



HAL
open science

Enseignement/apprentissage de l'équivalence de fractions auprès d'élèves en difficulté en début de cycle 3 : le cas du jeu l'Atelier des Potions

Cécile Barque

► **To cite this version:**

Cécile Barque. Enseignement/apprentissage de l'équivalence de fractions auprès d'élèves en difficulté en début de cycle 3 : le cas du jeu l'Atelier des Potions. Education. 2023. dumas-04320824

HAL Id: dumas-04320824

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-04320824>

Submitted on 4 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License



Université de Bretagne Occidentale



Master *MEEF*, mention *Parcours et Ingénierie de la formation*, parcours
RED : Recherches en Didactique

Enseignement/apprentissage de l'équivalence de fractions auprès d'élèves en difficulté en début de cycle 3, le cas du jeu *l'Atelier des Potions*

Cécile BARQUE

Année 2022-2023

Directrice de mémoire : Lætitia BUENO-RAVEL

Mémoire

Consultation et diffusion du mémoire

•Autorisation de l'étudiant(e) :

Si le jury d'évaluation du mémoire émet un avis favorable pour la consultation de mon mémoire, j'autorise sa diffusion dans les espaces universitaires dédiés (BU, HAL, ...) :

OUI

NON

Date :

Signature :

SOMMAIRE

Introduction.....	4
1 L'équivalence de fractions	6
1.1 Le contexte scientifique.....	6
1.1.1 Les différentes interprétations de la fraction.....	6
1.1.2 Quelle introduction pour la fraction ?.....	8
1.1.3 « Congruent fraction », « fraction conforme».....	10
1.1.4 L'équivalence de fractions.....	11
1.2 Le contexte institutionnel.....	13
1.2.1 La fraction dans les Instructions Officielles	13
1.2.2 L'équivalence de fractions dans les Instructions Officielles	14
1.3 La problématique.....	15
2 Cadre théorique, questions de recherche et méthodologie.....	16
2.1 Théorie des Situations Didactiques et principaux concepts mobilisés.....	16
2.2 Questions de recherche	17
2.3 Méthodologie	17
2.3.1 Le terrain.....	17
2.3.2 Les tests	18
2.3.3 Les films.....	18
2.3.4 Les entretiens individuels.....	19
2.3.5 Synthèse de la méthodologie.....	20
3 Les possibles face à l'équivalence de fractions	21
3.1 Le jeu l'Atelier des Potions.....	21
3.1.1 Présentation du jeu	21
3.1.2 Analyse du plateau.....	25
3.1.3 Analyse des cartes	26
3.1.4 Travaux sur le jeu l'Atelier des Potions.....	30
3.2 Analyse a priori de la séquence.....	30
3.3 Analyse a priori des tests.....	33
3.3.1 Exercice 1.....	33
3.3.2 Exercice 2.....	35
3.3.3 Exercice 4. item 4.a.....	35
3.4 Analyse a priori des entretiens individuels.....	35

3.4.1 Questions posées pour chaque carte.....	36
3.4.2 Carte 11, carte de base	37
3.4.3 Carte 16 , carte de base détournée	38
3.4.4 Carte 35, équivalence de fractions.....	39
4 L'équivalence de fractions avec l'Atelier des Potions, apprentissages réalisés et difficultés persistantes.....	41
4.1 Le pré-test.....	42
4.2 La séance 5.....	43
4.2.1 La mise en lumière d'une rupture de contrat, le groupe classe.....	44
4.2.2 La prise de risque pour trouver une équivalence, le cas de M	49
4.2.3 La prudence plutôt que l'équivalence, le cas de C.....	51
4.3 La séance 6.....	52
4.3.1 « Faire » des fractions/ « faire » des potions, le didactique et le ludique.....	52
4.3.2 Le contrôle sur le plateau de jeu, le cas de A et M.....	53
4.3.3 La validation par l'action sur le grimoire, le cas de A et M.....	56
4.3.4 La formulation pour $3/6=1/2$	56
4.3.5 La phase de conclusion de la séance 6.....	58
4.4 Les entretiens individuels.....	61
4.4.1 Procédures utilisées pour les cartes 11, 16 et 35.....	61
4.4.2 Carte 11.....	62
4.4.3 Carte 16, $3/9=1/3$ pour la grenouille, fractions conformes.....	63
4.4.4 Carte 16, $2/8=1/4$ pour la raie, fractions conformes	66
4.4.5 Carte 35, $1/2=2/4$ pour la grenouille, fraction non conforme	69
4.5 Séance 8	77
4.5.1 M et Z pour la carte 29.....	78
4.5.2 A et C pour la carte 29.....	82
4.5.3 Exercices de décomposition.....	84
4.6 Le post-test.....	86
4.6.1 Confrontation pré-test/post-test pour A, C et M.....	87
4.6.2 Les fractions non conformes à la partition proposée pour C et M.....	89
4.6.3 Les fractions non conformes à la partition proposée pour A.....	91
4.6.4 Conception du huitième de carré pour A, C et M	92
4.6.5 L'importance de la décontextualisation pour A, C et M.....	94
4.6.6 Pas d'équivalence pour la somme de fractions A, C et M.....	96

4.7 Synthèse par élève.....	97
4.7.1 L'élève A.....	97
4.7.2 L'élève C.....	97
4.7.3 L'élève M.....	98
5 Discussions et perspectives	98
5.1 Retour sur les questions de recherche.....	98
5.1.1 Interprétations de la fraction et conceptions de l'équivalence de fractions (QR1)...	99
5.1.2 Dialectique contrat-milieu (QR2 et QR3).....	99
5.1.3 Apprentissages réalisés et obstacles : (QR4).....	103
5.2 Limites de l'étude.....	104
5.3 Perspectives.....	104
Références bibliographiques.....	106
Titre :	109
Résumé :	109

INTRODUCTION

En France, la première année du cycle 3 dans les programmes en vigueur (MEN, 2020) est une année charnière en numération puisque on y aborde les fractions simples, les fractions décimales puis les nombres décimaux. La littérature s'accorde sur différentes interprétations que peut prendre la fraction et sur l'importance de toutes les appréhender dans la scolarité d'un élève. Cependant, les avis divergent quant à la façon de l'aborder. Beaucoup de voix s'élèvent pour privilégier l'introduction de la fraction dans un cadre de mesure par son interprétation quotient et la relation multiplicative qui existe entre le numérateur et le dénominateur (Brousseau, 1987 ; Margolinas, 2020). Lorsqu'elle est abordée dans un cadre de partage, les programmes et certains auteurs (Briand, 2020) préconisent quant à eux une introduction qui privilégie l'interprétation partie-tout et opérateur. Les élèves partagent l'objet en autant de parts qu'indiquées par le dénominateur et prennent ensuite autant de parts qu'indiquées par le numérateur. Or, dans ce cas, la structure multiplicative de la fraction est souvent mise de côté (Houle et Giroux 2019) et les élèves restent dans un schéma additif (de Blois, 2017) De plus, Pantziara et Philippou (2012) soulignent que, lorsque la fraction est introduite de cette manière, certains élèves en difficulté restent dans la description de leurs actions. Cadez et al, (2018) ajoutent que pour ces élèves le dénominateur doit forcément être conforme à la partition proposée pour l'unité et que ces élèves se retrouvent en difficulté lors que la fraction n'est pas conforme à la partition proposée. Comment dès lors expliquer et éviter ces difficultés récurrentes pointées par certains auteurs lorsque la fraction est introduite de cette manière ? Pour répondre à cette question, nous centrons notre recherche sur une compétence particulière qui est la compréhension de l'équivalence entre des fractions simples et nous analysons, dans une classe de CM1, une séquence ordinaire sur l'apprentissage des fractions mobilisant un jeu de plateau, *l'Atelier des potions*¹. A l'aide des concepts de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) (Brousseau, 1998), nous effectuons une analyse qualitative des difficultés rencontrées et des apprentissages réalisés par des élèves repérés en difficulté et qui jouent à *l'Atelier des Potions*. Nous proposons un test en amont de la séquence pour sélectionner ces trois élèves. Ce test est comparé à un test final pour évaluer les apprentissages. Nous analysons également les interactions dans trois séances où l'équivalence entre fractions apparaît. Enfin, nous affinons l'analyse des procédures utilisées par ces trois élèves dans des entretiens individuels. Au delà de l'enrôlement de ces trois élèves dans le jeu de *l'Atelier des Potions*, nous montrons des points communs dans les apprentissages, et en particulier qu'ils

¹ <https://www.plaisir-maths.fr/>

réussissent tous à établir des égalités entre des fractions conformes à la partition proposée pour l'unité dans le cadre du jeu. Mais nous pointons également des difficultés persistantes comme le partage équitable, le langage symbolique et la formulation de la connaissance en jeu.

1 L'ÉQUIVALENCE DE FRACTIONS

1.1 Le contexte scientifique

1.1.1 *Les différentes interprétations de la fraction*

Dans le langage courant, une fraction est une partie d'un ensemble de choses concrètes ou abstraites. Cela peut aussi bien être une partie d'une unité de mesure « Je reviens dans une fraction de seconde », qu'une partie d'un ensemble de personnes : « une fraction pour une partie de l'opposition en politique ». Une fraction est une partie d'un tout, plus petite donc que le tout.

En mathématique, un nombre rationnel est la solution x de l'équation $a = bx$ où a et b sont des nombres entiers et où b est non nul. La fraction a/b est un moyen d'écrire ce nombre rationnel. $2a/2b$, $3a/3b$, $4a/4b$... en sont d'autres écritures.

Par exemple : $1/2$, $2/4$, $3/6$, ou $4/8$ sont des écritures de la solution de l'équation : $1 = 2x$

Un nombre entier, 2 par exemple, peut aussi s'écrire sous plusieurs formes fractionnaires : $4/2$, $8/4$, ou encore $20/10$.

Une des difficultés dans l'enseignement-apprentissage des fractions réside dans les différentes interprétations que l'on peut donner à la fraction. Dans ses travaux, Allard (2015) s'intéresse particulièrement à l'exposition des connaissances et au processus d'institutionnalisation des savoirs. Elle s'inspire de nombreux travaux anglo-saxons (Kieren, 1976, Behr et al., 1983, cités dans Allard, 2015) pour distinguer cinq interprétations, étroitement liées :

- la fraction « partie d'un tout », le tout étant une valeur discrète (un sac de billes) ou continue (une pizza) est associée à un partage en parts égales d'un représentant de l'unité. C'est un nombre « concret », en référence à un représentant de l'unité.

- la fraction « mesure » englobe la précédente et permet de donner la mesure d'une grandeur (longueur, aire, contenance, ...) Une fraction $1/n$ d'une unité de mesure donnée, n non nul, est d'abord isolée puis on peut exprimer une nouvelle mesure en fonction de celle-ci. Exemple, dans le contexte de mesure de longueurs, on peut reporter trois fois $1/4$ de l'unité choisie pour mesurer la longueur d'un segment. C'est « trois quarts » $3 \times 1/4 = 1/4 + 1/4 + 1/4$.

- la fraction « quotient » qui est un nombre : Exemple, $\frac{3}{4}$ c'est 3 divisé par 4. C'est le nombre qui multiplié par 4 donne 3. C'est « un quart de trois ». C'est aussi 0,75.

- la fraction « ratio », utilisée pour les comparaisons de quantité, sans référence à un tout et en lien étroit avec la proportionnalité. Exemple, « En France, une personne sur quatre est flexitarienne. »²

- la fraction « opérateur », qui est une transformation opérée sur une grandeur. Prendre $\frac{3}{4}$ d'une aire c'est la partager en quatre puis multiplier cette nouvelle part par trois. Dans un cadre de mesure, c'est un coefficient de proportionnalité, utilisé pour les réductions et agrandissements de figures par exemple.

De nombreux travaux montrent que la fraction partie-tout est incluse dans toutes les autres interprétations de la fraction (Kieren, 1976, Behr et al, 1983, cités dans Allard, 2015). Bien qu'insuffisante pour la suite de l'apprentissage des nombres rationnels, sa compréhension est indispensable.

On retrouve ces différentes interprétations dans la brochure de l'IREM de Rennes (Bellian et al., 2010) qui présente les deux cadres d'introduction possibles pour introduire les fractions à l'école, le cadre de partages et le cadre de mesures³ :

Les deux cadres d'introduction :

	Partages	Mesures
$a b^{\text{ièmes}}$	partage de l'unité	mesurage par fractionnement de l'unité
$a : b$	Partage de la totalité	mesurage par commensuration
aspect fonctionnel	Prendre les $a b^{\text{ièmes}}$ d'une grandeur	Proportionnalité entre les mesures

Remarques :

- pour une situation de partage les objets à partager sont des grandeurs continues (longueur, aire, ...) ; le quotient d'une grandeur par un nombre est une grandeur

- pour une situation de mesurage d'une grandeur continue il faut se donner un étalon (unité de mesure) et le résultat de la mesure est un nombre qui est approché dans le cadre du mesurage.

- pour une situation de proportionnalité entre deux grandeurs, le quotient de deux grandeurs de même nature est un nombre sans dimension (scalaire)

Figure 1 : cadres d'introduction (Bellian et al, 2010)

² FranceAgriMer 2020 <https://www.franceagrimer.fr/Actualite/Etablissement/2021/VEGETARIENS-ET-FLEXITARIENS-EN-FRANCE-EN-2020>

³ Le cadre graduation n'est pas retenu dans ce document car selon les auteurs il est suffisamment pris en compte dans les manuels. Il est indispensable et en lien étroit avec les activités de mesure de longueurs. La fraction y est un nombre qui représente à la fois un repère et une mesure.

Nous pensons pouvoir rapprocher les interprétations de la fraction cités plus haut (Allard, 2015) des cases du tableau ci-dessus de la manière suivante :

	Partages	Mesures
$a b^{\text{ièmes}}$	1 partage de l'unité	mesurage par fractionnement de l'unité 2
$a : b$	3 Partage de la totalité	4 mesurage par commensuration
aspect fonctionnel	Prendre les $a b^{\text{ièmes}}$ d'une 5 grandeur	Proportionnalité entre les 6 mesures

Figure 2 : liens interprétations de la fraction dans les cadres de partage et de mesure

Avec 1 : fraction partie-tout (incluse dans toutes les autres interprétations), 2 : fraction mesure, 3 et 4 : fraction quotient, 5 et 6 : fraction opérateur.

La fraction ratio est réservée au cycle 4.

1.1.2 Quelle introduction pour la fraction ?

Margolinas (2020) s'appuie sur les travaux de Brousseau (1987) sur les nombres rationnels et rappelle, la progression la plus courante pour introduire les fractions à l'école : on commence par introduire un fractionnement physique d'une unité de mesure, la plupart du temps implicite (cercle ou autre forme), cette unité étant déjà fractionnée. On nomme ensuite une part de ce fractionnement de l'unité ; par exemple en quatre parts égales, par la fraction, $1/4$, puis on mesure une longueur ou une aire en comptant le nombre de parts et en le mettant au numérateur de la fraction ; par exemple avec trois parts, cela donne la fraction $3/4$. Pour cette auteure, lorsqu'une telle progression est suivie, les « difficultés sérieuses commencent quand il faut représenter la fraction supérieure à l'unité. » (Margolinas, 2020). En effet, dans cette interprétation de la fraction, la partie du tout est forcément plus petite que le tout puisque ce tout est partagé en parts égales.⁴ Elle présente alors les travaux de Brousseau et Brousseau (1987), auxquels elle reste fidèle pour sa proposition didactique. Nous pouvons résumer sa présentation ainsi :

L'ingénierie didactique de Brousseau et Brousseau (1987), relatée dans les travaux de Margolinas (2020) contient 65 leçons sur les décimaux, en commençant leur enseignement par la partition de la pluralité dans un contexte de mesure de longueurs. Les élèves doivent

⁴ Nous renvoyons le lecteur à notre TER qui traitait de la décomposition de la fraction supérieure à l'unité dans le contexte du jeu de *l'Atelier des Potions* (Barque, 2022)

mesurer l'épaisseur d'une feuille de papier, qui sont, au vu du nombre important de feuilles, difficilement mesurables. L'épaisseur d'une feuille de papier a/b apparaît alors avec le couple de nombres entiers (a, b) où a est l'épaisseur du paquet de feuilles et b le nombre de feuilles du paquet. Cependant, cette ingénierie apparaît trop complexe et trop longue pour être appliquée en milieu ordinaire. Dès lors, Margolinas reprend ces travaux et propose une situation de référence, où la grandeur à partager n'est plus l'épaisseur du paquet de feuilles mais la longueur d'un segment, représentée par une bande de papier. L'élève devra partager cette bande en parts égales et mesurer la longueur de chaque part. Pour cela, les situations mobilisent un instrument de mesure, une règle où figurent uniquement les unités, et un dispositif de partage : le guide-âne, recommandé par les programmes 2016 (MEN, 2016a, 2016b). La mesure de la longueur d'une part apparaît avec le couple de nombres : longueur de la bande de papier et nombre de parts pour la partager. Dans un contexte de mesure de longueurs, c'est l'interprétation-quotient de la fraction qui est ici étudié, en utilisant la partition de la pluralité. La relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur apparaît clairement.

Briand (2020) présente quant à lui les deux façons d'appréhender la fraction a/b , par son aspect abîème ou par son aspect $a:b$, mais il préconise en CM1 de commencer par son aspect abîème. Ce qui correspond aux cases 1, 2 et 5 du tableau de la figure 2.

Une première façon d'aborder la fraction $3/4$ par exemple par son aspect abîème dans un contexte de mesure. C'est voir $3/4$ comme $1/4+1/4+1/4$, soit trois fois $1/4$, une conception proche du sens induit par la lecture à voix haute de la fraction, à savoir « trois quarts ».

Ce qui, dans le cadre de mesure de longueur, peut être représenté par le schéma :

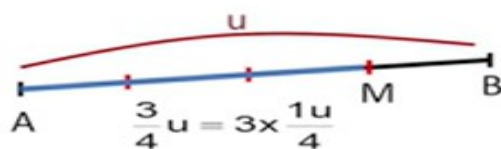


Figure 3: Partition de l'unité, une conception de la fraction $3/4$ à l'école primaire (Briand, 2020)

Mais l'auteur présente également une autre conception de la fractions $\frac{3}{4}$ dans un cadre de mesure, en proposant la fraction $\frac{3}{4}$ vue comme 3 unités partagées en 4, autrement dit comme « un quart de trois », ou comme le quotient de 3 divisé par 4, ce qui donne le schéma suivant :

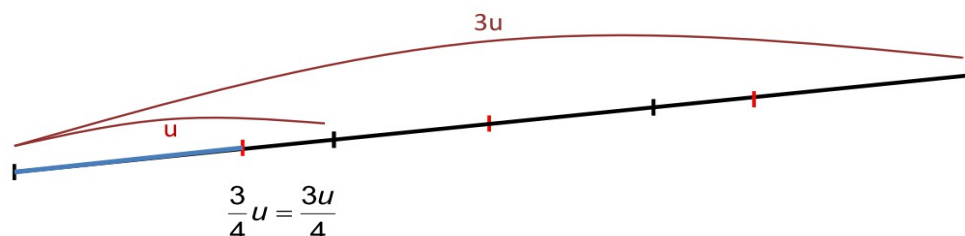


Figure 4: Partition de la pluralité, une conception de la fraction $\frac{3}{4}$ au collège (Briand, 2020)

Pour Briand, cette approche donne certes du sens à l'aspect-quotient de la fraction mais elle est moins accessible aux élèves de CM et est à aborder en 6^{ème}, dernière année du cycle 3.

1.1.3 « Congruency », « fraction conforme »

Dans le cadre de partage d'aires, correspondant à la case 5 de la figure 2 Figure 2 : liens interprétations de la fraction dans les cadres de partage et de mesure, « prendre les abième d'une grandeur », un exemple est présenté (Bellian et al., 2010) pour le partage de $\frac{2}{3}$.

→ Prendre les $\frac{2}{3}$ de B : B est partagé en 3 morceaux et l'on en prend 2.

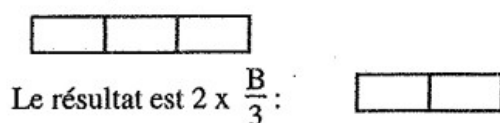


Figure 5 : cadre partages, aspect fonctionnel fraction opérateur (Bellian et al., 2010)

Si le partage est déjà effectué, pour De Blois (2017), une fois compris le rôle du dénominateur, qui indique en combien de parts égales est partagée la grandeur, (de quoi on parle ?) et le rôle du numérateur qui indique combien prendre de ces parts, (combien on en dénombre ?), les actions de l'élève sont uniquement de l'ordre du comptage : compter en

combien de parts égales est partagée l'unité puis compter combien prendre de ces parts. Elle préconise de faire effectuer par les élèves eux-mêmes des partages équitables.

De la même façon, Pantziara et Philippou (2012) pointent que beaucoup d'élèves, dans le but de justifier les rôles respectifs du dénominateur puis du numérateur, demeurent dans la description de leurs actions. Ils restent alors bloqués à ce stade procédural et les difficultés surviennent lorsque le dénominateur de la fraction ne correspond pas à la partition de l'unité. (Cadez et al, 2018). Ces auteurs utilisent le terme anglais « congruent » pour qualifier une fraction dont le dénominateur correspondrait à la partition proposée pour l'unité. Nous qualifierons dans ce cas la fraction de « conforme »⁵ à la partition proposée pour l'unité. Certains élèves pensent que si l'unité est fractionnée d'une certaine manière, une fraction de cette unité devra forcément avoir un dénominateur qui correspond à la partition proposée pour cette unité. Voici deux exemples de fractions « non conformes » à la partition proposée de l'unité.

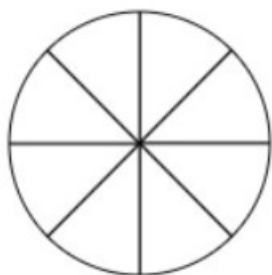


Figure 6 : colorier $1/4$, fraction non conforme car l'unité est fractionnée en un multiple du dénominateur



Figure 7 : colorier $2/4$, fraction non conforme car l'unité est fractionnée en un diviseur du dénominateur

Pour la figure 6, certains élèves échouent à colorier $1/4$ du disque car il est partagé en huit parts égales et non en quatre parts égales. Ces élèves ne voient pas l'équivalence entre $1/4$ et $2/8$. Pour la figure 7, certains élèves échouent à colorier $2/4$ du carré car il est partagé en deux parts égales et non en quatre parts égales. Ces élèves ne voient pas l'équivalence entre $2/4$ et $1/2$. Ici apparaît donc la compréhension de l'équivalence entre des fractions, compétence que nous présentons dans la partie suivante.

⁵ « Fraction conforme » sera la traduction de « congruent fraction » (Cadez et al., 2018) dans ce mémoire.

1.1.4 L'équivalence de fractions

Outre la difficulté liée à l'écriture fractionnaire nouvelle pour un nombre (deux nombres entiers séparés par la barre de fraction), les élèves découvrent que ce nombre rationnel bien que non encore nommé ainsi, peut être représenté par plusieurs écritures, alors que jusqu'à présent une quantité, ou le résultat d'une mesure, était représentée par une et une seule écriture d'un nombre entier.

Les différentes écritures possibles d'un nombre rationnel impliquent d'appréhender l'équivalence de ces écritures. Par exemple $1/3$ et $2/6$ sont deux écritures du même nombre.

Houle et Giroud (2019) rappellent que cette équivalence n'est pas qu'une relation d'égalité de quantités mais qu'elle est également une égalité de rapports. Elles soulignent qu'il existe deux relations multiplicatives dans une égalité de fractions. La première, qui définit le nombre rationnel, est celle qui existe entre le numérateur et le dénominateur et qui apparaît plus clairement lorsque l'on aborde la fraction par la fraction-quotient. Par exemple, pour l'égalité $1/3=2/6$, il existe une relation multiplicative entre le 1 et le 3 qui est la même qu'entre le 2 et le 6. La seconde est celle qui existe entre les deux fractions. Dans notre exemple, il existe une relation multiplicative entre les deux numérateurs, 2 est le double de 1, qui est la même qu'entre les deux dénominateurs, 6 est le double de 3. Ces auteures, dont l'étude se situe au Québec, constatent que l'équivalence de fractions est principalement associée à une égalité de quantités, au détriment d'une égalité de rapport, et que la structure multiplicative de la fraction est trop souvent évitée lors des comparaisons de fractions. Elles encouragent à travailler la structure multiplicative quelle que soit l'interprétation donnée à la fraction. Elles citent les travaux de Kieren pour qui « les connaissances sur les opérateurs scalaires, faisant appel aux expressions « fois plus » « fois moins », favorisent une première mise en relation multiplicative entre la partie et le tout, permettant notamment de reconnaître que $1/b$ est b fois plus petit que 1. » (Kieren, 1988, cité dans Houle et Giroux, 2019).

Une seconde recherche portant sur l'équivalence de fractions (Pedersen et Bjerre, 2021) distingue deux conceptions différentes de l'équivalence de fractions, chacune pouvant être étudiée dans chaque interprétation de la fraction.

1. Dans une unité définie et nommée, la relation entre a et b de la fraction a/b est équivalente à la relation entre $2a$ et $2b$ ou entre $1/2$ de a et $1/2$ de b . Ce que Pedersen et Bjerre (2021)

nomment « *unit equivalence* ». Typiquement, pour le partage d'une pizza par exemple, on a : $1/2$ pizza = $2/4$ de pizza. C'est ici une égalité de quantités en référence à une unité.

2. Dans la fraction a/b , la relation entre a et b est la même, quel que soit le représentant de cette fraction. Dans cette équivalence, l'unité n'est donc pas exprimée. Pedersen et Bjerre (2021) nomment cette équivalence « *proportionnal equivalence* ». Par exemple, si une personne mange la moitié d'une pizza, elle mange la même proportion de nourriture qu'une autre personne qui mange deux de ses quatre bananes. $1/2 = 2/4$.

Ces auteurs soulignent que, bien que l'équivalence de fractions soit le plus souvent abordée par sa conception *unit equivalence*, plus accessible que la *proportionnal equivalence*. ces deux conceptions sont à la fois complémentaires et indispensables à la compréhension de la notion d'équivalence de fractions. De plus, si une *unit equivalence* implique une *proportionnal equivalence* - la proportion d'une pizza est la même entre $1/2$ pizza et $2/4$ de cette pizza -, l'inverse n'est pas vrai. En effet, imaginons une personne qui mange la moitié d'une pizza et une autre personne qui mange deux de ses quatre bananes. Si on a bien la proportion qui est la même dans ce qui est mangé $1/2=2/4$ (proportionnal equivalence), on n'a pas $1/2$ pizza égale à $2/4$ de 4 bananes, soit 2 bananes. (unit equivalence)

1.2 Le contexte institutionnel

1.2.1 La fraction dans les Instructions Officielles

Les programmes actuels de cycle 3 font apparaître les fractions puis les nombres décimaux comme de « nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée. » (MEN, 2015). Les documents ressources pour accompagner l'enseignement-apprentissage des fractions et des décimaux sont nombreux en 2016. Les fractions sont tout d'abord « liées aux partages physiques dont elles rendent compte » et la lecture de la fraction à privilégier reste proche du sens partage de l'unité. « La fraction $2/3$ (lire -deux tiers-), rend compte d'un partage de l'unité en trois parts égales puis de la prise de deux de ces parts. » Il faut ensuite se détacher progressivement de ce partage à travers « des comparaisons, des rangements, des repérages sur une demi-droite graduée, des calculs, pour que la fraction prenne pleinement son statut de nombre ». (MEN, 2016a). En privilégiant l'oral avant l'écrit, les élèves de CM doivent travailler sur des fractions inférieures ou supérieures à 1, dans des

cadres de partage ou de mesure. Il est indiqué que la fraction a/b définie comme le nombre qui multiplié par b donne a est réservée à la dernière année de cycle 3.

1.2.2 L'équivalence de fractions dans les Instructions Officielles

Le moment et la façon d'aborder la compétence « Établir des équivalences (ou des égalités) entre des fractions usuelles (ou simples) » apparaissent relativement flous dans les Instructions officielles en vigueur (MEN, 2015 ; 2016 ; 2020).

Tout d'abord, dans la partie « Utiliser et représenter des fractions simples » des attendus de fin de cycle 3 (MEN, 2015), il est demandé en fin de cycle d' « établir des égalités entre des fractions simples ». Un exemple de situation y est donné où, sur une demi-droite graduée, l'élève « établit que $5/10=1/2$ ou $10/100=1/10$ etc ». Dans les ajustements des programmes de 2020 (MEN, 2020) le verbe « établir » est remplacé par « connaître », le qualificatif « simples » est remplacé par « usuelles » et l'égalité « $2/4=1/2$ » apparaît à la suite des deux autres exemples : « Connaître des égalités entre des fractions usuelles (exemples : $5/10 = 1/2$; $10/100 = 1/10$; $2/4 = 1/2$) ». Ensuite, alors qu'elle est absente des attendus de fin de CM1 (MEN 2016c) la compétence « Connaître des égalités entre des fractions usuelles (exemples : $5/10 = 1/2$; $10/100 = 1/10$; $2/4 = 1/2$) » figure dans les attendus de fin de CM2. (MEN 2016d). Enfin, dans la partie « fractions » des repères annuels de progression pour le cycle 3 (MEN, 2016e), cette compétence n'apparaît explicitement dans aucune des colonnes des trois années du cycle. Pour autant, dans la partie « nombres décimaux » de ce même document, il est demandé à l'élève de CM1 de « connaître des écritures décimales de fractions simples ($1/2=5/10=0,5$ ou $1/4=25/100=0,25$.) »

Les documents d'accompagnement des programmes (MEN, 2016a, 2016b, 2018) ne guident que relativement plus l'enseignant. Dans une partie « Découverte des fractions en commençant par les fractions simples » (MEN, 2016a), il est précisé qu'à ce stade de la progression la propriété « lorsqu'on divise ou lorsqu'on multiplie le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre, on obtient une fraction égale » n'est pas encore disponible pour valider le passage d'une fraction à une autre et que « l'oral est un terrain privilégié pour travailler l'égalité entre différentes écritures » (MEN, 2016a) Dans une annexe, il est proposé d'utiliser les réglettes Cuisenaire Figure 8 : Réglettes Cuisenaire, extrait de l'annexe 1 de Fractions et décimaux au cycle 3, (MEN, 2016b) afin de travailler différentes écritures fractionnaires d'un nombre.



Figure 8 : Règlettes Cuisenaire, extrait de l'annexe 1 de Fractions et décimaux au cycle 3, (MEN, 2016b)

Par exemple, une unité étant définie, il apparaît ici que la longueur de la réglette verte est égale à la longueur de trois réglettes blanches, un tiers est égal à un neuvième plus un neuvième plus un neuvième, est égal à trois neuvièmes.

1.3 La problématique

Alors que les Instructions officielles et certains auteurs (Briand, 2020) préconisent d'introduire la fraction par son aspect abîème, cas des cases 1, 2 et 5 de la figure 2, plusieurs auteurs soulignent des difficultés persistantes rencontrées par les élèves. Lorsque la fraction est introduite dans un cadre de partage par l'interprétation partie-tout et opérateur (cases 1 et 5), ils restent enfermés dans un schéma additif et dans des activités de comptage (De Blois, 2017). Cette auteure préconise de faire effectuer des partages équitables par les élèves eux-mêmes. En effet, lorsque la fraction n'est pas conforme à la partition proposée, ils ont du mal à repérer des équivalences de fractions (Cadez et al, 2018). Alors que Houle et Griroux (2019) proposent d'établir cette équivalence tout en restant dans un schéma multiplicatif, Pedersen et Bjerre (2021) présentent deux conceptions différentes de l'équivalence de fractions, *unit equivalence* et *proportionnal equivalence*.

En choisissant de nous intéresser à un jeu destiné à l'apprentissage des fractions, l'*Atelier des Potions*, nous nous demandons comment la fraction et l'équivalence entre deux fractions sont abordées, en tout début de cycle 3, dans une séquence ordinaire. Dans le cadre de ce jeu, nous cherchons à décrire et à expliquer les difficultés rencontrées et les apprentissages réalisés par certains élèves en difficulté pour établir une équivalence entre des fractions usuelles.

2 CADRE THÉORIQUE, QUESTIONS DE RECHERCHE ET MÉTHODOLOGIE

2.1 Théorie des Situations Didactiques et principaux concepts mobilisés

Nous plaçons notre recherche dans le cadre de la Théorie des situations didactiques (TSD) initiée au début des années 1970 par le didacticien des mathématiques Guy Brousseau. Elle est la théorisation d'un procédé ancien, à savoir la détermination d'une connaissance mathématique par un problème dont la connaissance est la solution. Nous lui empruntons principalement les concepts suivants pour notre analyse :

Un **obstacle** est un ensemble de difficultés de l'actant liées à sa conception d'une notion. Cette conception résiste au simple apprentissage d'une connaissance correcte et son repérage est indispensable pour accéder à un usage correct de la connaissance. Il peut avoir plusieurs origines : une origine ontogénétique, liée au développement propre de l'actant, une origine épistémologique, liée à la nature même de la connaissance et une origine didactique, liée au choix didactique de l'enseignant ou du système éducatif.

Constitué des objets physiques, culturels, sociaux, humains, avec lequel le sujet agit, le **milieu** est un système de conditions nécessaires à l'acquisition de connaissances. « Dans un système d'action, on appelle milieu tout ce qui agit sur l'élève ou/et ce sur quoi l'élève agit, relativement à un savoir » (Brousseau, 1998) . Dans une situation a-didactique, il est source de contradictions, de déséquilibres auxquels l'élève va s'adapter. Le milieu permet la validation de la réponse de l'élève par des rétroactions.

Le **contrat**, étroitement lié au milieu, est défini par « l'ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus de l'élève [...] et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant » (Brousseau, 1998). Il est le jeu de mini ruptures, de petits déséquilibres, qui sont essentiels pour apprendre et accéder à la connaissance. Il est le résultat de négociations, souvent implicites, entre les actants, à propos de la connaissance en jeu.

Élément important du contrat didactique, la **dévolution** est définie ainsi par Guy Brousseau dans son glossaire de la TSD:

« La dévolution consiste pour l'enseignant, non seulement, à proposer à l'élève une situation qui doit susciter chez lui une activité non convenue, mais aussi à faire en sorte qu'il se sente responsable de l'obtention du résultat proposé, et qu'il accepte l'idée que la solution ne dépend que de l'exercice des connaissances qu'il possède déjà. » (Brousseau, 1998)

Il ajoute que « la dévolution crée une responsabilité mais pas une culpabilité en cas d'échec. »

L'**institutionnalisation** est le pendant de la dévolution. C'est un processus par lequel le professeur transforme la connaissance en savoir qui sera « une référence pour une utilisation future, personnelle ou collective. »

2.2 Questions de recherche

QR1 : Quelle interprétation de la fraction et quelle conception de l'équivalence de fractions la partie de la séquence observée mobilisant le jeu *l'Atelier des potions* aborde-t-elle ?

QR2 : Comment les ruptures de contrat inhérentes à l'équivalence de fractions lors de l'utilisation du jeu de *l'Atelier des Potions* sont-elles négociées par les élèves en difficulté et par la professeure ?

QR3 : Comment les interactions avec le milieu permettent-elles aux élèves en difficulté jouant à *l'Atelier des Potions* d'appréhender l'équivalence de fractions ?

QR4 : Suite à cette séquence, quels sont les apprentissages réalisés par ces élèves et les obstacles persistants concernant l'équivalence de fractions ?

2.3 Méthodologie

2.3.1 *Le terrain*

Il est important de préciser que la chercheuse est également l'enseignante de la classe observée. Notre recherche s'ancre dans une classe de CM1 de 20 élèves, dans une école élémentaire d'une commune proche de Saint-Brieuc (22). Le milieu socio-culturel est moyen. Dans cette classe, qui a vécu un enseignement à distance au Cours Préparatoire (CP) en 2020, beaucoup d'élèves sont repérés en difficulté tant en mathématiques qu'en français. Trois élèves bénéficient d'un Projet d'Accueil Personnalisé (PAP), trois élèves d'un Plan Particulier de Réussite Éducative (PPRE). Afin d'analyser le parcours d'élèves en difficulté dans une séquence d'apprentissage sur les fractions simples, nous choisissons de suivre trois élèves. Ce nombre nous semble nécessaire pour envisager plusieurs profils d'élèves en difficulté, et suffisant pour analyser finement chacun de ces profils. Ces trois élèves, nommés A, C et M pour cette recherche, sont repérés suite à la passation d'un pré-test que nous présentons dans la partie suivante. Ce test est donné une première fois en amont de la séquence sur l'apprentissage des fractions simples et une seconde fois suite à cette séquence.

Par ailleurs, dans plusieurs domaines, ces trois élèves sont repérés par l'enseignante comme des élèves fragiles au niveau des apprentissages, susceptibles de rencontrer des difficultés lors de l'apprentissage des fractions.

2.3.2 Les tests

Un test (Annexe 3) est donné aux 20 élèves de la classe en amont de la séquence (pré-test) et en aval de la séquence (post-test). Ce test se compose de cinq exercices qui, à l'exception de l'exercice 5, contiennent différents items. Les réponses des élèves sont rentrées dans un tableau selon le code suivant : 0 pour une absence de réponse, 1 pour une réponse valide et 9 pour une réponse erronée. Pour chaque item, la première colonne présente le résultat du pré-test. La seconde colonne présente en rouge le résultat du post-test . Les résultats de chaque exercice apparaissent sur une feuille (Annexes 21 à 25). Nous avons catégorisé ces items selon la conformité de la fraction au fractionnement de l'unité proposée.

première catégorie : la fraction est conforme à la partition proposée pour l'unité

deuxième catégorie : la fraction n'est pas conforme à la partition proposée pour l'unité

Les résultats du post-test sont confrontés aux résultats du pré-test. Pour chacun des trois élèves observés, nous présentons les résultats sous la forme d'un diagramme afin de matérialiser les réussites et échecs en lien avec les catégories pré-citées. Nous analysons uniquement ces deux catégories dans les deux exercices 1 et 2 qui se situent dans un cadre de partage proche de celui de *l'Atelier des Potions*. Le premier item de l'exercice 4 est également analysé car il concerne l'équivalence de deux fractions usuelles hors de tout contexte. Nous n'abordons pas la compétence de décomposition de la fraction supérieure à l'unité.

Les apprentissages et difficultés persistantes de ces trois élèves sont ainsi analysés dans le contexte de partage d'aires des exercices 1, 2 et 4.

2.3.3 Les films

Les 10 séances de la séquence ont toutes été filmées à l'exception des séances 4 et 10 où le matériel d'enregistrement était défectueux ou absent.

Nous nous intéressons aux parcours de trois élèves jouant au jeu *l'Atelier des Potions* pendant cette séquence. Il s'agit donc de les filmer eux trois, mais également de filmer le groupe classe, afin d'avoir les mises en commun, les institutionnalisations, les échanges que l'ensemble des élèves peuvent avoir entre eux et avec la professeure à propos du savoir en jeu. Nous ne disposons que de deux caméras. Le choix est fait de mobiliser une caméra pour le

plan large. Au moins un des élèves repérés en difficulté est placé au premier plan de cette prise de vue. La caméra supplémentaire capte plus particulièrement les échanges des autres élèves repérés pour notre recherche. Cette seconde caméra est positionnée pour filmer en plongée la table sur laquelle est positionné le matériel disponible pour les élèves.

Le choix est fait de présenter et analyser des extraits des séances 5, 6 et 8 de la séquence qui mobilisent le jeu *l'Atelier des Potions*. La séance 7, centrée sur la compétence « décomposer une fraction supérieure à l'unité » n'est pas retenue car elle ne présente pas de passage où l'équivalence de fractions est abordée. Dans les séances 5, 6 et 8, nous sélectionnons les passages où l'équivalence de fractions est abordée par un élève ou par la professeure, puis nous transcrivons ces passages. Les actions des élèves sont décrites entre crochets dans la transcription. Nous précisons ici que nous nommons la partie raie « le kit raie », de même pour les trois autres animaux. Les pièces du jeu sont nommées par la fraction de l'animal-unité pré-découpé. Par exemple, pour prendre un quart de raie, l'élève peut prendre sur le plateau de jeu « un quart pré-découpé du kit raie » ou « deux huitièmes pré-découpés du kit raie ». Dans ces phases, nous repérons des épisodes où le savoir en jeu apparaît. Dans ces épisodes, nous analysons, avec les concepts de la TSD, les actions ainsi que les interactions langagières que peut avoir l'élève avec le milieu, avec ses pairs ou avec la professeure P, en lien avec l'équivalence de fractions.

2.3.4 Les entretiens individuels

Afin d'obtenir une analyse plus fine des procédures utilisées par les élèves en difficulté face à l'équivalence de fractions usuelles dans le contexte du jeu *l'Atelier des Potions*, nous proposons à ces trois élèves, suite à la séance 7, un entretien individuel sous la forme de jeu arrêté, c'est à dire que le meneur de l'entretien stoppe l'action de l'élève à plusieurs moments pour l'interroger sur ses actions. Il est à noter que ces entretiens sont conduits par la chercheuse, qui est également l'enseignante de ces trois élèves. Trois recettes de *l'Atelier des Potions*, que nous considérons représentatives du savoir en jeu, doivent être réalisées et l'élève est encouragé à expliciter son raisonnement. Ces entretiens sont enregistrés par une caméra orientée en plongée, dans un plan séquence. Ces enregistrements sont ensuite retranscrits dans leur totalité afin de mettre en évidence des éléments qui peuvent éclairer notre analyse. Nous codons les procédures mobilisées par chaque élève et pour chaque carte. Nous nous demandons s'il existe des similitudes ou au contraire des spécificités dans les procédures choisies qui expliqueraient les apprentissages ou les difficultés.

2.3.5 Synthèse de la méthodologie

Suivant le temps de cette séquence, nous pouvons présenter la méthodologie de recueil, de traitement et d'analyse de données dans le tableau ci-dessous :

Recueil	Pré-test	Films séance 5	Film séance 6	Films entretiens individuels	Film séance 8	Post-test
	groupe classe sur papier	- 1 caméra plan large groupe classe, dont M au premier plan. Plan séquence, - 1 caméra en plongée sur C plan séquence.	1 caméra en plongée sur A, C et M. Plan séquence.	1 caméra en plongée. Plan séquence	1 caméra en plongée sur A, C et M. Plan séquence.	groupe classe sur papier
Traitement	- codages des réponses, - catégorisation des items dans un tableau, - pourcentage pour la classe entière.	- sélection d'épisodes où le savoir en jeu apparaît, - transcription de ces épisodes.	sélection d'épisodes où le savoir en jeu apparaît, - transcription de ces épisodes.	- transcription des 3 entretiens au complet, - tableau des procédures utilisées pour réaliser les potions 11, 16 et 35	sélection d'épisodes où le savoir en jeu apparaît, - transcription de ces épisodes.	- codages des réponses dans le même tableau que le pré-test, - calcul des pourcentages pour la classe entière, - graphiques confrontation des résultats pour A, C et M
Analyse	- sélection de trois élèves : A, C et M	Recherche - de rupture de contrat, - d'interactions avec le milieu (manipulation, formulation, validation)	Recherche - de rupture de contrat, - d'interactions avec le milieu (manipulation, formulation, validation)	Comparaison des procédures utilisées par A, C et M pour établir des équivalences entre fractions conformes au plateau (carte 16) et entre fractions non conformes (carte 35)	Recherche - de modification de procédures suite à l'entretien individuel, - d'interactions avec le milieu. (manipulation, formulation, validation)	Analyse des apprentissages et difficultés persistantes pour A, C et M

Tableau 1 : synthèse de la méthodologie

3 LES POSSIBLES FACE À L'ÉQUIVALENCE DE FRACTIONS

Pour connaître quelle interprétation de la fraction et quelle conception de l'équivalence de fractions sont abordés dans cette séquence (QR1), des analyses a priori du jeu *l'Atelier des Potions* et de la séquence sont nécessaires. L'entretien individuel, effectué dans le contexte du jeu de *l'Atelier des Potions*, est également présenté et analysé en détails, afin d'anticiper les procédures et erreurs possibles de l'élève. Une analyse a priori du test proposé aux élèves avant et après la séquence nous permet d'anticiper les possibles réponses de l'élève face à l'équivalence de fractions hors du contexte du jeu de *l'Atelier des Potions*.

3.1 Le jeu *l'Atelier des Potions*

Cette partie présente le jeu de *l'Atelier des Potions* et en analyse deux composantes principales, en lien avec l'équivalence de fractions : le plateau de jeu et les cartes potions. Elle se termine par la présentation des travaux de Pelay (2019), concepteur de ce jeu.

3.1.1 Présentation du jeu

L'Atelier des Potions est un jeu de plateau, conçu de façon collaborative entre des enseignants et des chercheurs, dans le but de jouer et d'apprendre les fractions avec plaisir. Il est développé par l'association Plaisir Maths⁶. Ce groupe de chercheurs, enseignants et animateurs revendique une pédagogie basée sur le jeu et l'expérimentation.

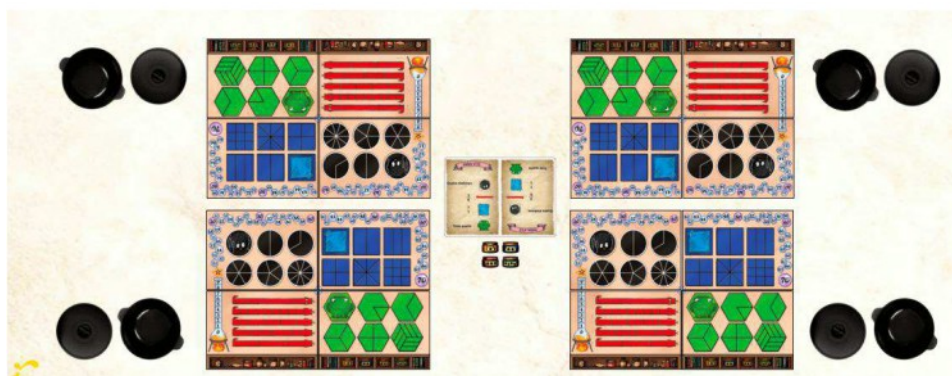


Figure 9 : installation du jeu pour quatre élèves en solo

⁶ <https://www.plaisir-maths.fr/>

L'objectif du jeu, pour les élèves qui deviennent un temps des apprentis sorciers, est de réaliser des recettes de Potions demandant une certaine quantité de chacun des 4 ingrédients proposés sur le plateau de jeu. Au fil des potions, ils deviennent des maîtres sorciers.

Le plateau de jeu est composé de la façon suivante :

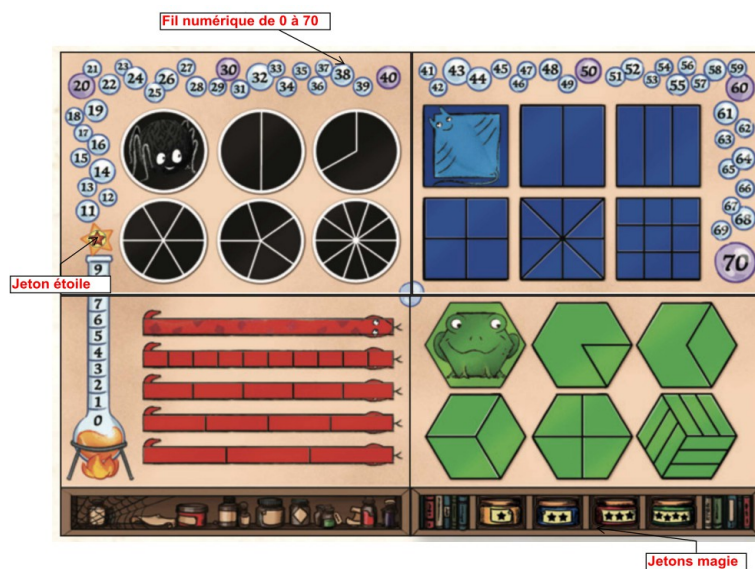


Figure 10 : Plateau de jeu aimanté

Les pièces des 6 araignées se présentent sous la forme d'un disque : 1 araignée entière, une araignée découpée en deux demis, une araignée en un tiers et deux tiers, une araignée en six sixièmes, une araignée en cinq cinquièmes, une araignée en dix dixièmes.

Les pièces des 6 raies se présentent sous la forme d'un carré : une raie entière, une raie découpée en deux demis, une raie en trois tiers, une raie en quatre quarts, une raie en huit huitièmes, une raie en neuf neuvièmes.

Les pièces des 6 grenouilles se présentent sous la forme d'un hexagone : une grenouille entière, une grenouille en un sixième et cinq sixièmes, une grenouille en un tiers et deux tiers, une grenouille en trois tiers, une grenouille en quatre quarts, une grenouille en neuf neuvièmes.

Les pièces des 5 serpents se présentent sous la forme d'un rectangle : un serpent entier, un serpent en dix dixièmes, un serpent en cinq cinquièmes, un serpent en quatre quarts, un serpent en trois tiers.

Le fil numérique (Figure 10), sous la forme de bulles nombres, permet au cours de la partie le déplacement du jeton étoile (Figure 10). La position de départ est fixée sur la bulle 10 et le

déplacement se fait en fonction des points de magie remportés ou perdus. Le maximum de points est fixé à 70. Le joueur qui atteint le premier ce score a gagné la partie.

Les points de magie, de 1 à 4, dépendent du jeton magie (Figure 10) misé par le joueur et déposé dans son chaudron. Il fera avancer son jeton étoile d'autant de points sur le fil numérique si sa réponse est valide, ou reculer son jeton étoile d'autant de points si sa réponse est invalide.

Les joueurs vont devoir retourner des cartes potions numérotées de 1 à 64 (Annexe 2) avec la même potion écrite dans les deux sens pour être lisible de part et d'autre d'une table. Exemple pour la potion 12 :

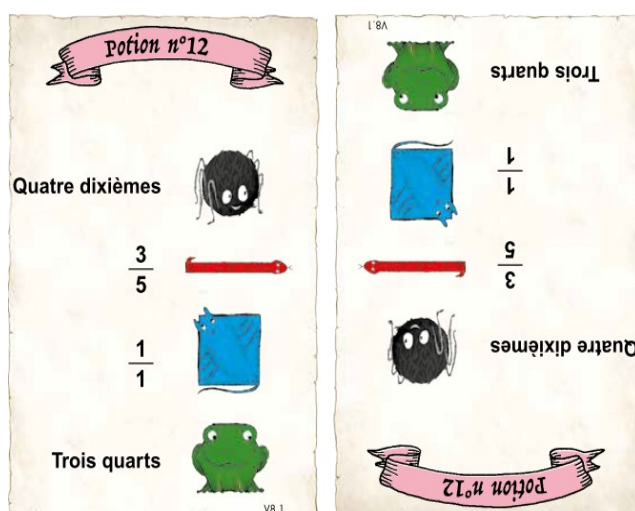


Figure 11 : Carte-potion n°12

Pour réaliser la recette de la carte, chaque joueur dépose les ingrédients dans son chaudron :



Figure 12 : le chaudron et son couvercle

Pour valider sa recette et la comparer aux autres, un grimoire de solutions est proposé. Le joueur dispose les pièces du jeu qu'il a choisies pour chaque ingrédient demandé. Si celles-ci

recouvrent exactement, ni trop ni trop peu, la surface de la solution du grimoire, sa réponse est validée.

Exemple pour la potion n°12 :

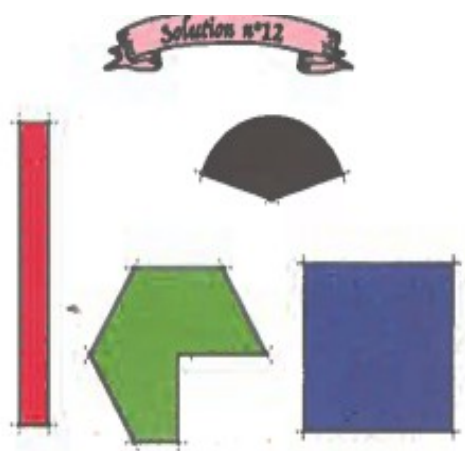


Figure 13 : Réponse attendue pour la potion n°12

Une fois sorties de leur chaudron, les pièces du joueur doivent recouvrir exactement l'ensemble de ces surfaces. Il existe parfois plusieurs solutions, ce qui permet d'aborder l'équivalence des fractions.

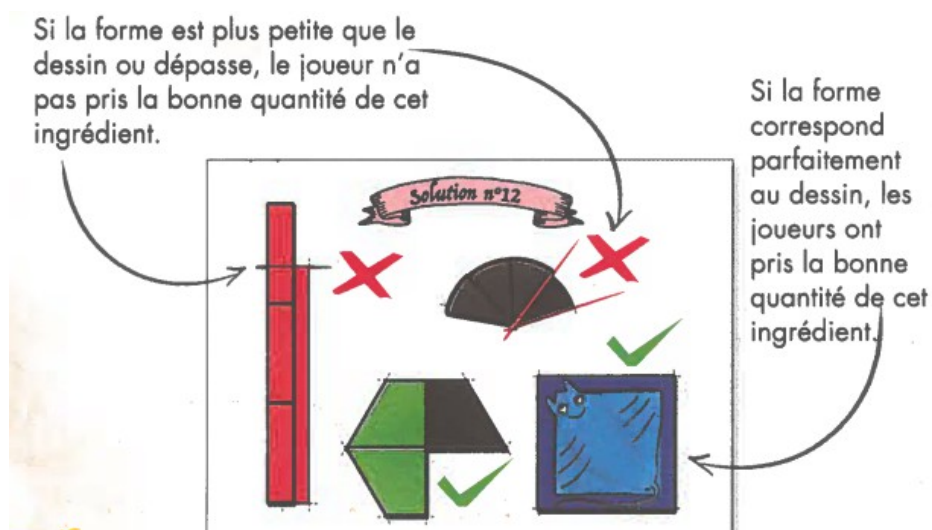


Figure 14 : Extrait du livret de prise en main de L'Atelier des Potions

L'enchaînement des mécanismes d'actions à réaliser par les joueurs, en autonomie, est le suivant : retourner la « carte consigne » au centre de la table, réaliser tous en même temps le défi de manipulation donné par la carte, miser des points grâce au jeton magie, vérifier avec

les paires sur le grimoire, gagner (ou perdre) des points magie et donc avancer ou reculer sur le fil numérique, passer au tour suivant.

Les modalités de mises en œuvre sont nombreuses et volontairement laissées au soin de l'enseignant ou de l'équipe enseignante : en dehors des séances de jeu décrites ci-dessus, d'autres séances, des « exercices de jeu » (Winder, 2017), c'est-à-dire des exercices décrochés travaillant des points particuliers en dehors du contexte de jeu, par exemple le lexique des fractions ou la décomposition de la fraction, sont détaillées dans le dossier d'accompagnement⁷. Une séance en particulier⁸, conseillée pour la fin du cycle 3, aborde la partition de la pluralité et donc l'interprétation quotient de la fraction. La progression sur le cycle 3 et 4 est laissée à l'appréciation des équipes enseignantes. Les modalités de jeu sont nombreuses : élève seul, pour l'entraînement par exemple (Figure 9), mais aussi en binôme (Figure 15) ou en équipe (Figure 16) pour favoriser les interactions entre élèves lors de la prise de décision. L'enseignant choisit les cartes qu'il propose à ses élèves. Selon la carte retournée, ces derniers doivent lire et comprendre des fractions en lettres ou en chiffres, comprendre qu'une fraction peut être égale ou supérieure à 1, comprendre et utiliser les fractions équivalentes, additionner des fractions.

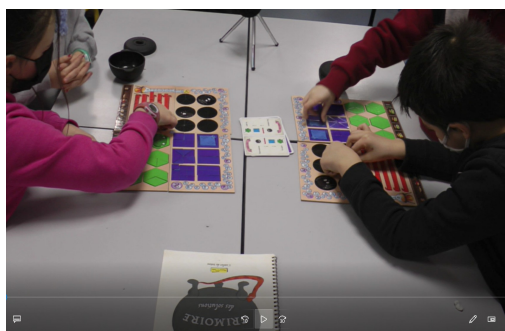


Figure 15 : en binôme

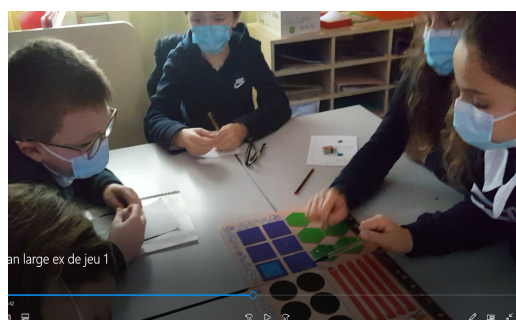


Figure 16 : en équipe de 5

3.1.2 Analyse du plateau

Pour faciliter la lecture de ce mémoire, le plateau de jeu est reproduit en annexe 1.

Cas du kit serpents et du kit raies

Ces deux kits sont composés d'ingrédients pré-découpés en parts égales. Le partage équitable n'est donc jamais à effectuer pour ces deux ingrédients. Une équivalence entre deux fractions peut être trouvée en superposant des pièces. C'est une égalité de quantité qui est alors obtenue.

⁷ Plaisir Maths propose avec le jeu *L'Atelier des Potions* un dossier d'accompagnement très détaillé.

⁸ « Chacun sa part » p.75 de ce dossier.

Cas du kit araignées et du kit grenouilles

- Une grenouille est pré-découpée en deux parties non égales : $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Une autre grenouille est partagée en trois parties égales, 3 fois $\frac{1}{3}$. L'élève peut donc superposer les deux pièces identiques pour trouver leur valeur : $\frac{1}{3}$. Une difficulté peut être de prendre une seule pièce pour la pièce égale à $\frac{2}{3}$ de grenouille.

Une grenouille est découpée en deux parties non égales : $\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{6}$. Aucune autre grenouille n'est pré-découpée en six parties égales. L'élève peut voir la surface de la pièce $\frac{1}{6}$ comme la moitié de $\frac{1}{3}$ et/ou reporter 6 fois cette pièce sur la grenouille pour valider son hypothèse.

- Une araignée est découpée en deux parties non égales : $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, sans autre araignée partagée en trois parties égales. Pour identifier nommer cette pièce, l'élève peut reporter deux fois le tiers sur la pièce $\frac{2}{3}$ ou superposer la pièce $\frac{1}{3}$ sur deux pièces $\frac{1}{6}$ pour en conclure que c'est un tiers.

3.1.3 Analyse des cartes

Le tableau des valeurs numériques des cartes potions de l'*Atelier des Potions* figure dans le dossier d'accompagnement⁹ et en annexe 2. Les cartes sont regroupées ainsi en fonction des compétences visées :

- cartes de base, cartes 1 à 19
- fractions supérieures à 1, cartes 20 à 34
- équivalence de fractions, cartes 35 à 49
- sommes de fractions, cartes 50 à 64

Fractions conformes en vert :

L'équivalence de fractions peut être obtenue entre des fractions dont les dénominateurs correspondent tous les deux à des partitions de l'ingrédient proposées sur le kit. Nous avons entouré en vert dans l'annexe 2 ces fractions que nous nommons **conformes** à un pré-découpage en parts égales pour l'ingrédient demandé. Dans ce cas, l'élève superpose des surfaces sur le kit de l'ingrédient demandé puis valide sur le grimoire des solutions.

Par exemple, pour la potion 42, on demande $\frac{4}{8}$ de raie, on peut prendre $\frac{1}{2}$ raie car, par superposition sur le kit, on constate que $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

⁹ <https://www.plaisir-maths.fr/>

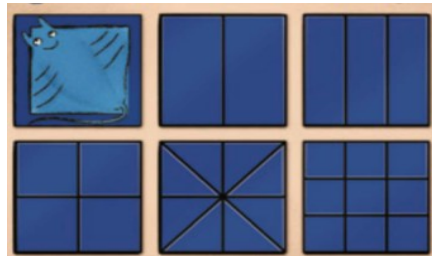


Figure 17 : kit raie

Fractions non conformes en rouge

L'équivalence de fractions peut être obtenue entre des fractions dont un des dénominateurs ne correspond pas à une partition de l'ingrédient proposée sur le kit. Nous avons entouré en rouge dans l'annexe2 les fractions que nous nommons non conformes à un pré-découpage en parts égales de l'ingrédient demandé. Cela demande une anticipation de l'équivalence, par un partage équitable mental, éventuellement accompagné de la main, une éventuelle vérification sur le kit animal. Cette anticipation sera validée dans un second temps sur le grimoire.

Pour la potion 36, par exemple, on demande $1/2$ serpent, le serpent n'est pas partagé en deux parts égales. Il faut prendre $2/4$ de serpent ou $5/10$ de serpent.



Figure 18 : kit serpent

Que la fraction soit conforme ou non conforme, l'équivalence de fractions peut être obtenue en regardant un autre ingrédient.

Pour la carte 35 par exemple, on demande $1/2$ grenouille. On voit sur le kit-raie, que $1/2$ raie = $2/4$ de raie. On peut en déduire que pour obtenir $1/2$ grenouille, il faut prendre $2/4$ de grenouille. Ce raisonnement inductif nécessite de voir que l'égalité de rapports pour une unité donnée implique la même égalité de rapports pour une autre unité, ou que l'égalité de quantité est valable quelle que soit l'unité.

Cartes de base, cartes 1 à 19

Pour les cartes de base 1 à 19, le dénominateur de chaque fraction correspond à une partition de l'ingrédient demandé. L'élève repère dans chaque unité, araignée, raie, grenouille et

serpent, l'animal qui est pré-découpé en autant de parts égales que le dénominateur de la fraction demandée. Il compte ensuite le nombre de parts à prendre sur le kit et les dépose dans son chaudron magique. Ces cartes ne visent pas, a priori, à travailler l'équivalence de fractions.

Fractions supérieures à 1, cartes 20 à 34
et Sommes de fractions, cartes 50 à 64

Dans les cartes 20 à 34 puis 50 à 64, l'équivalence de fractions apparaît principalement sous l'angle de l'unité égale à la somme de ses parties égales, $1 = n/n$, avec n un entier naturel non nul. Elle ne relève pas d'une équivalence entre deux écritures fractionnaires mais sa compréhension est fondamentale pour la compréhension de l'égalité entre fractions, et en particulier pour les élèves en difficulté.

Équivalence de fractions, cartes 35 à 49

Les valeurs numériques des cartes 35 à 49 permettent spécifiquement de travailler l'équivalence de certaines fractions. Nous notons en gras dans le tableau ci-dessous (Tableau 2 : équivalences de fractions avec les cartes 35 à 49) les fractions de ces cartes, dont le dénominateur ne correspond pas à un pré-découpage en parts égales de l'ingrédient demandé. (fractions non conformes en rouge en annexe 2)

	<u>Kit-araignée :</u>	<u>Kit-raie :</u>	<u>Kit-grenouille :</u>	<u>Kit serpent :</u>
Équivalence recherchée	$3/9 = 1/3$ (cartes 38* et 39*) $2/4 = 1/2$ (carte 42)	$2/6 = 1/3$ (carte 37) $5/10 = 1/2$ (carte 43) $3/6 = 1/2$ (carte 46)	$1/2 = 2/4$ (cartes 35 et 48) $2/8 = 1/4$ (carte 40) $4/6 = 2/3$ (carte 44**)	$1/2 = 2/4$ (cartes 36 et 49) $2/6 = 1/3$ (carte 41) $6/9 = 2/3$ (carte 45) $6/8 = 3/4$ (carte 47)
*Aucune araignée n'est partagée en trois parties égales mais une araignée est partagée en deux parties : un tiers et deux tiers. Ces cartes sont donc particulièrement difficiles.				
**Aucune grenouille n'est partagée en six parties égales mais une grenouille est partagée en deux parties : un sixième et cinq sixièmes. Une autre grenouille est partagée en deux parties : un tiers et deux tiers. L'élève peut donc prendre ce dernier morceau de grenouille.				

Tableau 2 : équivalences de fractions avec les cartes 35 à 49

Les stratégies possibles pour la manipulation sont :

- Faire mentalement un partage pour trouver une pièce et pour établir des équivalences dans l'unité
- Faire référence à l'équivalence constatée dans une autre unité, pour décontextualiser puis recontextualiser dans l'unité demandée.

Il est important de noter ici que l'égalité $1/2=2/4$ ne peut pas être vue entre unités différentes car la surface d'« une demi-araignée » par exemple n'est pas égale à la surface de « deux quarts de grenouille ». La *proportionnal equivalence* serait ici : quand on prend $1/2$ araignée ou $2/4$ de grenouille, les pièces sont différentes et les surfaces sont différentes, mais on a pris la même proportion d'ingrédient dans chaque cas. » Mais comme le précisent Pedersen et Bjerre (2021), la *Proportionnal equivalence* n'implique pas la *Unit equivalence*. Ici, si l'égalité est vérifiée dans une unité, pour un animal, alors elle est vraie pour une autre unité, pour un autre animal, ce qui correspond davantage à une *unit equivalence*, vraie quelle que soit l'unité. La validation de la réponse s'effectue par une action : l'élève doit superposer la surface qu'il propose sur la surface du grimoire des solutions. Il doit comparer ces deux surfaces. Sa solution peut être inférieure ou supérieure, et dans ce cas sa réponse est fautive. Si les surfaces se superposent exactement, sa réponse est correcte. Deux surfaces sont égales si elles se superposent exactement. Elles expriment alors la même quantité et l'élève doit en déduire une égalité entre la fraction écrite sur la carte et celle qui correspond à ce qu'il a pris sur le kit.

Retour sur les cartes de base 16 à 19

Il est possible d'envisager l'équivalence de fractions avec les cartes de base 16 à 19.

Dans ces cartes, chaque fraction demandée a un dénominateur qui correspond à une partition de l'ingrédient demandé (fractions conformes en vert en annexe 2). La consigne peut être de déposer le moins de pièces possibles dans le chaudron magique et de donner des points de magie supplémentaire pour l'équipe qui réussit ce challenge. Pour chaque ingrédient, nous présentons en gras dans le tableau ci-dessous (Tableau 3 : équivalences de fractions avec les cartes 16 à 19) la quantité demandée sur la carte et l'équivalence que l'élève peut en déduire.

	<u>Kit-araignée :</u>	<u>Kit-raie :</u>	<u>Kit-grenouille :</u>	<u>Kit serpent :</u>
Équivalence possible si le meneur du jeu demande le moins de pièces possibles (réduction de la fraction)	Dans 3 dixièmes , $2/10 = 1/5$ (carte 18) Dans trois sixièmes $2/6 = 1/3^*$ (carte 19)	$2/8 = 1/4$ (carte 16) Dans 4/9 , $3/9 = 1/3$ (carte 17)	$3/9 = 1/3$ (carte 16)	Dans trois dixièmes $2/10 = 1/5$ (carte 16)
*Aucune araignée n'est partagée en trois parties égales. Une araignée est partagée en deux parties non égales : un tiers et deux tiers. Cette carte est donc difficile.				

Tableau 3 : équivalences de fractions avec les cartes 16 à 19

La stratégie possible pour la manipulation est de superposer des pièces existantes sur le kit de l'animal pour réduire le nombre de pièces, par exemple il peut superposer $\frac{1}{5}$ de serpent sur $\frac{2}{10}$ de serpent pour la carte 16, et établir ainsi des équivalences dans l'unité.

La validation se fait alors en superposant les pièces choisies sur le grimoire des solutions.

3.1.4 Travaux sur le jeu *L'Atelier des Potions*

Nicolas Pelay (2011), concepteur et coordinateur du jeu *L'Atelier des Potions*, étudie depuis plus de 10 ans les liens entre jeu et apprentissages mathématiques. Il affirme qu'il existe une « dimension ludique intrinsèquement liée à la dimension didactique » (Pelay, 2011) et s'appuie sur la Théorie des situations didactiques de Brousseau (1998) pour souligner les particularités du jeu *L'Atelier des Potions*. La dimension ludique du jeu *L'Atelier des Potions* devient pour lui un « moteur du processus de dévolution » : pour gagner des points de magie et progresser dans le jeu, les joueurs doivent surmonter les difficultés didactiques rencontrées. De plus, le plateau du jeu représente un « élément structurant du milieu » : le découpage des pièces du plateau est différent selon l'ingrédient proposé et le choix de ces pièces va jouer un rôle déterminant, en particulier lors des équivalences de fractions. De plus, les choix présents sur les cartes des potions à confectionner offrent des variables didactiques qui permettent de cibler les apprentissages : fractions inférieures à un, fractions supérieures à un, équivalence de fractions, somme de fractions. Enfin, « le grimoire présente une rétro-action du milieu qui permet la validation » en recouvrant exactement la solution proposée dans le grimoire avec les pièces du chaudron.

Il crée le concept de « *contrat didactique et ludique* » défini comme « l'ensemble des règles et comportements implicites et explicites entre un « éducateur » et un ou plusieurs participants, dans un projet qui lie jeu et apprentissage, dans un contexte donné » (Pelay, 2011). Les travaux de Pelay et Boissière (2018) portent sur une catégorisation des différents contrats didactiques et ludiques. Un tel contrat apparaît comme « *équilibré* lorsque les enjeux didactiques et les enjeux ludiques parviennent à s'équilibrer sans rupture de contrat » (Pelay, 2019).

3.2 Analyse a priori de la séquence

Nous présentons et analysons dans cette partie la séquence observée. C'est une séquence ordinaire sur l'apprentissage des fractions qui se déroule en période 2 de l'année de CM1. En voici tout d'abord une synthèse :

Séance N°	Cadres	Objectif	Modalité	Ressource
1	Mesure de longueurs	Comprendre la nécessité d'utiliser et de nommer des nombres inférieurs à l'unité pour mesurer des longueurs et tracer des segments.	En groupe classe Par 2 ou 3	<i>Atelier des Potions</i> (kit serpent uniquement) Autre.
2	Mesure de longueurs	S'approprier le codage fractionnaire lors du partage d'une unité de longueur. Utiliser ce codage pour résoudre un problème de mesurage. Comprendre l'équivalence de certaines fractions usuelles, contexte mesure de longueurs.	En groupe classe Par 2 ou 3	<i>Atelier des Potions</i> (kit serpent uniquement) Autre.
3	Droite graduée	Passer de la mesure de longueur à la distance à l'origine sur une demi-droite graduée, exprimée sous la forme d'une fraction. Placer le point correspondant à cette fraction sur la droite graduée.	En groupe classe Par 2 ou 3	<i>Atelier des Potions</i> (kit serpent uniquement) Autre.
4	Droite graduée	Entraînement placer et repérer sur droite graduée	En groupe classe	Autre
5	Partage d'aires	Découverte et appropriation du jeu l' <i>Atelier des Potions</i>	En groupe classe Par 2 ou 3	<i>Atelier des Potions</i>
6	Partage d'aires	<u>Atelier 1</u> : calcul mental (Mathador) <u>Atelier 2</u> : partage d'aires (cartes à pinces pizzas 1) <u>Atelier 3</u> : différentes représentations des fractions (dominos des fractions) <u>Atelier 4 dirigé</u> : Comprendre l'équivalence de certaines fractions usuelles, dans le contexte Adp	En ateliers Groupes de 5	Autre <i>Atelier des Potions</i>
7	Partage d'aires	Décomposer une fraction supérieure à 1 en somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.	Groupe classe	<i>Atelier des Potions</i>
8	Partage d'aires	<u>Atelier 1</u> : calcul mental (Mathador) <u>Atelier 2</u> : partage d'aires (cartes à pinces pizzas 2) <u>Atelier 3</u> : décomposition fractions supérieures à 1 (Adp) <u>Atelier 4</u> : décomposition fractions supérieures à 1 (Adp)	En ateliers Groupes de 5	Autre <i>Atelier des Potions</i>
9	Droite graduée	Placer et repérer des fractions sur la demi-droite graduée. Décomposer des fractions supérieures à 1. Comprendre l'équivalence de certaines fractions usuelles dans le contexte de la droite graduée.	En groupe classe	Autre
10	Droite graduée	Utiliser la droite graduée pour comparer, ranger et encadrer des fractions simples	En groupe classe	Autre

Tableau 4 : synthèse de la séquence

Cette séquence, composée de 10 séances, utilise le jeu l'*Atelier des Potions*. L'objectif est d'aborder les fractions simples au début du cycle 3, dans trois cadres différents, celui de

mesure de longueurs, de partage d'aires et de demi-droite graduée. On observe que certaines séances de la séquence sont centrées sur l'équivalence de fractions dans ces trois cadres.

Les quatre premières séances se placent dans le cadre de mesure de longueurs, associé au cadre de la demi-droite graduée. Un même matériel, le kit serpent (Figure 19 : kit serpent) qui est un des quatre ingrédients à manipuler dans le contexte de jeu de *L'Atelier des Potions*. est utilisé ici comme instrument de mesure. L'unité pour la mesure de longueur est donc la longueur d'un serpent.



Figure 19 : kit serpent

Les quatre séances suivantes, de la 5^{ème} à la 8^{ème} séance, se placent dans un cadre de partage et utilisent le jeu *L'Atelier des Potions*. La séance 5 consiste à alterner des exercices de jeux où les élèves, par équipe 2 ou 3 joueurs, découvrent le jeu et préparent des potions magiques dont les recettes sont projetées au tableau. Chaque solution est ensuite validée sur le grimoire et discutée lors de mise en commun. Les élèves en binôme sont en atelier dirigé lors de la séance 6 et jouent à *L'Atelier des Potions*. L'objectif de cette séance est l'entraînement à l'équivalence de fractions avec les cartes 35 à 49 pour les groupes autonomes et une remédiation pour les élèves en difficulté en atelier dirigé par l'enseignante et avec les cartes 16 à 19. La séance 8, centrée sur la décomposition de la fraction supérieure à l'unité, est composée de deux phases. Les élèves jouent d'abord, en binôme, à *L'Atelier des Potions* avec des cartes sélectionnées par la professeure. Suite à cette phase de jeu, une institutionnalisation sur la décomposition de la fraction supérieure à un a lieu au sein du groupe classe. Les affiches sont complétées et une trace écrite est donnée. L'entraînement individuel pour décomposer la fraction supérieure à un a lieu lors du second temps de la séance 8 où les élèves disposent dans un premier temps du plateau de jeu sous les yeux. Le matériel est ensuite enlevé pour favoriser les représentations mentales. Les séances 9 et 10 qui suivent

portent sur le repérage et le placement de fractions, inférieures égales ou supérieures à un, sur une droite graduée. Enfin, la résolution de problèmes de la vie quotidienne faisant appel aux fractions est abordée dans la séance 10 et exploitée tout au long des ateliers Résolution de problèmes.

La consolidation des connaissances s'effectue au cours des activités suivantes :

- le *Message magique*¹⁰,
- les ateliers mathématiques dirigés ou non-dirigés, avec ou sans matériel : *L'Atelier des Potions*, le *Bingo des fractions*, les *Dominos des fractions*, les *cartes à pincés*, *Mathenvie*..
- les activités d'accompagnement du manuel Ermel sur ardoise (ERMEL, 2001, p.418).

Suite au post test, les prolongements sont : additionner et soustraire des fractions simples, utiliser et comprendre les fractions décimales, les placer sur la demi-droite graduée, passer de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale, représenter, comprendre et utiliser les nombres décimaux.

3.3 Analyse a priori des tests

Le test proposé à tous les élèves de la classe, au complet en annexe 3, se compose de plusieurs exercices et aborde le cadre de partage pour les exercices 1 et 2, celui de la mesure de longueur et de la droite graduée pour l'exercice 3. Le quatrième exercice propose des tâches décontextualisées : et le cinquième est un problème de partage. Les élèves de CM1 rencontrent a priori pour la première fois l'écriture fractionnaire. Nous présentons et analysons les items qui sont en lien avec nos questions de recherche.

3.3.1 Exercice 1

Le premier exercice se situe dans un contexte de partage d'aires, où la tâche consiste à colorier des fractions de surfaces données. Il est précisé à l'oral que les réponses pour le coloriage peuvent se faire à main levée. Les fractions sont écrites en chiffres et sont conformes ou pas au découpage proposé pour l'unité.

1.a (conforme, disque)

¹⁰« Le message magique », p 24 du dossier d'accompagnement scolaire de *L'Atelier des Potions*.

L'élève doit lire le dénominateur en premier, ici 4, en déduire que l'on doit partager l'unité en quatre parties égales, identifier le quart comme la nouvelle unité de comptage, colorier autant de quarts que l'indique le numérateur, ici une part.

1.b (conforme, carré)

L'élève doit lire le dénominateur en premier, ici 4, en déduire que l'on doit partager l'unité en quatre parties égales, identifier le quart comme la nouvelle unité de comptage, colorier autant de quarts que l'indique le numérateur, ici trois quarts. A noter que peu importe les parts choisies pour le coloriage.

1.c (non conforme, disque)

L'unité est partagée en plus de parties égales que ne l'indique le dénominateur.

L'élève peut faire abstraction de certaines *démarcations*, partager mentalement en quatre parties égales et colorier un quart, ou connaître certaines équivalences de fractions, ici $1/4=2/8$ et colorier deux parts représentées.

1.d (non conforme, carré)

L'unité est partagée en plus de parties égales que ne l'indique le dénominateur. Il est à noter que le partage en huitièmes est effectué sous la forme d'un quadrillage.

L'élève peut faire abstraction de certaines *démarcations* et colorier trois quarts, ou connaître certaines équivalences de fractions, ici $1/4=2/8$ donc $3/4 = 6/8$, et colorier six parts représentées.

1.e (non conforme, disque)

L'unité est partagée en moins de parties égales que ne l'indique le dénominateur.

L'élève doit tracer les démarcations, en totalité ou uniquement celles nécessaire pour la fraction demandée. Il est à noter que le centre du cercle n'est pas représenté.

1.f (non conforme, carré)

L'unité est partagée en moins de parties égales que ne l'indique le dénominateur.

L'élève peut tracer les démarcations pour partager l'unité en quatre parties égales puis colorier deux parts, ou connaître certaines équivalences de fractions, ici $2/4 = 1/2$ et colorier une part représentée.

3.3.2 Exercice 2

Dans un contexte de partage d'aires, la tâche du second exercice consiste à observer une partie coloriée de figure et à exprimer son aire sous la forme d'une fraction de l'unité. Les démarcations pour partager l'unité en parties égales apparaissent ou n'apparaissent pas.

2.a (fractionnement de l'unité apparent, bande rectangulaire)

L'élève peut compter le nombre de parts égales, en déduire le dénominateur de la fraction, puis compter combien de parts sont coloriées et en déduire le numérateur de la fraction.

2.b (fractionnement de l'unité apparent, quadrillage)

Un fractionnement de l'unité apparaît. La fraction exprimée par l'élève peut correspondre ou pas au partage équitable proposé pour l'unité. L'élève peut écrire $\frac{4}{8}$ (correspondance) et/ou écrire $\frac{2}{4}$ (trop de parts) et/ou $\frac{1}{2}$ (trop de parts).

2.c (fractionnement de l'unité apparent, cercle)

L'élève peut compter le nombre de parts égales, en déduire le dénominateur de la fraction, puis compter combien de parts sont coloriées et en déduire le numérateur de la fraction.

2.f (cercle), 2.g (carré), 2.h (bande) (fractionnement de l'unité non apparent)

Une partie de l'unité est coloriée. Le fractionnement de l'unité n'apparaît pas. Pour écrire la fraction de la surface représentée par l'aire coloriée, l'élève peut dessiner ou imaginer un partage de l'unité en parts égales.

3.3.3 Exercice 4. item 4.a

Quatre fractions sont proposées. La première et la dernière sont équivalentes. Les valeurs numériques des numérateurs et dénominateurs sont très faibles (de 1 à 4). L'inversion du numérateur et du dénominateur des deux dernières fractions risque de piéger certains élèves.

3.4 Analyse a priori des entretiens individuels

Les entretiens individuels sont menés par la chercheuse qui est également l'enseignante de l'élève. Ils ont lieu sur le temps de la pause méridienne. Sous la forme de jeu « arrêté » au sens où la chercheuse arrête le jeu pour questionner l'élève sur ses actions ou ses formulations, ces entretiens nous permettent d'analyser plus finement les procédures des élèves pour anticiper leur réponse, la vérifier ou non sur le plateau, la valider ensuite dans le grimoire et enfin revenir sur leur réponse.

3.4.1 Questions posées pour chaque carte

Tu vas réaliser ces recettes en me racontant tout ce qui se passe dans ta tête.

Pour la carte 16 : tu feras l'ingrédient grenouille en dernier. Attention dans la recette, il faudrait dans le chaudron un seul morceau de grenouille.

Que crois-tu ? Pourquoi ? (anticipation)

Est-ce que tu as un moyen de vérifier avant de refermer ton chaudron? (contrôle)

Comment peux-tu savoir si ta recette est bien réalisée ? (validation par superposition sur le grimoire)

Afin d'évaluer si l'élève mobilise éventuellement des arguments de comparaison et de généralisation, nous lui posons les questions supplémentaires suivantes :

Est-ce que tu peux trouver d'autres exemples sur le plateau de jeu ? Que vois-tu de commun entre ces exemples ? Tu pourrais m'écrire une égalité sur l'ardoise ?

Nous analysons ici les trois cartes présentées à chaque élève lors de cet entretien individuel. Pour réaliser chaque potion, l'élève doit d'abord lire la quantité demandée pour chaque ingrédient, sélectionner cette quantité sur le plateau de jeu, la déposer dans son chaudron magique, miser des points magie, refermer son chaudron pour enfin valider ou invalider sa réponse en superposant exactement les quantités qu'il propose sur celles du grimoire. De difficulté croissante, la première nous permet de vérifier la compréhension des rôles respectifs du numérateur et du dénominateur, les deux suivantes d'analyser les procédures mobilisées pour établir une équivalence entre deux fractions. Nous nous intéressons particulièrement aux procédures des cartes 16 et 35. La carte 16 permet d'établir plusieurs équivalences de fractions conformes aux partitions du plateau de jeu et pour lesquelles la vérification est facilitée par la superposition de pièces sur le plateau. L'équivalence de fractions de la carte 35 est plus complexe à établir car la superposition devient difficile voire impossible dans l'ingrédient demandé sur le plateau de jeu. Pour lister les procédures, nous utilisons des codes indiquant en premier lieu la carte, puis l'ingrédient et enfin la procédure spécifique si plusieurs procédures sont envisagées. Voici un exemple : **C35Gb** renvoie à la carte 35, l'ingrédient grenouille et la procédure b.

3.4.2 Carte 11, carte de base

(Les images ne sont pas à l'échelle.)

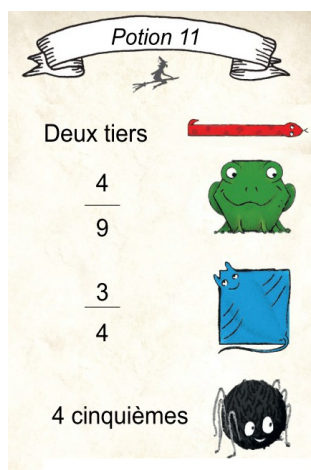


Figure 20 : carte 11

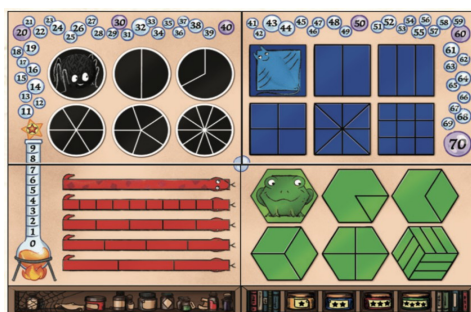


Figure 21 : plateau de jeu

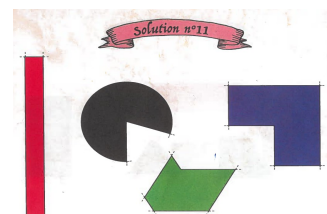


Figure 22 : solution 11

Pour les ingrédients grenouille/hexagone et raie/carré, la quantité demandée est exprimée sous la forme d'une fraction écrite en chiffres. Elle est écrite en chiffres et en lettres pour l'araignée-cercle et uniquement en lettres pour le serpent-rectangle. L'élève doit donc passer d'une représentation de la fraction à une autre.

- Pour les $\frac{2}{3}$ de serpent, la seule procédure possible est **C11S** : identifier les tiers en les dénombrant sur le kit-serpent et prendre deux de ces tiers.
- Pour les $\frac{4}{9}$ de grenouille, les procédures possibles sont **C11Ga**. identifier les neuvièmes en les dénombrant et en prendre quatre, **C11Gb**. connaître l'équivalence $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, prendre un tiers et un neuvième, **C11Gc**. voir l'équivalence $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ en superposant les surfaces, prendre un tiers et un neuvième. La solution du grimoire permet de voir cette équivalence.
- Pour les $\frac{3}{4}$ de raie, les procédures possibles sont **C11Ra**. identifier les quarts en les dénombrant et en prendre trois, **C11Rb**. connaître l'équivalence $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, prendre une demi-raie et un quart, **C11Rc**. connaître l'équivalence $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$, prendre une demi-raie et deux huitièmes, ou prendre deux quarts et deux huitièmes, ou prendre un demi et deux huitièmes, **C11Rd**. voir une de ces équivalences par superposition des surfaces. La solution du grimoire permet de voir l'équivalence $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$.
- Pour les $\frac{4}{5}$ d'araignée, les procédures possibles sont **C11Aa**. identifier les cinquièmes en les dénombrant, puis en prendre quatre, **C11Ab**. connaître l'équivalence $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ et prendre huit dixièmes, **C11Ac**. voir l'équivalence $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ par superposition des

surfaces et prendre huit dixièmes. Ces deux dernières procédures paraissent peu probables car la manipulation de petites pièces s'avère plus délicate.

Pour cette carte 11, chaque fraction a un dénominateur correspondant à une partition de l'ingrédient proposée sur le plateau de jeu. Nous dirons dans ce cas que les fractions sont conformes à la partition proposée.

3.4.3 Carte 16 , carte de base détournée

(Les images ne sont pas à l'échelle.)



Figure 23 : carte 16

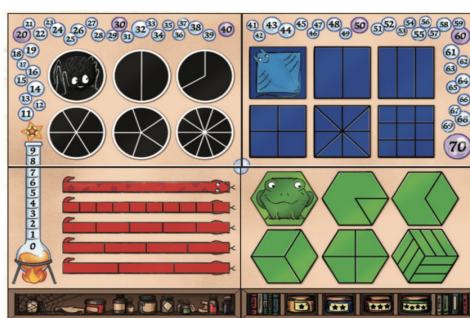


Figure 24 : plateau de jeu

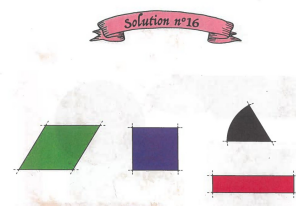


Figure 25 : solution 16

Pour les ingrédients raie/carré et araignée-cercle, la quantité demandée est exprimée sous la forme d'une fraction écrite en chiffres. Elle est écrite en chiffres et en lettres pour la grenouille-hexagone et uniquement en lettres pour le serpent-rectangle. L'élève doit donc passer d'une représentation de la fraction à une autre.

- Pour les $3/9$ de grenouille, les procédures possibles sont **C16Ga**. identifier les neuvièmes en les dénombrant puis en prendre trois, **C16Gb**. connaître l'équivalence $3/9=1/3$ et prendre un tiers, **C16Gc**. voir l'équivalence $3/9=1/3$ en superposant les surface et prendre un tiers. La solution du grimoire permet de voir cette équivalence.
- Pour les $2/8$ de raie, les procédures possibles sont **C16Ra**. identifier les huitièmes en les dénombrant et en prendre deux, **C16Rb**. connaître l'équivalence $2/8=1/4$ et prendre un quart, **C16Rc**. voir l'équivalence $2/8=1/4$ en superposant les surfaces et prendre un quart. La solution du grimoire permet de voir cette équivalence.

- Pour le $\frac{1}{6}$ d'araignée, la seule procédure possible est **C16A** identifier les sixièmes en les dénombrant puis en prendre un.
- Pour les $\frac{3}{10}$ de serpent, les procédures possibles sont **C16Sa.** identifier les dixièmes en les dénombrant puis en prendre trois, **C16Sb.** connaître l'équivalence $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, prendre un cinquième et un dixième. **C16Sc.** voir l'équivalence $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ en superposant les surfaces, prendre un cinquième et un dixième.

Pour cette carte 16, les fractions sont conformes aux partitions proposées mais la chercheuse demande à l'élève de réduire le nombre de pièces (réduction des fractions $\frac{3}{9}$, $\frac{2}{8}$ et éventuellement $\frac{2}{10}$). Pour un même ingrédient, l'élève obtient ainsi une égalité entre deux fractions conformes à des partitions proposées pour cet ingrédient.

3.4.4 Carte 35, équivalence de fractions

(Les images ne sont pas à l'échelle.)

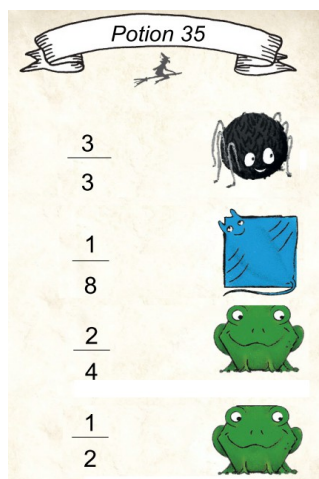


Figure 26 : carte 35

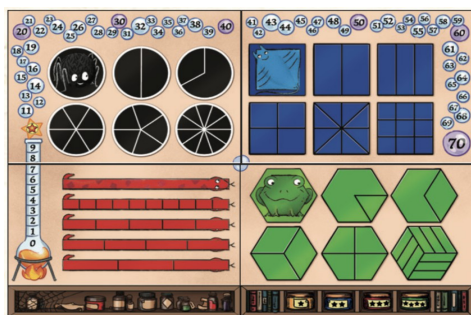


Figure 27 : plateau de jeu

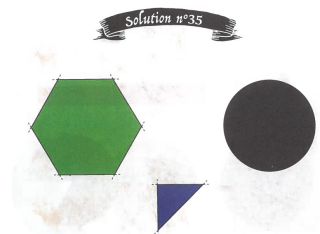


Figure 28 : solution 35

- Pour les $\frac{3}{3}$ d'araignée, l'élève ne dispose pas d'araignée partagée en trois parties égales. Une araignée est toutefois découpée en deux parties : une partie un tiers et une partie deux tiers. Les procédures possibles sont : **C35Aa.** connaître l'équivalence $\frac{3}{3}=1$ et prendre une araignée entière, **C35Ab.** partager mentalement en trois parties égales, voir la pièce un tiers d'araignée, en déduire que l'autre pièce est deux tiers, prendre ces deux pièces un tiers et deux tiers, **C35Ac.** voir l'égalité $\frac{3}{3}=1$ sur un des trois autres kits du plateau de jeu et prendre une araignée entière, **C35Ad.** voir

l'équivalence $1/3=2/6$ sur le kit araignée et prendre six sixièmes, **C35Ae**. prendre une araignée entière, peu importe son pré-découpage (exemple, prendre deux demi-araignées). La solution du grimoire permet de voir que $3/3=1$

- Pour le $1/8$ de raie, la seule procédure possible est **C35R** identifier les huitièmes en les dénombrant puis en prendre un.
- Pour le $2/4$ de grenouille, la seule procédure possible est **C35G2/4** identifier les quarts en les dénombrant et en prendre deux.
- Pour la $1/2$ grenouille, l'élève ne pré-dispose pas de grenouille partagée en deux parties égales. Les procédures possibles sont **C35G1/2a**. connaître l'équivalence $1/2=2/4$ et prendre deux quarts, **C35G1/2b**. partager mentalement, avec ou sans la main, en deux parties égales et voir l'équivalence avec les deux quarts, prendre deux quarts, **C35G1/2c**. voir cette équivalence sur un autre animal et prendre deux quarts. Une erreur possible est de prendre une pièce de grenouille découpée en deux parties mais qui ne sont pas deux parties égales. La solution du grimoire permet de voir que les deux quantités demandées pour la grenouille forment une grenouille entière, que $2/4+1/2=1$.

Pour cette carte 35, deux fractions ne sont pas conformes à la partition de l'ingrédient demandé : $3/3$ d'araignée car l'araignée n'est pas partagée en trois parties égales, et $1/2$ grenouille car la grenouille n'est pas partagée en deux parties égales.

Pour chaque carte nous nous penchons particulièrement sur les procédures et formulations de l'élève lors de deux phases :

La réalisation de la potion.

- anticipation d'une réponse grâce à une partition mentale accompagnée ou pas de gestes (unit equivalence, pas assez de parts), « Que crois-tu ? Pourquoi ? » « Comment fais-tu ? »
- anticipation d'une réponse grâce à un contrôle matériel par superposition sur le kit animal (unit equivalence, trop de parts), « Que crois-tu ? Pourquoi ? » « Comment fais-tu ? » « Est ce que tu as un moyen de vérifier avant de déposer les pièces dans le chaudron ? »

- anticipation d'une réponse grâce à la comparaison avec un autre animal où la même égalité est rendue visible plus facilement « Est-ce qu'il y a un endroit sur le plateau où on retrouve cette égalité ? » (*unit equivalence* vraie quelle que soit l'unité)

La validation de la réponse, rétroaction du grimoire des solutions

- explicitation d'une équivalence non anticipée « Pourquoi y a t il cette surface sur le grimoire des solutions ? »
- comparaison avec un autre animal où la même égalité est rendue visible plus facilement « Est-ce qu'il y a un endroit sur le plateau où on retrouve cette égalité ? » (*unit equivalence* vraie quelle que soit l'unité)

Ces analyses a priori nous ont permis de répondre en partie à notre première question de recherche. Les cadres de mesure de longueurs et de droite graduée des débuts et fin de séquence n'étant pas étudiés dans notre recherche, la séquence aborde les interprétations partie-tout et opérateur, dans le cadre de partage du jeu de *l'Atelier des Potions*. La conception *unit equivalence* pour l'équivalence de fractions est retenue. Mais cette partie 3 nous a principalement permis d'envisager les possibilités d'apprentissage de l'équivalence de fractions offertes par la séquence qui mobilise le jeu de *l'Atelier des Potions*. Nous allons maintenant les confronter à la pratique en analysant dans un ordre chronologique :

- les résultats des pré-tests qui nous ont permis de sélectionner trois élèves en difficulté,
- les interactions où l'équivalence de fractions apparaît, soit dans les films des séances 5, 6 et 8,
- les procédures mobilisées dans les entretiens individuels
- et enfin, les résultats des post-tests que nous confrontons aux pré-tests.

4 L'ÉQUIVALENCE DE FRACTIONS AVEC L'ATELIER DES POTIONS, APPRENTISSAGES RÉALISÉS ET DIFFICULTÉS PERSISTANTES

Nous présentons ici des résultats et analyses pour chacune des étapes que sont le pré-test, la séance 5, la séance 6, l'entretien individuel, la séance 8 et enfin le post-test. Nous nous intéressons principalement aux apprentissages et aux difficultés rencontrées par trois élèves repérés en difficulté, pour comprendre l'équivalence de fractions dans une séquence ordinaire qui mobilise le jeu *l'Atelier des Potions*. Certaines données recueillies au sein du groupe

classe (films des séances et tests) sont intégrées à notre recherche lorsqu'elles nous apparaissent intéressantes pour éclairer notre analyse. Enfin, nous concluons cette partie par une synthèse pour chacun des trois élèves observés.

4.1 Le pré-test

Suite à la passation du pré-test, en amont de la séquence, nous avons sélectionné trois élèves, tous trois repérés, à ce moment de l'année, en difficulté en mathématiques par leurs enseignants¹¹. Les pré-tests de ces trois élèves sont au complet en annexes 4, 5 et 6. Nous présentons et analysons ici les réponses pour les items des exercices 1, 2 et 4, en excluant les items concernant la fraction supérieure à 1 qui n'est pas l'objet de notre recherche.

Voici leurs réponses pour l'exercice 1, dans le cadre de partage d'aires, où la tâche est de colorier une fraction d'une figure donnée.

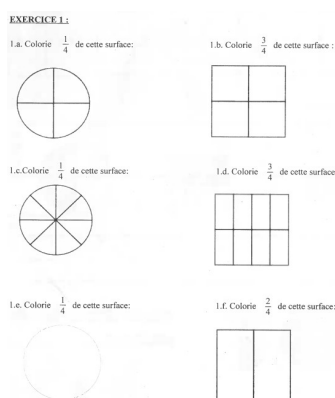


Figure 29 : Pré-test A exercice 1

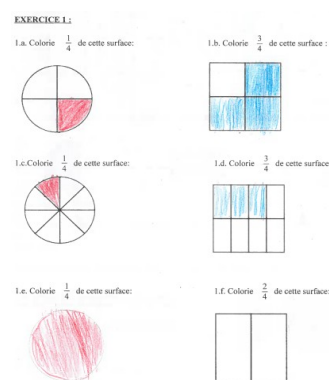


Figure 30 : Pré-test C exercice 1

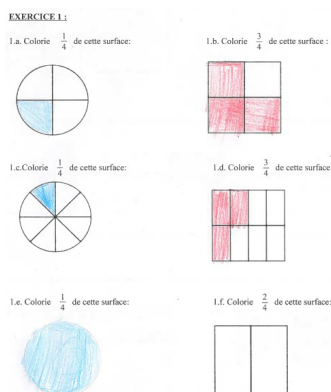


Figure 31 : Pré-test M exercice 1

¹¹ La chercheuse, titulaire de la classe, y enseigne à mi-temps. Un enseignant complète ce mi-temps.

L'élève A ne répond à aucun item de l'exercice 1. On peut supposer que les fractions sont totalement inconnues pour lui, ou bien qu'il n'ose pas répondre de peur de se tromper. L'élève C et l'élève M répondent correctement pour les fractions conformes à la partition de l'unité mais leur réponse est erronée pour les fractions non conformes à la partition de l'unité. C et M ne prennent en compte que le numérateur de la fraction et colorient le nombre de parties indiqué par le numérateur. Cette erreur correspond à celle pointée par Cadez et al. (2018). Aucun des trois élèves ne répond à l'item 1.f. Dans l'exercice 2, où il est demandé d'écrire une fraction correspondant à une surface coloriée, A et M ne proposent aucune réponse alors que C en propose uniquement pour les items 2.a à 2.c :

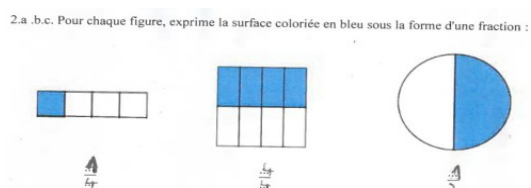


Figure 32 : pré-test C items 2.a, 2.b et 2.c

Il connaît l'écriture fractionnaire des deux fractions un quart et un demi. Sa réponse $\frac{4}{4}$ pour l'item 2.b laisse entendre soit qu'il ne repère pas l'unité et considère le rectangle partagé en quatre parties égales, soit qu'il ne repère pas que le carré est partagé en huit parties égales.

Voici enfin leurs réponses pour le premier item de l'exercice 4 :

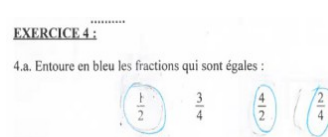
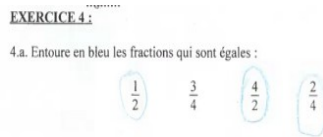
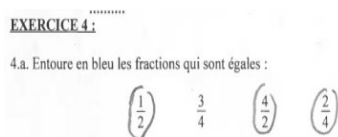


Figure 33 : pré-test A item 4.a Figure 34 : pré-test C item 4.a Figure 35 : pré-test M item 4.a

Les trois élèves fournissent la même réponse. Ils semblent penser que deux fractions sont identiques si on inverse le numérateur ou le dénominateur. En début de cycle 3, les élèves n'ont pas encore rencontré l'écriture fractionnaire.

4.2 La séance 5

Les élèves de la classe ont rencontré des équivalences de fractions dans le cadre de mesure de longueurs des séances 1 à 4 (Tableau 4 : synthèse de la séquence). Ils ont observé par exemple

que la mesure $\frac{2}{10}$ était égale à $\frac{1}{5}$, grâce à la manipulation du kit serpent (Figure 19 : kit serpent) comme outil de mesure de longueurs de segments. La séance 5 est leur rencontre avec le jeu de *l'Atelier des Potions*, qui se situe dans un cadre de partage et dont nous analysons ici plusieurs extraits. Les élèves, répartis en binômes ou trinômes, doivent réaliser des potions magiques en prélevant, sur le plateau de jeu, les ingrédients indiqués sur des cartes et en les déposant dans leur chaudron magique. Le plateau et les pièces du jeu sont aimantées. L'enseignante P alterne les moments de manipulation et les mises en commun. L'élève A est absent lors de cette séance. M est au premier plan dans le film du groupe classe. Une seconde caméra filme l'élève C en plongée sur sa table. On le distingue sur le plan large.



Figure 36 : Séance 5 plan large

4.2.1 *La mise en lumière d'une rupture de contrat, le groupe classe*

Le premier épisode choisi se situe entre les temps 28'17 et 30'42, il a lieu lors de la mise en commun des solutions proposées par les équipes pour réaliser la première recette, celle de la carte 2 (Figure 37 : projection au tableau blanc, potion 2 et solution n° 2). Juste avant l'extrait, les binômes d'élèves ont réalisé leur recette puis l'ont validée ou invalidée à l'aide du grimoire des solutions. La professeure P souhaite insister sur l'ingrédient raie. Elle utilise un logiciel qui lui permet de sélectionner et de déplacer des éléments sur le tableau blanc de la classe.

Potion A

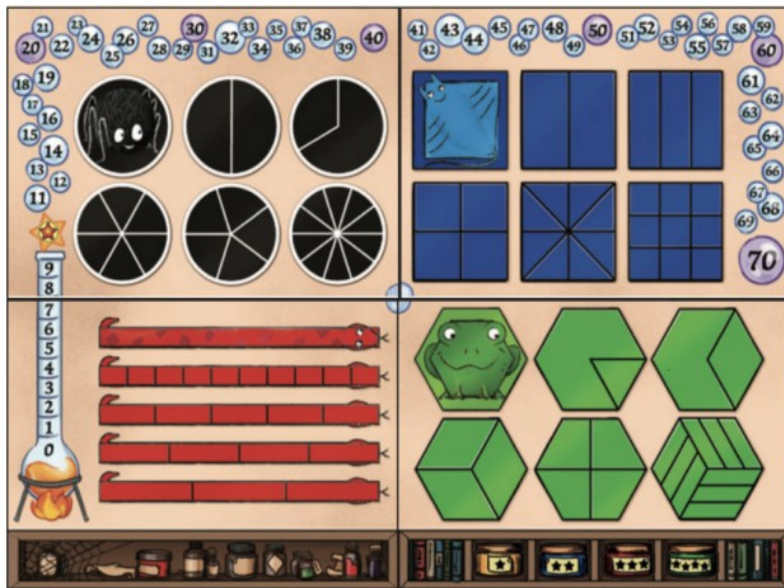


Figure 37 : projection au tableau blanc, potion 2 et solution n° 2

Voici la transcription de ce passage.

Tdp : Tour de parole

Loc : locuteur

P: professeure

[action]

mot plus fort

Tdp	Loc	
1	P:	Très bien et bien vous avancez si vous avez bon, vous reculez si vous avez faux. Nan surtout pas, ne tournez pas la deuxième carte. Qu'est ce que tu fais ? On ferme le grimoire des solutions. Remettez bien toutes les pièces du jeu. Le plateau doit être impeccable. À chaque fois. Tu peux éteindre. Regardez au tableau. Là tout en bas à droite y'a les solutions. [plateau, carte 2 et solution 2 sont projetés au tableau blanc.] Vous la voyez la solution. Regardez ce que je vais faire. Pour un quart de raie, je prends ça [P déplace un quart du kit pour le superposer sur le quart de la solution] c'est ça (.) on est d'accord ? Donc ça marche ça se superpose bien. Goul tu regardes au tableau. Tout le monde regarde au tableau blanc.

Tdp	Loc	
		Regardez le quart je l'ai pris là. je l'ai pris là le quart je le superpose dans le grimoire des solutions ça marche, c'est très bien. Mais est-ce qu'il y avait une autre solution ?
2	Was :	[lève la main] oui
3	Ly :	[à Was] <i>ben nan faut utiliser un quart</i>
4	El :	<i>mais pas forcément</i>
5	P:	Est-ce qu'il y avait pas une autre solution ?
6	Al :	Si y en avait une autre
7	P:	Al, va au tableau
8	Al	[Al va au tableau blanc] Il faut deux comme [elle montre les huitièmes pré-découpés de raie] (..) deux huitièmes
9	Ly	Nan [il crie presque]
10	P:	hey Ly ! On va voir. (..) Est-ce que ça marche deux huitièmes ? [P déplace un quart pré-découpés de raie sur deux huitièmes pré-découpés de raie]
11	El :	oui
12	P:	est-ce que c'est la même surface ? (.) Regardez je suis en train de bouger un quart oui ?
13	Els :	oui
14	P:	est-ce que c'est égal à deux huitièmes ?
15	Els :	oui
16	Was	c'est ce que j'ai fait
17	Ly	oui mais faut mettre un quart
18	P:	donc, [à Ly] Ly, tais toi parle pas quand t'as pas la parole. T'as l'droit de lever la main, pas de problème. (.) Est-ce que si elle avait pris deux huitièmes elle aurait eu bon ?
19	Els :	oui
20	P:	qui ne sait pas ? [personne ne lève la main] (...) tout le monde pense que oui ?
21	Ly	moi je veux dire une chose
22	P:	D'accord Ly, vas-y dis moi.
23	Ly :	parce que c'est marqué un quart.
24	P:	oui très bien [P se lève] très bonne remarque. c'est marqué un [elle désigne le numérateur] quart [elle désigne le dénominateur] donc il a pris un quart [elle désigne un des quarts pré-découpés de raie sur le kit raie] c'est ça que tu veux dire ?

Tdp	Loc	
25	Was	mmm
26	P:	Chut ! [se tourne vers Was, le doigt devant la bouche] attends deux secondes
27	El	ah oui c'est vrai
28	P:	Bon (.) un quart de raie. C'est une quantité que l'on veut. Une quantité on va la mélanger, on va la faire fondre dans notre chaudron magique. Oui ? Est-ce que ça serait la même recette si on avait pris deux [elle montre deux doigts] huitièmes. Est-ce qu'on aurait eu la même quantité fondue ?
29	Ly	ben non ils auraient pas été collés.
30	Cid	Si (.) ça fait le même carré
31	P:	ça fait la même surface, la même aire. Oui Cid c'est bien. Donc en fait Al avait raison, si on prend un , et il a raison de le dire Ly parce que c'est pas le seul qui a un problème avec ça, si on prend un quart, ben lui il se dit ben ouais mais on m'a dit un , j'ai pas pris un j'ai pris deux quelque choses, (..) oui (.) mais c'est la même surface. Un quart égal
32	Els :	deux huitièmes
33	P:	je vous remontre et vous faites sur votre raie. Vérifiez qu'un quart égal deux huitièmes. [P se rapproche de Ly]

Tableau 5 : séance 5, carte 2, 1/4 de raie, de 28'17 à 30'42

Ly et Al forment un binôme, qui n'a pas été filmé lors de la préparation de cette potion, mais pour lequel on imagine une discussion, puisque Al propose deux huitièmes pour un quart et que Ly n'est pas d'accord.

Ly est un élève très performant en mathématiques. Dans cet épisode, Ly, met en lumière un obstacle lié à l'équivalence de fractions. Il explicite les attentes qu'il croyait voir dans la consigne avec l'écriture de la quantité de raie demandée : un quart de raie. Cela représente une rupture avec le contrat « un nombre entier a une écriture ». Il dira qu'il a gagné 6 billes à la récréation et non qu'il en a gagné 2×3 , ou $6 : 2$, alors que ce serait correct en mathématiques. Un nombre rationnel peut avoir une infinité d'écritures différentes, la relation entre 1 et 4 est la même qu'entre 2 et 8, un quart de raie représente la même quantité que deux huitièmes de raie.

De plus, les sens respectifs donnés en amont au numérateur et au dénominateur : le numérateur représente une quantité de la nouvelle unité de comptage représentée par le dénominateur. C'est une nouvelle règle du contrat qui vient d'être instaurée au cours des

séances précédentes. Le fait d'avoir une autre solution représentée par une autre surface (formée par deux morceaux) une autre formulation (deux huitièmes) et une autre écriture ($\frac{2}{8}$) est une rupture de ce contrat. Cette rupture de contrat représente un obstacle pour lui et il le formule à plusieurs reprises (tdp 3, 9, 17, 21, 23). La professeure sollicite d'abord un élève, Al, pour laisser la place à une équivalence possible, mais elle profite ensuite de l'intervention de Ly pour expliciter cette rupture de contrat. Mettre des mots sur ce qui peut gêner Ly, est une façon d'anticiper ou tout au moins d'expliquer une difficulté potentielle pour d'autres élèves qui auraient du mal à la formuler.

P s'appuie ensuite sur le milieu pour justifier une égalité entre deux surfaces, donc entre deux fractions. Le traitement que P réserve à Was est particulier : il est très performant en mathématique et intervient régulièrement, souvent en étant très en avance sur le savoir en jeu. P lui demande de se taire (tdp 25 et 26) et lui fait souvent des signes discrets et encourageants, mais ne lui donne pas de place dans le dialogue. Plusieurs élèves moins avancés comme Cid participent à cette négociation autour de la nouvelle règle du contrat (tdp 15, 16, 19, 25, 30) et Ly n'intervient plus. La négociation semble échouée pour lui.

C et M, chacun dans un binôme hétérogène, sont attentifs, parfois la tête sur la main Figure 36, mais n'interviennent pas dans cette discussion collective. C'est ensuite la carte 15 qui est retournée. Nous retenons et analysons certains comportements de C et M pour cette recette.



Figure 38 : deuxième recette, carte 15

4.2.2 La prise de risque pour trouver une équivalence, le cas de M

Pendant la mise en commun de la carte 15, plusieurs élèves ont proposé deux huitièmes pour un quart de raie. La recette demande pour la grenouille et l'araignée des fractions non unitaires, dont le numérateur est donc différent de 1. P s'attend à ce que les élèves repèrent d'abord l'animal qui est partagé en autant de parts que ne l'indique le dénominateur, et prennent ensuite autant de parts que ne l'indique le numérateur. Une élève pourtant propose la possibilité d'une autre solution pour l'ingrédient araignée, où il était en effet possible de prendre 4/10. M lève la main pour proposer une autre solution. S'ensuit un échange au tableau entre la professeure P, et l'élève M où cette dernière propose plusieurs pièces de l'araignée et dont voici la transcription.

[action]

mot plus fort

Tdp	Loc	
1 ^{37:29}	P:	deux huitièmes très bien ça va C ? Vous êtes d'accord que deux huitièmes égal un quart ? C'est bon Ly ? Bon il fait la tête c'est pas grave. Ici deux cinquièmes [elle pointe les deux cinquièmes pré-découpés d'araignée] très bien.
2	Cid	et on pouvait faire autre chose
3	P	oh ! J'osais pas le dire mais oui y avait moyen de faire autrement deux cinquièmes. (..) mais c'est pas si facile que ça ! [plusieurs mains se lèvent]
4	Ch	ah
5	P:	[M lève la main] rappelez vous du serpent deux cinquièmes de serpent. M
6	M	heu sss
7	P	viens au tableau si tu veux le montrer, ce qu'on aurait pu prendre. J'ai une lumière moi.
8	M	les trois là [elle montre trois cinquièmes pré-découpés]
9	P	les ? Trois cinquièmes tu veux prendre ? [M acquiesce]
10 38:31	P	ben non puisque c'est deux cinquièmes. Regarde. Vous avez pris ces deux pièces là [avec le curseur rouge elle pointe deux cinquièmes pré-découpés d'araignée] vous avez pris ces deux cinquièmes. Tu vas en prendre trois ? (..) ça sera pas la même surface. Ça va être trop grand. Qu'est ce qu'elle aurait pu prendre à la place ?

Tdp	Loc	
11	M	[M montre un tiers d'araignée]
12	P	ça là ?
13	M	ah non c'est un cinquième.
14	P	Ah bon c'est un cinquième ? C'est ça un cinquième là où je suis on est d'accord [le curseur est sur un cinquième pré-découpé]? Regarde un cinquième c'est plus petit.
15	M	ah oui c'est un demi
16 <small>38:48</small>	P	un demi ? Stop. Temps mort.

Tableau 6 : séance 5, carte 15, 2/5 d'araignée, de à 37'29 à 38'48

Le projet de P pour cette séance est que les élèves s'approprient les règles d'un nouveau jeu, et mobilisent les fractions dans un nouveau cadre. Mais au Tdp 3, elle exprime une hésitation. En effet, l'équivalence de fractions intervient à plusieurs reprises puisque plusieurs solutions sont possibles et exprimées par les élèves. Elle décide de passer du temps sur ces équivalences, avec le risque de « perdre » certains élèves. Au Tdp 5, elle fait référence aux séances précédentes où des équivalences avaient été établies dans le cadre de mesure de longueurs, en particulier $1/5=2/10$ avec le kit-serpent. M est une élève qui présente des troubles du langage oral. M a compris suite à la discussion précédente qu'il était possible de donner une autre solution que celle qui vient d'emblée avec la procédure repérage des parts égales correspondant au dénominateur puis sélection d'autant de parts qu'indiquées par le numérateur. Encouragée par sa binôme Ch qui voit une équivalence et demande la parole, elle lève à son tour la main (Tdp 5). P utilise l'argument de « sa lumière », celle du vidéo-projecteur, puisque la lumière de la classe est éteinte, pour faire venir M au tableau et ainsi désigner les pièces. Une fois rendue devant le tableau blanc, sur lequel le plateau de jeu est projeté, M enchaîne des propositions toutes erronées. Au Tdp 10, P lui rappelle ce que son binôme a pris à savoir deux cinquièmes pré-découpés d'araignée. Une des interprétations possibles de ce comportement est que la venue au tableau devant le groupe classe la déstabilise, qu'elle perde pied et propose plusieurs mots pour désigner des pièces. A cela se rajoute pour M la difficulté à mobiliser à l'oral un vocabulaire nouveau à bon escient. Ses nombreuses erreurs pour désigner les pièces du kit araignée, peuvent aussi être interprétées par la non compréhension du partage équitable. A la fin de cet échange, plusieurs élèves proposent quatre dixièmes que P valide rapidement pour ne pas y passer trop de temps. Dans une dernière partie, nous observons et analysons le comportement de C face à l'équivalence de fractions dans cette séance 5.

4.2.3 La prudence plutôt que l'équivalence, le cas de C

Lorsque P annonce en début de séance 5 que les élèves vont jouer à l'*Atelier des Potions*, C manifeste son enthousiasme auprès de son binôme Am. Cependant, il est très préoccupé par l'enjeu des points magie qu'il doit mettre dans le chaudron. Voici la transcription d'un échange entre C et son binôme Am qui a lieu dès le début de la réalisation de la carte 15, :

Tdp	Loc	
1	C	[C prend un quart pré-découpé de raie puis touche le jeton trois points magie. Ils touchent les jetons trois points ou deux points magie en silence, Am fait non de la tête] mais si (.) on met ça pour avoir des points si on a bon.
2	Am	maîtresse est-ce qu'on doit mettre [elle montre le jeton de trois points magie]
3	P	oui oui il faut avoir les points
4	C	[en prenant le jeton trois points que lui tend Am] mais si on perd trois points. Ah bas on met deux comme ça on
5	Am	au pire on met un [elle montre un point de magie]

Tableau 7 : séance 5, carte 15, points magie, de 32'12 à 32'45

Peu sûr de lui, avant même d'effectuer la recette, C hésite entre deux et trois points magie pour ses réponses et discute avec Am du choix de ces points magie. Am finit par proposer un point de magie. La stratégie choisie par le binôme est de ne pas prendre de risque. C'est lui qui prend principalement en charge la manipulation par la suite. Pour s'assurer qu'il va monter sur le fil numérique, sa procédure est de rester dans la conformité de la fraction à la partition proposée sur le kit ingrédient. S'il faut prendre $\frac{1}{4}$ de raie pour la deuxième recette proposée, la carte 15, il prend un quart de raie pré-découpé. De la même façon, pour la quantité $\frac{2}{5}$ d'araignée qui est demandée, il prend deux cinquièmes prédécoupés d'araignée. Lorsque P le demande, il vérifie ensuite par superposition les égalités mises en évidence lors des mises en commun. Mais sa priorité reste la course et il discute beaucoup avec le binôme adverse des points obtenus par chaque binôme. Il ne se préoccupe pas pour l'instant de l'égalité de fractions. Beaucoup plus prudent que M, il s'approprie la règle du jeu et manipule les fractions dans le cadre de partage, ce qui est l'objectif de la séance.

4.3 La séance 6

Dans l'atelier dirigé de la séance 6 que nous présentons dans cette partie, quatre élèves, dont les trois élèves repérés en difficulté, sont regroupés en binômes et jouent à l'*Atelier des Potions*. A et M sont ensemble face à C et Z. Plusieurs extraits de cette séance sont ici analysés.

4.3.1 « Faire » des fractions/ « faire » des potions, le didactique et le ludique

L'élève A était absent pour la séance 5, où le jeu a été découvert par les élèves de la classe. Dans ce premier extrait, P s'assoit à la table des joueurs. Elle s'apprête à lancer le jeu en rappelant les règles. Elle demande aux élèves ce qu'ils vont faire.

Tdp	Loc	
1 01:23	P	Est-ce que vous êtes dans la peau de petits sorciers et de petites sorcières ?
2	tous	oui
3	A	j' suis déjà un sorcier
4	P	toi t'es déjà un sorcier. Et vous allez faire quoi?
5	A	des fractions
6	M	des potions
7	P	[à A] Toi tu dis quoi?
8	A	des fractions
9	P	des fractions ok! Mais vous allez aussi, [elle regarde A] ça c'est le côté maths, [elle regarde M] mais vous allez surtout faire des potions magiques.
10	A	C'est vrai ?
11	P	Ouais
12 1:46	A	[A sourit et regarde la caméra]



Tableau 8 : séance 6, lancement, de 1'23 à 1'46

L'élève A découvre un jeu dont l'univers est celui de la magie et où il se place d'emblée au Tdp 3 dans un rôle de sorcier. A la question de P au Tdp 4, l'expression « faire des fractions »

que répond A au Tdp 5 interroge. Que fait-on avec les fractions dans ce jeu ? A ce stade de l'apprentissage, les élèves, et a fortiori A, ne le savent pas encore. Ils font des potions magiques. Ils prélèvent une certaine quantité d'ingrédient exprimée sous la forme d'une fraction. Dès le Tdp 1, P pose explicitement la base d'une relation didactique différente, où le didactique et le ludique vont se côtoyer, où les élèves sont apprenants et joueurs. Elle se place en meneur de jeu et confirme qu'il y aura des apprentissages mathématiques au Tdp 9. L'élève A accepte semble-t-il volontiers cette relation.

4.3.2 Le contrôle sur le plateau de jeu, le cas de A et M

Suite à la réalisation des cartes de base 5 et 11 (Annexe 2), P demande aux élèves de lire la carte 19. Pour l'ingrédient araignée, elle leur demande de prendre une seule pièce d'araignée pour obtenir deux points de magie en bonus.



Figure 39 : séance 6, carte 19

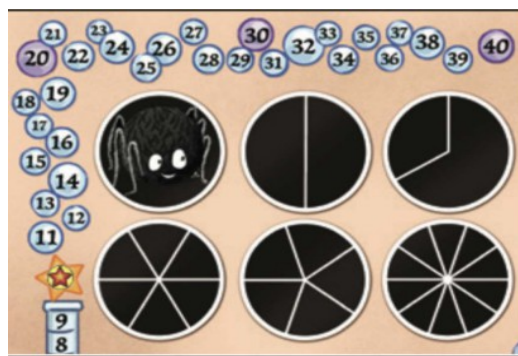


Figure 40 : kit araignée

Nous nous intéressons ici au binôme A/M pour la sélection de l'ingrédient araignée de la carte 19. Alors que A commence à compter les pièces du kit, M réfléchit, prend la pièce une demi-araignée prédécoupée et la montre, sans la nommer, à l'élève A. Celui-ci lui demande alors si elle est sûre d'elle. Elle la pose sur les trois sixièmes d'araignée du kit araignée. Il acquiesce immédiatement et M dépose la pièce une demi-araignée dans le chaudron.

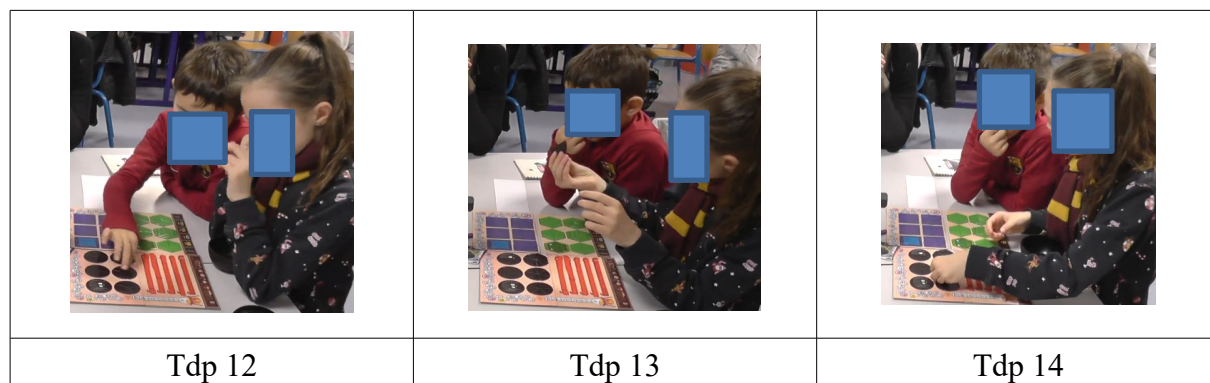
Tdp	Loc	
1	P	Attention vous allez vous concentrer mes p'tits sorciers.
13:00		

Tdp	Loc	
2	C	ça va être plus dur
3	P	oui [elle joint les mains] Je suis heu une professeure de sorcellerie. Donc vous êtes mes petits élèves sorciers. Et la professeure de sorcellerie rajoute quelque chose. Je rajoute quelque chose. [elle regarde les éléments du jeu, range et pointe ce qui n'est pas en place] J'attends qu'les pièces soient mises.
4	M	Tiens [elle tend à A les pièces à replacer sur le plateau]
5 13:51	P	allez vite [A et M replacent les pièces sur le plateau] Attention regardez bien. [elle retourne la carte 19] J'vous montre la carte vous lisez juste ça dans votre tête pour l'instant. [ils se penchent tous les quatre vers la carte 19]
6	P	alors
7	A	ok c'est bon
8	P	Vous allez être des petits sorciers, mes petits élèves sorciers, et (.) je vous demande (.) pour l'araignée. Qu'est-ce qu'il faut faire pour l'araignée là?
9	M	trois cinq
10	C	trois sixièmes
11	P	trois sixièmes d'araignée (.) et ben moi je suis votre prof et je vous dis heu je vais rajouter un bonus de deux points (.) deux points par rapport à ça [P montre sur les deux plateaux de jeu l'endroit des jetons points magie] si vous arrivez à me donner une seule (.) qu'une seule pièce d'araignée (.) un seul [P lève le pouce] morceau d'araignée
12 14:39	A	[A compte les dixièmes pré-découpés] un deux trois quatre cinq six sept huit neuf dix [puis les sixièmes pré-découpés] un deux trois quatre cinq six c'est ceux-là
13	M	[M réfléchit, menton dans la main] trois sixièmes attends [elle lève le doigt] attends trois sixièmes c'est un deux trois [elle touche les sixièmes prédécoupés d'araignée avec le doigt] ha j'ai compris c'est <u>ça</u> [M prend une demi-araignée] c'est <u>ça</u> ! [elle montre la pièce à A]
14	A	T'es sûre qu'c'est <u>ça</u> ? [il se touche le nez]
15	M	oui oui regarde [M superpose la demi-araignée pré-découpée sur les trois sixièmes d'araignée pré-découpés]
16	A	haaaa Vas-y! [M dépose une demi araignée dans le chaudron]
17 15:00	P	ça s'appelle comment <u>ça</u> ?

Tableau 9 : séance 6, carte 19, de 13'00 à 15'00

Dès le début de la séance 6, P demande aux élèves s'ils sont prêts à jouer à un jeu de rôle. Dans l'article « paradoxe de la dévolution » de son glossaire, Brousseau (2011) précise que « le savoir et le projet d'enseigner vont devoir s'avancer sous un masque. » Ici le masque pris par P est celui de « professeure de sorcellerie » au Tdp 3. Elle installe ainsi son nouveau rôle. Elle enseigne dans un univers de magie. Elle place également l'élève dans un nouveau rôle d'élève dans un univers de magie.

La carte 19 est une carte de base du jeu pour laquelle P modifie la consigne. Une rupture du contrat didactique intervient au Tdp 11 quand P demande une seule pièce pour $\frac{3}{6}$ d'araignée, ce qui en mathématique revient à réduire la fraction $\frac{3}{6}$ en obtenant dans ce cas une fraction unitaire, la fraction $\frac{1}{2}$. Les deux fractions $\frac{3}{6}$ et $\frac{1}{2}$ sont conformes à une partition proposée pour l'araignée. La procédure utilisée jusqu'ici par les élèves pour les cartes précédentes, à savoir repérer l'animal partagé en autant de parts qu'indique le dénominateur et prendre autant de parts qu'indique le numérateur, ne fonctionne plus. L'élève A, qui, rappelons le, n'a pas assisté à la séance 5, entame cette procédure et M réfléchit de son côté, la tête dans les mains. La dévolution (Brousseau, 1998) est réussie pour chacun d'entre eux puisqu'ils prennent leur part de responsabilité dans la recherche d'une solution. Seulement la rupture est plus difficile à gérer pour A que pour M puisqu'elle l'a déjà rencontrée lors de la séance 5. Elle anticipe rapidement une solution (Tdp12), la propose à A (Tdp 13) et la contrôle par superposition sur le plateau pour réussir à le convaincre (Tdp 14).



Mais la pièce un demi ici équivalente à trois sixièmes n'est pas nommée. Elle est désignée par le pronom « ça » aux Tdp 13, 14 et 15. De même, la relation d'équivalence, qui est ici une relation de quantités égales, n'est pas formulée mais manipulée par la superposition des surfaces. L'intervention de P au Tdp 17 pointe cette non formulation. A et M contrôlent leur réponse sur le plateau de jeu par superposition. À ce moment, ils établissent sans la nommer une égalité entre deux quantités, associées à des pré-découpages proposés pour l'araignée sur le plateau

de jeu, donc entre deux fractions *conformes* à des partitions de l'ingrédient araignée, *congruent fractions* de Caldez et al. (2018).

4.3.3 La validation par l'action sur le grimoire, le cas de A et M

Pour la validation de la carte 19, A ouvre le grimoire des solutions à la page 19. Il ouvre la bouche de surprise en constatant la surface solution pour l'araignée, il la tapote du doigt (Figure 41 : séance 6, carte 19, validation, A et M, 16'10) pour la montrer à M. Ils superposent sans un mot tous leurs ingrédients sur la solution du grimoire. A ouvre la bouche et M sert les poings (Figure 42 : séance 6, carte 19, validation, A et M, 16'20).

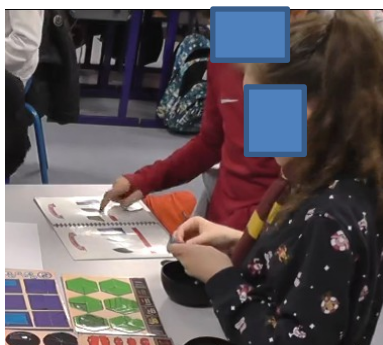


Figure 41 : séance 6, carte 19, validation, A et M, 16'10



Figure 42 : séance 6, carte 19, validation, A et M, 16'20

Au moment de la validation, sans recourir à la manipulation, A constate que la quantité prise pour l'araignée correspond à la solution du grimoire. Ils attendent pour valider leur réponse d'avoir superposé correctement tous leurs ingrédients sur le grimoire des solutions. Ils manifestent clairement leur joie, mais sans jamais formuler ni fraction ni égalité entre les fractions.

4.3.4 La formulation pour $3/6=1/2$

Suite à la validation de la carte 19, P demande à M et A d'établir sur une feuille une égalité de fraction. A arrive à une égalité en langage courant mais regarde sur la feuille de M ce qu'elle écrit pour écrire l'égalité sur sa propre feuille. P prend ensuite sa feuille pour la faire lire à C.

Tdp	Loc	
1 _{16:35}	P	remettez tout bien en place. C'est bien c'est très bien. [P quitte la table, A et M remettent les pièces sur le plateau de jeu.]
2	M	Oh on a gagné vingt quatre points [P revient avec une ardoise]
3	P	Concentrez-vous bien. Est-ce que vous pourriez m'écrire sur votre feuille une égalité de fractions qu'on vient de voir ? Que vous venez de voir ? [M s'empare d'une feuille et d'un crayon, A fait la moue et croise les bras]
4	M	Mm [P prend la feuille des mains de M et la pose devant A]
5	P	qu'est-ce que vous venez de voir grâce à l'araignée là vous?
6	M	que trois sixièmes c'est égal à un deuxième
7	A	un demi [P pointe l'affiche derrière elle]
8	M	ah oui c'est ça
9 17:30	P	alors allez-y mettez moi ce qu'on peut en déduire.[A commence à écrire en lettres] j' préfère en chiffres.[M écrit en chiffres tout en oralisant]
10	M	Trois sixièmes [elle écrit 3/6] est égal à [elle écrit le signe =] deux [elle écrit 2] ho [elle lève son crayon et barre le 2] un deuxième [elle écrit 1/2]
11	A	Égal un demi [il profite que P soit tournée vers C et Z pour regarder la feuille de M puis copier l'égalité sur sa propre feuille]
12	P	[se retourne vers A] fais voir ce que tu as écrit toi. Tu peux me lire ça?
13	A	Un demi
14	P	Tout
15	A	trois sixièmes est égal à un demi.
16	P	[elle interpelle C et M] Hey regardez ce qu'il a écrit A. [P leur montre la feuille de l'élève A] C et Z remettez bien vos pièces (.) regardez ce qu'il vient d'écrire grâce à ce qu'il vient de faire. Regardez ce qu'il a écrit. Tu peux me lire ça C?
17	C	trois sixièmes égal à un di (...)
18	P	t'as le droit d'utiliser les affiches si tu veux
19	C	à un [lit les affiches au mur] demi
20	P	vous êtes d'accord ou pas?
21	Tous	Oui
22 _{18:44}	P	très bien bravo! Vous avez six points les deux équipes.

Tableau 10 : séance 6, carte 19, formulation égalité, A et M, de 16'35 à 18'44

Au Tdp 1, P les félicite et valide à son tour leur réponse. Mais elle leur demande de déduire et de formuler par écrit directement ce qu'ils viennent d'obtenir. A et M, cette dernière avec des difficultés de langage, sont capables de le formuler en langage naturel mais le langage symbolique s'avère plus délicat.

Handwritten equation: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Above the fraction $\frac{1}{2}$, there is a crossed-out $\frac{2}{2}$.

Figure 43 : séance 6, carte 19, $3/6=1/2$, M

Handwritten equation: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. A blue star is written above the number 3.

Figure 44 : séance 6, carte 19, $3/6=1/2$, A

M commence par le dénominateur mais se corrige d'elle même. Elle réussit à écrire en langage symbolique l'égalité qu'ils viennent d'établir en langage naturel. A l'insu de P, l'élève A, à l'aise avec le langage courant, n'apprécie pas le papier-crayon d'où sa moue au Tdp 3 et ses bras croisés pour signifier son manque de motivation pour cette tâche. Avec la feuille que P lui tend, il commence à écrire tout de même, en lettres, puis avec des symboles qu'il copie sur M. P, persuadée que A a écrit seul cette égalité, le met en avant et en profite pour valider cette égalité en la montrant à C et Z qui ne la discutent pas. A ne se sent pas trop illégitime car il est vrai qu'à l'oral il a établi cette égalité.

4.3.5 La phase de conclusion de la séance 6

Suite à la réalisation et la validation des cinq cartes pour cet atelier, P s'occupe de prévenir les autres groupes que les ateliers vont tourner. Dans l'extrait suivant, P revient à la table et conclut la séance par les deux dernières égalités que les élèves viennent d'établir par la manipulation dans le jeu.

Tdp	Loc	
1 _{28'45}	P	[P revient à la table du groupe de A, C, M et Z] Vous êtes arrivés à combien ?
2	C et Z	à vingt six
3	P	[un élève vient lui demander quelque chose] nan na attends deux secondes j'suis là. [à C et Z] hey c'est bien ! Est-ce que vous avez trouvé des égalités de fractions ? Vous pouvez me trouver des égalités de fractions ? Quelles fractions sont égales du coup ? Par exemple ici qu'est ce que vous avez trouvé pour l'araignée ?

Tdp	Loc	
4	Z	un demi [Z touche une demie araignée]
5	P	oui vas-y
6	Z	un demi est égal à trois sixièmes.
7	P	très bien Z ! [P regarde du côté de A et M] Bravo à tous les quatre vous avez très bien travaillé. Un demi égal . Tiens ben C, un demi [P montre une demi-araignée] égal Allez un demi égal ?
8	C	[C compte les sixièmes d'araignée] : six
9	P	nan Dis le bien [P prend stylo et ardoise blanche] [M replacent les pièces sur son plateau] [C regarde attentivement le kit araignée] Regardez les gars les filles
10	C	trois sixièmes
11	P	hey ! [P écrit $1/2=3/6$ sur l'ardoise] un demi égal trois sixièmes. Et là [P met la main sur le kit raie] ce que vous venez de faire aussi, une égalité pour la raie ? Qu'est ce que vous avez trouvé tout de suite avec la raie, la dernière carte là ? C concentre toi. C !
12	C	on a trouvé que ça [il prend un tiers pré-découpé] faisait trois neuvièmes
13	P	et c'est quoi ça (.) qui est égal à trois neuvièmes ? [P écrit $=3/9$ sur l'ardoise]
14	C	c'est neuf
15	P	nan regarde tu m'as pris ça [P montre un tiers pré-découpé] c'est quoi ça ?
16	C	ça c'est trois
17	P	comment ça s'appelle chaque partie ?
18	C	heu un tiers
19	P	un tiers Hey regardez, Z, [P écrit $1/3$ devant le $=3/9$] un tiers égal trois neuvièmes Vous venez de me montrer ça(..) nan Z ?
20	Z	Si !
21 <small>30'50</small>	P	OK allez on éteins ça.Vous rangez bien ouais. Super !

Tableau 11 : séance 6, conclusion, 28'45 à 30'50

Au Tdp 3, P revient sur le savoir en jeu dans cette séance. L'élève Z comprend l'attente de P et donne à l'oral une égalité que P compte écrire. Au Tdp 9, munie d'une ardoise, elle demande l'attention des quatre élèves en les interpellant. Au Tdp 11, elle valide une seconde fois ce que les élèves ont validé sur le grimoire : une demi araignée est égale à trois sixièmes d'araignée. Elle écrit cette égalité en chiffres sur l'ardoise et la lit à voix haute. Elle demande ensuite à C quelle égalité Z et lui viennent d'établir pour la raie. Elle demande de nommer la fraction que

C désigne par le pronom « ça ». P tient à conclure l'atelier mais les élèves ont du mal à se concentrer car les élèves des autres ateliers se préparent à tourner.

La manipulation qui consiste à superposer des surfaces égales ne suffit pas car l'enjeu est d'apprendre une égalité. Dans cette optique, un travail sur un écrit mathématiques aurait certainement été intéressant à mettre en place afin d'obtenir des élèves, A et C tout particulièrement, de ne pas se restreindre à la seule manipulation. Car, comme le souligne Briand (2021), la manipulation ne doit pas se borner à un constat, elle doit engager un travail cognitif. Poisard et al. (2022) soulignent les apports d'une « fiche-élève » lors des jeux mathématiques en classe : pour le professeur, elle facilite le processus de dévolution et d'institutionnalisation, pour l'élève elle permet l'identification de la connaissance en jeu.

Dans cette séance, P insiste auprès de ces élèves en difficulté pour exposer la nouvelle connaissance, à savoir une égalité de quantités entre fractions, la fraction $\frac{3}{6}$ et la fraction $\frac{1}{2}$ en référence à l'araignée, la fraction $\frac{1}{3}$ et la fraction $\frac{3}{9}$ en référence à la raie. Comme le décrit Allard (2015), c'est une étape dans le long processus d'institutionnalisation. Mais, comme le pointent Houle et Giroux (2019), P fait l'impasse sur la structure multiplicative. À cette occasion, elle pourrait, en s'appuyant sur le matériel mettre en évidence la relation multiplicative entre 3 et 6, qui est la même qu'entre 1 et 2, en disant que « 3 est la moitié de 6 » tout comme « 1 est la moitié de 2 » ou que « 6 est le double de 3 » tout comme « 2 est le double de 1 ». Elle pourrait également mettre en évidence la relation multiplicative qui existe entre les deux fractions en disant par exemple qu'il y a « trois fois plus » (ou « trois fois moins ») de pièces dans une araignée que dans l'autre.

4.4 Les entretiens individuels

Dans le but de comprendre les réussites et difficultés des trois élèves repérés pour notre étude, nous proposons à chacun d'entre eux un entretien individuel et analysons plus finement les procédures utilisées en lien avec l'équivalence de fractions. Les entretiens individuels de A, M et C ont tous lieu le même jour, une semaine après la séance 7, sur le temps de la pause méridienne. Ils sont conduits par la chercheuse qui est également la professeure de ces trois élèves. Ils sont retranscrits dans leur totalité en annexes 15, 16 et 17. Les trois cartes 11, 16 et 35 sont proposées dans cet ordre.

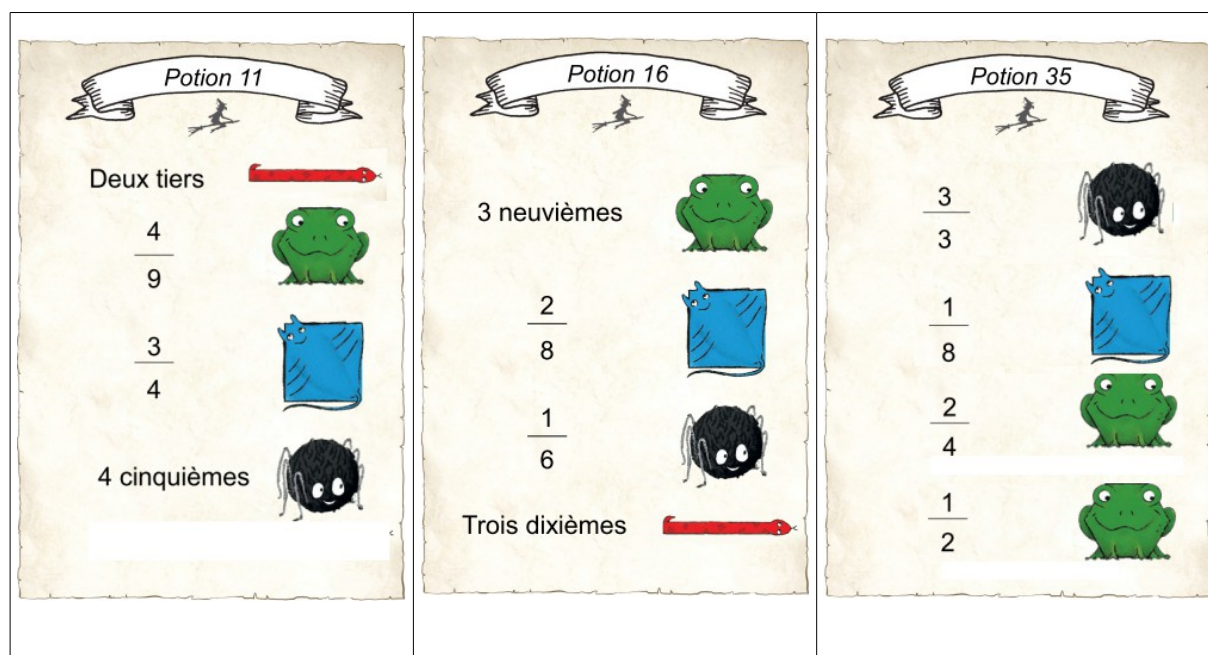


Tableau 12 : cartes de l'entretien individuel

4.4.1 Procédures utilisées pour les cartes 11, 16 et 35

Voici dans l'ordre les procédures utilisées par chacun des 3 élèves pendant leur entretien individuel. Nous renvoyons le lecteur au codage de ces procédures présenté dans la partie 3.4.

Carte	Élève A	Élève C	Élève M
11	Serpent : C11S Grenouille : C11Ga Raie : C11Ra Araignée : C11a	Serpent : C11S Grenouille : C11Ga Raie : C11Ra Araignée : C11a (erreur)	Serpent : C11S Grenouille : C11Ga Raie : C11Ra Araignée : C11a
16	Raie : C16Ra (puis C16Rc) Araignée : C16Aa Serpent : C16Sa Grenouille : C16Gc (erreur)	Raie : C16Ra Araignée : C16Aa Serpent : C16Sa Grenouille : C16Gc	Raie : C16Rc Araignée : C16Aa Serpent : C16Sa Grenouille : C16Gc
35	Raie : C35R Grenouille : C35G1/2 (erreur) Grenouille : C35G2/4 Araignée : C35A (erreur)	Raie : C35R Araignée : C35Ac Grenouille : C35G2/4 Grenouille : C35G1/2c	Raie : C35R Grenouille : C35G2/4 Grenouille : C35G1/2b Araignée : C35A (erreur)

Tableau 13 : procédures mobilisées par chaque élève pour les cartes 11, 16 et 35

Après avoir présenté rapidement les procédures de la carte 11, nous analysons, carte par carte, les procédures en gras car en lien avec l'équivalence de fractions.

4.4.2 Carte 11

Pour la carte 11, nous constatons que les trois élèves mobilisent une procédure à peu de chose près identique. Ils décrivent très bien cette procédure, à savoir repérer l'animal dont la partition correspond au dénominateur de la quantité demandée puis prendre autant de parts qu'indiquées par le numérateur. C'est le « stade procédural » décrit par Pantziara et Philippou (2012). Alors qu'elles existent, aucun des trois élèves ne propose d'autres solutions pour répondre aux quantités de grenouille, raie ou araignée. Pour l'araignée, C confond les cinquièmes et les sixièmes, faute de les avoir comptés au préalable. La superposition sur le grimoire lui renvoie son erreur qu'il analyse de lui-même correctement. Il modifie sa stratégie et compte ensuite systématiquement les parts pour chaque ingrédient.

4.4.3 Carte 16, $3/9=1/3$ pour la grenouille, fractions conformes

Nous constatons que les trois élèves utilisent la procédure C16Gc pour cette carte, à savoir prendre la pièce $1/3$ de grenouille pour la quantité demandée $3/9$ de grenouille. La rupture de contrat est ici de demander de prendre une seule pièce alors que les procédures précédentes impliquaient de prendre autant de pièces que le nombre indiqué par le numérateur. Les trois élèves prennent la pièce pré-découpée un tiers et établissent ainsi une égalité de quantités, qu'ils contrôlent tous les trois sur le plateau de jeu, avant de la valider sur le grimoire des solutions. Il est toutefois important de noter ici que l'élève A ne nomme pas le tiers pré-découpé « un tiers » mais « un demi ». A ce stade de l'entretien, la chercheuse pense que A confond le mot « tiers » et « demi ».

L'équivalence dans l'unité, quelle que soit l'unité

Pour l'ingrédient grenouille de la carte 16, M valide l'égalité $1/3$ de grenouille = $3/9$ de grenouille en superposant sa solution à la solution du grimoire. Voici un extrait entre les temps 16'48 à 18'13. Suivant la progression des questions de l'entretien, la chercheuse lui demande s'il n'existe pas ailleurs sur le plateau un autre animal qui vérifierait cette égalité. M cherche sur d'autres kits une surface qui recouvrirait trois neuvièmes de grenouille. La chercheuse précise ce qu'elle demande. M manifeste sa compréhension.

Tdp	Loc	
1	P:	d'accord est-ce qu'il y a pas un autre endroit sur le plateau de jeu avec un autre ingrédient où tu retrouves un peu cette même égalité entre trois neuvièmes et un tiers. Est-ce qu'il y a pas un autre ingrédient où tu pourrais trouver cette égalité? un autre animal où tu pourrais trouver, un autre animal, où tu pourrais trouver cette même égalité? [M regarde le plateau de jeu] dis-moi ce qui se passe dans ta tête. Qu'est ce que tu cherches là?
2	M	un autre animal qui ait la même égalité [M regarde le kit araignée et revient sur la grenouille]
3	P	c'est à dire?
4	M	c'est à dire la même forme

Tdp	Loc	
5	P	la même forme c'est à dire? Est-ce qu'ils ont la même forme? ça [P montre la raie] cette raie elle a la même forme que la grenouille ? [elle montre la grenouille]
6	M	nan
7	P	C'est pas la même forme vraiment (.) qu'on cherche. Qu'est-ce qu'on cherche?
8	M	on cherche ceux qui sont bien au dessus on est
9	P	qui se superposent tu veux dire?
10	M	Oui
11	P	alors, vas-y essaie. Regarde bien.
12	M	[M prend une demi raie et la pose sur trois neuvièmes de grenouille] nan
13	P	toi tu cherches. (.) dis-moi ce que tu cherches.(.) tu cherches en fait un ingrédient qui irait sur trois neuvièmes de grenouille
14	M	Oui
15	P	moi je te dis, est-ce qu'il y a pas un autre animal... [P pause sa main, doigts écartés, sur les kit raie, araignée et serpent]
16	M	Ah ! [elle acquiesce]
17	P	...où tu retrouverais trois neuvièmes de cet animal qui est égal à un tiers de cet animal
18	M	Hum hum

Tableau 14 : Entretien M, carte 16, proportionnal equivalence, 16'48 à 18'13

Au Tdp 3, P constate que M recherche ailleurs que sur le kit grenouille une forme qui recouvrirait les 3/9 de grenouille. Il est vrai que, que l'on prenne un tiers d'araignée ou trois neuvièmes de grenouille, on prend la même proportion d'ingrédient. $1/3=3/9$. C'est ce que Pedersen et Bjerre (2021) nomment *Proportionnal equivalence*. Par contre, et comme le soulignent ces auteurs, s'il est vrai que la *Unit equivalence* implique la *Proportionnal equivalence*, l'inverse n'est pas vrai. La *proportionnal equivalence* n'implique pas forcément la *Unit equivalence*.

De plus, Houle et Giroux (2019) rappellent que « c'est à partir de 10-11 ans, si les situations proposées le permettent, que les élèves seraient en mesure de comprendre qu'une fraction peut exprimer différentes quantités selon le tout de référence auquel elle se rapporte. »

Dans cet extrait, M interprète la consigne de P comme la recherche d'un tiers d'un autre animal pour recouvrir les trois neuvièmes de grenouille (Tdp 14). Dans le milieu de la situation, les deux surfaces, un tiers d'araignée et trois neuvièmes de grenouille, ne se recouvrent pas. Pour remédier à cela et pour travailler la *Unit equivalence* vraie quelle que

soit l'unité, P précise l'unité « trois neuvièmes **de cet animal** qui est égal à un tiers **de cet animal** » (Tdp 17). Quelques secondes plus tard, voici l'extrait entre les temps 18'38 et 19'54, où P demande à M de regarder le kit raie de plus près.

Tdp	Loc	
1	P:	D'accord. est ce qu'il y a des neuvièmes ici? [P montre le kit raie]
2	M	[M se penche sur le kit raie pour compter les neuvièmes de raie] <i>un deux trois quatre cinq six sept huit neuf. oui</i>
3	P	Alors est-ce que tu peux retrouver sur la raie ...
4	M	oui
5	P	... la même égalité que tu viens de trouver avec la grenouille ?
6	M	mm [elle prend un tiers de raie et le dépose sur trois neuvièmes de raie] celle-là
7	P	ok donc qu'est-ce que tu peux déduire en maths ? (.) dans les fractions là tu viens de trouver une égalité de maths. En maths tu viens de trouver quelque chose
8	M	[M s'empare du stylo et de l'ardoise] Ouais (.) on peut mettre neuf heu trois neuvièmes [elle écrit sur l'ardoise 3/9] est égal à [elle écrit le signe égal à droite de la fraction 3/9] (...) à trois (..) à (..) [P replace le tiers sur les trois neuvièmes]trois neuv agh (.) un troisième
9	P	tu es sûr qu'on dit troisième?
10	M	un tiers [M écrit = 1/3]
11	P	mets la barre de fraction au même niveau que l'autre. ok donc là tu viens de trouver ça [P montre l'égalité sur l'ardoise] là [elle montre le kit grenouille] et là [elle montre le kit raie]
12	M	oui
13	P	très bien

Tableau 15 : Entretien M, carte 16, unit equivalence, 18'38 à 19'54

Pour identifier les neuvièmes de raie, on remarque ici, (Tdp 2) le recours de M à l'addition plutôt qu'à la multiplication, qu'elle ne mobilise que très rarement en classe. L'équivalence $1/3 = 3/9$ est validée par M en amont de cet extrait avec la grenouille, puis ici avec la raie. M n'est plus dans l'action, à savoir la superposition de pièces sur les kit, mais dans la formulation du savoir qu'elle exprime difficilement à l'oral (Tdp 8) mais qu'elle écrit facilement. Sur l'ardoise, une égalité sans référence à l'unité, est le fruit de son activité mathématique, validée par P.



Figure 45 : Entretien M $1/3$ de grenouille sur $3/9$ de grenouille 14'45



Figure 46 : Entretien M un tiers de raie sur trois neuvièmes de raie 18'57

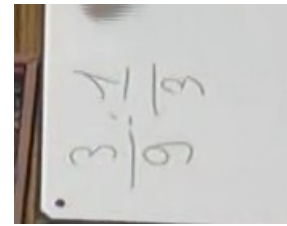


Figure 47 : Entretien M $1/3=3/9$ 19'42

L'équivalence de fractions établie pour un ingrédient est une égalité de quantité ou de taille, en référence à une représentation. Pour Allard (2015), « La question est en fait d'étudier comment on passe des nombres « concrets » en référence avec une représentation, à des nombres « abstraits », sans référence à une quelconque unité ou représentation. ». Apprendre que l'équivalence est vérifiée quelle que soit l'unité, c'est commencer ce passage.

4.4.4 Carte 16, $2/8=1/4$ pour la raie, fractions conformes

Il est intéressant d'analyser les 3 procédures différentes mobilisées pour l'ingrédient raie. La chercheuse n'a pas modifié la consigne pour cet ingrédient et ne demande pas une seule pièce pour l'ingrédient raie. Alors que C utilise la procédure C16Ra, la même procédure que pour les ingrédients de la carte 11, et qu'il ne revient pas sur cet ingrédient suite à la validation sur le grimoire, nous nous intéressons aux procédures de A et de M.

Voici un premier extrait de l'entretien de A, qui a pris deux huitièmes de raie et qui au moment où il découvre la solution sur le grimoire, réalise qu'il aurait pu prendre un quart de raie.

Tdp	Loc	
1 10'41	A	[A ferme son chaudron, ouvre le grimoire à la solution 16 et superpose ses pièces pour recouvrir les surfaces de la solution 16] trois neuvièmes [il superpose un tiers] c'est bon
2	P	trois dixièmes
3	A	[il superpose les pièces sur la solution pour le serpent] c'est bon. [il regarde la solution pour la raie]
4 11'12	A	ah on pouvait prendre un quart pour la raie
5	P	ben j'sais pas. Regarde. [A superpose les deux huitièmes sur la surface solution pour la raie] c'était quoi qui était demandé pour la raie?
6	A	deux huitièmes

Tdp	Loc	
7	P	tu as bon avec deux huitièmes ou pas?
8	A	Mm
9	P	et tu as dit quoi? tu as dit que tu pouvais prendre quoi?
10	A	un quart [il prend un quart de raie sur le plateau de jeu et le superpose à la solution] ça marche aussi
11	P	donc (.) qu'est-ce que tu dirais en maths comme égalité de fractions?
12	A	Heu (...)
13	P	tu viens de dire quelque chose [elle montre la quantité demandée pour la raie sur la carte 16]
14	A	deux huitièmes
15	P	une égalité (.) [A prend le crayon Véléda que lui tend P et l'ouvre] qu'est-ce que tu pourrais en déduire là? tu viens de déduire quelque chose de bien mais tu peux l'écrire en maths
16 ^{12'00}	A	au lieu de prendre deux huitièmes on peut prendre un quart

Tableau 16 : entretien A, carte 16, rétroaction du grimoire, de 10'41 et 12'00

Au moment de superposer ses deux huitièmes de raie sur le grimoire pour valider sa réponse, A constate au Tdp 4 que la surface solution pour $\frac{2}{8}$ de raie est la même que pour $\frac{1}{4}$ de raie. Grâce aux rétro-actions du grimoire des solutions, il en déduit une action qu'il aurait pu faire au Tdp 16, une manipulation qui n'est pas formulée en terme d'égalité de fractions. P lui demande d'en déduire quelque chose.

Tdp	Loc	
1 ^{12'00}	P	donc ça veut dire quoi en maths? (...) laisse-toi aller avec l'écriture. c'est bien ce que tu as dit et c'est ça mais comment en maths tu peux l'écrire?
2	A	je sais pas
3	P	tu sais pas d'accord (.) tu m'as dit deux huitièmes on aurait pu prendre un quart donc en fait cette surface là [elle montre la surface de la solution] elle est égale à cette surface là. Comment ça se dit en maths comment ça s'écrit en maths?
4	A	deux huitièmes
5	P	écris deux huitièmes,[A écrit $\frac{2}{8}$ sur l'ardoise] même si tu te trompes c'est pas grave Est-ce qu'il y a un signe
6	A	heu là [A montre le trait de fraction]
7	P	le trait de fraction c'est un signe pour écrire la fraction (.) ça d'accord (.)

Tdp	Loc	
		mais tu m'as dit quelque chose (.) tu m'as dit deux huitièmes et tu m'as dit un quart. [elle écrit $1/4$ à côté de $2/8$] tu vois la surface de $2/8$ tu m'as dit elle est égale à la surface de
8	A	un quart
9	P	tu es d'accord ou pas? Tu penses ça aussi?
10	A	mm ouais
11	P	et donc c'est la même surface. C'est la même chose. Est-ce qu'il y a un signe en maths qui montre que c'est la même chose, que c'est le même nombre, tu sais ou pas ? T'as l'droit de me dire je sais pas
12	A	non je sais pas
13 13'30	P	c'est le signe égal [P écrit le signe égal sur l'ardoise la fraction $2/8$ et la fraction $1/4$] ok [A sourit et acquiesce] en maths le signe égal ça veut dire que ce qui est à gauche (.) [elle pointe la fraction à gauche du signe égal sur l'ardoise] c'est la même chose que ce qui est à droite [elle pointe la droite du signe égal] ok

Tableau 17 : entretien A, carte 16, le signe = , de 12'00 et 13'30

Savoir utiliser le symbole « = » est une compétence en cours d'acquisition au cycle 3. (Bellian et al., 2010). La relation d'équivalence qu'il implique ne va pas de soi et est un savoir plutôt transparent. Ce symbole intervient dans la pensée algébrique, en particulier dans le processus de preuve. De plus, chez certains élèves en difficulté, il existe encore une confusion entre le signe « = » et les signes opératoires « + » « - » ou « x ». C'est le cas de l'élève A qui n'est pas à l'aise avec ce signe. Traduire le langage naturel en langage mathématique représente une difficulté pour lui.

De son côté, pour l'ingrédient raie, M utilise très vite la procédure C16Rc.

Tdp	Loc	
1 13'00	M	Pour (.) alors pour la raie je mets huit <i>deuxièmes</i>
2	P	Attention relis bien la fraction
3	M	deux huitièmes. Du coup il <u>en</u> faut [elle compte les huitièmes de raie sur le kit raie] <i>un deux trois quatre cinq six sept huit</i> . C'est ceux là. Du coup j' <u>en</u> prends deux. Ah non, j'peux prendre comme <u>ça</u> [elle montre un quart de raie] parce que c'est égal à <u>ça</u> [elle montre deux huitièmes]
4	P	ah bon? pourquoi?

Tdp	Loc	
5	M	parce que là il y <u>en</u> a deux [elle montre les huitièmes pré-découpés]et il <u>en</u> faut deux et <u>là</u> [elle prend un quart] quand on pose par dessus [elle superpose un quart de raie sur deux huitièmes de raie] c'est exactement la même
6	P	la même surface
7	M	oui
8	P	donc
9	M	donc c'est <u>ça</u> [elle montre un quart pré-découpé de raie]
10	P	<u>Ça</u> (.) c'est quoi <u>ça</u> ?
11	M	c'est un (.) quatrième
12	P	t'es sûre qu'on dit comme ça?
13	M	[M se penche vers le kit raie] un quart
14	P	très bien (.) ah bon d'accord donc tu as vérifié?
15	L	oui

Tableau 18: entretien M, carte 16, rétroaction du plateau de jeu, de 13'00 à 14'00

M anticipe rapidement une égalité de quantités entre un quart de raie et deux huitièmes de raie et contrôle grâce à la superposition sur le plateau de jeu. Elle ne formule pas la nouvelle connaissance, elle dit le mot « égal » mais ne désigne les pièces que par des pronoms « en » et « ça ». Elle réussit d'elle même à se corriger lorsqu'elle est reprise plusieurs fois par la chercheuse.

4.4.5 Carte 35, $1/2=2/4$ pour la grenouille, fraction non conforme

Pour la carte 35, nous nous intéressons aux trois procédures différentes utilisées pour prélever $1/2$ grenouille. Nous rappelons que sur le kit grenouille, aucune grenouille n'est partagée en deux parties égales. Nous qualifions donc la fraction $1/2$ de non conforme à une partition proposée sur le kit grenouille.

Le cas de A, l'importance du partage équitable

Pour la carte 35, A prend un sixième pré-découpé de grenouille pour la quantité $1/2$ grenouille. La chercheuse l'interroge sur le choix de cette pièce.

Tdp	Loc	
1 18'50	P	et pourquoi tu as pris ça? moi j'ai une question pourquoi tu as pris cette pièce là? [elle montre le sixième de grenouille] C'était pour prendre quoi, tu dis?
2	A	un demi
3	P	un demi. Et c'est quoi un demi?
4	A	c'est la moitié d'une grenouille
5	P	tu as pris la moitié d'une grenouille là? [P sourit à A puis redevient sérieuse.] Est-ce que tu as pris la moitié d'une grenouille?
6	A	heu (.) c'est ça? [sur le kit grenouille, il montre la pièce deux tiers de la grenouille partagée en deux parties non égales.]
7	P	c'est la moitié ça d'une grenouille?
8	A	ben j'pense que oui
9	P	tu penses que oui. Comment tu peux faire pour vérifier?
10	A	(...)
11	P	tu sais ou pas comment faire pour vérifier?[A fait non de la tête] non (.) la moitié c'est quoi la moitié de quelque chose? c'est quand on partage en
12	A	en deux [hésitant]
13	P	en deux ouais mais comment ils sont tes morceaux? ils sont égaux oui ? et c'est le cas ici?
14	A	heu non [hésitant]
15 ^{19'45}	P	Est-ce que ces deux morceaux sont égaux? [elle montre la grenouille partagée en 2: un tiers et deux tiers]
16	A	oui
17	P	oui? celui-là [elle montre un tiers] et celui-là [elle montre deux tiers] ils sont égaux ? Ouais (.) pourquoi? parce que tu en as un là et un là, c'est ça? [A acquiesce] est-ce que la surface est la même?
18	A	oui
19 20'00	P	oui. Tu penses que la surface là [elle montre un tiers], c'est la même que celle-là [elle montre deux tiers et A fait oui de la tête] d'accord. Alors maintenant tu vérifies dans le grimoire. trente cinq, j'avais te la retrouver.

Tableau 19 : entretien A, carte 35, partage équitable, de 18'50 et 20'00

L'erreur constatée, prendre un pièce de grenouille partagée en deux parties non égales, était attendue pour cette quantité d'ingrédient. Mais l'erreur était attendue parce que « un demi »

écrit « $1/2$ » sur la carte, est une nouveauté pour les élèves de CM1, et non pour « la moitié de ». On constate entre le Tdp 3 et 4 que A sait que « un demi c'est la moitié ». P fait d'abord l'hypothèse que A sait ce qu'est la moitié d'un objet mais qu'il est gêné par la fraction $1/2$ puisqu'elle sourit de façon complice à A au Tdp 5. Mais on constate sa surprise lorsqu'elle réalise que cette hypothèse est fautive. A prend très rapidement conscience que P attend une autre réponse de sa part. Il lui en propose une autre, tout aussi erronée : il prend la pièce pré-découpée $1/3$ de grenouille sur la grenouille partagée en deux parties : $1/3$ et $2/3$. Pour l'élève A, quatre pièces différentes peuvent être égales à $1/2$:

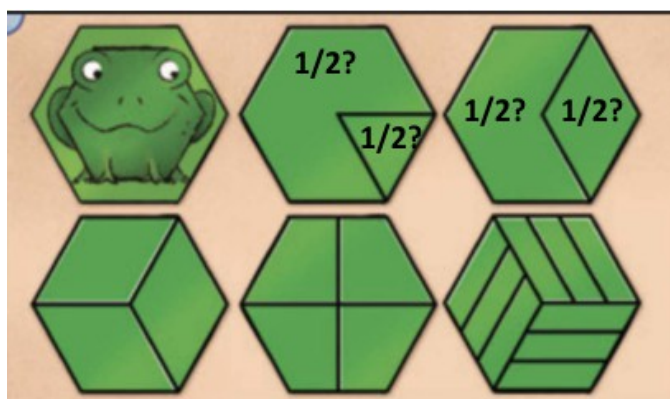


Figure 48 : entretien A, partage, plusieurs pièces égales à $1/2$

De plus, pour l'élève A, une même surface peut être nommée dans un cas $1/3$ dans un autre $1/2$:

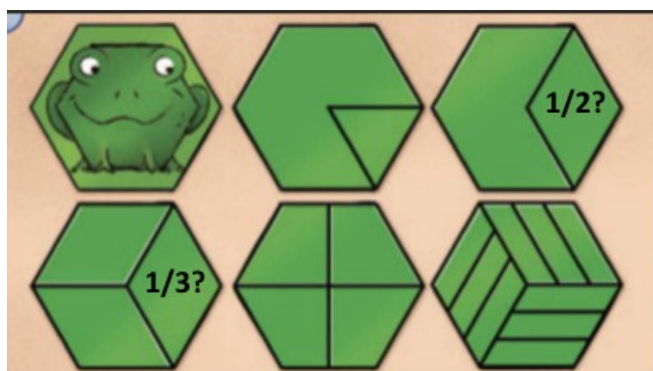


Figure 49 : entretien A, partage, une même surface nommée différemment

Cette erreur a également un impact sur l'équivalence de fractions. En effet, lorsque l'élève A établit une équivalence de fractions pour l'ingrédient grenouille en superposant la pièce un tiers pré-découpée située au dessus de trois neuvièmes pré-découpés, il établit peut être une

équivalence entre $\frac{3}{9}$ et $\frac{1}{2}$. La verbalisation joue ici un rôle très important pour évaluer sa compréhension.

Pour l'élève A, à partir du moment où un objet est partagé en deux, il y a égalité, puisque il y a d'un côté un morceau et de l'autre un autre morceau. $1=1$. Cette logique laisse entendre que A rencontre des difficultés à établir des équivalences entre fractions puisque pour lui il est difficile d'établir que 1 demi est égal à 2 quarts. $1 \neq 2$ On retrouve ici la rupture de contrat évoquée plus haut dans l'épisode Ly de la séance 5, à laquelle A n'a pas assisté.

Dans ses travaux, Allard (2015) précise une partie importante de la compréhension de l'interprétation partie-tout, incluse dans toutes les autres interprétations : « Il est nécessaire de comprendre que les $\frac{1}{n}$ parts, n non nul, d'une unité choisie sont équivalentes. » Comme le rappellent Houle et Giroux (2019) en citant les travaux de Kieren (1988), « les tâches de partition sont fondamentales dans la construction de la notion de fraction. » Elles précisent également que « la nécessité d'une partition à la fois égale et exhaustive du tout n'est pas établie d'emblée par les élèves. » Des situations de partage équitable, comme celle proposée dans la brochure de l'IREM de Rennes (Bellian et al, 2010), sont à aborder en remédiation pour l'élève A qui, de plus, a besoin de travailler le partage et la comparaison de grandeurs concrètes et motivantes pour lui. (gâteau, pizza, billes, ...) où l'équité jouera un rôle important. Il est à préciser que le dossier d'accompagnement de l'Atelier des Potions propose des activités de partage¹² que P n'a pas retenues dans sa séquence.

Lors de son entretien individuel avec l'élève A, nous constatons que la chercheuse change de posture et se positionne en tant qu'enseignante à plusieurs reprises, quand elle découvre les difficultés de l'élève.

Le cas de C, la comparaison et l'importante du langage.

Pour une demi-grenouille, C commence par toucher la grenouille pré-découpée en deux parties inégales un tiers/deux tiers. Il se ravise, désigne les deux quarts de grenouille en les comparant à la demi-araignée. Il choisit les deux quarts et mise deux points de magie sur la validité de sa réponse pour la carte 35.

Tdp	Loc	
1 20'56	P	OK et quoi d'autre?
2	C	un deuxième

¹² « À la recherche de la pièce perdue » p 38 du dossier d'accompagnement.

Tdp	Loc	
3	P	un demi
4	C	un demi [il dirige sa main vers la grenouille partagée en deux parties inégales un tiers/deux tiers puis la retire. Il regarde attentivement le kit grenouille, le doigt sur la bouche]
5	P	(...) qu'est-ce que tu (.) qu'est-ce qui te gêne là? ou qu'est-ce que tu te dis vas-y dis-moi ce qui te passe par la tête
6	C	mm ba y'en pas d'demi
7	P	voilà c'est pas partagé en deux parties égales tu as raison. Au début tu as voulu prendre ça [elle pointe la grenouille partagée en deux parts inégales un tiers/deux tiers] pourquoi tu as voulu prendre ça?
8	C	parce qu'il y en a deux [sourire]
9	P	voilà j'ai vu que tu as hésité et hop tu as enlevé ton doigt Tu es allé là puis après tu t'es dit ah non pourquoi tu t'es dit ah non?
10	C	parce que c'est pas de la même taille
11	P	très bien c'est pas la même surface très bon réflexe. Mais là on te demande quoi? une demi grenouille est-ce que tu vois une demi grenouille?
12	C	c'est ça moi j'vois [il touche deux quarts qu'il reste sur le kit grenouille]
13	P	toi tu penses que c'est ça?
14	C	ouais les deux
15	P	pourquoi?
16	C	parce que là [il montre l'araignée] c'est deux heu (.)
17	P	ouais, deux quoi?
18	C	c'est deux (.) tiers heu nan deux (.)
19 ²²²⁰	P	Demis on dit.
20	C	deux demis
21	P	ouais tu as raison (.) alors du coup qu'est-ce que tu vas prendre
22	C	ben les deux
23	P	deux quarts du coup
24	C	ouais
25	P	deux quarts tu penses que c'est un demi quoi ?
26	C	ouais [il dépose deux quarts dans le chaudron]
27	P	tu as fini? alors est-ce que tu es sûr de toi ou pas? [C touche les points magie sur le plateau] lequel?
28		ouiii [laisse traîner le oui, peu sûr de lui] j'prends lui [il prend trois points de

Tdp	Loc	
		magie, P et C sourient] ou deux [il repose les trois points et prend le jeton deux points de magie qu'il dépose dans le chaudron]

Tableau 20 : entretien C, carte 35, comparaison et langage, de 20'56 à 22'20

Au Tdp 4, C a le réflexe de toucher une part d'une grenouille partagée en deux parties inégales un tiers/deux tiers. C'est l'erreur commise par l'élève A et qui rappelle l'importance de travailler le partage équitable. Au Tdp 6, C formule le problème posé par le milieu : il n'existe pas sur le plateau de partage de grenouille en deux parties égales. La chercheuse et lui reviennent entre les Tdp 7 et 11 sur cette erreur qu'il a failli commettre. Ensuite, C anticipe une solution (Tdp 12) grâce à la comparaison sur le kit araignée (Tdp 16). Il constate les deux demis dans une araignée mais ne peut pas effectuer de contrôle sur l'araignée car elle n'est pas partagée en quatre quarts. Le contrôle par comparaison serait plus aisé à effectuer sur la raie où deux quarts peuvent se superposer sur une demi-raie. Ici seule la solution du grimoire pourra valider sa solution. Le nombre de points magie qu'il mise témoigne de la faible confiance qu'il a dans sa réponse. Tout au long de cet extrait, nous constatons que l'élève C est freiné par ses difficultés de langage et que la communication est difficile. Il touche les pièces sans les nommer et ne mémorise pas les mots « demi » et « quart ». Avec le mot « tiers », ces exceptions constituent en quelque sorte une rupture du contrat de lecture des fractions qui est de donner un suffixe « ième » au nombre du dénominateur, rupture qu'il accepte mais ne mémorise pas. L'égalité de fractions $2/4=1/2$ n'est pas formulée car il évite le plus possible d'avoir à formuler quelque chose de très difficile à effectuer pour lui.

Le cas de M, le contrôle par le partage équitable

Pour la quantité deux quarts de grenouille de la carte 35, M a pris les deux quarts pré-découpés situés sur la partie haute de la grenouille. Les deux quarts restants sont donc sur la moitié basse de la grenouille :

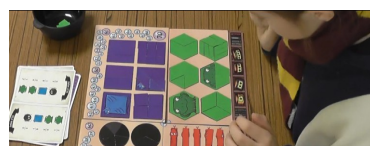


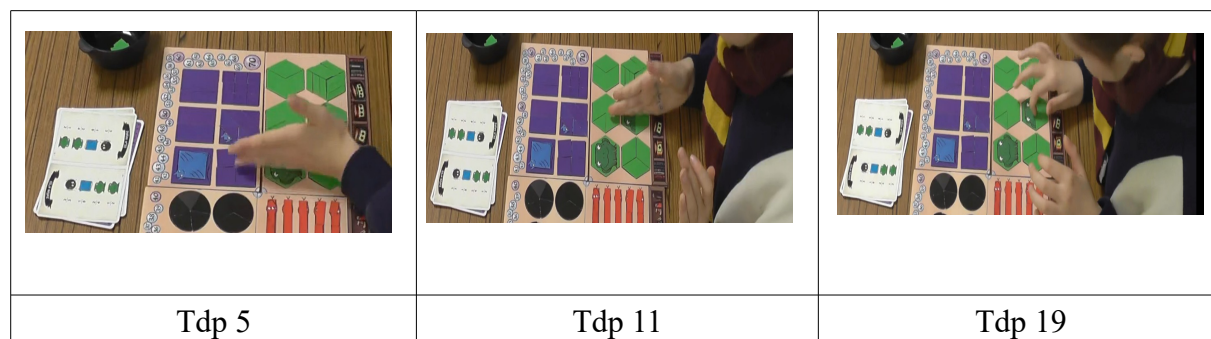
Figure 50 : Tdp 1

Tdp	Loc	
1 22:35	M	Après un (.) demi
2	P	une demi grenouille. une demi grenouille
3	M	et ben y en a pas.
4	P	(.) en tout cas c'est (.) Cherche bien une demi grenouille
5 22:49	M	Ça s'rait un demi de ça [elle fait le geste de couper verticalement la grenouille entière avec le tranchant de la main en deux parts égales.]
	P	mm la moitié d'une grenouille
7	M	et vu qu'on n'en a pas (.)
8	P	en tout cas il y a pas là une il y a pas c'est pas partagé en deux parties égales ici [P montre le kit grenouille] mm (.) mais on te demande quand même une demi grenouille
9	M	ah bah tu pouvais faire ça avec ça [M montre les deux quarts restants sur le kit]
10	P	Pourquoi ?
11	M	Ben parce que là tu prenais <u>les deux là</u> ah bah non tu peux faire comme ça [elle prend les deux quarts pré-découpés dans sa main] vu qu'il y a <u>en</u> a deux [elle les replace où ils étaient] avec les autres [elle désigne le chaudron] y <u>en</u> avait deux [elle montre la moitié supérieure de la grenouille.] là tu coupais au milieu [elle partage en deux avec le tranchant de la main encore une fois la coupe est verticale.] C'est égal à [M prend les deux quarts et les pose sur la grenouille entière afin de reconstituer un demi verticalement sur cette grenouille entière. Elle n'y arrive pas]
12	P	T'as le droit de les mettre du côté noir aussi (.) c'est la même surface si ça t'arrange (.) Regarde refait les comme elles étaient là [M essaie mais n'y arrive pas.] Tu t'rappelles plus comment c'était [P sourit]
13	M	Nan [rire]
14	P	Heu comme ça [P replace un quart sur la moitié basse de la grenouille]
15	M	Ah oui c'est vrai [elle place l'autre quart pré-découpé] et là du coup c'était comme ça dessus [elle essaie à nouveau de placer les deux quarts pour avoir une démarcation verticale sur la grenouille entière]
16	P	Pourquoi tu remets là ? c'est la même grenouille ça [elle montre la pièce une grenouille] et ça? [elle montre l'emplacement laissé vide pour une grenouille entière]

17	M	oui
18	P	Bon alors donc
19	M	donc c'est un demi parce que là c'est un demi [avec son doigt elle montre la démarcation horizontale pour partager la grenouille en deux parts égales.]
20	P	c'est coupé en deux parties
21	M	égales [elle prend les deux quarts dans la main]
22	P	de toute façon tu vas regarder si ta solution est bonne avec le grimoire
23	M	Oui [elle dépose les deux quarts pré-découpés de grenouille dans le chaudron.]
24'05		

Tableau 21 : entretien M, carte 35, contrôle par le partage, de 22'35 à 24'05

Pour la demi-grenouille de la carte 35, M utilise la procédure C35G1/2b. Au Tdp 5, nous constatons que M assimile la demi grenouille à un partage équitable en deux parties égales. Seulement ce partage doit s'effectuer verticalement (Tdp 5) et elle souhaite retrouver cette représentation qu'elle a de la moitié de l'hexagone (Tdp 11). Cependant, la manipulation pour reformer la moitié d'une grenouille s'avère difficile (Tdp 11 et 12). Elle modifie alors sa stratégie et trouve une autre explication en proposant un partage horizontal, cette fois-ci avec le doigt (Tdp 19).



Elle anticipe une réponse en contrôlant par un partage d'abord vertical avec le tranchant de la main, puis horizontal avec le doigt. La validation se fera sur le grimoire. Nous constatons, tout comme pour l'élève C, des difficultés de formulation pour les quarts mais le mot « demi » est pendant l'entretien correctement employé. L'égalité n'est pas formulée.

Les entretiens individuels nous ont permis de mieux appréhender les réussites et les difficultés de ces trois élèves à travers l'analyse de leurs procédures.

Notre question de recherche était de savoir si les élèves allaient rester dans la description de leurs actions (Pantziara et Philippou, 2012), celles-ci étant limitées à du comptage (De Blois,

2017) ou la dépasser et envisager des équivalences entre fractions. Les procédures utilisées par les trois élèves nous montrent qu'ils établissent tous les trois des équivalences à des degrés différents.

- L'élève A sait établir une équivalence dans le langage courant et en décrivant une action si le partage équitable est déjà effectué. La traduction en langage symbolique lui pose problème. En lien avec sa non compréhension du partage équitable, les fractions non conformes à une partition proposée ne sont pas comprises.

- L'élève C est très peu sûr de lui. Il anticipe, superpose pour contrôler puis valide ses réponses pour établir des égalités entre les fractions conformes de la carte 16. Il anticipe, compare avec un autre kit ingrédient, et valide pour établir une équivalence entre une fraction conforme du plateau et une fraction non conforme de la carte 35. La comparaison qu'il effectue laisse entendre qu'il voit l'égalité quel que soit l'ingrédient, quelle que soit la forme de l'unité. Toutefois le langage le freine énormément dans la formulation orale de l'égalité de fractions.

- Bien qu'elle ait également des difficultés avec le langage, l'élève M prend plus de risques. Elle anticipe ses réponses, les contrôle soit par superposition sur le plateau de jeu pour les fractions conformes de la carte 16, soit en utilisant ses mains pour effectuer mentalement un partage pour la fraction non conforme de la carte 35. Elle est également capable de voir que l'égalité est vérifiée dans une autre unité.

4.5 Séance 8

Comme précisé dans la présentation de la séquence (Tableau 4 : synthèse de la séquence), l'atelier de la séance 8 ne concerne pas l'équivalence de fractions mais la décomposition de la fraction supérieure à 1. Cette compétence a été abordée avec le jeu de *l'Atelier des Potions* en groupe classe, lors de la séance 7, et la séance 8 est un entraînement avec d'autres cartes du jeu dont l'objectif est de travailler particulièrement cette compétence (les cartes 20 à 34). L'atelier est semi-dirigé et P circule entre les différents ateliers. Ici son projet didactique est l'entraînement à la décomposition et à l'équivalence de fractions en situation de jeu. Les deux binômes A/C et M/Z jouent l'un face à l'autre. Lors de l'épisode de la carte 29, entre les temps 13'00 et 16'43, nous isolons plusieurs extraits où l'équivalence entre fractions usuelles apparaît.



Figure 51 : Séance 8, carte 29

Nous observons et analysons séparément les interactions à l'intérieur de chaque binôme et commençons par le binôme formé par M et Z.

4.5.1 M et Z pour la carte 29

M et Z ont déjà réalisé les potions 33 et 31. Le binôme est en tête dans la course contre le binôme A/C. Dans l'extrait ci-dessous, entre les temps 13'00 et 14'13, elles commencent par s'occuper des ingrédients raie et araignée.

Tdp	Loc	
1	P:	Dépêchez vous de remettre bien vos pièces (...) vous les remettez bien c'est pas du tout bien mis là (.) vos pièces (..) allez (.) tous les deux [A et C remettent les pièces sur leur plateau de jeu] c'est parti !
2 _{13:19}	M	[tout en se redressant d'un coup sur sa chaise] oui ! (.) c'est parti [P retourne la carte 29] trois neuvièmes [M pose son doigt sur les neuvièmes de raie] un deux trois quatre cinq six sept huit neuf
3	Z	trois [Z prend trois neuvièmes pré-découpés]
4	M	mais nan ça [elle prend un tiers pré-découpé de raie] c'est égal à ça [elle le dépose sur les trois neuvièmes]
5	Z	ben ouais (.) on va prendre ça alors [elle replace les trois neuvièmes pré-découpés sur le kit raie]

Tdp	Loc	
6 _{13:37}	M	on va mettre <u>ça</u> [M dépose un tiers pré-découpé de raie dans le chaudron] Après [elle tire plusieurs fois la langue] trois cinquièmes [elle lève l'index puis le pose sur chaque cinquième pré-découpé d'araignée] un deux trois quatre cinq (.) <u>ça</u> il en faut trois [Z en prend trois] attends attends (.) est-ce qu'il y a une égalité ? [elle lève de nouveau l'index]
7	Z	<u>là</u> [elle touche la pièce deux tiers d'araignée]
8	M	attends fais voir. Pose <u>tout</u> (.) [Z repose les cinquièmes pré-découpés qu'elle avait dans les mains] pose <u>tout</u> pose <u>tout</u> [M et Z commencent à s'agiter sur leur chaise, M jette un regard à P hors champ puis revient au jeu. M a en main la pièce 2/3 d'araignée] cinq troisièmes
9	Z	[avant que M ne pose sa pièce]: nan <u>c'</u> est pas égal à <u>ça</u>
10	M	[M superpose les surfaces]:si
11	Z	nan nan nan nan [M replace la pièce deux tiers d'araignée sur le kit] (.) <u>là</u> [elle essaie de superposer une demi-araignée sur les trois cinquièmes] nan
12	M	nan [Z la repose et M montre les cinquièmes pré-découpés d'araignée] on prend <u>ça</u>
13	Z	mais nan j' <u>en</u> ai un
14 <small>14:13</small>	M	moi j' <u>en</u> ai deux [elles déposent toutes les deux trois cinquièmes prédécoupés d'araignée]

Tableau 22 : séance 8, carte 29, M et Z, de 13'00 à 14'13

La dévolution

L'intervention de P au Tdp1, destinée au binôme A/C, donne un cadrage pour la dernière carte de l'atelier et laisse entendre plusieurs messages : les pièces doivent toutes être remises correctement sur le plateau avant de réaliser une potion, le travail s'effectue à deux en coopération. Le ton plus sec marque une limite à l'agitation qu'elle sent poindre chez le binôme formé par A et C. Comme le souligne Margolinas (2021), « dans les conditions ordinaires, le processus de dévolution se complique car il faut non seulement maintenir l'engagement des élèves dans une situation entièrement déterminée à l'avance, mais aussi réguler, voire modifier, la situation elle-même pour qu'elle continue à correspondre au projet didactique du professeur. » (Margolinas, 2021). Ici, le projet didactique de P est l'entraînement à la décomposition de la fraction supérieure à 1. Elle recherche un équilibre entre le ludique et le didactique, entre mener un jeu et enseigner pour P, entre jouer à un jeu et apprendre pour l'élève.

La réaction de M au Tdp 2 est une réponse à ce recadrage. M a compris certaines attentes de P. L'attente principale de P est de décomposer la fraction $13/10$ mais M privilégie celle de fournir plusieurs solutions pour une même quantité. Elle demande à Z d'attendre avant de prendre trois neuvièmes de raie. Elle semble très investie et trouve tout de suite une alternative. Elle désigne physiquement et propose, sans pour autant le nommer, de prendre un tiers pré-découpé de raie. Elle prévoit une solution et la contrôle sur le plateau en la superposant à trois neuvièmes pré-découpés. Elle la dépose ensuite dans le chaudron. Tout en faisant participer Z, c'est elle qui coordonne toutes les étapes de la procédure pour cet ingrédient. En situation, elle anticipe et vérifie une égalité d'aires, et donc une égalité de fractions, $3/9=1/3$, toutes les deux conformes à des partitions proposées pour la raie.

La formulation de la connaissance

Pour autant, dans ce même extrait, (Tableau 22 : séance 8, carte 29, M et Z, de 13'00 à 14'13) les pronoms « ça » ou « en » utilisés par M et Z désignent aussi bien une pièce du jeu que la surface formée par plusieurs pièces pré-découpées. Si ce n'est pour la lecture des fractions écrites sur la carte (Tdp 2 et 6), les fractions ne sont pas nommées. Dans la formulation « Ça c'est égal à ça. », l'égalité de quantité est reconnue mais pas le nom des fractions.

Lors de son entretien individuel, on avait noté les nombreuses hésitations de M et le fort étayage de P pour l'aider à nommer les fractions. Ici, au Tdp 8, elle inverse le numérateur et le dénominateur en nommant la fraction « cinq troisièmes » au lieu de « trois cinquièmes ». Elle commence par lire le nombre situé sous le trait de fraction puis le nombre sur le trait de fraction auquel elle ajoute le suffixe -ième. Elle n'est pas reprise par Z qui ne nomme pas les fractions elle non plus. Cette confusion, constatée chez M à de nombreuses reprises tout au long de la séquence, engendre une confusion dans le sens donné au numérateur et au dénominateur.

Les rétroactions du milieu : la comparaison de $3/5$ et $2/3$.

Toujours dans un souci de proposer une autre solution pour $3/5$ d'araignée, M recherche une égalité sur le kit araignée (Tdp6). Lorsque Z propose, sans la nommer, la pièce pré-découpée $2/3$ d'araignée (Tdp 7), M insiste sur le contrôle de cette intuition (Tdp 8). A deux, elles établissent la preuve, par superposition sur le kit araignée, que ces deux aires, pourtant très proches, ne sont pas égales.¹³ M tente ensuite de superposer un demi sur trois cinquièmes pré-découpés et renonce vite à cette solution pour revenir sur les trois cinquièmes pré-

¹³ La démonstration via la mise au même dénominateur interviendra plus tard dans leur scolarité.

découpés. Ceci est une première étape vers le savoir, car sont-elles capables de nommer la pièce 2/3 ?

Intervention de P

Lorsque P intervient à la fin de la réalisation de la carte 29, entre les temps 15 '30 et 16'11, elle s'approche de la table, s'accroupit et interroge M et Z pour l'ingrédient serpent. Elle leur demande de formuler la connaissance qui correspond à leur réponse.

Tdp	Loc	
1 ^{15'30}	P:	Attendez (.) vous êtes tous prêts ?
	Tous	oui
3	Z	vingt neuf [elle regarde la solution 29 du grimoire] oh
4	M	[M lui prend le grimoire] alors vingt neuf [M prend le serpent que lui tend Z] on a pas eu bon
5	Z	mais il reste les <u>petits</u>
6	M	ah oui c'est vrai
7	P	[s'accroupit devant M et Z] c'était combien qui était demandé là, M ?
8	M	mm [elle lit la carte] dix treizièmes [P baisse les épaules en faisant la moue]
9	Z	treize
10	P	treize quoi ?
11	ZetM	[regardent la carte] treize dixièmes
12	P	treize dixièmes (.) Et alors (.) vous avez proposé quoi vous ?
13	M	heu un serpent
14	P	Pourquoi ?
15	M	parce que on avait pas assez et du coup
16	Z	est égal à un
17	M	du coup dix dixièmes (.) dix dixièmes est égal à un serpent (..) plus heu trois (..) trois (..) [M regarde le kit serpent] trois dixièmes
18	Z	égal à treize dixièmes
19 16'11	P	d'accord ok

Tableau 23 : Tableau 9 : séance 8, carte 29, M et Z, de 15'10 à 16'11

Là encore, les pièces ne sont tout d'abord pas désignées par des fractions mais par des pronoms, ici les « petits » du tdp 5 sont les dixièmes. On constate que la présence de P est indispensable pour nommer les fractions et formuler la décomposition de la fraction

supérieure à 1. Cette décomposition implique une égalité entre la fraction 10/10 et le nombre entier 1 que M formule au Tdp 17, avec la référence au représentant de l'unité. Là encore c'est une étape vers le savoir car la connaissance est formulée uniquement en présence de P et est très contextualisée. Au Tdp 19, P valide une deuxième étape derrière la solution physique, à savoir les pièces choisies pour le serpent qui correspondent bien à la solution du grimoire. Elle valide la décomposition donnée par M et Z qui correspond à son projet didactique. Cette validation fait partie du processus d'institutionnalisation.

4.5.2 A et C pour la carte 29

Observons et analysons à présent un extrait du côté du binôme A/C. A commence par prendre seul la quantité demandée pour la raie puis à deux, ils coopèrent pour les ingrédients suivants.

Tdp	Loc	
1 ^{13/10}	P:	Dépêchez vous de remettre bien vos pièces (...) vous les remettez bien c'est pas du tout bien mis là (.) vos pièces (..) allez (.) tous les deux [A et C remettent les pièces sur leur plateau de jeu] c'est parti ! [P retourne la carte 29]
2	A	[A commence par prendre trois neuvièmes pré-découpés de raie] attends ! [il pose un tiers sur les trois neuvièmes puis dépose la pièce un tiers de raie dans le chaudron. Il montre ensuite sur la carte la quantité demandée pour l'araignée] trois cinquièmes
3	C	<u>Ça</u> (.) un deux trois quatre cinq
4	A	attends <u>ça</u> , <u>ça</u> peut être [A prend la pièce deux tiers et C prend la pièce un demi pour les superposer à tour de rôle sur les trois cinquièmes]
5	C	ah nan nan nan vaut mieux pas se méfier
6	A	attends on va essayer [A pose rapidement la pièce deux tiers. C sourit lorsque A dépose cette pièce dans le chaudron]. attends [A reprend la pièce 2/3 et la pose correctement cette fois-ci sur les trois cinquièmes du kit araignée] nan c'est pas bon. Vas-y prends trois cinquièmes. Heu [A regarde la carte pour lire la suite] deux neuvièmes
7	C	[il tend trois cinquièmes pré-découpés d'araignée à A] là y en a bien trois ?
8	A	oui
9	C	après [il lit la carte] deux neuvièmes. [C montre les neuvièmes de grenouille] là c'est les <u>neuf</u>
10	A	là c'est les neuvièmes

Tdp	Loc	
11	C	[C prend deux neuvièmes pré-découpés de grenouille] là j' <u>en</u> ai un
12	A	ah deux neuvièmes oh là là
13	C	deux <u>petits</u> (.) Prends et j' <u>en</u> prends un. T' <u>en</u> as mis (.) t' <u>en</u> as deux ?
14	A	[A acquiesce et les dépose dans le chaudron]

14'33

Tableau 24 : séance 8, carte 29, A et C, de 13'00 à 14'33

Au Tdp 2, c'est une évidence pour A, comme pour C qui ne fait aucune remarque, que la quantité demandée pour la raie, $\frac{3}{9}$, est la même que $\frac{1}{3}$ de raie pré-découpée. Aucun échange verbal n'a lieu entre A et C pour argumenter sur cette réponse. La manipulation de A qui superpose les deux surfaces en est la preuve. Elle n'amène pas de discussion ni de formulation de l'égalité. Pour ces deux élèves, la connaissance en situation est validée mais elle n'est à aucun moment formulée. Ils essaient ensuite pour la quantité $\frac{3}{5}$ d'araignée de trouver une pièce qui se superposerait parfaitement sur $\frac{3}{5}$ pré-découpés d'araignée. Les rétroactions du milieu leur permettent d'invalider leurs anticipations.

La formulation

Contrairement à l'élève A, mais tout comme les deux élèves du binôme adverse, l'élève C ne nomme jamais les pièces sauf lorsqu'il les lit sur la carte. Il utilise les pronoms « ça » et « en » pour éviter de les nommer, ou le qualificatif « petits » pour désigner les neuvièmes. A le corrige et manie plutôt bien un vocabulaire nouveau pour lui mais aucun des deux ne formule d'égalité de fractions pour la quantité de grenouille.

La responsabilité dans la dévolution

Dans la coopération, A prend plus de responsabilités (Tdp 2, 4 et 6), que C qui est peu sûr de lui (Tdp 5 et 7). Lorsque Brousseau évoque la dévolution, il observe qu'elle « crée une responsabilité mais pas une culpabilité en cas d'échec. » (2003). On note que dans ce binôme, C craint d'être pointé du doigt par A car un peu plus loin dans la réalisation de la carte 29, pour la quantité $\frac{13}{10}$ de serpent, C dit à A : « Prends ça, mais dis pas après que c'est d'ma faute ». L'enjeu de la course, et le fait d'être à deux dans cette course, crée une sorte de pression pour C que ne semblent vivre ni A ni M.

4.5.3 Exercices de décomposition

A partir du temps 19'00, la suite de l'atelier est dirigée par P qui propose des exercices autour de la décomposition de la fraction supérieure à 1, en faisant référence à un animal du plateau de jeu, mais pour s'en détacher progressivement¹⁴. (Annexes 12, 13 et 14) Nous retenons ici des éléments pour répondre à nos questions de recherche centrées sur l'équivalence de fractions.

Rupture de la relation didactique pour l'élève A.

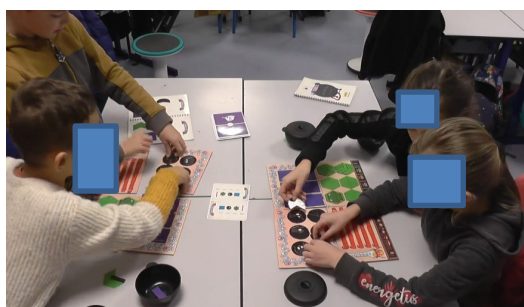


Figure 52: séance 8, jeu AdP, 14'03

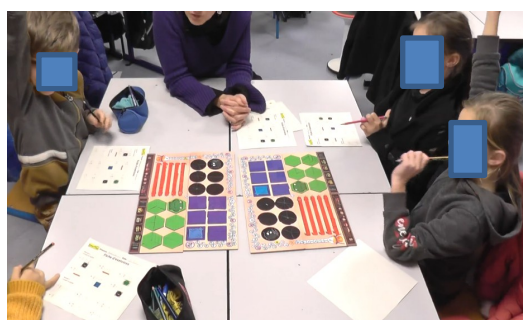


Figure 53 : séance 8, exercices de décomposition, papier-crayon, 21'42

Sur la figure 50, nous constatons que pour la seconde phase de l'atelier et alors que A et M sont toujours très investis, l'élève A, en bas à gauche, se met en retrait en repliant les jambes sous lui. Il touche avec son crayon à papier les pièces du plateau mais ne fournit de lui même aucune réponse sur la feuille. Il se contente de recopier les réponses correctes lorsqu'elles sont validées. A ne s'implique plus dans la tâche demandée. Il est dans ce que Brousseau nomme « une stratégie d'évitement » en décrivant les comportements qui « manifestent le refus, conscient ou non, de la part de l'enfant, d'accepter sa part de responsabilité dans l'acte de décider en situation didactique et donc d'apprendre, face à un adulte » (Brousseau, 1999). Les explications peuvent être de différentes natures. La fatigue peut en être une car les élèves ont joué à l'AdP 20 minutes avant ce travail papier-crayon. Son attention peut également être détournée par les élèves des autres ateliers. La décomposition d'une fraction, où A retrouve une écriture symbolique avec le signe égal peut également le décourager. La rupture du contrat ludique entraîne chez A une rupture de la relation didactique et il se réfugie dans une cette stratégie d'évitement.

¹⁴ Fiche d'exercice du dossier d'accompagnement p.71

Apprentissage de l'équivalence pour C et M

C fournit une équivalence de fractions pour la décomposition c.

$$c. \quad \frac{12}{9} = 1 + \frac{1}{3}$$



Figure 54 : séance 8, exercice de décomposition, 12/9, élève C

P ne s'attend pas à ce qu'un élève propose une équivalence pour la fraction inférieure à 1 car elle souhaite surtout ici que les élèves voient la partie entière dans la fraction supérieure à 1.

L'élève C établit ici de lui-même et sans manipuler les objets du jeu, l'équivalence de fractions, $3/9=1/3$.

De son côté, M termine la séance en se déplaçant plusieurs fois hors du champ de la caméra vers une affiche accrochée au mur de la classe et établie dans le cadre des mesures de longueurs du début de la séquence. Sur cette affiche, figure le kit serpent de l'*Atelier des Potions*, qui était dans ce cadre utilisé comme instrument de mesure de longueurs. Elle revient vers sa feuille, gomme $5/10$ et écrit $1/2$, puis au temps 34'20 :

Tdp	Loc		Travaux d'élèves
1 34'20	M	Moi j'ai une autre idée. Parce que quatre (.) deuxièmes c'est égal à cinq	<p>Figure 55 : séance 8, exercice de décomposition, 5/10=1/2, élève M</p>
2	P	des demis	
3	M	quatre demis c'est égal à cinq dixièmes [P et M regardent l'affiche au mur.]	
4	P	nan pas quatre demis [P regarde l'affiche]	
5	M	[M regarde l'affiche] heu deux quarts égal cinq dixièmes et aussi un deuxième	
6	P	un demi	

7	M	un demi est égal à cinq dixièmes	
8	34'45 P	très bien M (.) super !	

Tableau 25 : séance 8, exercice de décomposition, 25/10, M, entre 34'20 et 34'45

Dans ce court extrait, M est corrigée à trois reprises par P sur le vocabulaire. Elle inverse encore à l'oral le numérateur et le dénominateur dans la lecture de la fraction au Tdp 3 et continue à se tromper pour le mot « demi » qu'elle nomme « deuxième » au Tdp 5. Elle se réfère à une affiche de la classe écrite dans le cadre de mesure de longueurs. Elle établit des équivalences en référence à un représentant de l'unité, ici l'araignée, mais s'en détache progressivement avec l'écrit.

Dans cet atelier de la séance 8, les trois élèves en difficulté ont pu jouer seuls, sans la présence de l'adulte et manipuler ainsi les pièces du jeu pour obtenir des équivalences de fraction dans l'action. La formulation du savoir a nécessité la présence de l'adulte. L'exercice sur feuille, destiné à la décomposition de fractions supérieures à 1, a enclenché une stratégie d'évitement chez l'élève A alors que C et M ont manipulé cette fois-ci avec des symboles des équivalences de fractions. Pour conclure l'analyse de nos données, nous confrontons les résultats obtenus au post-test pour ces trois élèves à ceux obtenus au pré-test en amont de la séquence

4.6 Le post-test

Le post-test est identique au pré-test. Il est proposé aux élèves suite à la séance 10 de la séquence. Les pourcentages de réussite entre le pré-test et le post-test (Annexes 24 à 28) montrent, pour l'ensemble de la classe, des progrès dans la grande majorité des items du test. Nous présentons et analysons dans cette partie les progrès et les difficultés persistantes pour les trois élèves en difficulté de notre étude. Nous rappelons que les exercices 1 et 2 du test se situent dans un cadre de partage proche de celui de *l'Atelier des Potions*. Nous présentons donc les résultats pour ces deux exercices ainsi que pour l'exercice 4 où l'on retrouve l'équivalence de fractions, hors de tout contexte. Ces progrès ou difficultés peuvent être isolés ou communs à plusieurs de ces élèves.

4.6.1 Confrontation pré-test/post-test pour A, C et M

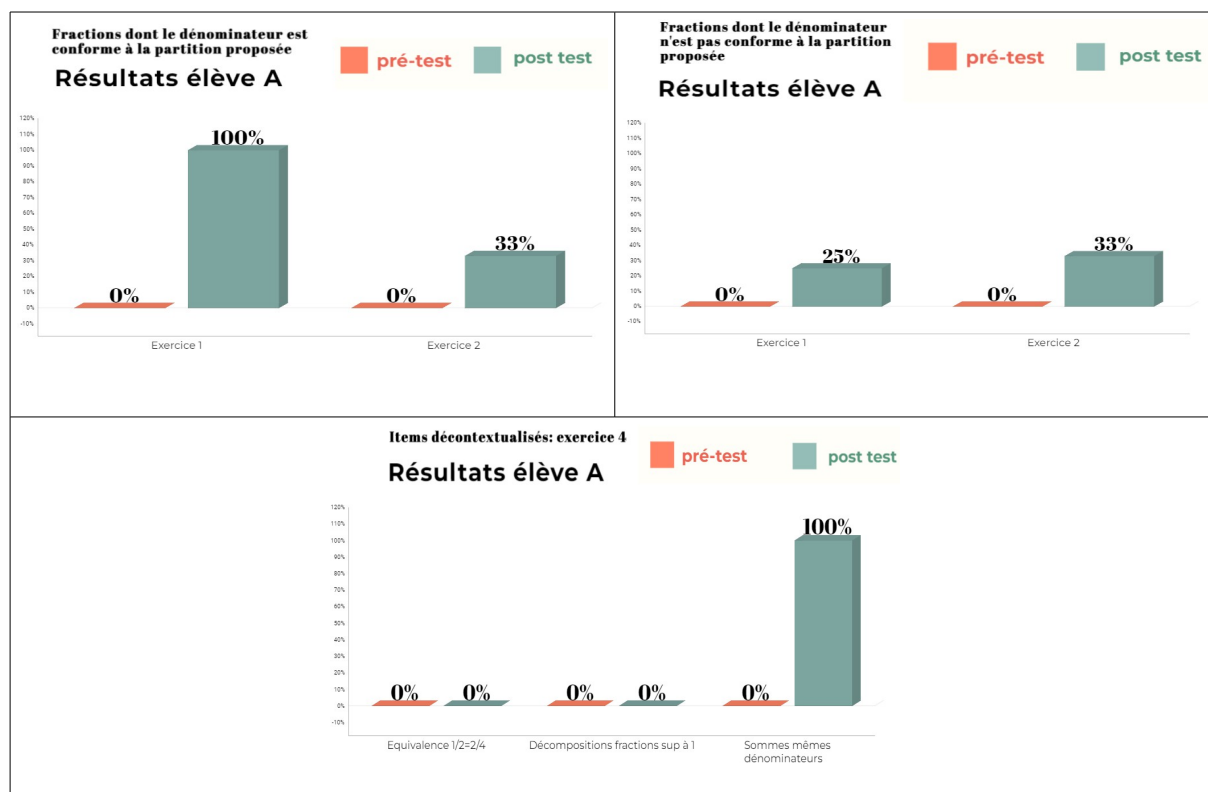


Tableau 26: Confrontation des résultats des tests de l'élève A

L'élève A n'avait fourni que très peu de réponses lors du pré-test. Dans le cadre de partages, il semble doucement progresser pour les items où la fraction est conforme à la partition proposée. Les erreurs sont plus nombreuses lorsque la fraction n'est pas conforme à la partition proposée. Hors de tout contexte,

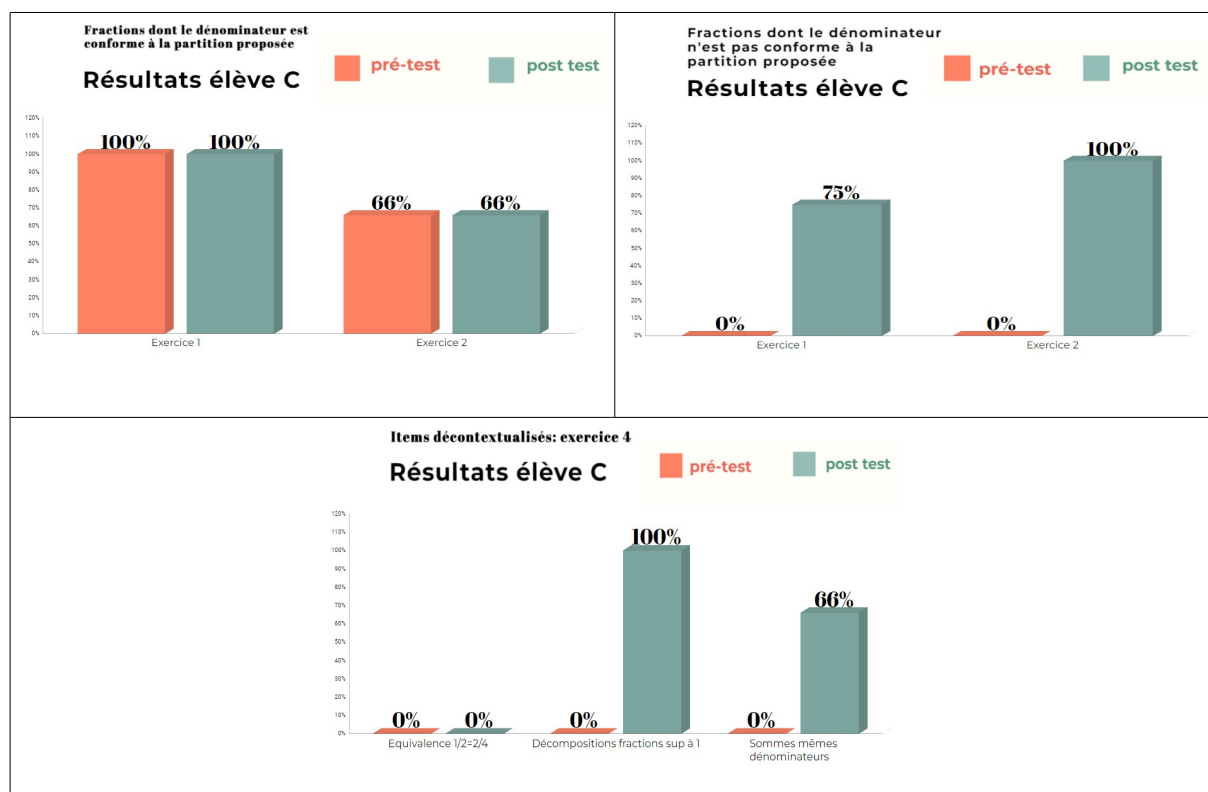


Tableau 27: Confrontation des résultats des tests de l'élève C

L'élève C était plutôt à l'aise en amont de la séquence avec les fractions dont le dénominateur est conforme à une partition proposée pour l'unité. Il a progressé pour beaucoup d'items. Ses réussites aux deux décompositions de la fraction supérieure à 1 montrent qu'il a appréhendé la fraction autrement que par son interprétation partie d'un tout.

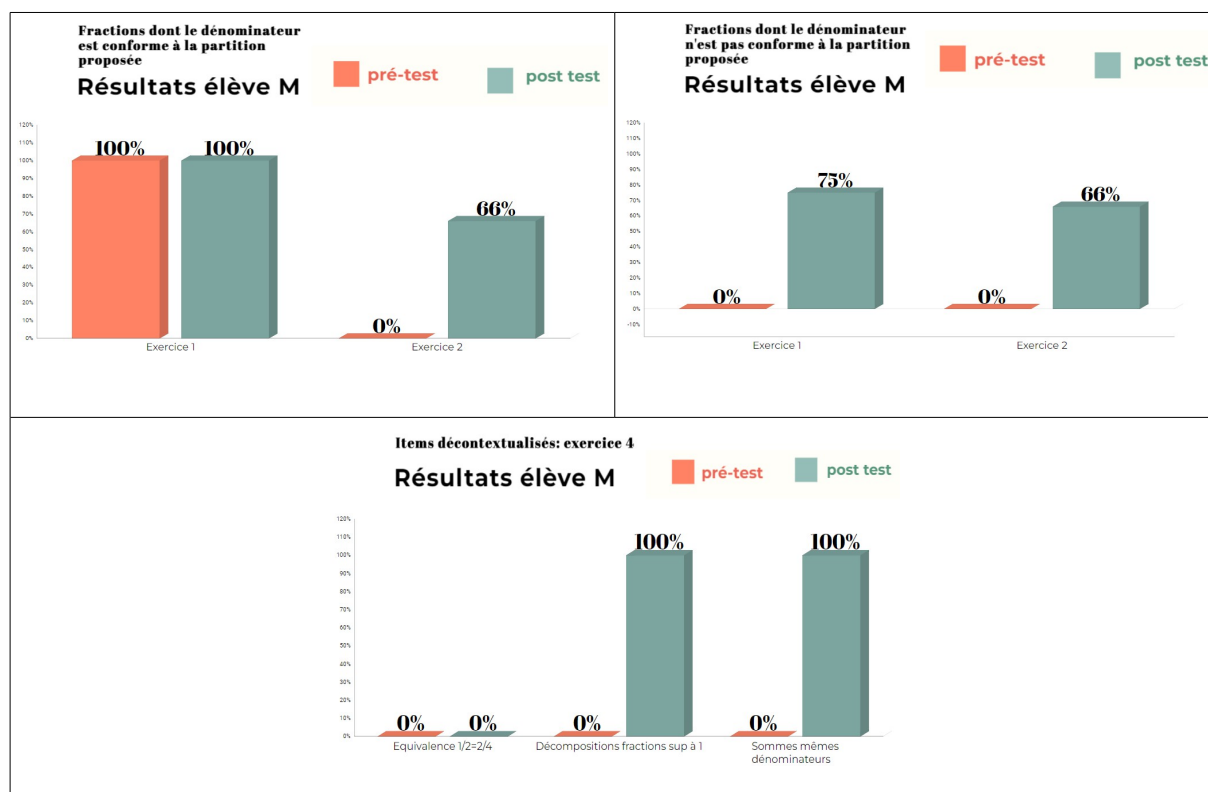


Tableau 28: Confrontation des résultats des tests de l'élève M

Les graphiques de l'élève M coïncident presque avec ceux de l'élève C. Nous constatons que M progresse non seulement lorsque la fraction est conforme mais également lorsqu'elle est non conforme à la partition proposée.

Les parties suivantes analysent les résultats pour l'exercice 1 qui se situe dans un cadre de partage proche de celui de l'*Atelier des Potions* et l'exercice 4 dont les items sont décontextualisés.

4.6.2 Les fractions non conformes à la partition proposée pour C et M

Voici la confrontation des résultats du pré-test et du post-test pour l'exercice 1 des élèves C et M :

Fractions non conformes, item 1.c

1.c. Colorie $\frac{1}{4}$ de cette surface:



Figure 56 : item 1.c pré-test C

1.c. Colorie $\frac{1}{4}$ de cette surface:



Figure 57 : item 1.c post-test C

1.c. Colorie $\frac{1}{4}$ de cette surface:

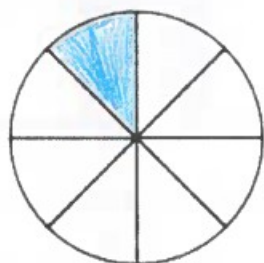


Figure 58 : item 1.c pré-test M

1.c. Colorie $\frac{1}{4}$ de cette surface:



Figure 59 : item 1.c post-test M

Dans le post-test, C et M identifient en acte la connaissance $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$. Ils avaient obtenu cette égalité dans le contexte de *l'Atelier des Potions* avec la surface raie/carré pour la carte 16. Ils l'obtiennent ici dans une représentation différente, ici un cercle, et sans superposition possible.

Fractions non conformes, item 1.f

1.f. Colorie $\frac{2}{4}$ de cette surface:

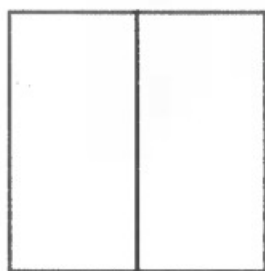


Figure 60 : item 1.f pré-test C

1.f. Colorie $\frac{2}{4}$ de cette surface:



Figure 61 : item 1.f post-test C

1.f. Colorie $\frac{2}{4}$ de cette surface:

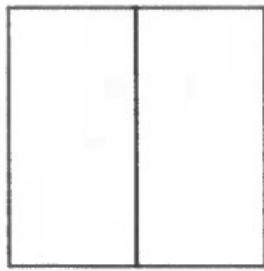


Figure 62 : item 1.f pré-test M

1.f. Colorie $\frac{2}{4}$ de cette surface:



Figure 63 : item 1.f post-test M

Dans le post-test, C et M colorient une des deux parts proposées. Ils identifient en acte l'équivalence $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Ils ont obtenu cette égalité dans le contexte de l'*Atelier des Potions* avec la surface grenouille/hexagone pour la carte 35. Il réussissent donc à établir cette égalité dans une autre unité, ici un carré, et sans superposition possible.

Nous constatons donc dans ces deux items que C et M identifient en acte des équivalences, y compris lorsque le dénominateur n'est pas conforme au fractionnement proposé pour l'unité. Ils dépassent ainsi l'obstacle décrit par Cadez et al. (2018). Regardons à présent du côté de l'élève A.

4.6.3 Les fractions non conformes à la partition proposée pour A

1.c. Colorie $\frac{1}{4}$ de cette surface:

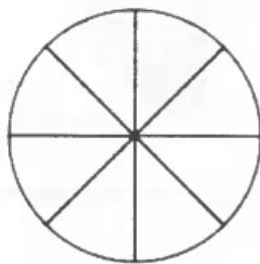


Figure 64 : item 1.c pré-test A

1.c. Colorie $\frac{1}{4}$ de cette surface:



Figure 65 : item 1.c post-test A

1.f. Colorie $\frac{2}{4}$ de cette surface:



Figure 66 : item 1.f pré-test A

1.f. Colorie $\frac{2}{4}$ de cette surface:



Figure 67: item 1.f post-test A

A à la fin de la séquence, dans l'exercice 1 du post-test qui se situe dans un cadre proche de celui de *l'Atelier des Potions*, l'élève A colorie autant de parts qu'indique le numérateur, quelle que soit la partition de l'unité. Il est freiné par la conception erronée pointée par Cadez et al. (2018) que le dénominateur doit être conforme à la partition de l'unité. Mais nous avons vu lors de son entretien individuel que l'élève A n'avait pas compris le partage équitable, la partition de l'unité. C'est donc la partition elle-même qui nous intéresse à ce stade de nos résultats et un autre item du test attire particulièrement notre attention, l'item 1.d.

4.6.4 Conception du huitième de carré pour A, C et M

L'item 1.d du test demande aux élèves de colorier $\frac{3}{4}$ d'un carré partagé en huit parts égales, La fraction n'est donc pas conforme au fractionnement de l'unité et l'élève doit identifier en acte l'équivalence entre $\frac{3}{4}$ et $\frac{6}{8}$.

1.d. Colorie $\frac{3}{4}$ de cette surface:

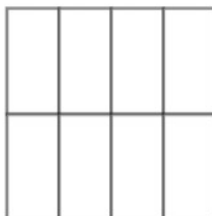


Figure 68 : item 1.d du test

Voici les réponses des trois élèves observés :

1.d. Colorie $\frac{3}{4}$ de cette surface:



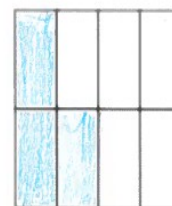
**Figure 69 : item 1.d
post-test A**

1.d. Colorie $\frac{3}{4}$ de cette surface:



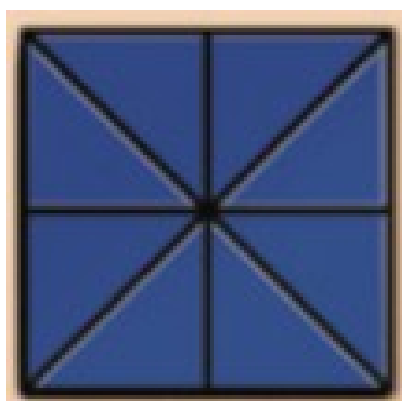
**Figure 70 : item 1.d
post-test C**

1.d. Colorie $\frac{3}{4}$ de cette surface:

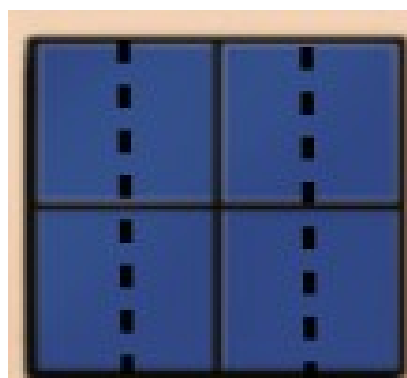


**Figure 71 : item 1.d
post-test M**

Les trois élèves colorient trois des parts qui sont ici des huitièmes de carré. Ils colorient autant de parts qu'indiquées par le numérateur, et ce quel que soit le partage équitable proposé. Ce comportement est respectueux d'une attente qu'ils croient voir dans la consigne, sans tenir compte du partage effectué. Nous constatons une difficulté persistante pointée par Cadez et al. (2018) dès lors que le partage équitable n'est pas conforme au dénominateur de la fraction. Pour analyser cette erreur commune aux trois élèves, revenons sur le kit raie du plateau de jeu *l'Atelier des Potions* :



**Figure 72 : partage en huit parts
égales proposé par l'Atelier des
Potions**



**Figure 73 : partage en huit parts
égales proposé dans les item 1.d et
2.b du test**

Dans *l'Atelier des Potions*, le partage équitable proposé pour une surface donnée, par exemple la raie/carré entraîne une représentation persistante de ce partage. Pour l'élève un huitième de carré est peut être forcément un triangle et il réussirait davantage à colorier $\frac{3}{4}$ en coloriant $\frac{6}{8}$, et donc à voir cette égalité, si le partage était le même que celui de la figure 72 . Or, on peut avoir deux surfaces différentes qui peuvent avoir la même aire. Un huitième de carré par

exemple peut s'effectuer comme sur la figure 73, ce qui est le cas dans le test. Les deux surfaces sont de formes différentes, un triangle ou un rectangle, mais elles ont la même aire que l'on peut mesurer : $\frac{1}{8}$ du carré. Suite au contexte de l'*Atelier des Potions*, l'élève risque d'assimiler un huitième de carré à une forme triangulaire.

4.6.5 L'importance de la décontextualisation pour A, C et M

Dans l'item 4.a du test, il est demandé aux élèves d'entourer deux fractions égales parmi celles proposées :

4.a. Entoure en bleu les fractions qui sont égales :

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{2}{4}$$

Figure 74 : item 4.a du test

Pour le post-test, aucun des 3 élèves observés ne fournit une réponse correcte. Voici la réponse de l'élève A :

4.a. Entoure en bleu les fractions qui sont égales :

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{2}{4}$$

Figure 75 : item 4.a post-test A

On constate plusieurs essais. Il entoure puis gomme plusieurs fractions. Sa réponse finale laissent entendre qu'il considère deux fractions égales si elles ont le même dénominateur. Mais la consigne représente d'abord un obstacle pour l'élève A qui comme nous l'avons constaté a des difficultés avec le concept d'égalité.

Voici les réponses, identiques, de C et de M

4.a. Entoure en bleu les fractions qui sont égales :

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{2}{4}$$

Figure 76 : item 4.a post-test C

4.a. Entoure en bleu les fractions qui sont égales :

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{2}$ $\frac{2}{4}$

Figure 77 : item 4.a post-test M

Les élèves C et M inversent le numérateur et le dénominateur pour une fraction égale à $1/2$.

Une interprétation possible pour cette erreur pourrait être que C et M considèrent comme égales deux fractions qui ont le même dénominateur. C et M sont tous deux dyslexiques et ont montré beaucoup d'inversions dans la lecture et l'expression d'une fraction où deux nombres jouent des rôles différents, selon qu'ils sont au dessus ou au dessous du trait de fraction. Une autre interprétation serait donc qu'ils entendent l'égalité $1/2=2/4$ et il aurait été judicieux de demander à ces élèves de lire les fractions entourées.

L'équivalence entre $1/2$ et $2/4$ apparaît tout au long de la séquence, exposée à l'oral et à l'écrit par l'enseignante, sous la forme $1/2=2/4$ sur l'ardoise, sur l'affiche au mur de la classe et sur les traces écrites des élèves. Cependant, la tâche d'entourer des fractions équivalentes n'a jamais été travaillée pendant la séquence. Ici, hors des contextes du jeu de *l'Atelier des Potions* et de la droite graduée, les élèves rencontrent des difficultés à décontextualiser (Brousseau, 1998) ce qu'ils ont travaillé pour cette équivalence. Comme le précise Allard (2015) « il existe différents degrés de décontextualisation ». Lorsque cette égalité est exposée par P dans le contexte du jeu de *l'Atelier des Potions*, elle n'est pas au même degré de décontextualisation que lorsqu'elle apparaît sur l'affiche ou sur la trace écrite de l'élève, et encore moins à celui de cet item.

4.6.6 Pas d'équivalence pour la somme de fractions A, C et M

Lorsqu'il s'agissait dans le pré-test d'additionner des fractions de même dénominateur, M considérait le numérateur et le dénominateur comme deux nombres entiers à traiter séparément. Nous confrontons ici les deux tests pour les additions de fractions :

4.d.e.f. Calcule :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

Figure 78: items 4.d.e.f pré-test M

4.d.e.f. Calcule :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Figure 79: items 4.d.e.f post-test M

Pour le post-test, M additionne uniquement les numérateurs. Ces résultats témoignent qu'elle ne considère plus séparément le numérateur et le dénominateur et qu'elle commence à envisager la fraction comme un nombre. Pour autant, elle ne fournit aucune équivalence Voici les réponses pour le post-test de A et C :

4.d.e.f. Calcule :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Figure 80: item 4.d.e.f post-test A

4.d.e.f. Calcule :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Figure 81: item 4.d.e.f post-test C

Nous considérons l'erreur de C pour l'item 4.f comme une erreur d'inattention. Ces deux élèves répondent comme l'élève M pour ces mêmes items du post-test. Pour autant, aucun de ces trois élèves ne fournit de réponse équivalente à la fraction $\frac{2}{4}$ qui pourrait être $\frac{1}{2}$ par exemple. De la même manière, aucun ne répond 1 pour l'addition du 4.e ou $1 + \frac{1}{2}$ pour la dernière addition du 4.f. Dans le processus de compréhension de l'équivalence de fractions, les élèves ne sont pas au stade de la mobiliser hors du contexte de l'*Atelier des Potions*.

Grâce à toutes ces données, et en grande partie grâce aux entretiens individuels et à l'analyse de leurs procédures, nous avons pu dessiner pour ces élèves les trois profils suivants :

4.7 Synthèse par élève

4.7.1 L'élève A

A est enrôlé dans les situations de jeu de l'*Atelier des Potions* où il établit par lui-même des connaissances. Il y est très investi et prend des responsabilités dans le jeu. Mais il modifie radicalement son comportement dans ses interactions avec un milieu papier-crayon (séance 8 et test) ou lorsque P expose la connaissance. Il se positionne alors très en retrait et se montre peu sûr de lui. L'entretien a permis de comprendre plus finement ses difficultés. Absent pendant la séance 5, le partage équitable n'est pas acquis et freine l'acquisition de la nouvelle connaissance. La traduction en langage symbolique semble également lui poser beaucoup de difficulté et l'entraîner dans une stratégie d'évitement des activités papier-crayon.

Tant dans les séances que dans l'entretien, nous constatons que l'élève A semble n'accepter la relation didactique, le « jeu » didactique, qu'en situation de jeu ludique. Selon Brousseau (1998), dans son glossaire à l'article « le paradoxe de la dévolution », l'élève est face à une « injonction paradoxale » car « apprendre implique, pour lui, qu'il accepte la relation didactique mais qu'il la considère comme provisoire et s'efforce de la rejeter. ». Davantage que l'entretien ou le test, les films des séances 6 et 8 nous ont permis de percevoir et d'analyser des apprentissages chez l'élève A. Le jeu est pour lui un moyen de contourner la relation avec l'adulte et l'activité papier-crayon, tout en s'investissant dans l'apprentissage. En modifiant le contrat didactique pour lui ajouter le qualificatif « ludique » Pelay (2019), le jeu apparaît comme un levier d'apprentissage pour cet élève. Ses résultats au post-test montrent que la connaissance est encore en cours de construction.

4.7.2 L'élève C

L'élève C se montre peu sûr de lui mais très investi dans le jeu de l'*Atelier des Potions*. Tout autant que le plateau de jeu ou le grimoire, les autres élèves, partenaires ou adversaires, constituent des éléments importants du milieu pour lui, car il modifie sa stratégie en fonction d'eux. La peur de se tromper et d'être désigné comme le coupable d'un échec - une seconde place dans la course - lui font miser un petit nombre de points de magie. De la sorte, si le milieu ne lui pose pas de problème et ne lui impose pas une équivalence par une consigne

différente énoncée par le meneur de jeu (cartes 16 à 19) ou par une fraction dont le dénominateur ne correspond pas à l'ingrédient demandé (cartes 35 à 49), il préfère ne pas prendre de risque et rester sur une procédure « classique » : sélection de l'ingrédient partagé en autant de parts égales qu'indiquées par le dénominateur et sélection d'autant de parts qu'indiquées par le numérateur. Ses résultats à l'exercice 1 du post-test montrent qu'il dépasse cette procédure avec des fractions non conformes à la partition de l'unité. Il établit ainsi en acte et par écrit des équivalences de fractions. La formulation doit être étayée car la désignation des pièces est très laborieuse.

4.7.3 L'élève M

Les films des séances montrent que M prend des risques et est très investie dans le jeu. Elle anticipe, elle contrôle sur le plateau de jeu et valide par l'action enfin sur le grimoire. Nous constatons dans l'entretien de M des apprentissages quant à l'équivalence de fractions dans le contexte du jeu de l'*Atelier des Potions*, et ce quelle que soit l'unité. La confrontation des deux tests montre des progrès lorsque la fraction n'est pas conforme à la partition de l'unité dans un cadre de partage, en dehors du contexte du jeu de l'*Atelier des Potions*. Ses progrès sont importants pour établir une équivalence entre deux fractions. De la même façon que pour l'élève C, la formulation doit être étayée, d'autant plus qu'elle inverse le numérateur et le dénominateur pour la lecture-écriture de la fraction. Enfin, le savoir est encore en cours de construction puisque non mobilisé hors de tout contexte.

Les données analysées pour le pré-test, les séances 5, 6, les entretiens individuels, la séance 8 et enfin le post-test nous ont permis de répondre à nos questions de recherche sur lesquelles nous revenons dans la partie suivante.

5 DISCUSSIONS ET PERSPECTIVES

Pour conclure, nous revenons sur nos questions de recherche pour lesquelles nos résultats proposent des réponses. Nous présentons ensuite les limites que nous avons pu constater pour notre mémoire ainsi que les perspectives qu'il nous ouvre.

5.1 Retour sur les questions de recherche

Dans nos questions, nous recherchions ce qui dans le contrat et le milieu d'une situation pouvait nous permettre de lire les difficultés rencontrées face à l'équivalence de fractions et

les moyens de les contourner pour apprendre. Il s'agit, en premier lieu, d'identifier le sens donné à la fraction et à l'équivalence entre fractions dans la partie de la séquence observée mobilisant le jeu de *l'Atelier des Potions*.

5.1.1 Interprétations de la fraction et conceptions de l'équivalence de fractions (QR1)

Dans la séquence observée utilisant le jeu *l'Atelier des Potions*, nous concluons que la fraction est abordée sous plusieurs interprétations : introduite par son interprétation mesure dans le cadre de mesure de longueurs en début de séquence, ce sont les interprétations opérateur et partie-tout de la fraction qui dominent dans le cadre de partage de *l'Atelier des Potions*. La fraction quotient n'est jamais abordée dans cette séquence. L'équivalence de fractions est interprétée comme l'expression de grandeurs absolues : en prenant appui sur un même tout de référence, des égalités de quantités sont établies. Ni la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur de la fraction, ni la relation multiplicative entre deux fractions équivalentes ne sont abordées. La conception *proportionnal equivalence* (Pedersen et Bjerre, 2021) n'est pas retenue non plus et c'est la conception de l'équivalence dans l'unité, *unit equivalence* (Pedersen et Bjerre, 2021) qui est principalement travaillée. Cette équivalence de fractions est vérifiée dans plusieurs unités, représentées par plusieurs formes dans le jeu *l'Atelier des Potions*. Tout se passe comme si l'enseignante P se focalisait sur la structure additive pour « rassurer » les élèves en difficulté, et les amener, in fine et via la droite graduée, vers la compréhension et l'écriture d'un nombre décimal. Le souci d'enrôler tous les élèves y compris les élèves en difficulté prend le pas sur la compréhension de la relation multiplicative entre a et b pour la fraction a/b et sur la compréhension du nombre rationnel. Cette stratégie d'enseignement est relatée dans les travaux de Houle et Giroux (2019) où l'enseignant « fait l'impasse sur la complexité de la structure multiplicative de la notion de fraction », qui pose problème aux élèves en difficulté. Ici, l'enseignante semble miser sur les années suivantes du cycle 3 pour aborder cette relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur.

5.1.2 Dialectique contrat-milieu (QR2 et QR3)

Dévolution-institutionnalisation

La mobilisation du jeu de *l'Atelier des Potions* permet l'enrôlement de ces trois élèves en difficulté qui prennent du plaisir à jouer. Ils prennent chacun leur part de responsabilité, ce qui

permet d'affirmer que la dévolution est réussie dans les séances analysées. Ils endossent chacun à leur manière la responsabilité de la tâche pour chaque séance observée et analysée. Nos explications pour cet enrôlement sont l'univers de la magie composé de sorciers et de sorcières cuisinant des animaux, un plateau de couleurs vives au design soigné, le plaisir procuré (importance de l'affect), la course et la dédramatisation de l'échec, le fil numérique qui soulage les élèves en matérialisant le score, la manipulation d'un matériel qui n'est pas un classique papier-crayon. De son côté, l'enseignante doit orchestrer l'avancée des apprentissages des élèves entre les situations de jeu où elle cache le savoir, car « si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir. » (Brousseau, 1998) et le processus d'institutionnalisation, pendant du processus de dévolution. Le processus d'institutionnalisation consiste en un « passage pour une connaissance de son rôle de moyen de résolution d'une situation d'action, de formulation ou de preuve, à un nouveau rôle, celui de référence pour des utilisations futures, personnelles ou collectives. » (Brousseau, 1998). Concernant l'équivalence de fractions usuelles, l'enseignante se limite dans les séances que nous avons observées à des expositions de connaissances en situation (Allard, 2015, Margolinas, 2021) lors des phases de validation.

Ruptures de contrat

Nous montrons dans un second temps que les ruptures de contrat indispensables à l'apprentissage (Brousseau, 1998) sont nombreuses autour de l'équivalence de fractions établies avec le jeu *l'Atelier des Potions*.

- Il existe une rupture avec le contrat des nombres entiers « un nombre entier, une écriture » et l'équivalence de fractions qui implique implicitement « un nombre rationnel, plusieurs écritures ». Cette rupture est mise en lumière lors de la séance 5.
- Les exceptions pour les mots « demi », « tiers » et « quarts » représentent également une rupture avec le tout nouveau contrat qui vient d'être établi pour nommer les fractions en ajoutant le suffixe -ième au dénominateur. Cette rupture est difficile à négocier pour certains élèves ayant des troubles du langage comme C et M.
- De la même manière, l'écriture fractionnaire d'un nombre, pour laquelle on donne un sens au numérateur et un sens au dénominateur demande une attention particulière à porter aux élèves dyslexiques.
- Le signe égal, vu par certains élèves comme A uniquement comme annonçant le résultat d'une opération, doit ici être vu comme une relation d'équivalence.

- Lorsque la fraction est conforme à une partition de l'ingrédient demandé pour les cartes de base (Annexe 2), certains élèves, comme l'élève C, préfèrent « assurer le coup » et ne proposent pas d'autres solutions que celle donnée par la procédure classique : repérer l'ingrédient partagé en autant de parts égales qu'indiquées par le dénominateur et prendre le nombre de parts indiqué par le numérateur, ce que décrit De Blois (2017) comme des activités de comptage. Pantziara et Philippou (2012) soulignent également le risque de rester bloqués à ce stade procédural. La modification de la consigne lors de la séance 6 pour ces mêmes cartes impose à l'élève une modification de stratégie. Le contrat est remis en question : l'élève ne doit plus prendre autant de parts qu'indiquées par le numérateur de la fraction. Il faut trouver une quantité égale qui va s'exprimer différemment. Cette quantité est représentée par une fraction conforme à une autre partition du même animal sur le kit-ingrédient. Les rétro-actions du milieu permettent donc d'établir une équivalence.

- Lorsque la fraction n'est pas conforme à une partition proposée pour l'ingrédient pour les cartes 35 à 49 (Annexe 2), la rupture de contrat a lieu puisque l'élève constate que la partition correspondant à la fraction de la carte n'apparaît pas clairement. L'élève sait qu'une solution est possible et qu'elle existe dans le grimoire. Il anticipe alors une réponse qu'il vérifie grâce aux rétro-actions du milieu, en mobilisant la comparaison avec un autre animal du plateau, ou ses mains pour effectuer lui-même un partage.

- Une dernière rupture apparaît enfin avec l'aspect ludique de l'apprentissage. Cette double casquette entraîne des tensions pour l'enseignant qui doit tantôt enseigner tantôt se placer en meneur de jeu, comme c'est le cas pour les séances 6 et 8.

Interactions avec le milieu

Nous avons également relevé de nombreuses interactions avec le milieu, dont certaines permettent de négocier ces ruptures.

- Toutes ces ruptures peuvent émerger au sein de discussions collectives, comme dans la séance 5, ce qui permet de les expliciter et de devancer éventuellement des difficultés. De leur côté, les élèves réagissent différemment à ces ruptures de contrat. Les élèves les moins avancés s'expriment peu ou partiellement au sein du groupe classe mais ils entendent ces échanges.

- Un partage, équitable ou non, est déjà effectué dans le contexte de l'*Atelier des Potions* puisque les pièces sont pré-découpées. Une activité proposée dans le dossier d'accompagnement¹⁵ cible le partage équitable mais la séquence ne l'a pas retenue, car les

¹⁵ « À la recherche de la pièce perdue. », p.38 du dossier d'accompagnement

séances 1 à 4 avaient été construites pour travailler l'aspect fractionnement de l'unité dans un cadre de mesure de longueurs. La séance 5, à laquelle l'élève A n'a pas assisté, reprend cet aspect dans le cadre de partage. Or nous constatons dans nos analyses que l'élève A n'a pas compris le partage équitable. Comme le préconise De Blois (2017), il convient de proposer des situations de partage équitable par pliage ou découpage à effectuer par les élèves eux-mêmes. Partager un tout en parties égales et comprendre que la somme de ces parties est égale au tout est primordial pour la compréhension de la fraction partie-tout. (Allard, 2015) De plus, dans le cadre du jeu de *l'Atelier des Potions*, la manipulation s'effectue avec des pièces qu'il faut superposer pour en déduire des égalités de fractions. Mais il est nécessaire de faire attention à ne pas rester uniquement sur des surfaces superposables. Un partage équitable peut également contenir des parts de formes différentes. Il est possible d'obtenir la même aire avec des surfaces de formes différentes. Par exemple, découper un demi d'un carré peut donner un rectangle ou un triangle.

- L'utilisation des valeurs des cartes comme variable didactique permet de travailler l'équivalence de fractions avec *l'Atelier des Potions*. Les cartes 16 à 19 peuvent être utilisées pour atteindre un premier degré de difficulté pour établir des équivalences entre fractions qui sont conformes aux partitions proposées sur le plateau. La consigne doit alors être modifiée, ce qui nécessite pour l'enseignant de mener le jeu. Dans ce cas, les rétro-actions du milieu permettent à l'élève de contrôler sa réponse grâce à des superpositions sur le plateau lui-même. Avec les cartes, 35 à 49, il est possible d'établir des équivalences entre fractions qui sont non conformes aux partitions proposées par le plateau de jeu, en comparant avec un autre kit-animal ou en partageant à l'aide de la main. Dans tous les cas, la solution est validée ou invalidée en la superposant sur la solution du grimoire. L'élève peut donc être autonome pour la validation.

- Toutefois, sans la présence de l'adulte, ou à deux avec un élève qui verbalise peu, la formulation du savoir apparaît très faible. L'élève manipule des objets dans des activités de comptage (De Blois, 2017) et, au mieux, compare des surfaces par la superposition. La formulation de l'équivalence ne va pas de soi. On observe que la présence de l'enseignant est souvent indispensable pour revenir sur les erreurs constatées sur le grimoire et pour formuler la connaissance à déduire des actions effectuées. Les traces écrites, affiches ou trace élève, peuvent être des aides précieuses mais les activités proposées dans le dossier d'accompagnement¹⁶ du jeu autour du vocabulaire leur seraient également très bénéfiques.

¹⁶ Dans le dossier d'accompagnement, les activités « Message magique » « Créons nos potions » et « Défi-vocabulaire » permettent un entraînement.

5.1.3 Apprentissages réalisés et obstacles : (QR4)

Dans le long processus d'apprentissage de l'équivalence de fractions (Houle et Giroux, 2019), nous pouvons tirer de notre recherche deux profils d'élèves en difficulté.

- Lorsque l'unité est pré-découpée en parts égales, l'élève A sait établir des équivalences de fractions dans le langage courant en nommant correctement les fractions. Il décrit alors les actions de prendre autant d'ingrédient avec une fraction qu'avec une autre. Pour autant, il ne traduit pas cette action en égalité mathématiques. Le symbole « = » est encore en cours d'acquisition. Si l'unité n'est pas pré-découpée en parts égales, le nom donné à ces parts est erroné puisque A ne comprend pas le partage équitable. Ceci freine la compréhension de l'interprétation opérateur dans un cadre de partage. Il est limité à un premier stade de l'apprentissage de l'équivalence, celui de la manipulation dans le contexte du jeu, où accompagné de l'enseignante, il réussit à établir des équivalences. Pour l'élève A, l'obstacle pointé par Cadez et al (2018) est toujours présent. En présence d'une partition équitable de l'unité et d'une fraction conforme à cette partition, il est capable de prélever ou de colorier autant de parts que ne l'indique le numérateur et d'établir une équivalence entre deux fractions conformes à une partition proposée. Cependant, lorsque la fraction n'est pas conforme à une partition proposée pour l'unité, il n'établit pas d'équivalence entre deux fractions.

- Pour les élèves C et M, la conception de l'équivalence dans l'unité, *unit equivalence* (Pedresen et Bjerre, 2018), est comprise, lorsqu'il s'agit de prendre des pièces pour le contexte du jeu ou de colorier des surfaces pour le test, y compris lorsque la fraction n'est pas conforme à la partition proposée pour l'unité. Tous les deux ont dépassé l'obstacle cité plus haut. Ils proposent des équivalences pour la décomposition d'une fraction supérieure à 1 décontextualisée mais avec du matériel sous les yeux lors de la séance 8. Toutefois ils ne reconnaissent pas deux fractions équivalentes hors de tout contexte dans le test. Les différentes façons d'effectuer un partage égal pour une même aire sont à aborder - prendre les $\frac{3}{4}$ d'un carré par exemple - car le jeu de *l'Atelier des Potions* imprime une image mentale de ce partage en quatre ou en huit parts égales. Pour ces deux élèves, le langage représente une difficulté supplémentaire qu'il convient de prendre en compte.

Grâce aux concepts de contrat et de milieu, nous avons pu analyser les apprentissages et les difficultés rencontrées par trois élèves en difficulté face à l'équivalence de fractions, tout au

long de cette séquence mobilisant le jeu *l'Atelier des Potions* en début de cycle 3. Dans le contexte des programmes scolaires actuels et avec les points de vigilances et les points d'appui que nous avons pu souligner, ce jeu nous paraît être une ressource à la fois accessible et ambitieuse. Nous pensons qu'elle peut permettre d'enrôler tous les élèves dans le long processus d'apprentissage de l'équivalence de fractions.

5.2 Limites de l'étude

Concernant notre travail de recherche, certaines limites, non exhaustives, nous sont apparues. D'une part, les trois élèves observés dans cette étude ne sont pas les seuls à avoir des difficultés en mathématiques dans la classe et nous aurions certainement pu dessiner d'autres profils d'élèves en difficulté. D'autre part, le fait d'être à la fois l'enseignante et la chercheuse présente des avantages, comme celui de prendre du recul sur ses propres connaissances disciplinaires et sur sa pratique professionnelle. Mais il est également très compliqué de filmer des interactions lorsque l'on est seule dans la classe et que l'on mène la séance. La posture de chercheuse pendant les entretiens individuels est également difficile à tenir lorsqu'on est l'enseignante de l'élève, et nous avons pu constater des biais à plusieurs reprises. Toutefois, nous pensons poursuivre notre réflexion sur l'enseignement-apprentissage de l'équivalence de fractions et, dans une perspective de recherche, nous nous intéressons aux points présentés dans la partie suivante.

5.3 Perspectives

Il serait intéressant de se pencher sur les origines de cette impasse réalisée sur la structure multiplicative et pointée par Houle et Giroux (2019). Est-elle liée à un manque de formation disciplinaire ? à une volonté de s'aligner sur les élèves en difficulté dans le champ multiplicatif ? à un programme de CM1 orienté vers la compréhension de l'écriture des nombres décimaux ? En tant qu'enseignante, notre propre pratique est à l'origine de ce questionnement.

Une autre perspective de recherche est la modification de la séquence en s'appuyant sur une séance proposée dans le dossier d'accompagnement de *l'Atelier des Potions*¹⁷ et recommandée pour la fin du cycle 3. Elle permet, dans un cadre de partage de la pluralité, d'aborder l'interprétation quotient de la fraction et la structure multiplicative de la fraction. Suivant la même idée, serait envisagée la construction d'une progression sur le cycle 3 tenant compte des

¹⁷« Chacun sa part » p.75 du dossier d'accompagnement

différentes interprétations à donner à la fraction ainsi que des différentes conceptions de l'équivalence entre fractions usuelles. Du côté des élèves, nous pourrions suivre le parcours de ces 3 élèves, en CM2, en 6ième et en cycle 4, et voir comment évolue leur conception de l'équivalence en fonction des interprétations de la fraction étudiées et comment, dès lors, ils s'approprient la fraction en tant que structure multiplicative.

Enfin, nous suivrons avec intérêt les recherches concernant une extension déjà commercialisée du jeu de l'*Atelier des Potions*¹⁸ incluant les nombres décimaux, ainsi qu'un projet d'une version numérique du jeu pour l'entraînement en classe ou à la maison.¹⁹ Une extension du jeu l'*Atelier des Potions*, intitulée le *Chaudron magique*, fait actuellement l'objet d'une étude (Marfisi-Schottman et al., 2021). Cette extension nous intéresse particulièrement car elle inclut au jeu d'origine la technologie de la Réalité mixte et le cadre des graduations.

¹⁸ Atelier des Potions Programmation complète Fractions et Décimaux <https://www.plaisir-maths.fr/>

¹⁹ Ce projet fait l'objet de la thèse de Sofiane Touel, encadré par Iza Marfisi-Schottman

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Allard, C. (2015). *Étude du processus d'Institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*. [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot]. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01249807/document>
- Bellian, C., Bouyaux, T., Denmat, M.N., Giorgiutti, I., Khlifi, L., Le Poche, A., Le Poche, G., Lohyn, M., Metayer, M. & Tétard, P. (2010) *De l'écriture fractionnaire à la multiplication des décimaux*, IREM de Rennes, Université de Rennes 1
- Boissière, A. & Pelay, N. (2018). *L'Atelier des Potions*, un jeu didactique et ludique pour l'apprentissage et l'enseignement des fractions. In *Actes du Séminaire de didactique des mathématiques 2018*, IREM de Paris, Université Paris Diderot. 159-171
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02421410/document>
- Briand, J. (2020) *Les obstacles à l'apprentissage [communication orale]* Centre Alain Savary, Institut français de l'éducation <http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/mathematiques-en-education-prioritaire/manipulation-nombres-decimaux-aux-cycles-1-2-et-3-1/lenseignement-des-nombres-decimaux-a-lecole-primaire-et-au-college-questions-de-formation-obstacles-choix-didactiques/les-obstacles-a-lapprentissage>
- Briand, J. (2021) Manipuler en mathématiques, oui mais... in *Au fil des maths n° 542, APMEP* <https://afdm.apmep.fr/rubriques/opinions/manipuler-en-mathematiques-oui-mais/#more-4153>
- Brousseau, G. & Brousseau, N. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : la Pensée Sauvage.
- Brousseau G. & Warfield V. (1999). The case of Gaël, in *Journal of Mathematical Behavior*, n°18 (1), 7-52.

- Brousseau, G. (2011). Dossier n°9 « Les expériences sur l'enseignement des Rationnels et des décimaux 1973-1998 ». Repéré à <http://guy-brousseau.com/1878/dossier-n%C2%B010-%C2%AB-lesexperiences-sur-lenseignement-des-rationnels-et-des-decimaux-1973-1998%C2%BB/>
- Cadez, T. H. & al. (2018) How fifth grade pupils reason about fractions : a reliance on part-whole subconstructs, *in Educational Studies in Mathematics n° 99*, 335-357
- De Blois, L. (2017) Enseigner les fractions. Quelles précautions prendre ? *in Learning disabilities association of Ontario (LDAO)* <https://www.taalecole.ca/enseigner-fractions/>
- Houle, V. & Giroux, J. (2019) Interprétations de la fraction et enseignement/apprentissage des fractions équivalentes au primaire, *in Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education n°19*, 321-333
- ERMEL/INRP (2001) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes (CM1)*. Hatier pédagogie
- Marfisi-Schottman, I., Touel, S. & George S. (2021) Designing a Mixed Reality Extension for an Educational Board Game on Fractions, *in International journal of virtual reality, Arts et Métiers Institute of Technology, 2021, 21 (1), 10.20870/IJVR.2021.21.1.4784. hal-03286159*
- Margolinas, C. (2020) Enseigner les nombres rationnels au cycle 3 ? Une proposition didactique *in Grand N, IREM de Grenoble*, 5-30.
- Margolinas C. (2021) Le processus de dévolution dans le cadre de la théorie des situations didactiques. Dans Pablo Buznic-Bourgeacq (dir.), *Sujet et objet de la dévolution*, Iste édition
- MEN (2015). *Programmes d'enseignement de l'école élémentaire, cycle 3*. (Bulletin officiel n°11).

- MEN (2016a) *Ressource : Fractions et nombres décimaux au cycle 3*. Eduscol
- MEN (2016b) *Ressource : Fractions et nombres décimaux au cycle 3. Annexe 1 : découverte des fractions en commençant par les fractions simples*. Eduscol
- MEN (2016c) *Attendus de fin d'année CM1, annexe8 : Mathématiques* Eduscol
- MEN (2016d) *Attendus de fin d'année CM2, annexe8 : Mathématiques* Eduscol
- MEN (2016e) *Repères annuels de progression, Mathématiques* Eduscol
- MEN (2020) *Programmes d'enseignement du cycle de consolidation*. (Bulletin officiel n°31).
- Pantziara, M. & Philippou, G (2012) Levels of students « conceptions » of fractions, in *Educational Studies in Mathematics n° 79, 61-83*
- Pedersen, P. L. & Bjerre, M. (2021) Two conceptions of fraction equivalence, in *Educational Studies in Mathematics n°107, 135-157*
- Pelay, N. (2011) *Jeu et apprentissages mathématiques: élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. [Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00665076/document>
- Pelay, N. (2019) *L'Atelier des Potions, un jeu de société didactique et ludique pour apprendre les fractions*, in *RMé n°231*
- Poisard, C., Le Guen, P., Riou-Azou G., Robin, R. & Valdivieso, F. (2022) Les « fiches-élèves » lors d'ateliers de jeux en classe de mathématiques : contraintes et objectifs de l'institution scolaire, *communication du 47e colloque de la COPIRELEM*, Grenoble 2020
- Winder, C. (2017) Un jeu sur les fractions pour le cycle 3, in *Petit x n°103, 57-82*

TITRE :

Enseignement/apprentissage de l'équivalence de fractions auprès d'élèves en difficulté en début de cycle 3, le cas du jeu *l'Atelier des Potions*

RÉSUMÉ :

Il est possible d'introduire la fraction a/b selon plusieurs interprétations et beaucoup d'auteurs préconisent de l'appréhender par la relation multiplicative qui existe entre le numérateur et le dénominateur et donc par son aspect $a:b$ (Brousseau et Brousseau, 1987 ; Houle et Giroux, 2019). Lorsque la fraction a/b est introduite dans un cadre de partage par son aspect abîème, par exemple prendre les abîèmes d'une grandeur, plusieurs travaux de recherche pointent des difficultés persistantes chez certains élèves comme celle de rester bloqués au stade de la procédure « classique » : prendre a parts d'une unité partagée en b parts égales. Pour ces élèves, le dénominateur de la fraction devrait forcément correspondre - ou être « conforme » - à la partition proposée pour l'unité (Cadez et al., 2018). Dans ce contexte, les élèves ne réussissent pas à appréhender d'équivalence entre des fractions. Nous nous demandons comment expliquer et dépasser ces difficultés. Nous situons notre recherche dans le contexte d'une séquence ordinaire d'enseignement-apprentissage sur les fractions, en première année de cycle 3. Nous nous demandons comment cette séquence aborde l'équivalence de fractions lorsqu'elle mobilise un jeu de plateau destiné à l'apprentissage des fractions, *l'Atelier des Potions*. A l'aide principalement des concepts de *contrat* et de *milieu* de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998), nous cherchons à décrire et à comprendre les difficultés rencontrées et les apprentissages réalisés par trois élèves en difficulté repérés suite à un test passé en amont de la séquence. Des passages de certaines séances de la séquence, ainsi qu'un entretien individuel pour chacun des trois élèves, sont filmés, retranscrits et analysés. Le même test est proposé en aval de la séquence pour évaluer les progrès et analyser les difficultés persistantes. Nous montrons que, dans cette séquence et malgré quelques limites que nous soulignons, le jeu *l'Atelier des Potions* s'avère être une ressource à la fois accessible et ambitieuse pour établir des équivalences entre certaines fractions usuelles.

Mots clés : cycle 3, fractions équivalentes, élèves en difficulté, contrat didactique, jeu *l'Atelier des Potions*.