Hypothèse 1 : si l'élève manipule alors il arrivera plus facilement à faire des analogies entre les problèmes additifs de comparaison (en une étape).
- Hypothèse 2 : si l'élève arrive à faire des analogies entre les différents problèmes additifs de comparaison (en une étape), alors il enrichira sa mémoire de problèmes et aura une meilleure réussite dans la résolution de ces problèmes.

### Méthodologie de recueil de données

Afin de valider ou non mes hypothèses, je vais mettre en place une séquence dans une classe de CE2-CM1, pour des élèves de CE2. Elle se déroulera durant mon stage massé (6 jours) qui a eu lieu pendant la deuxième période de l'année scolaire.

Cette séquence s'inscrit dans les programmes officiels du cycle 2 (du 30 juillet 2020) émis par le ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports. L'objectif de celle-ci est : savoir résoudre des problèmes du champ additif (problème de comparaison) en une étape.

Voici une présentation succincte de cette séquence :

Séance	Objectif	Déroulé
N°1	Évaluation diagnostique (planifier la séquence pour l'enseignant)	Les élèves doivent résoudre 4 problèmes. Ils n'ont à leur disposition que leur feuille et leur crayon. 2 problèmes à résoudre où les 2 mesures sont connues, la recherche est sur la comparaison. Ainsi que 2 problèmes où une mesure et la comparaison entre les 2 sont connues, la recherche porte sur la mesure « absente ».
N°2 :	Savoir résoudre (avec ou sans manipulation) des problèmes additifs de comparaison dont les 2 mesures sont connues.	-Présentation du matériel à disposition : des cubes. -Lecture avec eux de l'énoncé, vérification qu'il n'y a pas de difficulté de compréhension pour le vocabulaire. -Recherche individuelle, les élèves ont accès au matériel. Ici le matériel va aider les élèves à se représenter le problème et à élaborer une procédure. -Mise en commun : verbalisation de leur procédure, création d'une affiche (qui sera reproduite à l'ordinateur par l'enseignant et distribuée aux élèves) avec énoncé, photographie du matériel, objets figuratifs et solution. Il est donné le nom « problème bleu » à ce problème.
N°3	Savoir résoudre (avec ou sans manipulation) des problèmes additifs de comparaison dont 1 mesure et la comparaison sont connues.	-Rappel du matériel à disposition. -Lecture avec eux de l'énoncé, vérification qu'il n'y a pas de difficulté de compréhension pour le vocabulaire. -Recherche individuelle, les élèves ont accès au matériel. Ici le matériel va aider les élèves à se représenter le problème et à élaborer une procédure. -Mise en commun : verbalisation de leur procédure, création d'une affiche (qui sera reproduite à l'ordinateur par l'enseignant et distribuée aux élèves) avec énoncé, photographie du matériel, objets figuratifs et solution. Il est donné le nom « problème rouge » à ce problème.
N°4	Savoir reconnaître un problème de comparaison.	-Rappel du matériel à disposition. Phase 1 : Les élèves lisent l'énoncé puis cochent sur le questionnaire si pour eux le problème se résout comme le problème rouge, bleu ou aucun des deux (annexe 1).

		<p>Phase 2 : Grâce à la manipulation, ils valident ou non leur hypothèse (ici le matériel va permettre aux élèves de faire des analogies entre les problèmes). La manipulation va leur permettre de reconnaître si le problème met en œuvre une addition ou une soustraction et cela au-delà des mots dans l'énoncé. Les élèves cochent de nouveau sur le questionnaire si pour eux le problème se résout comme le problème rouge, bleu ou aucun des deux (annexe 1) Cela afin de permettre à l'enseignant de voir si la manipulation leur a fait changer d'avis.</p> <p>Durant cette séance l'objectif n'est pas de résoudre le problème mais d'être capable de faire des analogies entre les problèmes.</p>
N°5	Savoir résoudre (avec ou sans manipulation) des problèmes additifs de comparaison en utilisant des procédures connues	<p>Entraînement sur différents problèmes (1 de chaque type) :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Les 2 mesures sont connues, la recherche est sur la comparaison.</li> <li>▪ Une mesure et la comparaison entre les 2 sont connues, la recherche porte sur la mesure « absente ».</li> <li>▪ Problème additif qui n'est pas de comparaison.</li> </ul> <p>Voici le déroulé pour la résolution de chaque problème :</p> <p>Les élèves ont à leur disposition le matériel. L'enseignant leur demande de résoudre le problème dans le cahier.</p>
N°6	Savoir résoudre (avec ou sans manipulation) des problèmes additifs de comparaison en utilisant des procédures connues.	Même déroulé que la séance n°4 mais avec des problèmes différents.
N°7	Evaluation sommative : Vérifier si les connaissances ont été acquises par les élèves.	<p>Les élèves doivent résoudre 4 problèmes. Ils n'ont à leur disposition que leur feuille et leur crayon.</p> <p>2 problèmes à résoudre où les 2 mesures sont connues, la recherche est sur la comparaison. Ainsi que 2 problèmes où une mesure et la comparaison entre les 2 sont connues, la recherche porte sur la mesure « absente ».</p>

Le recueil de données va donc s'effectuer au travers d'une séquence d'apprentissage. Pour valider ou invalider l'hypothèse 1 : les données recueillies seront les réponses à un questionnaire. Pour valider ou invalider l'hypothèse 2 : les données recueillies seront les productions des élèves lors des séances 5 et 6 et lors des évaluations diagnostique et finale. Afin de rendre possible la manipulation avec du matériel, les nombres en jeu ne sont pas très grands. Ici la difficulté s'explique par la variété de contextes ainsi que les différentes grandeurs et non pas par les nombres. Dans cette séquence, ce ne sont pas les nombres ni la maîtrise des techniques de calcul qui sont évalués mais la capacité à mettre en place une stratégie de résolution de problème.

### **Méthodologie de traitement des données**

Pour valider ou invalider l'hypothèse 1 : si l'élève manipule alors il arrivera plus facilement à faire des analogies entre les problèmes additifs de comparaison (en une étape). La méthode d'analyse que je vais utiliser est l'analyse des réponses aux questionnaires à l'aide de pourcentages. Je vais comparer le nombre d'élèves qui font l'analogie avec le bon problème

de référence (problème bleu ou rouge) avant et après la manipulation lors de la séance 4. Nous sommes donc ici sur une analyse quantitative.

Pour l'hypothèse 2 : si l'élève arrive à faire des analogies entre les différents problèmes additifs de comparaison (en une étape), alors il aura une meilleure réussite dans la résolution de ces problèmes. J'ai choisi d'effectuer une analyse qualitative en analysant des procédures des élèves lors de la résolution des problèmes en séances 5 et 6 et en comparant avec l'analyse a priori mais aussi une analyse quantitative, en comparant à l'aide de pourcentages les résultats des évaluations diagnostique et finale.

### Traitement des données :

#### a) Présentation des problèmes

Voici un tableau présentant les problèmes qui seront donnés aux élèves :

	Problème additif en une étape de comparaison où les 2 mesures sont connues	Problème additif en une étape de comparaison où 1 mesure ainsi que la comparaison sont connues.	Problème additif qui n'est pas de comparaison.
Séance 1 :	Paul a 28 ans. Pierre a 22 ans. Combien d'années Paul a-t-il en plus ?  Léa collectionne des images de football. Elle en a 17. Son ami Maxime en a 8. Combien Maxime a-t-il d'images en moins que Léa ?	Ayoub a 18 billes. Iris en a 13 en moins. Combien Iris a-t-elle de billes ?  Sacha a 4 ans. Son cousin Nino a 15 ans de plus. Quel âge a Nino ?	
Séance 2	Au magasin, mon sac pèse 9 kg. Celui de ma sœur pèse 12 kg. Combien de kilos le sac de ma sœur pèse-t-il en plus ?		
Séance 3		Lenny a cueilli 13 fleurs. Mia en a ramassé 9 de plus que lui. Combien Mia a-t-elle ramassé de fleurs ?	
Séance 4	Diego a rangé ses pièces de Lego par couleur. Il a compté 18 pièces rouges et 6 pièces bleues. Combien y a-t-il de pièces rouges en plus ?  Diego a 9 petites voitures. Mia en a 16. Combien Mia a-t-elle de voitures en plus que Diego ?  Léa collectionne des fèves. Elle en a 17. Son ami Maxime en a 8. Combien Maxime a-t-il de fèves en moins que Léa ?	Dans sa tirelire, Lila a 16 euros. Thomas a 7 euros de moins. Combien Thomas a-t-il d'argent ?  Il y a 15 roses dans le jardin. Il y a 12 tulipes de moins que de roses. Combien y a-t-il de tulipes dans le jardin ?  Emmy a 11 ans. David a 4 ans de plus qu'elle. Quel âge à David ?	Au cours de danse, il y a 25 élèves. 17 sont des femmes. Combien y a-t-il d'hommes ?  Ayoub avait 15 billes. Léa lui en donne 6. Combien Ayoub a-t-il de billes maintenant ?  Il y avait 23 clémentines pour le goûter. Il en reste 11. Combien de clémentines ont été mangées ?
Séance 5	Dans le zoo de City, il y a 9 flamants roses. Dans le zoo de Town, il y en a 13. Combien y a-t-il de flamants roses en moins dans le zoo de City ?	Lana a 12 feutres. Maxime en a 5 en moins. Combien Maxime a-t-il de feutres ?	Rachel avait 13 billes. Diego lui en donne 7. Combien Rachel a-t-elle de billes maintenant ?

Séance 6	Pendant l'entraînement du cross, Ayoub a couru pendant 8 minutes et Emmy pendant 17 minutes. Combien Emmy a-t-elle couru de minutes en plus ?	Emmy a 11 ans. David a 4 ans de plus qu'elle. Quel âge a David ?	Rachel a 24 stylos dans sa réserve : des bleus et des noirs. Elle en a 7 bleus. Combien a-t-elle de stylos noirs ?
Séance 7	En classe, nous lisons tous le même livre. Ayoub en est à la page 21. Mia en est à la page 14. Combien Ayoub a-t-il lu de pages en plus que Mia ?  Maman a 28 ans. Tata a 34 ans. Combien d'années maman a-t-elle en moins ?	Nino a 11 ans. Sa sœur Lana a 14 ans de plus. Quel est l'âge de Lana ?  David a 12 billes. Mia en a 21 de plus. Combien Mia a-t-elle de billes ?	

### b) Analyse a priori des problèmes

Il a été effectué une analyse a priori sur les problèmes de comparaison (à l'exception de ceux proposés en séance 4 puisque les élèves n'ont pas à résoudre ces problèmes), présentée dans le tableau suivant.

Enoncé	Type de problème	Procédures des élèves (celle surlignée est la procédure experte)		Difficultés possibles des élèves	Aide	Analogie
		Procédures de comptage (figuration ou représentation mentale)	Procédure relevant du calcul (Résultats mémorisés (tables d'addition) ou connaissance sur les nombres (décomposition, techniques de calcul))			
Paul a 28 ans. Pierre a 22 ans. Combien d'années Paul a-t-il en plus ?	Problème additif en une étape de comparaison où les 2 mesures sont connues.	Schématiser sur la feuille (avec des cercles par exemple) : d'un côté 28 et de l'autre 22 (les schémas sont côte à côte) puis utilisation du comptage.	<b>Soustraction : <math>28-22=6</math></b>  Addition à trou : $22+?=28$  Soustraction avec décomposition des nombres : $28-10-10-2=6$	La non-inscription dans le champ de validité de la conception intuitive des opérations (on retrouve le terme « plus » qui peut induire une addition or, ici, il est souhaitable d'utiliser une soustraction).		Analogie obstructive de simulation : il est difficile pour les élèves de simuler mentalement la situation évoquée (visualiser des âges).
Léa collectionne des images de football. Elle en a 17. Son ami Maxime en a 8. Combien Maxime a-t-il d'images en moins que Léa ?	Problème additif en une étape de comparaison où les 2 mesures sont connues.	Schématiser sur la feuille (avec des cercles par exemple) : d'un côté 17 et de l'autre 8 (les schémas sont côte à côte) puis utilisation du comptage.	<b>Soustraction : <math>17-8=9</math></b>  Addition à trou : $8+?=17$  Addition de $8+10$ puis soustraction $18-1=17$ (par tâtonnement)  Soustraction avec décomposition des nombres : $17-8 = 17-7-1=10-1=9$		Inscription dans le champ de validité de la conception intuitive des opérations (on retrouve le terme « moins » qui peut induire une soustraction).	Analogie obstructive de scénario : les objets font partie d'une même catégorie subordonnée ils invitent plutôt à une addition.  Analogie facilitatrice de simulation : il est facile pour les élèves de simuler mentalement la situation évoquée (visualiser des images).
Ayoub a 18 billes. Iris en a 13 en moins. Combien Iris a-t-elle de billes ?	Problème additif en une étape de comparaison où 1 mesure ainsi que la comparaison sont connues.	Schématiser sur la feuille (avec des cercles par exemple) : d'un côté 18 et de l'autre 18 auquel on enlève 13 (les schémas sont côte à côte) puis utilisation du comptage.	<b>Soustraction : <math>18-13=5</math></b>  Addition à trou : $13+?=18$		Inscription dans le champ de validité de la conception intuitive des opérations (on retrouve le terme « moins » qui peut induire une soustraction).	Analogie obstructive de scénario : les objets font partie d'une même catégorie subordonnée qui invite plutôt à une addition.  Analogie facilitatrice de simulation : il est facile pour les élèves de simuler mentalement la situation évoquée (visualiser des billes).
Sacha a 4 ans. Son cousin	Problème additif en une	Schématiser sur la feuille	<b>Addition <math>4+15=19</math></b>		Inscription dans le	Analogie obstructive de

Nino a 15 ans de plus. Quel âge a Nino ?	étape de comparaison où 1 mesure ainsi que la comparaison sont connues.	(avec des cercles par exemple) : d'un côté 4, d'un autre 4 +15 (les schémas sont côte à côte) puis utilisation du comptage.	Addition en plusieurs étapes avec la décomposition du nombre 15 : $4+10+5=19$		champ de validité de la conception intuitive des opérations (on retrouve le terme « plus » qui peut induire une addition).	simulation : il est difficile pour les élèves de simuler mentalement la situation évoquée (visualiser des âges).
Au magasin, mon sac pèse 9 kg. Celui de ma sœur pèse 12 kg. Combien de kilos le sac de ma sœur pèse-t-il en plus ?	Problème additif en une étape de comparaison où les 2 mesures sont connues.	Matérialisation de la masse avec du matériel : d'un côté 9 et de l'autre 12, on les met côte à côte et utilisation du comptage pour trouver le nombre de kilos en plus. (Le matériel se situe côte à côte.)  Schématiser sur la feuille de la même manière que le matériel.	<b>Soustraction : <math>12-9=3</math></b>  Addition à trou : $9 + ? = 12$  Soustraction en plusieurs étapes avec la décomposition du nombre 12 : $10-9+2=3$	La non-inscription dans le champ de validité de la conception intuitive des opérations (on retrouve le terme « plus » qui peut induire une addition or, ici, il est souhaitable d'utiliser une soustraction).  Utilisation d'une unité de masse : le kilogramme.  Matérialiser un objet abstrait qui est le kilogramme.  Le premier terme de la soustraction arrive en deuxième dans l'énoncé (et inversement).		Analogie obstructive de simulation : il est difficile pour les élèves de simuler mentalement la situation évoquée (visualiser des masses).
Lenny a cueilli 13 fleurs. Mia en a ramassé 9 de plus que lui. Combien Mia a-t-elle ramassé de fleurs ?	Problème additif en une étape de comparaison où 1 mesure ainsi que la comparaison sont connues.	Matérialisation des fleurs avec du matériel : d'un côté 13, de l'autre 13+9 et utilisation du comptage. (Le matériel se situe côte à côte.)  Schématiser sur la feuille de la même manière que le matériel.	<b>Addition <math>13+9=22</math></b>  - Addition en plusieurs étapes avec la décomposition du nombre 13 : $10+9+3=22$		Inscription dans le champ de validité de la conception intuitive des opérations (on retrouve le terme « plus » qui peut induire une addition).	Analogie facilitatrice de scénario : les objets font partie d'une même catégorie subordonnée qui invite à l'addition.  Analogie facilitatrice de simulation : il est facile pour les élèves de simuler mentalement la situation évoquée (visualiser des fleurs).
Dans le zoo de City, il y a 9 flamants roses. Dans le zoo de Town, il y en a 13.	Problème additif en une étape de comparaison où les 2 mesures sont	Matérialisation des flamants roses avec du matériel : d'un côté 9 et de l'autre 13,	<b>Soustraction : <math>13-9=4</math></b>  Soustraction en plusieurs étapes avec	Le premier terme de la soustraction arrive en deuxième dans l'énoncé (et	Inscription dans le champ de validité de la conception intuitive	Analogie obstructive de scénario : les objets font partie d'une même

Combien y a-t-il de flamants roses en moins dans le zoo de City ?	connues.	on les met côte à côte et utilisation du comptage pour savoir combien il y en a en moins. (Le matériel se situe côte à côte.)  Schématiser sur la feuille de la même manière que le matériel.	décomposition du nombre 9 : $13-3-3-3=4$  Addition à trou : $9+ ?=13$	inversement).	des opérations (on retrouve le terme « moins » qui peut induire une soustraction).	catégorie subordonnée qui invite plutôt à une addition.  Analogie facilitatrice de simulation : il est facile pour les élèves de simuler mentalement la situation évoquée (visualiser des flamants roses).
Lana a 12 feutres. Maxime en a 5 en moins. Combien Maxime a-t-il de feutres ?	Problème additif en une étape de comparaison où 1 mesure ainsi que la comparaison sont connues.	Matérialisation des feutres avec du matériel : d'un côté 12, de l'autre 12 et on en enlève 5 puis utilisation du comptage. (Le matériel se situe côte à côte.)  Schématiser sur la feuille de la même manière que le matériel.	<b>Soustraction : <math>12-5=7</math></b>  Soustraction en plusieurs étapes avec décomposition du nombre 12 : $10-5+2=7$  Addition à trou : $5+ ?=12$		Inscription dans le champ de validité de la conception intuitive des opérations (on retrouve le terme « moins » qui peut induire une soustraction).	Analogie facilitatrice de simulation : il est facile pour les élèves de simuler mentalement la situation évoquée (visualiser des feutres).  Analogie obstructive de scénario : les objets font partie d'une même catégorie subordonnée qui invite plutôt à une addition.
Pendant l'entraînement du cross, Ayoub a couru pendant 8 minutes et Emmy pendant 17 minutes. Combien Emmy a-t-elle couru de minutes en plus ?	Problème additif en une étape de comparaison où les 2 mesures sont connues.	Matérialisation des minutes avec du matériel : d'un côté 8 et de l'autre 17 puis utilisation du comptage pour savoir combien il y en a de minutes en plus. (Le matériel se situe côte à côte.)  Schématiser sur la feuille de la même manière que le matériel.	<b>Soustraction : <math>17-8=9</math></b>  Soustraction en plusieurs étapes avec décomposition du nombre 8 : $17-4-4=9$ $17-8=17-7-1=10-1=9$  Addition à trou : $8+ ?=17$	La non-inscription dans le champ de validité de la conception intuitive des opérations (on retrouve le terme « plus » qui peut induire une addition or, ici, il est souhaitable d'utiliser une soustraction).  Le premier terme de la soustraction arrive en deuxième dans l'énoncé (et inversement).  Matérialiser un objet abstrait qui est la minute. Utilisation d'une unité de temps : la minute.		Analogie obstructive de simulation : il est difficile pour les élèves de simuler mentalement la situation évoquée (visualiser des durées).

Emmy a 11 ans. David a 4 ans de plus qu'elle. Quel âge a David ?	Problème additif en une étape de comparaison où 1 mesure ainsi que la comparaison sont connues.	Matérialisation des âges avec du matériel : d'un côté 11, de l'autre 11+4 et utilisation du comptage. (Le matériel se situe côte à côte.)  Schématiser sur la feuille de la même manière que le matériel.	<b>Addition 11+4=15</b>  Addition en plusieurs étapes avec décomposition des nombres 11 et 4 : 11+1+3=15 11+4=10+1+4=10+5=15	Matérialiser un objet abstrait qui est l'âge.	Inscription dans le champ de validité de la conception intuitive des opérations (on retrouve le terme « plus » qui peut induire une addition).	Analogie obstructive de simulation : il est difficile pour les élèves de simuler mentalement la situation évoquée (visualiser des âges).
En classe, nous lisons tous le même livre. Ayoub en est à la page 21. Mia en est à la page 14. Combien Ayoub a-t-il lu de pages en plus que Mia ?	Problème additif en une étape de comparaison où les 2 mesures sont connues.	Schématiser sur la feuille (avec des cercles par exemple) : d'un côté 21 et de l'autre 14 (les schémas sont côte à côte) puis utilisation du comptage.	<b>Soustraction : 21-14=7</b>  Soustraction en plusieurs étapes avec décomposition du nombre 14 : 21-1-10-3=7  Addition à trou : 14+ ? =21	La non-inscription dans le champ de validité de la conception intuitive des opérations (on retrouve le terme « plus » qui peut induire une addition or, ici, il est souhaitable d'utiliser une soustraction).		Analogie obstructive de scénario : les objets font partie d'une même catégorie subordonnée qui invite plutôt à une addition.  Analogie facilitatrice de simulation : il est facile pour les élèves de simuler mentalement la situation évoquée (visualiser des pages d'un livre).
Maman a 28 ans. Tata a 34 ans. Combien d'années maman a-t-elle en moins ?	Problème additif en une étape de comparaison où les 2 mesures sont connues.	Schématiser sur la feuille (avec des cercles par exemple) : d'un côté 28 et de l'autre 34 (les schémas sont côte à côte) puis utilisation du comptage.	<b>Soustraction : 34-28=6</b>  Soustraction en plusieurs étapes avec la décomposition du nombre 28 : 34-10-10-8=6  Addition à trou : 28+ ? =34	Le premier terme de la soustraction arrive en deuxième dans l'énoncé (et inversement).  Matérialiser un objet abstrait qui est l'âge.	Inscription dans le champ de validité de la conception intuitive des opérations (on retrouve le terme « moins » qui peut induire une soustraction).	Analogie obstructive de simulation : il est difficile pour les élèves de simuler mentalement la situation évoquée (visualiser des âges).
Nino a 11 ans. Sa sœur Lana a 14 ans de plus. Quel est l'âge de Lana ?	Problème additif en une étape de comparaison où 1 mesure ainsi que la comparaison sont connues.	Schématiser sur la feuille (avec des cercles par exemple) : d'un côté 11, de l'autre 11+14 (les schémas sont côte à côte) et utilisation du comptage.	<b>Addition 11+14=25</b>  Addition en plusieurs étapes avec décomposition du nombre 14 : 11+10+4=25	Matérialiser un objet abstrait qui est l'âge.	Inscription dans le champ de validité de la conception intuitive des opérations (on retrouve le terme « plus » qui peut induire une addition).	Analogie obstructive de simulation : il est difficile pour les élèves de simuler mentalement la situation évoquée (visualiser des âges).
David a 12 billes. Mia en a 21 de plus. Combien Mia a-t-elle de billes ?	Problème additif en une étape de comparaison où 1 mesure ainsi que la	Schématiser sur la feuille (avec des cercles par exemple) : d'un côté 12, de	<b>Addition 21+12=33</b>  Addition en plusieurs étapes avec		Inscription dans le champ de validité de la conception intuitive	Analogie facilitatrice de scénario : les objets font

	comparaison sont connues.	l'autre 12+21 (les schémas sont côte à côte) et utilisation du comptage.	décomposition des nombres : $10+2+10+10+1=33$ $10+2+20+1=33$		des opérations (on retrouve le terme « plus » qui peut induire une addition).	catégorie subordonnée qui invite plutôt à une addition.  Analogie facilitatrice de simulation : il est facile pour les élèves de simuler mentalement la situation évoquée (visualiser des billes).
--	---------------------------	--	--	--	---	--

### c) Analyse quantitative des questionnaires

Voici les résultats de la séance n°4 durant laquelle les élèves devaient faire des analogies avec les problèmes de référence. Les élèves avaient à leur disposition l'affiche accrochée au mur pour les 2 problèmes de référence (créé lors des séances 2 et 3), ainsi que cette affiche reproduite dans leur cahier qui leur a servi de trace écrite (voir annexe 2).

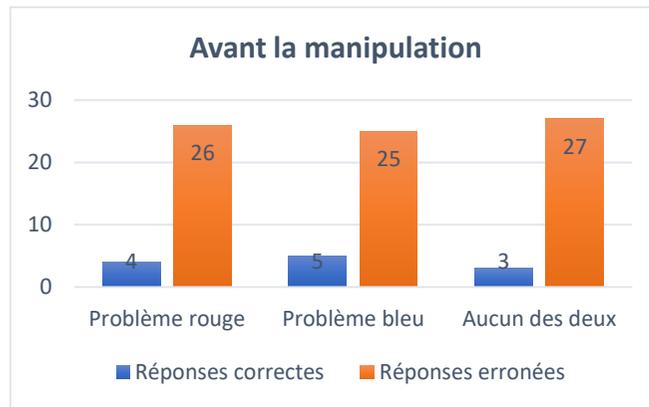


Figure 2: graphique n°1

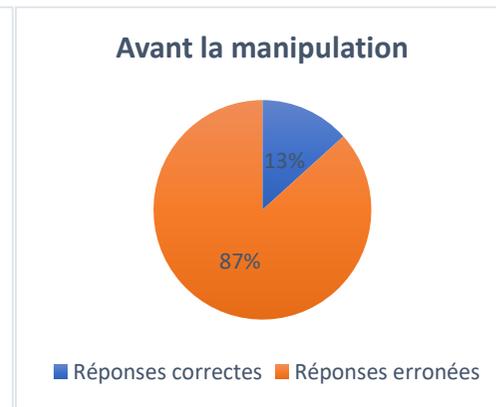


Figure 3: graphique n°2

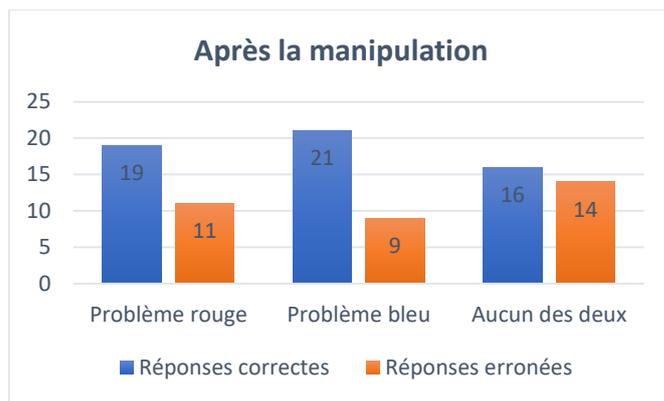


Figure 4: graphique n°3

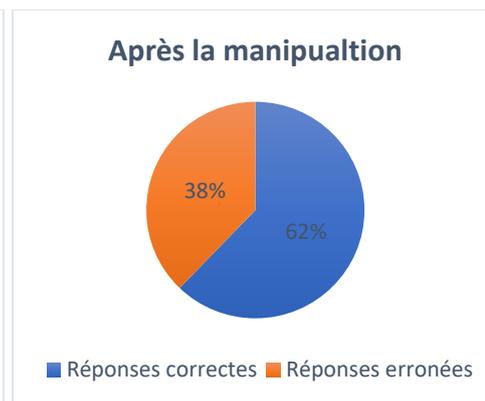


Figure 5: graphique n°4

On constate qu'avant la manipulation, il n'y a que très peu de réponses correctes (13%) alors qu'après avoir manipulé, il y a 62% de réponses correctes. Pour « aucun des deux », lorsque le problème est du champ additif mais pas de comparaison, on constate que l'écart entre les réponses correctes et erronées est plus faible après la manipulation. Néanmoins cet écart est très limité (il est de 2), cela peut être dû au fait que les élèves se focalisent sur la recherche de problèmes de comparaison puisque c'est la notion travaillée. Ici il y avait d'autres problèmes du champ additif afin de ne pas appliquer systématiquement la leçon sans réfléchir à d'autres solutions.

#### d) Analyse qualitative des procédures

Durant les séances 5 et 6, j'ai pu observer différentes procédures. Elles ne seront pas explicitées pour chaque problème puisque certaines ont été réitérées lors des différents essais de résolution :

- Problème n°1 : Dans le zoo de City, il y a 9 flamants roses. Dans le zoo de Town, il y en a 13.

Combien y a-t-il de flamants roses en moins, dans le zoo de City ?

Procédures observées :



Figure 6: Photographie n°1 (procédure d'un élève pour le problème n°1)

Sur la figure 6, on voit que l'élève a matérialisé les flamants roses avec les cubes : d'un côté 9 cubes et de l'autre 13. Puis il les a mis côte à côte et il a utilisé le comptage pour connaître la différence entre les 2 colonnes. Il a donc mis en place une même stratégie de résolution

que le problème de référence bleu.



Figure 7: Photographie n°2 (procédure d'un élève pour le problème n°1)

Sur la photographie n°2 (figure 7), cet autre élève a schématisé la manipulation qu'il aurait effectuée. Il a donc résolu ce problème comme le problème de référence bleu.

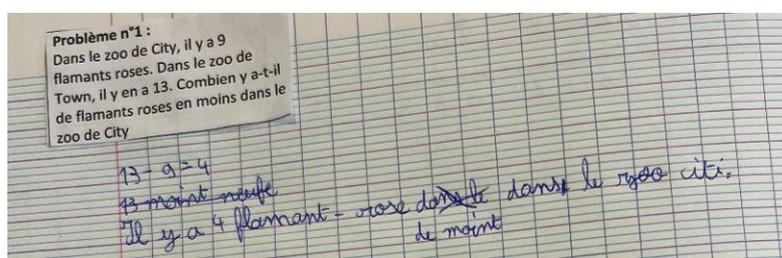


Figure 8: Photographie n°3 (procédure d'un élève pour le problème n°1)

Il y a également un élève (figure 8) qui a utilisé la soustraction en ligne qui est la procédure experte.

- Problème n°2 : Pendant l'entraînement du cross, Ayoub a couru pendant 8 minutes et Emmy pendant 17 minutes. Combien Emmy a-t-elle couru de minutes en plus ?

Procédures observées :

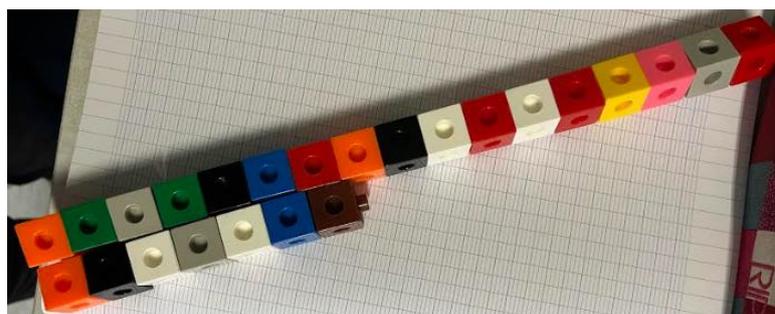


Figure 9: Photographie n°4 (procédure d'un élève pour le problème n°2)

Sur la figure 9, l'élève a matérialisé les minutes avec du matériel : d'un côté 7 cubes et de l'autre 17 puis il a utilisé le comptage pour savoir combien il y a de minutes en plus.

Ici l'élève a utilisé une procédure correcte mais a effectué une erreur de manipulation puisque la deuxième colonne devrait être constituée de 8 cubes. Il a donc mis en place une stratégie de résolution du problème de référence bleu.

Remédiation : inviter l'élève à relire l'énoncé en verbalisant ainsi qu'à recompter ses cubes.



Figure 10: Photographie n°5 (procédure d'un élève pour le problème n°2)

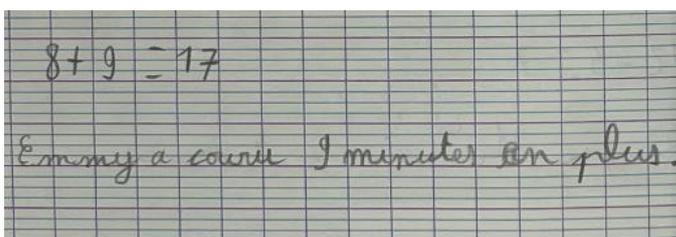
Cet autre élève (figure 10) a fait une colonne de 17 cubes puis une deuxième colonne avec 17 plus 8 cubes. Cela est dû à la non-inscription dans le champ de validité de la conception intuitive des opérations. L'élève voit le mot « plus » et donc, pour lui, il faut faire une addition (par conséquent ici rajouter des cubes).

Remédiation : demander à l'élève, à quel problème cela lui fait-il penser et pourquoi ? Pour s'aider il peut sortir sa leçon (annexe 2). Réponse attendue « Cela me fait penser au problème bleu parce qu'il faut chercher combien il y en a en plus. ». Puis le laisser résoudre le problème seul.



Figure 11: Photographie n°6 (procédure d'un élève pour le problème n°2)

L'élève, sur la figure 11, a utilisé la schématisation du matériel pour s'aider à effectuer la soustraction.



Cet élève (figure 12) a utilisé l'addition à trou. Il a peut-être pensé à utiliser cette procédure car il y a le terme « plus » qui peut induire l'utilisation d'une addition dans l'énoncé.

Figure 12: Photographie n°7 (procédure d'un élève pour le problème n°2)

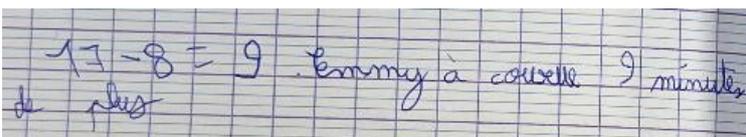


Figure 13: Photographie n°8 (procédure d'un élève pour le problème n°2)

L'élève (figure 13) a effectué une soustraction en ligne, qui est la procédure experte.

- Problème n°3 : Lana a 12 feutres. Maxime en a 5 de moins. Combien Maxime a-t-il de feutres ?

Procédure observée :



Sur la photographie présentée en figure 14, l'élève a matérialisé les feutres avec des cubes. Il a mis d'un côté 12 cubes et de l'autre 12 cubes auxquels il en a enlevé 5. Puis il a utilisé le comptage pour savoir le nombre de cubes présents dans cette deuxième tour. Il a donc résolu ce problème comme le problème de référence rouge.

Figure 14: Photographie n°9 (procédure d'un élève pour le problème n°3)

- Problème n°4 : Rachel avait 13 billes. Diego lui en donne 7. Combien Rachel a-t-elle de billes maintenant ?

Procédure observée :



Figure 15: Photographie n°10 (procédure d'un élève pour le problème n°4).

Cet élève (figure 15) traite ce problème comme un problème de comparaison or, ici, c'est un problème de parties-tout.

Remédiation : Demander à l'élève pourquoi il a fait 2 tours ? L'amener à voir qu'ici on ne compare pas 2 collections.

On remarque au travers de cette analyse que les élèves ont mis en place les mêmes stratégies de résolution que les problèmes de référence. Cette idée se confirme avec la mise en commun de leurs stratégies. En effet, automatiquement les élèves me disaient « Madame, c'est comme le problème rouge (ou bleu) ». Les élèves lors de la résolution de leurs problèmes faisaient donc une analogie avec les problèmes de référence.

### **e) Analyse sur l'utilisation du matériel**

Durant ces séances, j'ai remarqué que la quasi-totalité des élèves utilisaient le matériel à leur disposition. Certains auraient pu s'en passer mais ils l'utilisaient tout de même à cause du caractère ludique de leur manipulation. Pour eux, utiliser le matériel sortait de l'ordinaire, ils n'en utilisaient presque jamais durant les séances de mathématiques (dû notamment à un manque de matériel dans la classe).

Entre les séances 5 et 6, j'ai observé une évolution chez certains élèves. En effet durant la séance 6, des élèves ont utilisé le matériel afin de vérifier la réponse qu'ils avaient déjà notée sur leur cahier. Certains l'utilisaient naturellement, tandis que pour d'autres, je les invitais à vérifier leur réponse avec le matériel (que leur réponse initiale soit fausse ou non).

**f) Comparaison des résultats du début et de la fin de la séquence :**

Voici les résultats des évaluations diagnostique et finale :

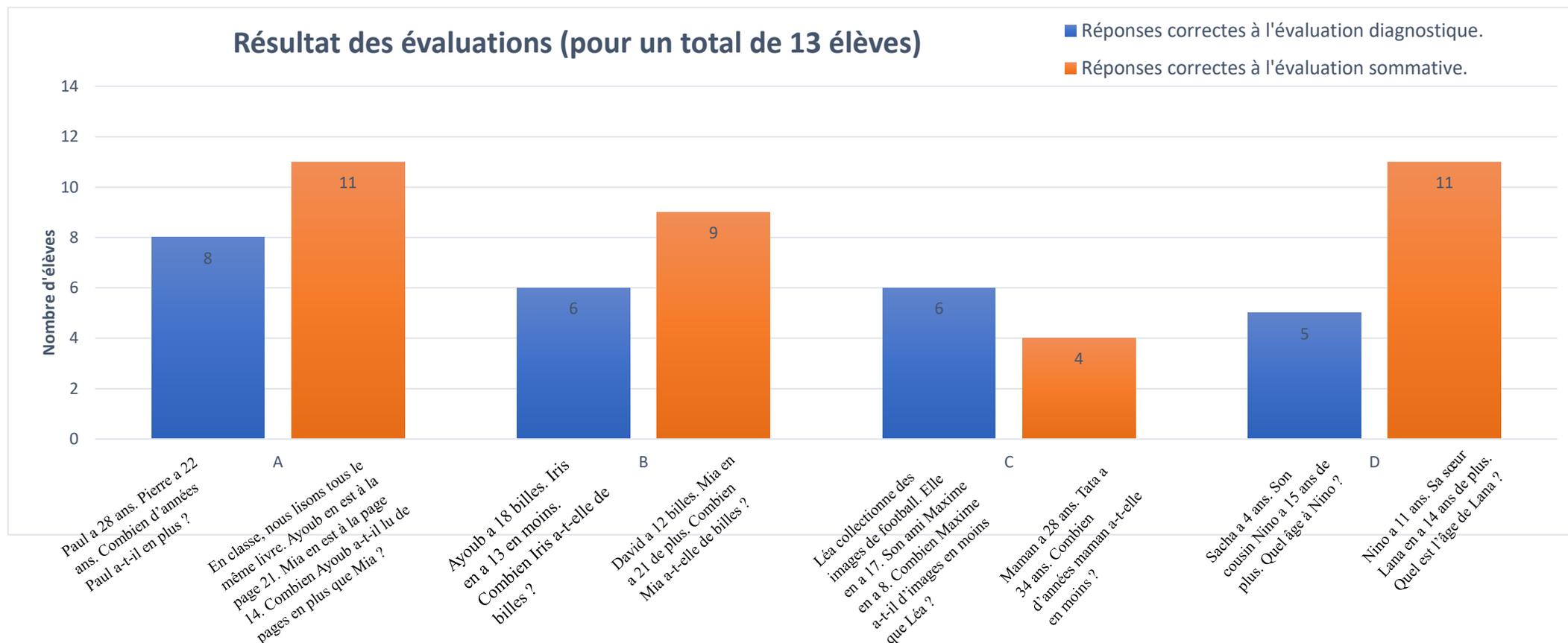


Figure 16: graphique n°5

Il est possible de comparer l'évaluation diagnostique et sommative puisque ce sont les mêmes types de problèmes. Les problèmes ont été rassemblés 2 à 2 en fonction :

- du type de problème
- de l'inscription ou non dans le champ de validité de la conception intuitive des opérations
- des analogies possibles des élèves (voir l'analyse a priori)

Paul a 28 ans. Pierre a 22 ans. Combien d'années Paul a-t-il en plus ?  En classe, nous lisons tous le même livre. Ayoub en est à la page 21. Mia en est à la page 14. Combien Ayoub a-t-il lu de pages en plus que Mia ?	Problèmes A
Ayoub a 18 billes. Iris en a 13 en moins. Combien Iris a-t-elle de billes ?  David à 12 billes. Mia en a 21 de plus. Combien Mia a-t-elle de billes ?	Problèmes B
Léa collectionne des images de football. Elle en a 17. Son ami Maxime en a 8. Combien Maxime a-t-il d'images en moins que Léa ?  Maman a 28 ans. Tata a 34 ans. Combien d'années maman a-t-elle en moins ?	Problèmes C
Sacha a 4 ans. Son cousin Nino a 15 ans de plus. Quel âge à Nino ?  Nino a 11 ans. Sa sœur Lana a 14 ans de plus. Quel est l'âge de Lana ?	Problèmes D

On constate une meilleure réussite dans l'évaluation sommative pour les problèmes A, B et D. A l'inverse pour les problèmes C, on constate une moins bonne réussite à l'évaluation sommative. En analysant les productions des élèves pour le problème : « Maman a 28 ans. Tata a 34 ans. Combien d'années maman a-t-elle en moins ? », on constate que pour la plupart d'entre eux, ils ont essayé d'effectuer la procédure experte. Mais ils se sont trompés dans l'ordre des termes : au lieu d'effectuer, la soustraction « 34-28 », ils ont effectué « 28-34 » (figure 17). La difficulté qu'ils ont éprouvée est que le premier terme de la soustraction arrive en deuxième dans l'énoncé (et inversement). Cela peut également s'expliquer par la non maîtrise des règles de la soustraction (les élèves ne savent pas qu'avec a et b qui sont des entiers naturels si  $a > b$  alors  $b-a$  est impossible).

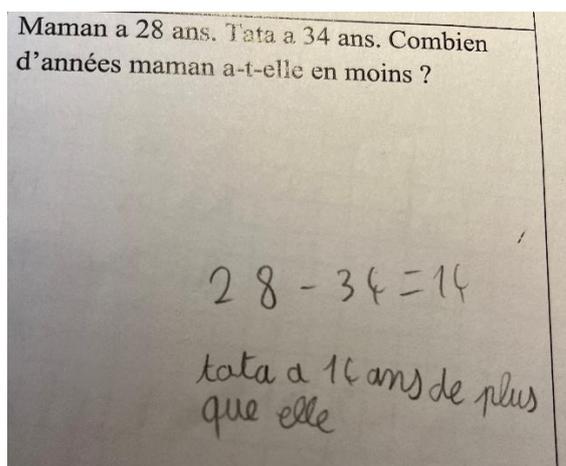


Figure 17: élève qui a effectué la soustraction 28-34

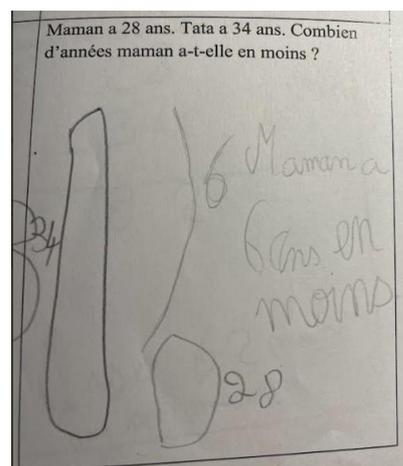


Figure 18: élève qui a utilisé un schéma

Pour les 4 élèves en réussite sur ce problème, 2 ont utilisé la procédure experte et 2 ont utilisé un schéma (figure 18). Ce schéma renvoie au matériel de manipulation qu'ils ont eu pendant les séances précédentes. On suppose ensuite qu'ils ont effectué une addition à trou :

28+? =34. Pour ces 2 élèves, c'est l'abstraction de la manipulation qui leur a permis de surmonter la difficulté en faisant une analogie avec le problème de référence bleu.

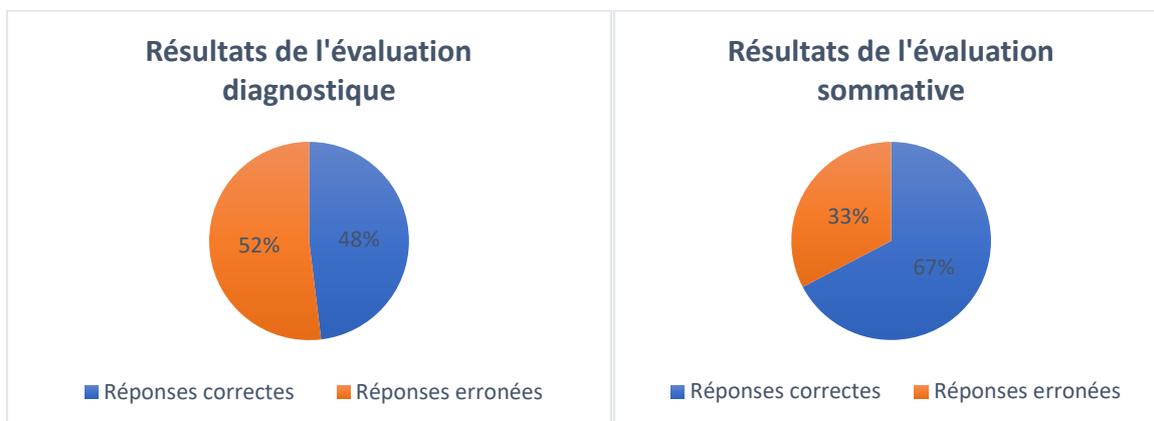


Figure 19: graphique n°6

Figure 20: graphique n°7

À l'évaluation sommative, on a 19 % de réponses correctes en plus par rapport à l'évaluation diagnostique. On a donc une amélioration des résultats à la fin de la séquence d'apprentissage.

### **Présentation des résultats :**

Le traitement des données, effectué dans la partie précédente, va nous permettre de valider ou invalider nos 2 hypothèses.

Hypothèse n°1 : Si l'élève manipule alors il arrivera plus facilement à faire des analogies entre les problèmes additifs de comparaison (en une étape).

Grâce à l'analyse des données, nous pouvons constater que les élèves arrivent plus facilement à faire des analogies entre les problèmes. En effet, on constate une amélioration des réponses correctes après la manipulation des élèves. La manipulation facilite donc l'analogie avec leurs problèmes de référence. Néanmoins, nous n'avons réalisé l'expérimentation qu'avec 2 problèmes de référence, 1 pour chaque type de problème additif de comparaison (en une étape). Nous ne pouvons savoir si la manipulation va aider les élèves à effectuer des analogies entre les problèmes de comparaison de manière plus globale. En effet, l'expérimentation ne nous a pas permis de déterminer si la manipulation intervient dans les schémas de problèmes et donc dans la mémoire de problèmes de manière générale. Cela est très difficile à mettre en évidence, puisque ce sont des mécanismes cognitifs individuels.

Au terme de cette expérimentation, l'hypothèse est donc validée mais nous ne pouvons pas la généraliser.

Hypothèse 2 : Si l'élève arrive à faire des analogies entre les différents problèmes additifs de comparaison (en une étape), alors il aura une meilleure réussite dans la résolution de ces problèmes.

L'analyse des données, montre qu'il y a plus d'élèves en réussite pour l'évaluation sommative que pour l'évaluation diagnostique. Cela signifie que la séquence a permis aux élèves de développer des stratégies de résolution adéquates. Dans les procédures des séances 5 et 6, on constate que la majorité des élèves tentent de mettre en place une stratégie de résolution identique à celle du problème de référence avec lequel ils effectuent une analogie. Cette conclusion est à nuancer puisque d'autres facteurs entrent en jeu, tel que l'entraînement à la résolution de ces problèmes. Nous pouvons donc en déduire que cette deuxième hypothèse est validée mais que partiellement.

### **Conclusion :**

Ce travail de recherche qui a été effectué durant mon master, m'a permis d'apporter des éléments de réponse sur mes questions initiales mais aussi sur ma problématique : Quel est le rôle de la manipulation dans l'enrichissement de la mémoire des problèmes arithmétiques verbaux, additifs de comparaison (en une étape) pour une meilleure réussite ? En effet, au regard des résultats obtenus, nous pouvons supposer que pour les élèves la manipulation a facilité l'analogie entre les problèmes de référence et ceux proposés au cours des séances. Cette analogie a permis aux élèves de résoudre plus facilement les problèmes proposés. La manipulation a donc joué le rôle d'une aide à la résolution des problèmes. Nous pouvons supposer que la réussite de ces problèmes a alors enrichi la mémoire des problèmes des élèves impliqués dans mon expérimentation. Les problèmes correctement résolus normalement pourraient servir de problèmes de référence. Mais nous ne pouvons pas être plus affirmatif car l'expérimentation s'est déroulée sur une période très courte (6 jours). Ici nous avons donc une première limite à mon travail : l'analogie n'a été effectuée qu'avec un seul problème de référence pour chaque type de problème (nous ne pouvons savoir si les élèves ont d'eux même effectué une analogie entre les différents problèmes puisque ce sont des processus cognitifs auxquels nous n'avons pas accès). D'autres facteurs (qui n'ont pas été développés dans ce mémoire) peuvent également entrer en jeu pour une meilleure réussite

des élèves. Dans cette situation : le rôle de la mise en commun, des synthèses, le rebrassage avec le réinvestissement de ce qu'ils ont déjà appris, ainsi qu'un environnement identique pour toutes les séances (ce qui est sécurisant pour les élèves, ils s'engageront donc d'autant plus facilement dans l'activité proposée). Le manque de temps, 7 séances en 6 jours, n'a pas permis d'éloigner progressivement le matériel. En effet, pour certains élèves, la mise à distance a pu être brutale (entre les séances 6 et 7). Ils n'ont donc pas pu aller progressivement vers l'abstraction, ce qui est recommandé afin de favoriser l'apprentissage. Cette mise à distance aurait pu s'effectuer avec plus de temps en introduisant progressivement des nombres en jeu plus grands. De plus, la classe où s'est effectuée l'expérimentation était un double niveau (CE2-CM1). Il a été parfois difficile d'observer correctement les élèves de CE2 en train de manipuler puisqu'il fallait également travailler avec les CM1. Lors de certains temps de la séquence les CE2 ont donc effectué le travail en autonomie. C'est le cas notamment de la séance 4, ce qui ne m'a pas permis d'observer leurs procédures avec le matériel. Je n'ai donc pu effectuer une analyse qualitative de leurs procédures pour cette séance. Pour certains élèves de CE2, l'autonomie n'étant pas encore acquise, ils avaient besoin de ma présence pour effectuer le travail, je n'ai pu être présente pour eux à chaque fois. Cela a pu fausser des résultats car ils avaient tendance dans ce cas à répondre au hasard ou en copiant sur un voisin (notamment pour le questionnaire). Nous pouvons aussi souligner une dernière limite à ce travail : l'interprétation des résultats se concentre autour d'un faible effectif (13 élèves), nous ne pouvons donc pas généraliser les résultats obtenus.

Ce mémoire m'a permis de mettre en œuvre différentes compétences professionnelles. Notamment « maîtriser les savoirs disciplinaires et didactiques », j'ai pu me former sur ces points, théoriquement dans une première partie en prenant connaissance des différentes typologies de problèmes. Mais aussi didactiquement en ayant conscience de l'importance de présenter les différents problèmes aux élèves, cela dans l'objectif qu'ils se créent une mémoire de problèmes. Celle-ci facilitera alors leur réussite dans la résolution des problèmes de manière générale. Pour la manipulation, d'un point de vue didactique, il est important que l'enseignant ait en tête qu'il ne faut pas manipuler pour manipuler, il faut que l'élève engage des processus cognitifs au cours de sa manipulation. Ce travail de recherche a également contribué à ma « connaissance des élèves et de leur processus d'apprentissage » tout en tenant compte de la « diversité des élèves ». En effet, chaque élève est différent, chaque individu peut avoir un raisonnement différent qui lui permettra d'arriver à la résolution du problème. C'est à l'enseignant d'anticiper au maximum les différentes stratégies auxquelles un élève peut avoir recours et les différentes difficultés auxquelles il

peut être confronté. Cela a été effectué grâce à l'analyse a priori et a été complété par l'analyse qualitative des procédures. Cela m'a donc permis de « construire, mettre en œuvre et animer des situations d'enseignement et d'apprentissage en prenant en compte la diversité des élèves », en mettant notamment en place une progression dans la présentation des problèmes. D'abord un problème où on recherche la comparaison (qui est plus facile pour les élèves) puis un problème où on recherche une des 2 mesures (qui est plus difficile pour les élèves). Ce mémoire m'a donc permis de « m'engager dans une démarche individuelle et collective de développement professionnel ». En effet, grâce aux cours de l'INSPE, aux recherches effectuées, à la séquence mise en place et aux observations, j'ai ainsi complété et actualisé mes différentes connaissances, que ce soit d'un point de vue pédagogique, disciplinaire ou didactique. Ce mémoire n'est pas la finalité de mon développement sur ce sujet, j'ai bien conscience que je dois continuer à me former au cours de ma carrière, car ce sont des éléments qui évoluent continuellement.

## Liste des figures :

Figure 1	Modèle en quatre phases pour la résolution de problèmes. ....	7
Figure 2:	graphique n°1.....	25
Figure 3:	graphique n°2.....	26
Figure 4:	graphique n°3.....	26
Figure 5:	graphique n°4.....	27
Figure 6:	Photographie n°1 (procédure d'un élève pour le problème n°1). ....	27
Figure 7:	Photographie n°2 (procédure d'un élève pour le problème n°1). ....	28
Figure 8:	Photographie n°3 (procédure d'un élève pour le problème n°1). ....	28
Figure 9:	Photographie n°4 (procédure d'un élève pour le problème n°2). ....	28
Figure 10:	Photographie n°5 (procédure d'un élève pour le problème n°2). ....	29
Figure 11:	Photographie n°6 (procédure d'un élève pour le problème n°2). ....	29
Figure 12:	Photographie n°7 (procédure d'un élève pour le problème n°2). ....	29
Figure 13:	Photographie n°8 (procédure d'un élève pour le problème n°2). ....	29
Figure 14:	Photographie n°9 (procédure d'un élève pour le problème n°3). ....	30
Figure 15:	Photographie n°10 (procédure d'un élève pour le problème n°4). ....	30
Figure 16:	graphique n°5.....	32
Figure 17:	élève qui a effectué la soustraction 28-34 .....	32
Figure 18:	élève qui a utilisé un schéma .....	33
Figure 19:	graphique n°6.....	33
Figure 20:	graphique n°7.....	34

## Bibliographie

- BERDONNEAU C., 2006, De l'importance des gestes pour l'apprentissage des concepts mathématiques, Conférence pédagogique au CRDP de Rouen, 7 juin 2006.
- Briand. J., 2019, Manipuler en mathématiques... oui mais, *Au fil des maths*, [en ligne], <https://afdm.apmep.fr/rubriques/opinions/manipuler-en-mathematiques-oui-mais/>, consulté le 26 février 2022.
- Centre Alain-Savary, 2021, *Le rôle des analogies dans la résolution de problèmes aux cycles 2 et 3*, [en ligne], <http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/mathematiques-en-education-prioritaire/compte-rendus-formations-de-formateurs-mathematiques/session-2019-2020/le-role-des-analogies-intuitives-dans-la-resolution-de-problemes-arithmetiques-aux-cycles-2-et-3> , consulté le 19 mars 2022.
- Charbonneau. C., 2021, *La manipulation en mathématique au cœur des apprentissages : 6 à 8 ans : activités et conseils pour un enseignement plus concret*, Montréal Québec, Édition Chenelière Éducation.
- Colomb. J., Ed., 2005, *Apprentissage numériques et résolution de problèmes : cours élémentaire (deuxième année)*, Paris, Édition Hatier (collection ERMEL).
- CRAP Cahiers Pédagogiques., Manipuler en maths ? OUI ou NON ? Vous en dites quoi ? avec Pierre Eysseric, [vidéo en ligne], YouTube, 8 novembre 2017, [vue le 2 mars 2022].
- Dias. T., 2017, *Manipuler et expérimenter en mathématiques : agir, réfléchir, faire des maths autrement*, Paris, Édition Magnard.
- Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance, 2021, *Évaluations 2021 : Repères CP, CE1 : Premiers résultats*.
- Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance, 2020, *TIMSS 2019 – Évaluation internationale des élèves de CMI en mathématiques et en sciences : les résultats de la France toujours en retrait*.
- DSDEN38, 201-2020, *Formation 100% de réussite : 10 problèmes par semaine au CE2*
- FLOC'H N. & PFAFF N., (2005), Une séquence sur les problèmes additifs au cycle 2, Le cas des comparaisons de mesures, *Grand N n°75*, 19-30.
- Houdement.C., (2017), Résolution de problèmes arithmétiques à l'école, *Grand N n°100*, 59-78.
- JULO J., (2002), Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N n°69*, 31-52.

Mével, J-P., Ed., 2010, *Dictionnaire*, Paris, Hachette

Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2015, *Socle commun de connaissances, de compétences et de culture*.

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2018, *La résolution de problèmes à l'école élémentaire*.

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2021, *Programme d'enseignement de l'école maternelle*.

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2020, *Programme du cycle 2 : en vigueur à la rentrée 2020*.

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2020 b, *Programme du cycle 3 : en vigueur à la rentrée 2020*.

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2022, *Attendus de fin d'année au CE1 en mathématiques*.

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2022 b, *Guide pour les mathématiques : Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*.

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2022 c, *Guide pour les mathématiques : La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen*.

Vergnaud. G., (2019) Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple : les structures additives, *Grand N n°38*, 21-40.

## **Résumé :**

De nombreux élèves sont en difficultés en mathématiques et plus particulièrement face à la résolution de problèmes. Cela se confirme dans des études comme l'étude TIMSS. Différents paramètres peuvent être mis en place pour améliorer les apprentissages des élèves notamment l'utilisation de la manipulation. Ainsi, ce mémoire s'interroge sur l'amélioration des compétences des élèves grâce à la manipulation en résolution de problèmes. Une séquence sur les problèmes additifs de comparaison en une étape a été mise en place dans une classe de cycle 2 (Ce2). Celle-ci permettant de voir le rôle de la manipulation dans l'enrichissement de la mémoire de ces problèmes afin de tendre vers une meilleure réussite.

Many students have difficulty in mathematics and more particularly in problem solving. This is confirmed in studies like the TIMSS study. Different parameters can be put in place to improve student learning, in particular the use of manipulation. Thus, this thesis questions the improvement of students' skills through manipulation in problem solving. A sequence on additive problems of comparison in one step has been set up in a class of cycle 2 (Ce2). This allows us to see the role of manipulation in enriching the memory of these problems in order to tend towards greater success.

# Annexes

## Annexe 1 : Questionnaire distribué aux élèves

Prénom : .....

Problème n°

Après avoir lu l'énoncé, je résous ce problème comme le problème :

**bleu**       **rouge**       **aucun des 2**

Après avoir manipulé, je résous ce problème comme le problème :

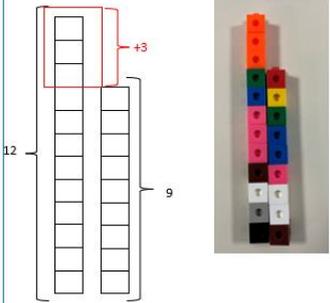
**bleu**       **rouge**       **aucun des 2**

## Annexe 2 : Trace écrite des élèves

### Problèmes de comparaison :

Au magasin, mon sac pèse 9 kg. Celui de ma sœur pèse 12 kg. Combien de kilos le sac de ma sœur pèse-t-il en plus ?

Je cherche combien il y en a, en plus ou en moins.

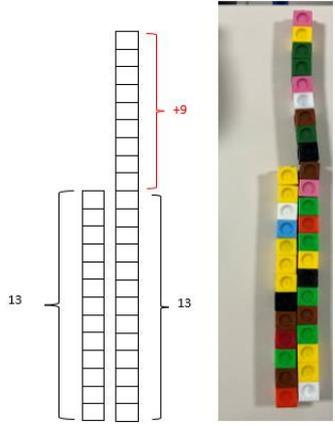


$12 - 9 = 3$

Il y a 3 kilos en plus dans le sac de sa sœur.

Lenny a cueilli 13 fleurs. Mia en a ramassé 9 de plus que lui. Combien Mia a-t-elle ramassé de fleurs ?

Je cherche combien il y a d'éléments dans la 2<sup>ème</sup> collection.



$13 + 9 = 22$

Mia a ramassé 22 fleurs.