



HAL
open science

La manipulation dans le cadre de l'enseignement des fractions en lien avec la consolidation du concept d'unité au cycle 3

Mylène Petit

► To cite this version:

Mylène Petit. La manipulation dans le cadre de l'enseignement des fractions en lien avec la consolidation du concept d'unité au cycle 3. Education. 2023. dumas-04341650

HAL Id: dumas-04341650

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-04341650>

Submitted on 13 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Mémoire

Présenté pour l'obtention du Grade de

MASTER

« Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation »

Mention 1^{er} degré, Professeur des Écoles

La manipulation dans le cadre de l'enseignement des fractions en lien avec la consolidation du concept d'unité au cycle 3

Présenté par
PETIT Mylène

Sous la direction de :
SIMARD Arnaud

Maître de conférences en Mathématiques – INSPE de Franche-Comté, Besançon.

« Les fractions sont un des premiers et principaux terrains où se développe le dégoût des mathématiques et la conviction, à peu près toujours fausse, que l'on est incapable de cette activité "réservée aux plus intelligents" ».

Nicolas Rouche, *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* 1998.

Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de mémoire Arnaud SIMARD pour sa bienveillance, sa disponibilité et pour l'ensemble des conseils qu'il m'a apportés en vue d'orienter mon travail et mes recherches.

Je tiens également à remercier Marie BOLORINOS et Laurence KRATTINGER, enseignantes qui m'ont permis de réaliser des recueils de données dans leurs classes et avec lesquelles j'ai pu échanger concernant ce travail de recherche.

Enfin, je remercie les élèves de CP, de CM1 et de CM2, sans qui ce travail n'aurait pas été possible.

Sommaire

Introduction.....	4
I. REVUE DE LITTÉRATURE	5
I.1. La manipulation	5
I.1.1. Qu'est-ce que la manipulation ?	5
I.1.2. La manipulation en tant que mode de représentation du savoir	5
I.1.3. L'évolution de la place de la manipulation dans les textes officiels	5
I.1.4. Les enjeux et finalités de la manipulation	6
I.1.5. Le rôle de l'enseignant en manipulation.....	8
I.2. L'enseignement des fractions au cycle 3	8
I.2.1. Qu'est-ce qu'une fraction ?	8
I.2.2. Les différentes significations de la fraction.....	8
I.2.3. Textes officiels et repères de progressivité.....	10
I.2.4. Les difficultés liées à l'enseignement des fractions	11
I.3. La manipulation au service de l'enseignement des fractions.....	12
I.3.1. Quelques recommandations générales.....	12
I.3.2. Matériel de manipulation et situations d'apprentissage.....	12
I.3.3. Exemples de méthodes, projets et jeux pédagogiques soulignant l'importance de la manipulation pour l'enseignement des fractions	13
I.3.3.1. La méthode heuristique des mathématiques	13
I.3.3.1.1. Généralités	13
I.3.3.1.2. Place accordée à la manipulation.....	14
I.3.3.2. Le projet Klásma	14
I.3.3.3. Le jeu « l'atelier des potions ».....	15
II. FORMULATION DE LA PROBLÉMATIQUE.....	15
III. PRISE DE REPÈRES	16
III.1. Motivation et choix effectués	16
III.2. Évaluation diagnostique menée avec des élèves de cycle 2.....	16
III.2.1. Contexte général	16
III.2.2. Analyse a priori.....	16
III.2.2.1. Conception de l'activité et variables didactiques utilisées.....	16
III.2.2.2. Réponses et stratégies attendues	17
III.2.3. Analyse a posteriori	18
III.2.3.1. Analyse des réponses	18
III.2.4. Pistes d'évolution et d'amélioration	19

IV.	MÉTHODOLOGIE	19
IV.1.	Participants et procédures adoptées.....	19
IV.1.1.	Classe 1 (classe témoin).....	20
IV.1.2.	Classe 2	20
IV.2.	Méthode de recueil de données	20
IV.2.1.	Activité finale.....	20
IV.2.2.	Analyse a priori.....	21
IV.2.2.1.	Choix effectués	21
IV.2.2.2.	Réponses et stratégies attendues	22
IV.3.	Conception des situations de manipulation	23
IV.3.1.	Matériel de manipulation	23
IV.3.2.	Progression des séances et objectifs.....	24
IV.3.3.	Déroulement des séances	25
IV.3.3.1.	Séance 1	25
IV.3.3.2.	Séance 2	25
IV.3.3.3.	Séance 3	25
IV.3.3.4.	Séance 4	26
IV.3.3.5.	Séance 5	27
IV.3.3.6.	Séance 6.....	27
IV.3.4.	Choix des situations proposées	27
IV.4.	Méthode d'analyse des données	28
V.	RÉSULTATS ET ANALYSE A POSTERIORI	29
V.1.	Comparaison générale et analyse de la réussite entre les deux classes.....	29
V.2.	Types d'erreurs observés	30
V.3.	Typologie des erreurs liées au concept d'unité.....	31
V.3.1.	Section A	32
V.3.2.	Section B.....	33
V.3.3.	Section C.....	36
V.3.4.	Section D	37
V.3.5.	Section E.....	41
V.3.6.	Section F	43
VI.	DISCUSSION.....	46
VII.	PERSPECTIVES	48
VII.1.	Pistes d'évolution et d'amélioration possibles	48
VII.2.	Perspectives professionnelles	49

VIII. CONCLUSION	50
Bibliographie et sitographie	51
Table des tableaux	53
Table des figures	53
Annexes	56

Introduction

Cette réflexion est le fruit d'un travail s'effectuant dans le cadre du master Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation à l'Institut National Supérieur du Professorat et de l'Éducation de Franche-Comté.

Du fait de la réalisation de stages variés dans le domaine de l'enseignement en école primaire, de la scolarité que j'ai suivie et de la formation que je poursuis actuellement, j'ai pris conscience d'une part des difficultés que posent les mathématiques aux élèves, quel que soit leur âge, et d'autre part de la réticence qu'éprouvent certains élèves vis-à-vis des mathématiques, généralement jugées trop abstraites pour être accessibles. Ainsi, ayant personnellement toujours porté un intérêt particulier à cette discipline, j'ai fait le choix d'axer ce travail de recherche sur ce domaine.

Le choix de la thématique de ce mémoire a été conforté par les différentes études menées sur les connaissances et les compétences des élèves en mathématiques. Premièrement, l'évaluation PISA, Programme International pour le Suivi des Acquis des Élèves (*Program for International Student Assessment*), menée par l'OCDE (Organisation de Coopération et de Développement Économique) en 2018 a mis en évidence les compétences d'élèves âgés de 15 ans dans diverses disciplines et notamment en mathématiques selon 8 groupes de niveaux. Les résultats de cette étude soulignent qu'environ un cinquième des élèves « *ne possèdent pas les compétences et les connaissances mathématiques qui leur permettent de faire face aux situations de la vie réelle en rapport avec les mathématiques* » (DEPP, 2019). Deuxièmement, les enquêtes TIMSS (*Trends International in Mathematics and Science Study*) portant sur les compétences d'élèves de CM1 et de 4^{ème} de 58 pays révèlent des scores nationaux globaux de 488 et 485 face à un score global moyen européen de 527 pour les études de 2015 et 2019 respectivement (DEPP, 2016, p.11). Or, en 2019, le nombre d'heures annuelles dédiées à l'enseignement des mathématiques en France a été de 182h, alors qu'il a été de 156h pour l'Europe en moyenne, soit 15% plus important en France que pour le reste de l'Europe (DEPP 2020, p.4). Ces constats conduisent inévitablement à s'interroger sur les stratégies didactiques et pédagogiques adoptées et mises en œuvre en France concernant l'enseignement des mathématiques.

J'ai fait le choix de porter ce travail de recherche sur la manipulation de fractions au cycle 3. En effet, l'étude des fractions constitue une étape intermédiaire clé pour développer des compétences visant à mieux appréhender les nombres décimaux. Elle ne doit aucunement être négligée, son enseignement devant être mené avec précision afin de favoriser sa compréhension par les élèves. L'approche de cette notion constitue à la fois un défi pour les élèves qui sont amenés à découvrir puis à consolider leurs savoirs et savoir-faire sur ces nouveaux nombres au cours des années, mais aussi pour l'enseignant, qui doit développer des stratégies pédagogiques et didactiques adaptées pour que les élèves parviennent à s'approprier cette notion. La manipulation est utilisée dans le cadre de la découverte et de l'appropriation des fractions. Cette stratégie pédagogique est mise en avant dans diverses pédagogies telles que les pédagogies Montessori ou Freinet et son importance est soulignée par le rapport Villani-Torossian, indiquant que la manipulation constitue une étape essentielle préalable à l'abstraction des notions mathématiques, partie intégrante du « *triptyque manipulation, verbalisation, abstraction* » (VILLANI et TOROSSIAN, 2018, p.20).

Cette étude me permettra de m'interroger à la fois sur la place qu'occupe la manipulation dans la construction du concept de fractions mais aussi sur la façon dont la manipulation permet aux élèves de dépasser certaines difficultés liées à ce concept.

Cette réflexion effectuée dans le cadre de ce mémoire d'initiation à la recherche me permettra certainement de mieux appréhender l'enseignement des fractions au cycle 3 et les enjeux de la manipulation en général. Elle me sera donc bénéfique dans le cadre de la pratique de ce métier, d'une part lors de cette année puisque je suis contractuelle alternante dans une classe de CM1-CM2 et d'autre part lors de mes futures années en tant qu'enseignante.

I. REVUE DE LITTÉRATURE

I.1. La manipulation

I.1.1. Qu'est-ce que la manipulation ?

Afin d'introduire mon propos, il me paraît intéressant de se demander ce que la vie courante met en avant lorsqu'il s'agit de définir ce qu'est la manipulation. D'après le dictionnaire Le Robert, manipuler consiste à « *manier avec soin en vue d'expériences, d'opérations scientifiques ou techniques* ». Cette définition se précise dans le Larousse, qui souligne l'idée que le recours à la manipulation est pensé au service de l'apprentissage, la manipulation renvoyant à « *l'action de soumettre quelque chose à des opérations diverses, en particulier dans un but de recherche ou d'apprentissage* ». Elle intervient donc, à priori, dans les apprentissages et dans la construction des savoirs.

I.1.2. La manipulation en tant que mode de représentation du savoir

La stratégie pédagogique que représente la manipulation est en lien direct avec la façon dont l'humain représente ses connaissances. B-M. Barth, à travers son article, reprend les idées de J. Bruner (l'un des fondateurs de la psychologie cognitive) selon lesquelles il y aurait trois modes de représentation du savoir, fonctionnant ensemble dans le but de traiter les informations. Parmi ces modes, le mode enactif, aussi appelé sensori-moteur renvoie au fait que l'enfant « *apprend par l'action, par la manipulation* », soulignant notamment l'importance de l'apprentissage par les sens. Ce mode de représentation est complété par les modes iconique et symbolique, où l'enfant est capable de détacher l'action de la manipulation, en favorisant la construction « *d'images mentales* » et « *la représentation abstraite, par des symboles* » (BARTH, 1985, p.51).

I.1.3. L'évolution de la place de la manipulation dans les textes officiels

De nombreuses références à la manipulation dans les textes officiels peuvent être relevées. En effet, en 1923, dans les instructions relatives au nouveau plan d'étude des écoles primaires élémentaires, l'activité de manipulation y est déjà décrite et préconisée, bien que le terme n'ait pas été explicitement employé. La manipulation est vue comme « *la méthode qui consiste, au cours préparatoire comme à l'école maternelle, à placer entre les mains des enfants des objets (boutons, graines, bâchettes, etc.) qu'ils ont à grouper, séparer, combiner de diverses manières pour se rendre compte, par les yeux et par la main, de la signification réelle des calculs les plus simples* » (« Instructions relatives au nouveau plan d'études des écoles primaires élémentaires », 1923, p.40). La manipulation se fait tout d'abord au service de l'appréhension des nombres naturels, dans le cadre du dénombrement de collections d'objets, comme l'indiquent les programmes d'enseignement des mathématiques de 1970 et 1977, où le terme « manipuler » est clairement énoncé (Pédagogie, Enseignements scolaires et Orientation, 1970, p.7 ; « Horaires Objectifs et Programmes cycle préparatoire », 1977, p.12). Celle-ci s'inscrit progressivement dans une véritable démarche d'apprentissage, qui permet de mieux concevoir les notions mathématiques, comme le fait comprendre le programme du cycle 3 issu du bulletin officiel de l'Éducation Nationale de 2020, insistant sur le fait que la manipulation appartient à l'une des six compétences majeures visées en mathématiques

structurant son enseignement aux cycles 2 et 3 qui sont « *chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer* » (Ministère de l'Éducation Nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2020, p.90). Elle fait partie intégrante du raisonnement mathématique et notamment de la compétence « chercher », en lien avec le domaine 2 du socle commun de connaissances, de compétences et de culture qui est « *les méthodes et outils pour apprendre* » (Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, 2015, p.4).

Les programmes officiels, qui accordent à la manipulation une place essentielle dans les apprentissages, sont appuyés par d'autres écrits issus de la recherche, qui insistent tout autant sur l'étape d'apprentissage incontournable préalable que constitue la manipulation en vue de l'abstraction des notions mathématiques. Dans cette optique, le rapport Villani-Torossian renseigne en 5^{ème} mesure que dès le plus jeune âge, il faut « *mettre en œuvre un apprentissage des mathématiques fondé sur : la manipulation avec l'expérimentation, la verbalisation, l'abstraction* » (VILLANI et TOROSSIAN, 2018, p.9). Cette conception selon laquelle la manipulation joue un rôle déterminant en amont de l'abstraction est reprise dans la conférence de consensus nombres et opérations de 2015, qui met en avant diverses pistes pour les enseignants, dont celle d'avoir « *recours à la manipulation et à l'expérimentation* », qui « *ne concerne pas seulement l'école maternelle, mais doit s'étendre à l'école élémentaire* » (CNETSCO, IFE, et ENS de Lyon, 2015, p.10).

La manipulation est ainsi une stratégie pédagogique à priori bénéfique pour les apprentissages, dont la présence au sein d'activités pédagogiques est incontournable en mathématiques, comme en témoignent les instructions officielles.

I.1.4. Les enjeux et finalités de la manipulation

Dans son article sur la manipulation paru en 2019, J. Briand aborde la question de la manipulation au service de l'apprentissage au travers de deux situations mettant en avant le concept d'addition.

La première situation porte sur le concept d'addition de nombres entiers : 4 et 3. Sept cubes sont répartis dans deux boîtes (4 dans la première et 3 dans la deuxième) et les nombres sont inscrits au tableau. Deux cas sont distingués. Dans le premier, l'enseignant mélange les deux boîtes et demande aux élèves de dénombrer le contenu, qui est de 7. Une fois fait, l'enseignant inscrit $4 + 3 = 7$ au tableau. Dans le second cas, le matériel est le même. Cependant, après avoir mélangé les contenus des deux boîtes, l'enseignant ferme la boîte et demande aux élèves de prévoir le nombre de cubes qu'il y a dans la boîte, en s'appuyant sur un travail écrit. Après un temps de recherche puis de verbalisation, l'enseignant fait décombrer le nombre de cubes et inscrit l'égalité au tableau (BRIAND, 2019, p.4).

La seconde situation porte sur le concept d'addition de fractions décimales. Le matériel est constitué de deux bandes dont les mesures sont données sous forme de fractions décimales. Comme pour la situation précédente, deux cas peuvent être distingués. Dans le premier, l'enseignant demande d'accoler les deux bandes et de mesurer le tout. Puis, il inscrit l'égalité au tableau alors que dans le second, les élèves sont amenés à prévoir la longueur totale à l'écrit. La vérification avec le matériel est réalisée pour valider ou invalider les prévisions annoncées (BRIAND, 2019, p.6).

À partir de l'analyse de ces situations, J. Briand affirme que la manipulation doit se concevoir à la fois en termes de matériel (qui correspond au « *milieu matériel* »), mais aussi et surtout en termes de « *milieu d'apprentissage* » (BRIAND, 2019, p.5), qui correspond au milieu défini par le professeur dans lequel les élèves sont placés afin de leur permettre d'apprendre. Ces propos font référence à l'ouvrage de T. Dias, attestant qu'un « *milieu*

d'apprentissage propice aux expériences des élèves » doit être proposé par le professeur (DIAS, 2012, p.19). Le milieu matériel seul ne garantit pas le progrès des élèves, c'est bien le milieu d'apprentissage choisi qui le permet. De ce fait, la manipulation n'a de sens que si elle permet de comprendre la situation proposée, et surtout de susciter une activité mathématique de la part de l'élève qui se fait généralement à l'écrit. L'activité mathématique est une « *activité au cours de laquelle les élèves ont à produire un modèle (par une représentation ou un écrit) qui permet de contrôler une action effectuée dans un milieu matériel* » (BRIAND, 2019, p.5). La manipulation ne doit donc pas se substituer au raisonnement mathématique, qui passe par un travail de recherche et de réflexion, et plus généralement par un travail de prévision dont les activités langagières permettent « *la mise en mots des connaissances* » (DIAS, 2012, p.125).

Ainsi, bien que la manipulation apparaisse comme une étape incontournable aux apprentissages qui permet une vérification pragmatique de la situation, c'est-à-dire avec du matériel, elle n'en constitue néanmoins pas la finalité. Autrement dit, on ne manipule pas uniquement pour manipuler. La finalité de la manipulation est le passage d'une vérification pragmatique vers une vérification syntaxique, qui s'appuie sur les savoirs et savoir-faire de l'élève et notamment par le calcul. Par conséquent, concevoir que l'efficacité d'une manipulation n'est liée qu'au matériel utilisé n'est pas suffisant.

Le fait de susciter une activité mathématique par la manipulation favorise et aide les élèves à se diriger progressivement vers une démarche d'abstraction. En effet, comme le souligne le rapport Villani-Torossian en inscrivant que « *la manipulation tient une place primordiale, mais elle est pensée en vue de l'abstraction et ceci dans une perspective de progressivité étendue sur le long terme* », elle est essentielle pour « *favoriser l'apprentissage des élèves et les accompagner dans la construction d'abstractions* » (VILLANI et TOROSSIAN, 2018, p.13). Cet enjeu majeur de la manipulation est renforcé par la conférence de consensus nombres et opérations du 26 novembre 2015, dont la recommandation n°5 est que « *les premiers apprentissages mathématiques doivent reposer sur des manipulations d'objets variées et répétées dans une visée progressive de symbolisation et d'abstraction* » (CNESCO, IFE, et ENS de Lyon, 2015, p.12). Ces idées sont reprises par N. Pinel dans son ouvrage, qui souligne également que la manipulation doit « *aider l'élève à se construire une représentation de la situation* » et doit être une étape d'apprentissage à part entière se distinguant du jeu libre, perçue comme une « *action physique de l'élève guidée par un objectif, un raisonnement* » (PINEL, 2019, p.88). Il insiste également sur le fait que la manipulation ne permet pas à elle seule de faire comprendre des concepts mais doit s'accompagner d'un « *questionnement de la part de l'enseignant qui va susciter la réflexion de l'élève* » (PINEL, 2019, p.88) suivi d'un « *blocage de l'accès au matériel* » (PINEL, 2019, p.90) en vue de permettre le passage à la représentation et de favoriser l'abstraction via le langage, mettant de ce fait en évidence l'importance de la verbalisation dans ces apprentissages. Le matériel de manipulation doit tendre à une unique finalité qui est la validation pragmatique du raisonnement conduit en l'absence de matériel. De plus, selon N. Pinel, les modalités de réalisation de la manipulation sont essentielles, puisque cette phase doit conduire progressivement vers l'abstraction pour être véritablement efficace, elle ne doit donc être ni trop courte en menant au concept trop rapidement, ni trop longue en empêchant la montée en abstraction.

L'ensemble de ces travaux de recherches soulignent que la manipulation utilisée en classe n'est donc bénéfique pour les apprentissages que dans le cas où elle constitue une étape favorisant l'accès à l'abstraction, en lien avec la verbalisation. Elle doit être pensée en vue d'engager un travail cognitif de l'élève et doit être au service de l'activité mathématique, et de ce fait, ne peut pas s'y substituer.

I.1.5. Le rôle de l'enseignant en manipulation

Au vu des enjeux de la manipulation, l'enseignant a un rôle incontournable à jouer. Son rôle est déterminant en ce qui concerne le choix du matériel utilisé. J. Briand, dans son article, révèle que les objectifs de l'enseignant sont d'une part « *d'organiser une mise en scène qui va créer le désir d'en savoir plus* » pour les élèves, mais aussi de mettre en avant les compétences langagières des élèves, puisque la finalité de la manipulation est « *faite de langage, essentiellement écrit* ». Aussi, l'un des objectifs de l'enseignant est de permettre aux élèves de transposer les savoirs acquis dans une situation particulière faisant appel à la manipulation à d'autres situations, en vue de « *décontextualiser les connaissances* ». L'enseignant doit concevoir un milieu d'apprentissage adapté aux savoirs recherchés, et notamment adopter une démarche qui permette « *d'attribuer à l'expérience la recherche d'un nouveau modèle* », en conduisant les élèves à se questionner, à prévoir des résultats, à raisonner à partir d'une situation concrète, en « *s'émancipant progressivement du milieu matériel* » (BRIAND, 2007, p.22, p.24, p.26). L'idée selon laquelle l'enseignant a un rôle à jouer pour que la manipulation amène les élèves à se questionner est soulignée par T. Dias, dans son ouvrage sur la manipulation, qui considère qu'il est « *nécessaire de problématiser l'utilisation par des questionnements et l'inclure dans des contextes qui ont du sens* » (DIAS, 2012, p.18). Cette idée est modulée par N. Pinel, qui affirme que l'enseignant doit être un véritable « *médiateur de savoirs* », en mettant en place des séances d'enseignement adaptées aux compétences et objectifs visés. De plus, lors des séances, la posture de l'enseignant est essentielle et certains gestes professionnels sont incontournables. En effet, l'enseignant doit expliciter aux élèves ce qu'il attend d'eux et ce que les élèves seront amenés à faire pendant la séance lors de la passation des consignes. Il a aussi un rôle d'observateur afin de comprendre les stratégies adoptées par ses élèves, de s'adapter à leur rythme d'apprentissage et de pouvoir les guider et les étayer efficacement et de manière appropriée dans la réalisation des tâches demandées. En somme, l'enseignant doit « *construire un espace d'apprentissage qui permette à l'élève de parvenir à trouver la solution avec une autonomie maximisée et donc alléger la charge cognitive de l'élève* » (PINEL, 2019, p.43)

I.2. L'enseignement des fractions au cycle 3

I.2.1. Qu'est-ce qu'une fraction ?

De même que pour le terme « manipulation », il me semble important de relever la définition du mot « fraction » dans différents dictionnaires couramment utilisés. Le dictionnaire Le Robert définit la fraction comme étant une « *quantité qui représente une ou plusieurs parties égales de l'unité* », « *une partie d'une totalité* », ou encore comme le « *symbole formé d'un dénominateur et d'un numérateur* ». Dans la même optique, le Larousse définit la fraction comme « *une division, partie, portion d'un tout* ». Cependant, il met en avant une autre définition relevant davantage du langage mathématique, en la désignant comme un « *nom donné à la notation fractionnaire $\frac{a}{b}$, lorsque a et b sont des entiers (b étant non nul)* ». Cette définition s'apparente à celle donnée par L. Corrieu, où la fraction « *se compose de deux nombres entiers naturels, a et b , séparés par une barre horizontale, alors $\frac{a}{b}$. Le chiffre du haut (a) s'appelle numérateur et le chiffre du bas (b) s'appelle dénominateur. Le dénominateur (b) est toujours différent de zéro* » (CORRIEU, 1999).

I.2.2. Les différentes significations de la fraction

Dès leur apparition en -3000 en Mésopotamie, les fractions sont utilisées dans le domaine des grandeurs et notamment pour traiter de la notion de partage de l'unité. C'est à

partir du V^{ème} siècle avant Jésus-Christ qu'elles sont considérées comme de véritables « *objets d'étude* », bien qu'elles se rapportent toujours au domaine des grandeurs, comme en attestent les travaux Pythagoriciens (ANSELMO et ZUCCHETTA, 2018, p.15).

Ainsi, au cycle 3, il n'est pas étonnant de voir que la fraction est introduite dans le cadre de mesures de grandeurs continues ou pour résoudre des situations de partage, comme l'affirme l'ouvrage proposé sous la direction de B. Anselmo et H. Zucchetta, affirmant que « *c'est dans des contextes de mesure de grandeurs qu'apparaissent les premières fractions [...]. La fraction a ici une signification concrète, issue de la notion de partage* » (ANSELMO et ZUCCHETTA, 2018, p.22). Elle est donc appelée fraction partage. Dans cette optique, le document d'accompagnement Fractions et nombres décimaux au cycle 3 publié par le Ministère de l'Éducation Nationale de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche définit la fraction comme étant « *une unité coupée en un nombre entier de parts égales et qu'on prend un nombre entier de ces parts, éventuellement supérieur au nombre de parts contenues dans cette unité* » (Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, p.1). Par exemple, la fraction $\frac{3}{4}$ désigne un partage d'une unité en quatre parts égales dont 3 de ces parts sont prises, mettant en avant une signification particulière de la fraction qui est perçue comme un partage de l'unité. Cette signification de la fraction fait référence à l'un des quatre types de fractions définis par R. Brissiaud qui est la fraction perçue comme un « *fractionnement de l'unité* », la fraction $\frac{3}{4}$ étant lue « trois quarts ». Celle-ci correspondant à une « *partition de l'unité suivie d'une multiplication* », le nombre 3 étant sans dimension et opérant sur $\frac{1}{4}$.

Au-delà de cette signification qui apparaît en premier lors de l'introduction des fractions au cycle 3, la fraction peut aussi être perçue comme un partage de plusieurs unités, où la fraction $\frac{3}{4}$ est définie comme étant le partage de la totalité des 3 unités en 4 parts égales, c'est-à-dire comme étant le $\frac{1}{4}$ de 3 unités. Ce type de fraction, toujours d'après R. Brissiaud, est appelé « *division-partition de la pluralité* », la fraction $\frac{3}{4}$ étant lue « 3 divisé par 4 ». Concernant ce type de fraction, le nombre 3 renvoie à une grandeur contrairement au nombre 4 qui est sans dimension (BRISSIAUD, 1998, p.154).

Les deux autres types de fractions définis par R. Brissiaud sont celles qui désignent soit des grandeurs de natures différentes, soit des grandeurs de même nature. Lorsque les nombres 3 et 4 de la fraction $\frac{3}{4}$ renvoient à des grandeurs de natures différentes, on parle de « *fraction proportion* », généralement lue « 3 pour 4 ». Ce type de fraction est souvent utilisé pour parler d'un rendement ou pour désigner une proportion de personnes pour une population donnée. Enfin, lorsque les nombres 3 et 4 renvoient à des grandeurs de même nature, on parle de « *fraction rapport* », la fraction $\frac{3}{4}$ étant le plus souvent lue « 3 divisé par 4 » (BRISSIAUD, 1998, p.153).

La fraction peut aussi être définie comme étant un repérage d'une position, associée à l'utilisation d'une demi-droite graduée qui permet notamment de mettre en évidence des distances. Cette signification de la fraction, étroitement liée à la notion de partage, « *contribue à lui conférer un premier statut de nombre* » puisqu'elle est dépourvue d'unité de mesure (ANSELMO et ZUCCHETTA, 2018, p.23).

Enfin, la fraction peut être envisagée en termes de fraction quotient, la fraction $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers correspond au « *nombre qui multiplié par b donne a* » désignant ainsi le

« quotient de a par b » (Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, p.7).

I.2.3. Textes officiels et repères de progressivité

Les diverses significations de la fraction ne sont pas abordées simultanément lors de son introduction en classe et il me semble important de rappeler la progressivité des apprentissages en termes de construction du nombre en amont du cycle 3 afin de mieux comprendre le cheminement mené tout au long de la scolarité des élèves en école primaire.

La construction du nombre s'effectue dès le cycle 1, où les nombres entiers, qui sont d'abord utilisés dans le cadre du dénombrement, acquièrent progressivement leur statut de nombres dès le cycle 2. La notion d'unité dans le cadre des nombres entiers, dont la compréhension est indispensable pour concevoir les fractions de façon appropriée, tient une place importante dans l'enseignement dès le plus jeune âge des élèves, puisque « *très progressivement se construit l'unité 1, qui correspond à n'importe lequel des objets de référence* » (Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, p.7).

C'est seulement après avoir réalisé un travail approfondi sur les entiers et le système de numération positionnel qui y est associé que les fractions sont introduites au cycle 3 en CM1, cycle pour lequel la durée hebdomadaire moyenne consacrée aux mathématiques est de 5 heures. Les fractions sont utilisées pour résoudre des problèmes que les nombres entiers ne permettent pas de résoudre, dans le cadre de la mesure de grandeurs continues ou dans des situations de partage, faisant référence à la fraction vue comme partage de l'unité ou de plusieurs unités, comme en témoignent les contenus du programme d'enseignement du cycle 3, où « *les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée* » (Ministère de l'Éducation Nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2020, p.92). C'est ainsi que le nombre prend un nouveau statut « *pour exprimer des quantités et des mesures de grandeurs qui ne sont plus égales à un nombre entier d'unités* ». De la même manière que pour les entiers, les fractions prennent peu à peu leur statut de nombres « *à travers des comparaisons, des rangements, des repérages sur une droite graduée, des calculs* », en adoptant progressivement l'une des significations vues précédemment qui est celle du repérage d'une position (Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, p.6, p.3).

Le travail réalisé avec les fractions porte tout d'abord sur des fractions simples, qui, bien que difficiles à définir véritablement en mathématiques, renvoient à des fractions dont « *le partage de l'unité se fait en un petit nombre de parts (2, 3, 4, ...)* », comme $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, ... Progressivement et dès le CM1, suite à un travail oral, les liens s'établissent entre fractions simples et fractions décimales, définies « *lorsque le partage de l'unité se fait en un nombre de parts égal à une puissance de 10* » (Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, p.1), c'est le cas des fractions $\frac{4}{1}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{425}{100}$, qui sont des exemples parmi tant d'autres. C'est seulement après avoir dédié un apprentissage approfondi aux fractions (simples et décimales) que les nombres décimaux et l'écriture à virgule (ou écriture décimale) sont introduits, en continuité avec les multiples écritures des fractions décimales, notamment celle en tant que « *somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1* » (Ministère de l'Éducation Nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2020, p.93).

Les fractions sont donc travaillées avant les nombres décimaux. Elles permettent de donner du sens aux nombres décimaux et à son écriture, plus précisément dans le but de « renforcer la compréhension du codage que constitue l'écriture à virgule d'un nombre décimal » (Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, p.6). Ce choix pédagogique préconisé peut aisément se comprendre dans la mesure où l'apparition des fractions (qui date de -3000 en Mésopotamie) est bien plus ancienne que celle des nombres décimaux instaurée en 1585 dans la Dimes de S. Stevin, dont la caractéristique pratique dans la réalisation des calculs est soulignée (ANSELMO et ZUCCHETTA, 2018, p.15). Lors de la dernière année de cycle 3, la fraction qui jusque-là était appréhendée en tant que fraction partage est désormais traitée en tant que fraction quotient, faisant le lien avec les nombres rationnels, qui sont étudiés dès le cycle 4 au collège.

Les attendus de fin de cycle énoncés dans le programme du cycle 3 rendent compte du travail effectué sur les fractions tout au long du cycle, puisqu'en fin de cycle, les élèves doivent être capables, entre autres, « d'utiliser et représenter [...], des fractions simples » et de « résoudre des problèmes utilisant des fractions simples ». Pour cela, ils sont amenés à « connaître diverses désignations des fractions : orales, écrites et décompositions additives et multiplicatives », à « utiliser » les fractions, à les « repérer », à les « placer » sur une demi-droite graduée, à les « encadrer par deux nombres entiers consécutifs », à « comparer deux fractions de même dénominateur », à les « écrire sous la forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 » (en lien avec l'écriture décimale) et à « connaître des égalités entre des fractions usuelles » (Ministère de l'Éducation Nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2020, p.93).

La découverte et l'approfondissement de la notion de fraction constitue donc un apprentissage qui demande du temps et qui est repris tout au long du cycle afin de favoriser sa compréhension.

I.2.4. Les difficultés liées à l'enseignement des fractions

Lors de l'apprentissage des fractions, les élèves sont confrontés à diverses difficultés.

Lors de leur introduction en classe, les élèves ne maîtrisent encore pas suffisamment le concept d'unité, bien qu'il soit introduit dès le cycle 1. Ils rencontrent des difficultés à identifier l'unité. De ce fait, ils ont du mal à accepter qu'une fraction puisse être supérieure à 1, puisqu'elle est souvent rencontrée dans la vie courante où la notion de partage se fait généralement à partir d'une unité, comme lors du partage d'une tarte en x parts égales par exemple. Par conséquent, les erreurs observées lorsqu'il s'agit de désigner une fraction dans le cadre d'une représentation avec plusieurs unités sont courantes.

Les élèves ont aussi des difficultés à différencier la partie et le tout. Il n'est pas rare qu'un élève associe une représentation montrant une tarte partagée en cinq parts égales dont une part est coloriée (la partie) à la fraction $\frac{1}{4}$, au lieu de l'associer à la fraction $\frac{1}{5}$, en considérant le nombre de parts coloriées par rapport au nombre de parts non coloriées au lieu de considérer la partie (le nombre de parts coloriées) par rapport au tout (le nombre de parts coloriées et non coloriées). Cette erreur couramment observée témoigne de la difficulté pour les élèves à « identifier la partie et le tout ».

Des difficultés liées à la façon dont écrire les fractions sont aussi rencontrées. Le passage d'un système de numération positionnelle, c'est-à-dire de gauche à droite à une écriture fractionnaire, pose des difficultés pour les élèves, qui ont tendance à « considérer la barre de fraction comme un simple séparateur entre deux entiers ». Cette conception génère de nombreux obstacles pour les élèves, notamment dans le cadre de comparaisons et

d'opérations sur les fractions où certaines règles valables sur les entiers sont transposées à tort aux fractions, mais aussi sur le passage d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale et inversement. Ainsi, par exemple, $\frac{3}{8}$ est considérée comme inférieure à $\frac{5}{16}$ car $3 < 5$ et $8 < 16$ et la fraction $\frac{3}{8}$ est à tort associée à l'écriture décimale 3,8. De même, concevoir qu'un nombre puisse avoir différentes écritures, lorsque la notion de fractions équivalentes est abordée, est difficile à faire comprendre aux élèves, qui peinent alors à accorder aux fractions un véritable statut de nombre.

Enfin, certaines confusions liées à la reconnaissance et la désignation orale apparaissent souvent. Si certains élèves peinent à différencier les termes « un demi » et « un et demi », d'autres confondent les désignations « tiers » et « quarts » (ANSELMO et ZUCCHETTA, 2018, p.20, p.52).

L'ensemble des difficultés présentées ci-dessus sont évidemment à envisager et à prendre en compte lors de la préparation de séances sur les fractions dans le but de prévenir d'éventuelles difficultés liées à leur enseignement.

I.3. La manipulation au service de l'enseignement des fractions

I.3.1. Quelques recommandations générales

La manipulation, mise en avant par les différents manuels d'enseignement, apparaît sans nul doute bénéfique dans le cadre de l'enseignement des fractions. Les modalités de la manipulation recommandées doivent tenir compte de plusieurs éléments.

Les types de matériels utilisés sont essentiels, tous ne favorisant pas l'apprentissage au même niveau. Par exemple, les objets neutres permettent une manipulation plus efficace que le matériel sur lequel figurent de nombreux détails, facilitant le passage à l'abstraction (CARBONNEAU, MARLEY, et SELIG, 2013, p.389). Le matériel doit donc, d'après N. Pinel, être « *attractif, non-distrayant, utilisable par tous, ne doit pas attirer l'attention ailleurs par le biais d'une caractéristique non pertinente, au risque de nuire à l'apprentissage* » (PINEL, 2019, p.93). De même, il est important de diversifier au maximum le matériel de manipulation utilisé (disques, bandes de longueurs, rectangles d'aires, ...) afin de favoriser l'appropriation du concept par les élèves.

Aussi, dès le départ, il est conseillé de présenter aux élèves des fractions supérieures à 1, afin de les aider à construire la notion d'unité et d'éviter de leur véhiculer des conceptions erronées sur les fractions. Il est donc recommandé d'introduire les fractions pour mesurer des longueurs plutôt que des aires, facilitant les mesures plus grandes que l'unité (ANSELMO et ZUCCHETTA, 2018, p.36).

I.3.2. Matériel de manipulation et situations d'apprentissage

Le matériel utilisé dans le cadre d'activités de manipulation sur les fractions est varié. Ci-dessous sont présentés quelques matériels les plus couramment utilisés pour traiter certaines notions particulières sur les fractions.

- *La bande unité et les bandes* : ce matériel permet d'une part de se représenter l'unité (bande unité) et d'autre part la mesure de segments par pliage ou report de la bande unité. Elle est couramment utilisée pour introduire le concept de fractions et montrer l'insuffisance des entiers dans le contexte de mesures de grandeurs continues, lorsque la mesure d'une bande nécessite le pliage de la bande unité. Les pliages de la bande

unité permettent notamment de construire les notions de moitié, (tiers), quart, huitième, ...

- *Disques* : les fractions de disques permettent de travailler la notion d'unité et notamment la décomposition de l'unité à partir de fractions égales ou différentes et les compléments à l'unité. Ils peuvent aussi servir à construire des égalités de fractions et à mettre en relation diverses écritures de fractions. D'autres formes permettent aussi de travailler ces notions en abordant la fraction au moyen de la notion d'aire plutôt que de la mesure de longueurs, tels que les hexagones, les rectangles, ... (Académie de Besançon, Klásma)
- *Les réglattes Cuisenaire* : comme les bandes et les disques, celles-ci servent à travailler la notion d'unité, la décomposition de l'unité et même de plusieurs unités en fractions égales ou différentes, permettant de mettre en évidence les équivalences de fractions. Elles permettent aussi de faire le lien avec les fractions décimales, lorsque l'unité est partagée en 10 parts identiques par exemple.

I.3.3. Exemples de méthodes, projets et jeux pédagogiques soulignant l'importance de la manipulation pour l'enseignement des fractions

Plusieurs méthodes, projets et jeux pédagogiques accordent à la manipulation une place importante dans les apprentissages, notamment dans ceux liés aux fractions. Je porterai mon attention sur trois d'entre eux : la méthode heuristique des mathématiques généralement connue sous le nom de MHM, le projet Klásma et le jeu « l'atelier des potions ». Ces choix s'appuient en partie sur les séances d'enseignement que j'ai pu observer en classe lors de la réalisation de divers stages mettant en avant ces méthodes et projets, mais aussi sur le fait de leur popularisation de plus en plus importante chez les enseignants.

I.3.3.1. La méthode heuristique des mathématiques

I.3.3.1.1. Généralités

La méthode heuristique des mathématiques est née en 2014 et a été développée par Nicolas Pinel et son équipe, celui-ci étant un ancien enseignant et directeur d'école devenu conseiller pédagogique et désormais inspecteur de l'Éducation Nationale. Elle a été testée sur différents niveaux, qu'ils soient simples, doubles ou même triples, mais aussi sur des publics variés (en milieux urbains, ruraux, en REP et REP+ (*Réseau d'Éducation Prioritaire*)). De même, des profils variés d'enseignants ont testé cette méthode pédagogique, que ce soit des enseignants expérimentés ou au contraire nouveaux dans l'enseignement ou autres. Il s'agit d'une véritable méthode pédagogique car elle souligne une organisation de l'enseignement des mathématiques inscrite dans la durée et pensée pour la globalité des cycles. Méthode spiralaire basée sur des fondements scientifiques mais aussi méthode pédagogique construite à partir des travaux issus de la recherche, elle vise à « *faire découvrir à l'élève ce qu'on veut lui enseigner* ». Elle prône la « *recherche du sens, la mise en activité intellectuelle, le lien avec les autres disciplines de la vie de tous les jours et le rôle pédagogique de l'enseignant* » (PINEL, 2019, p.67). Ainsi, elle vise à être la plus explicite possible, tant concernant les objectifs visés, les procédures ou stratégies utilisées, que les raisonnements conduits par les élèves.

Les principes de cette méthode sont divers. Celle-ci tend premièrement à « *offrir une culture mathématique positive* » aux élèves, afin qu'ils changent leur rapport aux mathématiques en vue de donner davantage de sens aux apprentissages (PINEL, 2019, p.67). L'objectif majeur est donc de motiver les élèves afin qu'ils prennent plaisir à faire des

mathématiques dans le but de favoriser leur réussite et d'éveiller leur curiosité. Deuxièmement, cette méthode vise à « offrir un environnement adapté » aux élèves qui soit suffisamment stimulant. Troisièmement, cette méthode cherche à « répondre aux besoins des élèves », en respectant le rythme d'apprentissage de chacun, en donnant des tâches adaptées aux élèves et en accordant à l'erreur une place bénéfique en tant que moteur des apprentissages (PINEL, 2019, p.68). Quatrièmement, cette méthode a pour objectif de « connecter les mathématiques aux nombres ». Enfin, le dernier principe de cette méthode concerne la manipulation. Il s'agit pour les élèves de « manipuler pour conceptualiser », ceci étant perçu comme une « étape nécessaire pour accéder au symbolique et pour comprendre les concepts » (PINEL, 2019, p.69).

I.3.3.1.2. Place accordée à la manipulation

Cette méthode est constituée de 24 modules. Les compétences et connaissances à acquérir sur les fractions sont travaillées dès le module 5 et ce, jusqu'au dernier.

La découverte des fractions se fait grâce à des manipulations et à l'aide d'un matériel très utilisé : les bandes. L'introduction des fractions se fait dans le cadre de la mesure d'une grandeur continue qui est la longueur, afin de montrer l'insuffisance des entiers dans ce contexte. D'autres situations de manipulation sont proposées : tracé de cercles ou de carrés et pliage afin d'introduire les termes de demis, tiers, quarts, travail sur la décomposition de l'unité à l'aide de lego, ... Ces situations de manipulation sont généralement complétées par des situations proposées sous forme de jeux : dominos des fractions, cartes flash, ...

I.3.3.2. Le projet Klásma

Le projet Klásma a été développé par plusieurs enseignants et conseillers pédagogiques des circonscriptions de Besançon 2, 3 et 4. Il met en avant 21 situations d'apprentissage afin de construire la notion de fractions au cycle 3. Ces situations font apparaître l'objectif visé en lien avec les programmes, les consignes, des attendus et commentaires, les réponses aux situations d'apprentissage proposées et un temps de synthèse. Elles visent à construire l'ensemble des connaissances et compétences requises pour appréhender, comprendre et maîtriser les fractions. De ce fait, l'enseignement est conçu pour être mené de façon régulière. La place accordée à la manipulation est essentielle, « l'objet de cette manipulation est de développer chez les élèves des représentations mentales qui vont soutenir des capacités langagières et de communication puis d'abstraction » (Académie de Besançon, Klásma, p.4)

Les situations proposées font toutes appel à la manipulation et à du matériel varié : bandes, disques imprimés et fractions de disques. Les types de disques nécessaires à l'animation des situations d'apprentissage sont au nombre de 7, partagés en diverses fractions de disques : $2 \times \frac{1}{2}$, $3 \times \frac{1}{3}$, $4 \times \frac{1}{4}$, $5 \times \frac{1}{5}$, $6 \times \frac{1}{6}$, $8 \times \frac{1}{8}$, $10 \times \frac{1}{10}$.

Enfin, les situations sont souvent auto-validantes par superposition ou complémentation. Les élèves peuvent généralement rapidement s'assurer de la validité de leur raisonnement.

I.3.3.3. Le jeu « l'atelier des potions »

Le jeu « L'atelier des potions » dont l'élaboration a débuté en 2017 a été développé par Plaisir Maths. Des chercheurs et des enseignants à la fois du primaire et du secondaire ont travaillé en collaboration pour concevoir ce projet. Celui-ci a été conçu à partir des travaux de recherche de N. Pelay, docteur en didactique des mathématiques ayant réalisé une thèse parue en 2011 sur la dialectique jeu-apprentissage et l'élaboration du concept de contrat didactique. Dans cette thèse, Pelay a montré que « *le jeu était un moteur du processus de dévolution et qu'il existe, dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) une dimension ludique intrinsèquement liée à la dimension didactique* » (PELAY, 2019, p.7). De plus, il parle de « *contrat didactique et ludique* », défini comme étant « *l'ensemble des règles et comportements, implicites et explicites, entre un « éducateur » et un ou plusieurs « participants » dans un projet, qui lie, de façon explicite ou implicite, jeu et apprentissage dans un contexte donné* ». (PELAY, 2011, p.284)

Il s'agit d'un outil d'enseignement qui permet d'appréhender le concept de fractions de façon ludique et attractive où « *la manipulation et l'expérimentation sont au cœur du jeu* ». Ce projet permet de faire travailler les élèves sur « *les fractions inférieures, égales et supérieures à 1, sur les équivalences de fractions, sur les sommes de fractions et sur les décompositions de fractions, entre autres* » (PLAISIR MATS, Jeux Fractions, Atelier des Potions).

Le principe de ce jeu est simple : les élèves ont à disposition divers ingrédients (grenouilles, raies, araignées et serpents) et doivent, à partir de ces ingrédients, réaliser des potions en sélectionnant la bonne fraction d'ingrédient. Les quatre types d'ingrédients sont prédécoupés en demis, tiers, quarts, cinquièmes, sixièmes, huitièmes, neuvièmes et dixièmes. Une fois les ingrédients sélectionnés et placés dans un chaudron, les élèves peuvent vérifier leur recette à l'aide d'un grimoire des solutions en superposant les différents ingrédients contenus dans leur chaudron sur les illustrations associées. Au-delà de cette fonction didactique du grimoire, celui-ci a également une fonction adidactique, puisqu'il « *renvoie des rétroactions au moment de la phase de validation qui vont permettre aux élèves d'identifier leurs erreurs, de comprendre comment ils auraient pu faire juste, et de faire ainsi évoluer leurs stratégies* » (Revue de mathématiques pour l'école, Le jeu en mathématiques, 2019, p.10). Ce jeu est donc auto-validant et facilite le travail en autonomie.

Ainsi, diverses situations d'apprentissage faisant appel à la manipulation permettent de travailler les connaissances et compétences attendues en termes de fractions. Qu'il s'agisse d'une méthode pédagogique, d'un projet, ou d'un jeu, toutes ces situations accordent à la manipulation une place importante.

II. FORMULATION DE LA PROBLÉMATIQUE

Suite aux recherches effectuées, il est évident que la manipulation tient une place conséquente et bénéfique dans le cadre de l'enseignement des fractions, et généralement dans le cadre de l'introduction de cette notion.

Néanmoins, la manipulation peut aussi s'envisager au-delà de son rôle d'introduction au concept pour lequel elle est considérée comme une étape préalable à celle de représentation et d'abstraction.

Ainsi, au regard des difficultés rencontrées par les élèves concernant le concept d'unité en lien avec les fractions, il convient de s'interroger : **La manipulation permet-elle aux élèves de surmonter des difficultés liées à la maîtrise du concept d'unité lors de l'apprentissage des fractions au cycle 3 ? Si oui, en quoi et comment ?**

L'hypothèse selon laquelle la manipulation permettrait aux élèves de surmonter des difficultés sur les fractions liées à la maîtrise du concept d'unité peut être formulée. Il est probable que le matériel de manipulation permette aux élèves de mieux visualiser et percevoir l'unité considérée et donc de mieux appréhender les fractions en lien avec l'unité choisie.

III. PRISE DE REPÈRES

III.1. Motivation et choix effectués

Suite aux recherches effectuées sur les difficultés rencontrées par les élèves concernant l'apprentissage des fractions, il me semblait intéressant et important de me rendre personnellement compte des difficultés éprouvées par les élèves que j'ai rencontrés. Ainsi, lors d'un stage réalisé en école, j'ai décidé de concevoir et de faire passer une activité aux élèves visant à mettre en évidence certaines difficultés liées au concept d'unité pour deux raisons. La première est que la maîtrise du concept d'unité est indispensable afin d'appréhender les fractions. La deuxième raison est que ce concept est introduit dès le cycle 1 et est travaillé sur la totalité des cycles de l'école primaire, il est donc plus facilement possible d'évaluer sa maîtrise et d'adapter cette activité au niveau de classe et au cycle considéré. Cette activité m'a permis de me rendre compte des difficultés rencontrées par les élèves quant au concept d'unité, dès le cycle 2.

III.2. Évaluation diagnostique menée avec des élèves de cycle 2

III.2.1. Contexte général

L'évaluation diagnostique a été menée dans une école internationale française située à Calgary au Canada, qui est le lycée Louis Pasteur, accueillant des classes de la petite section jusqu'à la terminale et un public à la fois anglophone et francophone ayant un bon niveau scolaire. Elle a été conduite dans deux classes de CP (26 élèves au total), qui n'ont jamais étudié les fractions, celles-ci n'étant pas au programme du cycle 2. Néanmoins, le concept d'unité est travaillé depuis le cycle 1 pour l'ensemble que sont les entiers. Cette évaluation diagnostique a été menée en période 3 de l'année scolaire.

III.2.2. Analyse a priori

III.2.2.1. Conception de l'activité et variables didactiques utilisées

L'activité donnée (*cf annexe Évaluation diagnostique CP*) a été proposée individuellement à chaque élève afin de pouvoir recueillir leurs éventuelles réactions. Elle est constituée de cinq sections faisant apparaître différentes représentations (disques, carrés, rectangles). La consigne a été donnée oralement et a été la suivante : « *L'unité est représentée par le disque/le carré/les deux carrés, ... (en montrant la représentation). Tu vas devoir me dire combien d'unités sont représentées ici (en montrant la représentation)* ». Chaque section a été montrée individuellement pour que les élèves perçoivent bien la bonne unité choisie à chaque fois.

Cette partie vise à détailler les choix ayant été réalisés concernant différentes variables afin de concevoir cette activité. Les variables ont été les suivantes :

- *L'espacement* : pour les cas *C.a) VS C.b)*
- *La disposition* : pour les cas *D.a) et D.b)* et pour le cas *E.a)*
- *Le type de représentation* : pour les cas *A.a), B.a) et C.a)* avec des représentations variées sous forme de disques, carrés, demi-disques faisant appel à la même valeur numérique. De même, les cas *F.a) et G.a)* sont différentes représentations faisant appel à la même valeur numérique avec des unités choisies différentes. De plus, certaines représentations font apparaître des « cases » laissées vides alors que d'autres non (sections A, B, C VS D et E) avec des valeurs numériques identiques, notamment entre *A.a) et D.a)*. Aussi, d'autres représentations, telles que *E.a) et E.b)* sont composées de plusieurs « formes » identiques alors que l'unité ne correspond pas à une « forme complète ».
- *Valeurs numériques* : Les valeurs numériques sont supérieures à l'unité pour les sections A, B, C, D et E et inférieures à l'unité pour les sections F et G afin de voir si le terme de moitié, ou demi, est prononcé par les élèves, en lien avec les fractions.
- *Valeurs numériques choisies par rapport à la représentation* : certaines représentations, comme les cas *D.c) et E.b)* sont entièrement grises avec des « formes complètes », alors que les valeurs numériques associées sont différentes des unités choisies, qui ne sont pas représentées par des formes complètes.

Tous ces choix visent à rendre compte de la capacité des élèves de cet âge à jongler entre différentes unités, en lien avec des représentations diverses.

III.2.2.2. Réponses et stratégies attendues

Suite aux recherches menées concernant les difficultés des élèves sur le concept d'unité, certaines erreurs sont attendues.

La première erreur attendue est que certains élèves perçoivent systématiquement l'unité comme étant la plus petite entité possible. Dans cette dimension, si deux carrés représentent une unité comme dans la section E, certains élèves associeront la représentation *E.a)* à 6u au lieu de l'associer à 3u, en considérant que l'unité est représentée par un seul carré gris.

La seconde erreur attendue est que les élèves considèrent une unité à chaque fois qu'une forme est complète (c'est-à-dire entièrement grise). Ainsi, il est probable que les élèves associent le cas *D.c)* à 1u au lieu de 3u, le cas *E.b)* à 2u au lieu de 4u, le cas *B.a)* à 1u au lieu de 2u, ou encore $2u + \dots$ pour le cas *B.b)*. Dans la même optique, il est donc probable que les élèves pensent qu'il est impossible que la valeur numérique associée à la représentation soit supérieure à l'unité si la forme n'est pas complète, et donc qu'ils ne sachent pas comment aborder les représentations avec des « cases » laissées blanches, n'ayant que l'ensemble des entiers à leur disposition.

La troisième erreur attendue est que les élèves conçoivent l'unité comme étant le nombre de formes perceptibles (ici, les formes grises). La réponse 2u pour le cas *C.b)* ou encore la réponse 3u pour le cas *B.b)* sont probables.

Concernant les sections F et G, il est fortement probable que les élèves ne sachent pas quelle valeur numérique associer aux représentations, ne maîtrisant que les nombres entiers. Cependant, il est possible que des termes du type « moitié » ou « demi » ou des expressions du type « plus petit que 1 » apparaissent si les élèves ont déjà rencontré ces mots dans des situations de leur vie quotidienne. Néanmoins, il faut garder à l'esprit que le public considéré est majoritairement anglophone, et donc que ces termes ont certainement moins été entendus par les élèves que pour le cas d'un public francophone.

Les erreurs concernant l'espacement ou la disposition générale dans l'espace ne sont pas attendues mais servent simplement à confirmer qu'à cet âge, les enfants ont généralement conscience que la valeur numérique ne dépend pas de ces variables.

III.2.3. Analyse a posteriori

III.2.3.1. Analyse des réponses

23% des élèves n'ont fait aucune erreur pour les sections A à E, soit 6 élèves. Parmi les 20 autres élèves, des erreurs ont pu être relevées et analysées et témoignent de leur maîtrise quant au concept d'unité.

L'erreur la plus fréquente observée était attendue. En effet, pour la section E, 18 élèves, soit environ 70%, ont considéré l'unité comme étant la plus petite unité possible, c'est-à-dire un seul carré gris, en associant les deux cas *a)* et *b)* à 6u et 8u au lieu de 3u et 4u. Cette erreur témoigne de la difficulté de ces élèves à jongler entre différentes unités et à concevoir l'unité autrement que la plus petite entité possible.

La seconde erreur la plus observée n'était quant à elle pas attendue puisque 6 élèves ont confondu les termes de dizaines et unités, jonglant entre ces deux termes. Parfois, certains ont utilisé le terme de dizaines pour toutes les réponses, d'autres ne l'ont utilisé que lorsque les unités étaient sous forme de « paquets », notamment pour les cas *B.b)* et *C.b)*. Cette erreur peut être interprétée de différentes façons. Premièrement, lors de la réalisation de cette activité, les élèves étudiaient en classe ces termes d'unités et de dizaines pour dénombrer, constituer et comparer des collections en les organisant, notamment par des groupements par dizaines et centaines. Ces notions travaillées en classe ont probablement été transposées et appliquées à cette activité par les élèves, pour qui le terme « unité » renvoyait directement à ce qu'ils travaillaient en classe. Deuxièmement, pour les cas *B.b)* et *C.b)*, les élèves ayant eu recours au terme de dizaines ont probablement perçu les représentations comme étant différents paquets comprenant un certain nombre d'unités, voulant ainsi faire apparaître ce terme de dizaines, toujours en lien avec ce qui était travaillé en parallèle en classe.

D'autres erreurs attendues, moins fréquentes, ont pu être relevées. En effet, deux élèves ont perçu l'unité comme étant le nombre de formes perceptibles sans considérer leurs caractéristiques, associant la réponse 3u pour le cas *B.b)* ou encore 2u pour le cas *E.b)*. Deux autres élèves ont quant à eux considéré une unité pour chaque forme « complète », notamment pour la section B, qui mettait en avant des représentations sous forme de demi-disques. Pour ces élèves, à chaque fois qu'un disque était reconstitué entièrement, ils y associaient une unité. Ainsi, pour le cas *B.b)* notamment, deux de ces élèves y ont associé une réponse du type 2u + Ces élèves, ne sachant pas quel nombre associer au demi-disque, ont suggéré les termes de « moitié » et de « demi ». Ces élèves n'ont pourtant pas associé le cas *D.c)* à 1u, alors que la forme était « complète » (plus de cases laissées blanches). Il est probable que dans ce cas,

la représentation utilisée ait entraîné les différentes procédures adoptées par ces mêmes élèves, la représentation sous forme de disques suggérant plus spontanément d'associer l'unité à un disque entier. Cette procédure est sans doute en lien avec ce qui est rencontré par les élèves dans la vie quotidienne, par exemple avec des objets sphériques tels que des balles, où l'élève dénombre le nombre de balles entières, et très rarement voire jamais des demi-balles.

Concernant les sections F et G, aucun élève n'a su répondre de manière correcte. Deux principales procédures erronées ont été remarquées. Certains élèves ont considéré que l'unité était systématiquement représentée par un seul carré, conduisant à des réponses de type 1u pour la section F et 2u pour la section G. De plus, une autre procédure a été observée et n'était pas attendue. En effet, 4 élèves ont associé 0u aux représentations. Ces élèves ont probablement bien perçu que le nombre attendu était inférieur à 1. N'ayant que l'ensemble des entiers à leur disposition, ces élèves ont pris le seul nombre inférieur à 1 qu'ils connaissent, c'est-à-dire 0. Une autre réponse étant probablement en lien avec la même procédure a pu être observée puisqu'un élève a fait référence aux nombres relatifs, en associant la représentation de la section F à -1u. Par conséquent, aucun élève n'a fait référence aux termes de « moitié » ou de « demi ». Ces termes ne sont probablement pas connus des élèves ou encore mal maîtrisés et peuvent ainsi rester difficiles à associer à une représentation à cet âge.

Enfin, les élèves n'ont pas eu de difficulté à associer la même valeur numérique à des représentations différentes. Enfin, les erreurs concernant l'espacement et la disposition dans l'espace n'ont pas été observées.

III.2.4. Pistes d'évolution et d'amélioration

Cette activité tiendrait à être davantage précisée. La principale piste d'évolution évoquée fait suite aux constats et à l'analyse des réponses données par les élèves. En effet, les élèves n'ont pas rencontré de difficulté à associer différentes représentations à la même valeur numérique. Il serait intéressant de faire évoluer l'activité en faisant apparaître une seule et même représentation où la seule variable considérée serait seulement l'unité choisie, afin de véritablement axer les difficultés rencontrées par les élèves sur le concept d'unité, et pas sur la façon dont la représentation intervient dans les stratégies adoptées par les élèves.

Cette évaluation diagnostique traitant du concept d'unité et menée dans des classes de CP m'a permis de prendre conscience des nombreuses difficultés liées à ce concept et rencontrées par les élèves. En effet, le concept d'unité, bien que travaillé dès le cycle 1 pour l'ensemble des entiers n'est pas encore maîtrisé au CP alors qu'il est essentiel afin de pouvoir appréhender les fractions. Les travaux menés pour mettre en évidence les difficultés rencontrées par les élèves ont révélé que trop peu d'élèves semblent avoir une bonne conception de l'unité afin d'aborder la notion de fractions de manière convenable au cycle 3.

IV. MÉTHODOLOGIE

IV.1. Participants et procédures adoptées

La méthodologie qui sera adoptée vise à être appliquée à des élèves de cycle 3, et notamment de CM1 et CM2. Deux classes seront requises puisque la méthodologie adoptée sera déclinée en deux procédures distinctes.

IV.1.1. Classe 1 (classe témoin)

La première classe réalisera l'activité sans avoir accès au matériel de manipulation. Cette classe sera la classe témoin. Il s'agit en fait de deux classes de CM2 (33 élèves au total) d'une école élémentaire de Besançon située en REP + (*Réseau d'Éducation Prioritaire*). Ces élèves travaillent sur les fractions à partir du projet Klásma. Les élèves ont donc pour habitude de manipuler en classe, que ce soit à l'aide de bandes ou à l'aide de disques. L'activité conçue a été menée en période 4 de l'année scolaire. Les élèves connaissaient donc les fractions. Ils ont construit ce concept ainsi que les notions de moitiés, tiers, quarts, sixièmes, huitièmes, dixièmes. Aussi, ils ont comparé des fractions, travaillé le concept d'équivalences de fractions, construit des compléments à l'unité, travaillé sur des fractions inférieures et supérieures à l'unité, sur les décompositions de fractions et ordonné des fractions. Ainsi, ces élèves ont pu développer les diverses compétences attendues en termes de maîtrise des fractions.

IV.1.2. Classe 2

La seconde classe, avant de réaliser l'activité, travaillera sur des situations de manipulation, étroitement en lien avec l'activité qui leur sera ensuite proposée. Lors de la réalisation de l'activité, les élèves auront accès en cas de besoin au matériel de manipulation lors de la mise en place de la situation. Il s'agit d'une classe de CM1-CM2, constituée de 13 élèves de CM1 et 9 élèves de CM2, classe dans laquelle j'ai été contractuelle alternante cette année. Cette école est située dans un milieu rural. Les élèves ont travaillé les fractions avec le manuel cap maths. Ce travail s'est fait en lien avec la mesure de longueurs et d'aires. Les élèves ont pour habitude de travailler à l'aide de bandes. L'activité conçue a été menée en période 2 de l'année scolaire. Les CM1 n'ayant pas encore commencé à travailler sur les fractions, ils ne réaliseront que les séances de manipulation sur les entiers et ne rempliront que les sections A, B et C lors de la réalisation de l'activité finale. Les élèves de CM2 de cette classe ont construit le concept de fractions et les notions de moitiés, tiers, quarts, sixièmes, huitièmes, dixièmes. Aussi, ils ont comparé des fractions, construit des compléments à l'unité, travaillé sur des fractions inférieures et supérieures à l'unité, étudié les fractions décimales, travaillé sur les décompositions de fractions et ordonné des fractions en les plaçant sur des droites graduées et travaillé sur la partie entière et la partie décimale. Ils ont, eux aussi, pu développer les diverses compétences attendues en termes de maîtrise des fractions.

IV.2. Méthode de recueil de données

IV.2.1. Activité finale

Une activité finale sera donnée à chaque élève de chaque classe afin d'évaluer leurs compétences et connaissances sur les entiers et les fractions, en lien avec le concept d'unité. Cette activité rendra la comparaison possible entre les différentes classes, et plus largement, entre les différentes modalités envisagées (manipulation ou non).

Inspirée de celle réalisée avec les CP, l'activité conçue est néanmoins plus détaillée puisqu'elle a été construite suite à l'analyse de la première. Elle est donc davantage pensée et réfléchie. La principale modification est qu'une seule représentation globale a été utilisée : celle de « tablettes » composées d'un nombre variable de colonnes et de lignes (bien qu'il y ait quelques petites variations entre les représentations) afin de faire varier essentiellement l'unité. L'activité est constituée de 6 sections numérotées de A à F. Pour chaque section,

plusieurs cas nommés de *a*) à *e*) ont été distingués (*cf annexe Recueil des données : activité finale*).

IV.2.2. Analyse a priori

IV.2.2.1. Choix effectués

Cette activité présente une consigne écrite qui s'est accompagnée de précisions orales et d'un exemple réalisé en classe avec les élèves. Dans la consigne, il a été précisé que l'unité était représentée par des cases grises et que la réponse devait s'écrire sous la forme d'entiers et/ou de fractions. Avant la réalisation de cette activité, il est nécessaire de faire expliciter aux élèves ce qu'est un entier et une fraction au moyen d'exemples afin de s'assurer que la consigne soit bien comprise par les élèves.

Cette partie vise à expliciter les choix ayant été réalisés afin de concevoir cette activité. Les différentes variables testées sont précisées ci-dessous :

Diverses variables ont été utilisées afin de tester la capacité des élèves à jongler entre les différentes unités proposées. Les variables utilisées sont les suivantes :

- *Espacement* pour les cas *A.a) VS A.b)* ainsi que les cas *B.a) VS B.b)* en mettant en jeu la même valeur numérique avec des espaces plus ou moins grands entre les cases avec des unités choisies différentes pour chacune des sections.
- *Disposition*. En effet, de même que pour l'espacement, les valeurs numériques étaient les mêmes mais les dispositions différentes (cases grisées disposées différemment). Cela a été le cas pour les cas *A.c) et A.e)* et pour les cas *D.a), b) et c)*.
- *Orientation* pour les cas *B.a) VS B.c)*.
- *Types de cases* : cases grises uniquement ou cases grises avec cases laissées blanches. Cela a été le cas pour les cas *A.a) VS A.c), d), e)* et les cas *B.b), d) VS B.c), e)*.
- *Suppression ou non de traits séparant les unités*, la suppression de traits rendant plus difficile la perception des différentes unités. Cela a été réalisé pour les cas *C.a) VS C.b)*

Aussi, d'autres variables relèvent du choix des nombres :

- *Entiers ou fractions* : pour les sections A, B, C et E, les nombres attendus étaient des entiers. Pour les sections D et F, il s'agissait de fractions. De même, concernant les fractions, l'activité a été conçue de telle sorte qu'il y ait à la fois des fractions inférieures à 1 et donc à l'unité pour les cas *D.a), b), c), d) et F.a), b), c)* et des fractions supérieures à l'unité pour les cas *D.e) et F.c), d) et e)*. De plus, deux représentations mettaient en évidence une inversion du numérateur et du dénominateur, ce sont les cas *F.c) et F.e)*.
- *Nombres et types de formes* : représentations où la « forme » est complètement grise mais où la valeur n'est pas égale à une unité (*cas B.d*), représentations où la « forme » n'est pas complètement grise mais est égale à une unité (*cas E.a*) et des représentations où il y a plusieurs « formes » dont une complètement grise mais où la valeur est inférieure aux nombres de carrés par « forme » (*cas B.e*)

Enfin, la variable principale ayant été modifiée est l'unité choisie, et notamment sa représentation dans le but de voir si les élèves parviennent à jongler entre différentes unités :

- *Choix des unités* : unité représentée par un (*section A*), deux (*section B*), trois (*section C*), six (*sections E et F*) ou encore dix carrés gris (*section D*).
- *Représentations identiques avec des unités différentes*, pour les cas *A.c) VS D.d)*
- *Représentations avec disposition différente et unités différentes*, pour les cas *A.d) VS D.a) VS D.b) VS D.c)* et pour les cas *A.e) VS D.d)*.

IV.2.2.2. Réponses et stratégies attendues

En lien avec les recherches effectuées sur les difficultés rencontrées par les élèves sur la notion de fractions, diverses réponses erronées liées à la maîtrise du concept d'unité sont attendues.

La première erreur attendue est que les élèves ne prennent pas en compte la bonne unité et aient des difficultés à jongler entre les unités, en considérant que l'unité choisie est toujours représentée par un carré gris. Les erreurs liées à la conception de l'unité seront majoritairement repérables dans la section B, où l'unité n'est plus représentée par un carré gris, mais par deux. Dans la même optique, concernant la section D qui marque le passage de l'utilisation des entiers à celle des fractions, les élèves peuvent rencontrer des difficultés à considérer que l'unité est représentée par dix carrés gris, et que les représentations font appel à des nombres, et notamment à des fractions inférieures à l'unité. De par cette difficulté engendrée par la rupture entre entiers et fractions, certains élèves vont probablement éviter la difficulté en conservant l'idée qu'un seul carré gris représente une unité, sans véritablement prendre en compte la réelle unité considérée.

La seconde stratégie de réponses prévisible est liée à la difficulté des élèves à identifier la partie et le tout. En effet, pour les sections D et F notamment, qui font appel aux fractions, il est attendu que certains élèves considèrent le nombre de parts coloriées (carrés gris) par rapport au nombre de parts non coloriées (carrés laissés blanc) au lieu de considérer le nombre de parts coloriées (carrés gris) par rapport au tout (somme des carrés gris et des carrés blancs). Les réponses erronées du type $\frac{1}{5}u$ à la place de $\frac{1}{6}u$ pour la réponse *F.a)* ou encore $\frac{5}{5}u$ à la place de $\frac{1}{2}u$ pour la réponse *D.a), b) et c)* seront probablement présentes. Enfin, il est probable que les représentations montrant une forme complètement grise soient systématiquement associées à une unité, notamment pour les cas *B.d), B.e)* et *E.b)* et que les élèves pensent inconcevable que celles n'étant pas complètement grises représentent tout de même une unité (*cas E.a)*.

La troisième catégorie d'erreurs attendues est liée au choix de la représentation. En effet, pour les représentations composées de carrés gris et blancs, il est possible que certains élèves y associent automatiquement des fractions, en ayant du mal à se détacher du fait que l'unité correspond au tout, c'est-à-dire à « l'ensemble de la forme ». Ces erreurs seront notamment repérables dans la section A et témoigneront également des conceptions des élèves sur l'unité en considérant qu'elle correspond systématiquement à l'ensemble. De plus, les représentations de la section C, et notamment la suppression du trait séparant les unités pour le cas *b)* poseront probablement des difficultés à certains élèves, qui considéreront davantage le nombre de « formes grises » plutôt que le nombre d'unités, écrivant ainsi que la représentation est de 1 unité au lieu d'être de deux unités.

Cependant, des erreurs concernant l'espace, la disposition ou l'orientation ne sont pas attendues. Les élèves ont au cycle 3 à priori une bonne connaissance du nombre et ont généralement compris que ces variables n'ont pas d'effet sur la valeur numérique.

IV.3. Conception des situations de manipulation

IV.3.1. Matériel de manipulation

Afin de représenter les diverses situations proposées de l'activité conçue, il est préférable de prendre du matériel qui représente le mieux possible les situations et qui soit à la fois attractif et non distrayant. Des cubes encastrables permettent de bien représenter les différentes situations proposées, que ce soit sous la forme d'une ou de plusieurs rangées. Ci-dessous est donnée une photographie du matériel utilisé :



Figure 1 : photographie des cubes de manipulation.

La longueur du côté des cubes mesure un centimètre et les cubes sont au nombre de 1 000, ce qui permettra d'avoir suffisamment de matériel pour faire travailler les élèves en binôme et de faciliter leur transport ainsi que leur manipulation. Aussi, il est possible de les assembler, ce qui permettra de proposer une large variété de cas. Un système de couleur sera utilisé afin de représenter l'unité choisie. Ainsi, des cubes rouges représenteront l'unité choisie et des cubes blancs permettront de représenter les cases blanches de l'activité conçue. Les élèves seront amenés à se détacher progressivement de ce système de couleur pour tendre vers l'abstraction au fur et à mesure des séances de manipulation. De ce fait, les cubes utilisés seront de couleurs variées (rouges, blancs, bleus, jaunes et noirs).

Pour chaque séance, le matériel de manipulation s'accompagnera de « *cartes unité* » faisant figurer l'unité choisie à l'aide d'une photographie du matériel de manipulation. Ces « *cartes unité* » seront en nombre suffisant de façon à ce que les élèves puissent travailler en binôme. Un exemple de « *carte unité* » est donné ci-dessous :



Figure 2 : photographie d'une "carte unité".

Toutes les « *cartes unité* » qui seront utilisées dans les séances sont données en annexe (cf *Tableau récapitulatif des « cartes unité »*).

Les différents cas proposés lors de chaque séance seront donnés sous forme de photographies projetées au tableau.

Concernant les séances 3, 4 et 5, des « cartes représentation » seront données aux élèves lors des deuxièmes parties de séance. Les cases constituant ces cartes étant de même dimension que celle des cubes de manipulation, les situations proposées seront auto-validantes. Les élèves, après avoir construit leurs unités en manipulant (et éventuellement en les réarrangeant), pourront directement les superposer sur les cases rouges et ainsi dénombrer les unités. Un exemple de « carte représentation » est donné ci-dessous :

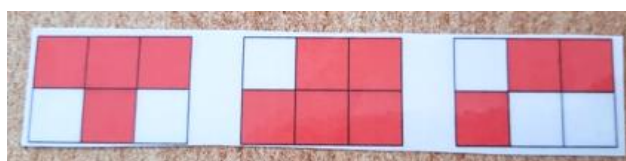


Figure 3 : photographie d'une "carte représentation".

L'utilisation détaillée qui sera faite du matériel proposé sera détaillée dans les parties IV.3.2 et IV.3.3.

IV.3.2. Progression des séances et objectifs

Les situations de manipulation proposées doivent permettre de traiter les différents cas de l'activité en proposant des cas similaires mais non identiques afin de voir si les élèves parviennent à transposer les différents cas étudiés en classe avec ceux proposés dans l'activité.

Ces séances sont au nombre de cinq. La sixième séance sera spécifiquement dédiée au recueil des données par la réalisation de l'activité finale.

Les séances suivent une progression particulière dont l'objectif général est de consolider le concept d'unité. Lors des trois premières séances, seul l'ensemble des entiers naturels sera étudié. La première séance vise à revoir la propriété de conservation du nombre déjà acquise par les élèves et à leur permettre de découvrir le matériel de manipulation. L'étude de cette propriété permettra de faciliter l'étude de différents cas lors des séances ultérieures, notamment ceux nécessitant un réarrangement de l'unité avant de vérifier le nombre d'unités par superposition. Alors que la première séance ne fera pas directement référence au terme « unité », la deuxième séance permettra de l'introduire. La troisième séance visera quant à elle à évaluer la capacité des élèves à identifier l'unité, en ajoutant des cubes d'une autre couleur, rendant plus difficile cette identification. Puis, lors de la quatrième séance, les situations proposées feront appel aux fractions simples et inférieures à l'unité ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$). Enfin, lors de la cinquième séance, les fractions inférieures ou supérieures à l'unité de type $\frac{a}{2}$; $\frac{a}{3}$; $\frac{a}{4}$; $\frac{a}{5}$; $\frac{a}{6}$ où a est un entier naturel seront utilisées.

Ci-dessous sont donnés les objectifs mettant en évidence la progression adoptée :

Séance n°	Objectif(s)
1	Découvrir le matériel de manipulation. Revoir la propriété de conservation du nombre pour l'ensemble que sont les entiers naturels.
2	Manipuler pour mettre en évidence que le nombre (valeur numérique) dépend de l'unité choisie pour l'ensemble que sont les entiers naturels.
3	Manipuler pour mettre en évidence que le nombre (valeur numérique) dépend de l'unité choisie pour l'ensemble que sont les entiers naturels.

	Reconnaître/identifier l'unité (<i>comprendre que l'ajout des cubes blancs ne modifie pas l'unité choisie.</i>)
4	Manipuler pour mettre en évidence que le nombre dépend de l'unité choisie (pour les fractions simples inférieures à l'unité $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$).
5	Manipuler pour mettre en évidence que la valeur numérique dépend de l'unité choisie (pour des fractions inférieures ou supérieures à l'unité de type $\frac{a}{2}; \frac{a}{3}; \frac{a}{4}; \frac{a}{5}; \frac{a}{6}$) où a est un entier naturel.
6	Évaluer la maîtrise du concept d'unité pour les entiers naturels et les fractions.

Tableau 1 : objectifs des différentes séances de la séquence.

En parallèle des objectifs spécifiques à chaque séance, un autre objectif sera travaillé tout au long de la séquence. Il s'agit d'amener les élèves à se détacher progressivement de la manipulation pour chercher, afin de tendre vers l'abstraction en leur proposant le matériel de manipulation uniquement pour vérifier leur raisonnement en cas de besoin.

IV.3.3. Déroulement des séances

IV.3.3.1. Séance 1

La première séance de manipulation doit permettre aux élèves de s'approprier le matériel de manipulation. Cette séance a pour objectif la découverte du matériel de manipulation et la révision de la propriété de conservation du nombre (valeur numérique), quelle que soit la disposition spatiale de la collection (dans notre cas, des cubes).

Pour ce faire, les élèves seront amenés à recenser toutes les façons possibles de disposer dans l'espace quatre cubes rouges. Puis, ils devront représenter toutes les possibilités recensées. La fiche de préparation présentant le déroulement détaillé de la séance est donnée en annexe (*cf Fiche de préparation de la séance 1*).

IV.3.3.2. Séance 2

La deuxième séance vise à manipuler pour mettre en évidence que le nombre dépend de l'unité choisie, pour l'ensemble que sont les entiers naturels. Le passage du terme « cube » au terme « unité » entraînera probablement des difficultés pour certains élèves. Il faudra donc y être vigilant.

Les élèves auront à disposition plusieurs « cartes unité ». Pour chaque cas proposé, les élèves devront indiquer combien d'unités forment la construction dans un tableau prévu à cet effet (*cf Tableaux des élèves à remplir (séances 2, 3, 4 et 5)*). Une phase d'oralisation autour du tableau rempli par les élèves sera essentielle afin de mettre en évidence cette variabilité du nombre en fonction de l'unité considérée. Une trace écrite sera construite avec les élèves en fin de séance. La fiche de préparation présentant le déroulement détaillé de la séance est donnée en annexe (*cf Fiche de préparation de la séance 2*).

IV.3.3.3. Séance 3

La troisième séance vise elle aussi à manipuler pour mettre en évidence que le nombre dépend de l'unité choisie, pour l'ensemble que sont les entiers naturels. Cependant, l'ajout de cubes d'une autre couleur (cubes blancs) permettra aux élèves de se questionner sur le concept d'unité en se demandant si ces cubes interviennent ou non dans le dénombrement d'unités au regard de l'unité choisie. Dans le cadre des entiers, ces cubes blancs

n'interviennent pas dans le cadre du dénombrement d'unités. Cependant, ce choix pédagogique vise à préparer la séance de recueil de données lors de l'évaluation et à faire l'analogie avec les cas qui seront présentés aux élèves. L'intérêt principal sera ici de voir si les élèves recourent aux fractions ou aux entiers en fonction de la représentation, qui fait directement penser à ce qui peut être rencontré dans les manuels avec les fractions, comme le montrent les exercices donnés ci-dessous, issus des manuels *Archimaths* de CM2 et du manuel *Tandem Maths* de CM1-CM2, où les élèves doivent donner la fraction associée à une représentation formée d'une partie coloriée correspondant au nombre de parts prises et d'une partie non coloriée correspondant au nombre de parts non prises :

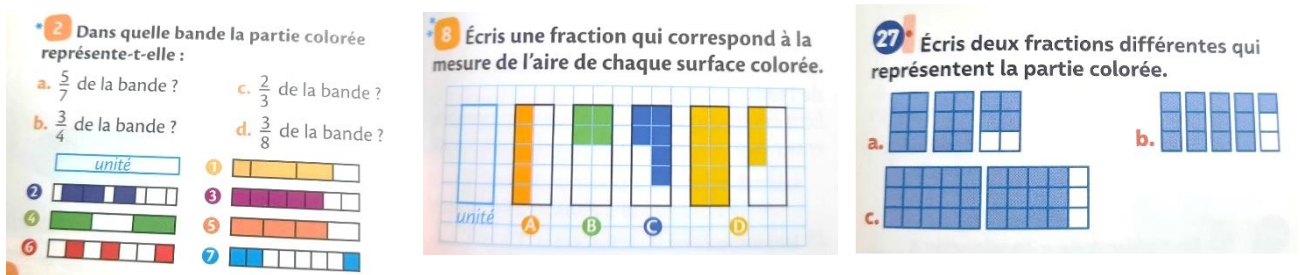


Figure 4 : exercices sur les fractions issus des manuels *Archimaths* CM2 (exercices 2 et 8) et *Tandem* CM1-CM2 (exercice 27).

Le déroulement de la première partie de la séance sera comparable à celui de la séance 2. Lors de la seconde partie de séance, les élèves seront amenés à tendre vers l'abstraction en anticipant les résultats. La manipulation ne sera utilisée (en cas de besoin) que pour vérifier leurs résultats (cf *Tableaux récapitulatifs des « cartes représentation »*). Une trace écrite sera construite avec les élèves en fin de séance. La fiche de préparation présentant le déroulement détaillé de la séance est donnée en annexe (cf *Fiche de préparation de la séance 3*).

IV.3.3.4. Séance 4

La quatrième séance vise à manipuler pour mettre en évidence que le nombre dépend de l'unité choisie pour les fractions simples inférieures à l'unité $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$.

Le déroulement de la séance sera en partie comparable à celui de la séance 3. Lors de la seconde partie de séance, les élèves seront là aussi amenés à tendre vers l'abstraction. D'autres couleurs que le blanc seront utilisées pour voir si les élèves arrivent à transférer ce qui aura été vu concernant l'unité avec l'ajout de cubes blancs, toujours en vue de se demander ce qui constitue l'unité. La fiche de préparation présentant le déroulement détaillé de la séance est donnée en annexe (cf *Fiche de préparation de la séance 4*).

IV.3.3.5. Séance 5

La cinquième séance vise à manipuler pour mettre en évidence que le nombre dépend de l'unité choisie pour des fractions inférieures ou supérieures à l'unité de type $\frac{a}{2}$; $\frac{a}{3}$; $\frac{a}{4}$; $\frac{a}{5}$; $\frac{a}{6}$ où a est un entier naturel.

Le déroulement de la séance sera comparable à celui de la séance 4. La fiche de préparation présentant le déroulement détaillé de la séance est donnée en annexe (*cf Fiche de préparation de la séance 5*).

IV.3.3.6. Séance 6

La sixième séance vise à évaluer la maîtrise du concept d'unité pour les entiers naturels et les fractions via la réalisation de l'activité finale (*cf Recueil des données : activité finale*).

IV.3.4. Choix des situations proposées

Les situations proposées lors des différentes séances ont été réfléchies en amont de leur mise en place. Les choix ayant été effectués sont décrits ci-après.

Si les séances 1, 2 et 3 seront consacrées aux entiers naturels, les séances 4 et 5 concerneront les fractions. Il est en effet essentiel de passer par les entiers afin d'étudier le concept d'unité via les situations proposées avant d'utiliser les fractions. Puisque l'ensemble des entiers est travaillé depuis le cycle 1, il est intéressant de commencer les séances de manipulation en faisant appel à ces nombres avec lesquels les élèves sont plus à l'aise. Aussi, la maîtrise du concept d'unité pour les fractions ne peut avoir lieu que si les élèves maîtrisent déjà ce concept pour l'ensemble que représentent les entiers, d'où l'intérêt de vérifier cette maîtrise avant d'introduire les fractions.

La séance 1 s'appuie sur la variable *nombre*, et notamment sur le choix du nombre, qui est de quatre, permettant d'avoir une dizaine de cas différents, rendant la manipulation intéressante. Si le nombre choisi était plus petit ou plus grand, le nombre de cas possibles ne permettrait probablement pas de rendre la découverte du matériel de manipulation suffisamment efficace ou serait trop complexe à gérer en classe et peu pertinent.

Concernant les séances 2, 3, 4 et 5 (partie 1), le choix des situations de construction et des « *cartes unités* » a été réfléchi afin que celles-ci soient les mêmes pour les différentes « *cartes unités* » utilisées dans une même séance. De ce fait, il sera plus facile de mettre en évidence que, pour un même cas de construction, le nombre dépend de l'unité choisie. De même, ce choix permettra de travailler sur la consolidation du concept d'unité.

Aussi, pour les séances 2, 3, 4 et 5, les « *cartes unités* » utilisées pour traiter les situations de construction obligeront les élèves à utiliser des procédures diverses de manipulation. En effet, certaines situations pourront être résolues et le résultat vérifié en superposant directement l'unité sur la construction réalisée. En revanche, d'autres situations nécessiteront une étape préalable de réarrangement de l'unité avant l'étape de superposition. Les élèves devront alors mobiliser ce qui aura été vu lors de la séance 1 concernant le principe de conservation du nombre dans des cas où les dispositions spatiales sont différentes. Un tableau recensant les procédures attendues pour chaque situation est donné en annexe (*cf*

Tableau des différentes procédures attendues pour chaque situation de manipulation proposée.)

Pour les séances 3, 4 et 5, l'ajout de cubes d'autres couleurs permettra là aussi de se questionner sur le concept d'unité, que ce soit pour les nombres entiers ou pour les fractions. Les élèves seront amenés à s'interroger sur ce qui constitue l'unité, qui est une difficulté fréquemment rencontrée par les élèves, notamment dans le cadre de l'enseignement des fractions.

Aussi, les différentes situations de construction proposées tout au long des séances de manipulation visent à traiter la majeure partie des différents cas qui seront rencontrés par les élèves lors du recueil de données via la réalisation de la fiche d'activité finale. Un tableau non exhaustif mettant en lien les différentes situations de manipulation proposées et les différents cas de l'activité finale est donné en annexe à titre indicatif (*cf Tableau associant les situations de manipulation proposées avec les cas proposés dans l'activité finale.*)

Au-delà des situations de manipulation, la phase d'oralisation a elle aussi été pensée en amont. Afin que les élèves consolident le concept d'unité, il est préférable qu'ils ne raisonnent pas en établissant explicitement des conversions entre le nombre de cubes composant l'unité et le nombre de cubes composant les situations de construction. Ainsi, une oralisation du type « *l'unité est composée de X cubes rouges. Or, il y a Y cubes rouges, c'est Z fois plus que X cubes rouges, et donc Z fois plus qu'une unité. Il y a donc Z unités* » n'est pas souhaitée. L'oralisation souhaitée vise à faire visualiser l'unité sans faire explicitement référence au nombre de cubes formant l'unité. La forme suivante sera ainsi privilégiée : « *ça, c'est l'unité (en l'entourant). Je peux mettre Z fois l'unité, c'est plus/moins qu'une unité. Il y a donc Z unités* ».

IV.4. Méthode d'analyse des données

Les données récoltées lors de la réalisation de l'activité finale seront analysées de la manière suivante :

- Premièrement, les productions d'élèves de chaque classe seront relevées et analysées en vue de catégoriser les erreurs grâce à l'outil tableur d'Excel.
- Les pourcentages de réussite aux différents cas de l'activité seront calculés pour les deux classes. Les résultats seront comparés suite à la réalisation d'un graphique Excel.
- Les pourcentages d'erreurs moyens pour les différentes sections de l'activité suivant les catégories d'erreurs et pour chacune des classes seront calculés. Ces données serviront à la construction d'un graphique comparatif des deux classes.
- Enfin, pour chaque section, les erreurs liées au concept d'unité seront catégorisées. Les pourcentages d'élèves ayant fait ces types d'erreurs pour chaque classe seront eux aussi calculés en vue de produire des graphiques comparatifs entre les deux classes.

Le nombre d'élèves n'étant pas le même pour les deux classes (33 pour la classe témoin et 22 élèves pour la classe ayant manipulé pour les sections A, B, C et 9 élèves pour les sections D, E et F), les données seront calculées sous forme de pourcentages rapportés au nombre d'élèves de la classe afin de faciliter l'analyse comparative entre les deux classes.

V. RÉSULTATS ET ANALYSE A POSTERIORI

V.1. Comparaison générale et analyse de la réussite entre les deux classes

Ci-dessous est donné un graphique représentant le pourcentage de réussite aux différents cas proposés lors de la réalisation de la tâche finale pour chacune des classes.

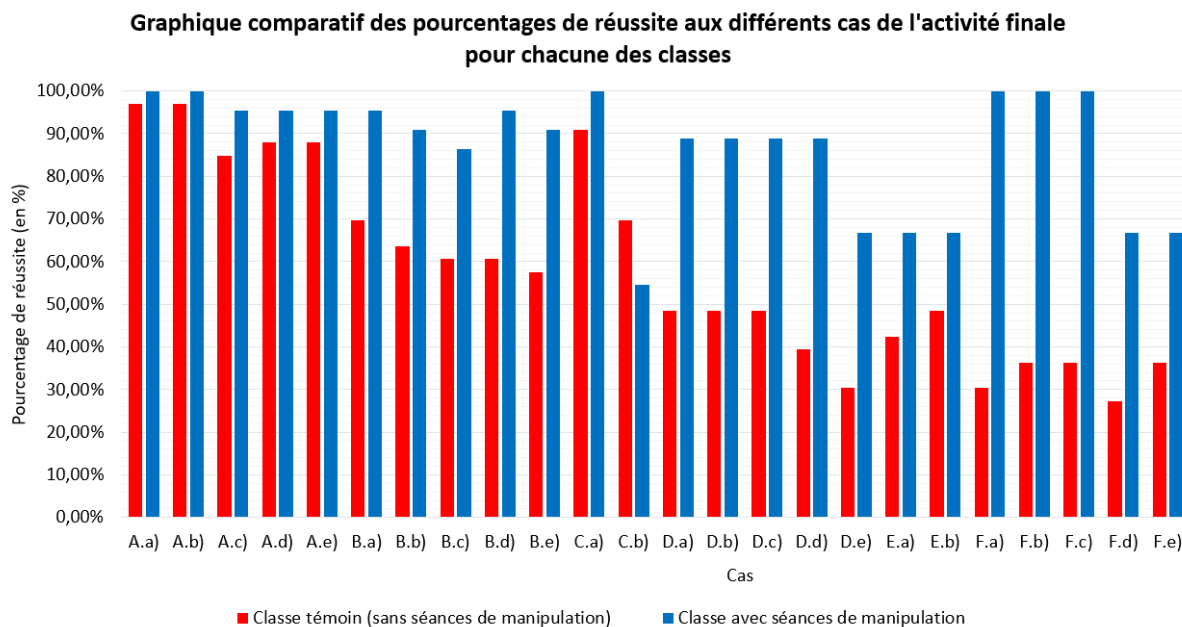


Figure 5 : graphique comparatif des pourcentages de réussite aux différents cas de l'activité finale pour chacune des classes.

Le pourcentage de réussite aux différents cas de l'activité finale varie selon les classes. Celui-ci est plus important pour la classe ayant disposé de séances de manipulation avec un pourcentage moyen de réussite s'élevant à 87% et fluctuant entre 55% pour le cas C.b) et 100% pour les cas A.a), A.b), C.a), F.a), F.b) et F.c) contrairement à la classe témoin, dont le pourcentage de réussite moyen est de 58,33% et fluctuant entre 27,27% pour le cas F.d) et 96,97% pour les cas A.a) et A.b). Cependant, pour le cas C.b), caractérisé par l'absence de trait de séparation entre les unités, celui-ci atteint les 70% pour la classe n'ayant pas manipulé contre 55% pour la classe ayant manipulé. Ce cas particulier n'avait pas été travaillé avec les élèves lors des séances de manipulation et pendant la réalisation de l'activité finale. Ce cas a suscité beaucoup de questionnements de la part des élèves.

Il est également important de remarquer que, pour chaque classe, ce taux de réussite est plus grand pour les sections A, B et C que pour les sections D, E et F. En effet, les sections A, B et C mettaient en jeu des nombres entiers contrairement aux sections D et F qui faisaient appel aux fractions. Les nombres entiers étant ceux que les élèves connaissent et manipulent depuis le cycle 1, il est cohérent d'obtenir ces résultats. Cependant, pour la section E, qui mettait également en jeu des nombres entiers, le taux de réussite n'a étonnamment pas dépassé les 70% pour la classe ayant manipulé et les 45% pour la classe n'ayant pas manipulé. Au regard des réponses obtenues, il est possible que la place de cette section dans l'activité et plus particulièrement le fait qu'elle soit entre des sections faisant appel aux fractions ait

perturbé le raisonnement des élèves et les ait conduits à raisonner avec des fractions plutôt qu'avec des entiers, entraînant des réponses erronées.

Enfin, le pourcentage d'élèves n'ayant pas répondu aux questions est de 0% pour la classe ayant eu des séances de manipulation et varie de 0% pour les sections A, B et C jusqu'à 21% pour la section F pour la classe témoin.

V.2. Types d'erreurs observés

Les réponses obtenues suite à la réalisation de cette activité et leur analyse m'ont permis de classer les erreurs commises par les élèves en trois grandes catégories :

- Les erreurs directement liées au degré de maîtrise du concept d'unité des élèves.
- Les erreurs d'étourderie ou d'inattention.
- Les erreurs qui n'ont pas pu être interprétées, soit parce que les réponses semblent avoir été données au hasard, soit parce que je n'ai pas réussi à les interpréter et à comprendre le raisonnement mené par l'élève.

Les pourcentages moyens de ces catégories d'erreurs commises rapportés au nombre d'élèves pour chacune des sections et pour chacune des classes sont donnés dans le graphique ci-dessous :

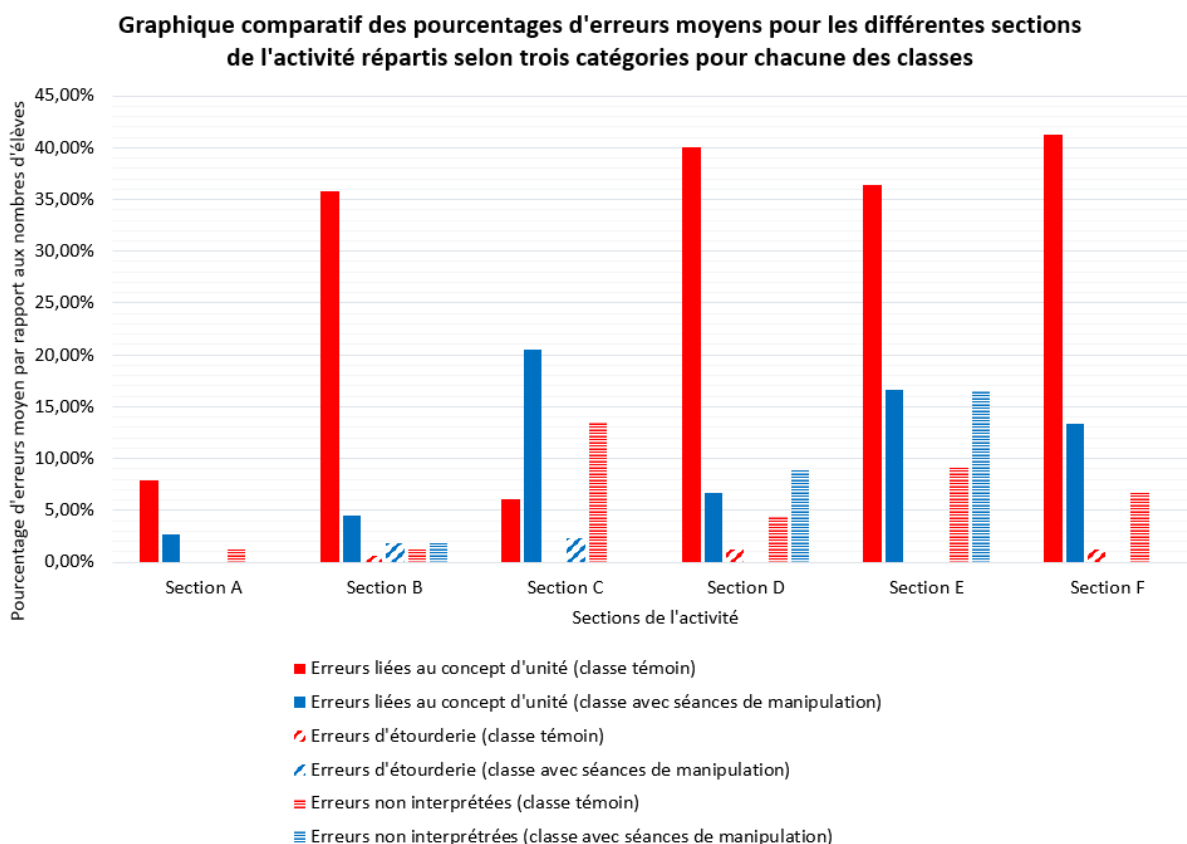


Figure 6 : graphique comparatif des pourcentages d'erreurs moyens pour les différentes sections de l'activité répartis selon trois catégories pour chacune des classes.

Suite à la lecture du graphique, il apparaît clairement que la majeure partie des erreurs commises par les élèves sont des erreurs liées à la maîtrise du concept d'unité, et ce, pour les deux classes ainsi que pour la quasi-totalité des sections, à l'exception de la section D

concernant la classe ayant eu des séances de manipulation et de la section C concernant la classe témoin. Cependant, les pourcentages d'erreurs moyens liés à ce concept fluctuent suivant les différentes sections et suivant les classes. Concernant la classe témoin, ils sont les plus importants pour les sections B, D, E et F, sections qui faisaient soit appel à un changement de l'unité avec une unité formée de deux carrés gris (pour la section B), soit appel aux fractions pour les sections D et F ou soit appel à des représentations qui orientaient les élèves vers l'utilisation des fractions plutôt que vers les entiers (pour les sections B et E). En effet, concernant la classe témoin, environ 35% des élèves ont commis ce type d'erreur en moyenne pour les sections B et E et environ 40% des élèves ont réalisé ce type d'erreur pour les sections D et F. Ces pourcentages d'erreurs sont nettement plus faibles pour la classe ayant manipulé, en étant de 16,5% pour la section E, de 13,5% pour la section F, de 7% concernant la section D (soit 6 fois plus faible que pour la classe témoin) et n'atteignant pas les 5% concernant la section B (soit 7 fois plus faible que pour la classe témoin). La classe témoin a donc davantage commise d'erreurs liées au concept d'unité que la classe ayant manipulé, hormis concernant la section C, où le pourcentage d'erreurs moyen s'élève à 20% pour la classe ayant manipulé contre seulement 5% pour la classe témoin. Le cas C.b) n'a pas été abordé avec les élèves lors des séances de manipulation, expliquant ainsi ce fort taux d'erreurs par rapport aux autres sections de l'activité, qui elles, ont toutes été travaillées lors des séances de manipulation.

V.3. Typologie des erreurs liées au concept d'unité

Parmi les erreurs liées à la maîtrise du concept d'unité, plusieurs catégories ont été relevées. Celles-ci sont récapitulées dans le tableau ci-dessous :

Codage de l'erreur	Erreur constatée en lien avec la procédure adoptée par l'élève
E1	L'élève ne prend pas en compte le changement d'unité et considère que l'unité correspond systématiquement à un carré (gris ou blanc).
E2	L'élève ne prend pas en compte le changement d'unité et considère que l'unité correspond systématiquement à un carré gris.
E3	L'élève rencontre des difficultés à identifier l'unité. Il considère que l'unité correspond à une forme grise et dénombre la quantité de formes grises pour déterminer le nombre d'unités.
E4	E4.1 L'élève rencontre des difficultés à identifier la partie et le tout. Il considère le nombre de parts coloriées (carrés gris) par rapport au nombre de parts non coloriées (carrés blancs).
	E4.2 L'élève rencontre des difficultés à identifier la partie et le tout. Il considère le nombre de parts situées sur la partie gauche de la représentation par rapport au nombre de parts situées sur la partie droite de la représentation.
	E4.3 L'élève rencontre des difficultés à identifier la partie et le tout. Il inverse le tout et la partie en inversant le nombre du numérateur avec celui du dénominateur.
	E4.4 L'élève rencontre des difficultés à identifier la partie et le tout. Il associe une forme complète à l'unité ou utilise les fractions dès qu'une forme n'est pas complète (représentations avec des carrés gris et blancs).
E5	L'élève ne prend pas en compte l'ensemble de la représentation pour déterminer le nombre d'unités ou oublie une partie de la représentation.

Tableau 2 : tableau récapitulatif des différentes catégories d'erreurs recensées liées au concept d'unité.

Des erreurs concernant l'espace, la disposition ou l'orientation n'ont pas été observées. Les élèves semblent avoir compris que le nombre d'unités ne dépend pas de ces variables. De même, l'erreur attendue selon laquelle les élèves auraient du mal à concevoir qu'une représentation puisse être de 1u alors que l'ensemble de la figure n'est pas considéré n'a pas été observée.

V.3.1. Section A

Ci-dessous est donné le graphique comparatif des pourcentages moyens d'élèves ayant commis les différents types d'erreurs liés au concept d'unité et catégorisés précédemment pour les deux classes pour la section A :

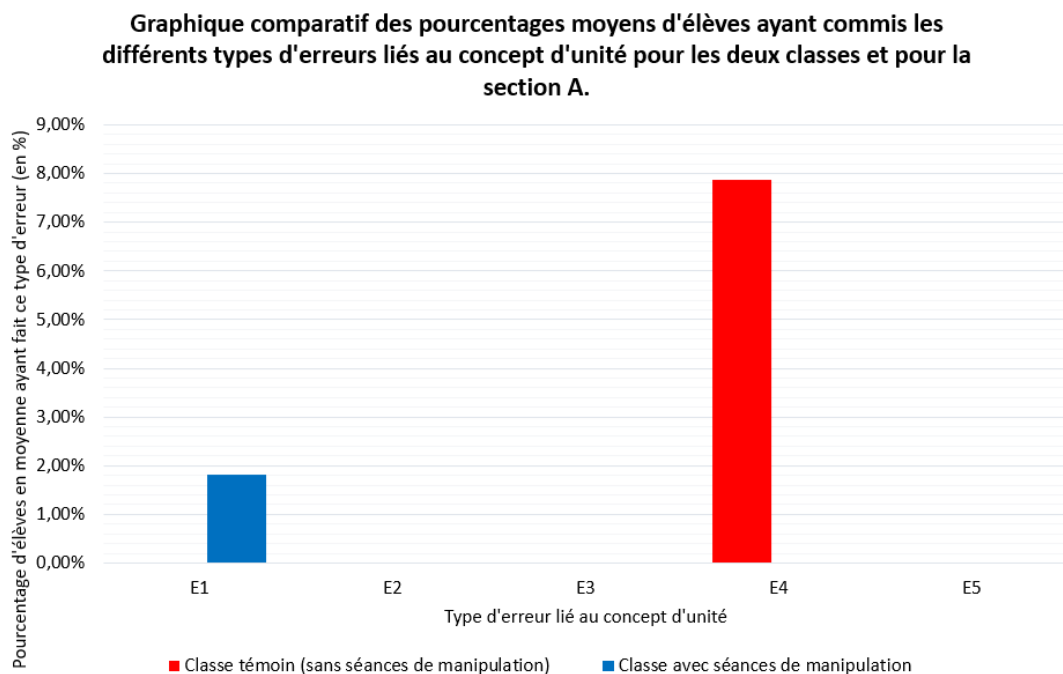


Figure 7 : graphique comparatif des pourcentages moyens d'élèves ayant commis les différents types d'erreurs liés au concept d'unité pour les deux classes et pour la section A.

Au regard du graphique, peu d'erreurs liées au concept d'unité ont été commises par les élèves. En effet, les erreurs de type E2, E3 et E5 n'ont été commises par aucun élève, et ce, pour les deux classes. De plus, les erreurs commises ne sont pas les mêmes suivant les deux classes. Concernant la classe ayant manipulé, moins de 2% des élèves ont commis une erreur de type E1 en moyenne, en considérant l'unité comme étant un carré, qu'il soit gris ou blanc, comme en témoigne la production d'élève donnée ci-dessous. Ce type d'erreur reste cependant très minoritaire.

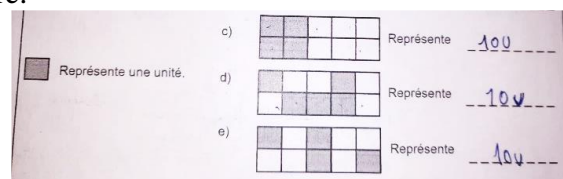


Figure 8 : production erronée 1 d'élève de CMI de la classe ayant manipulé, en réponse à la section A.

En ce qui concerne la classe n'ayant pas manipulé, seules des erreurs de type E4 ont été relevées chez 8% des élèves de la classe en moyenne. Ces erreurs appartiennent

exclusivement à la catégorie E4.4. Les représentations A.c), A.d) et A.e) composées à la fois de carrés gris et de carrés blancs ont entraîné des difficultés pour les élèves qui ont associé ces représentations à des fractions, comme l'atteste la production d'élève suivante.

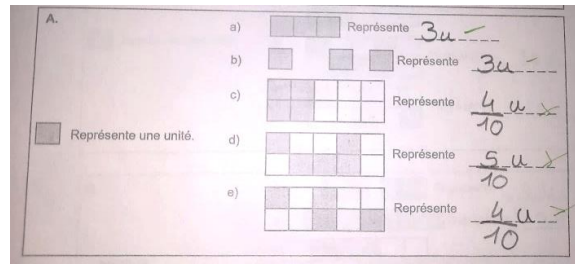


Figure 9 : production erronée 2 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section A.

En effet, certains élèves ont respectivement associé les représentations aux fractions $\frac{4}{10}u$, $\frac{5}{10}u$ et $\frac{4}{10}u$ au lieu de les associer aux nombres $4u$, $5u$ et $4u$. Ce type de représentation a influencé la manière dont les élèves ont perçu l'unité, considérant que l'unité était la forme composée à la fois de carrés blancs et gris, plutôt que de considérer la réelle unité posée. Ces élèves ont probablement des difficultés à concevoir l'unité autrement que l'ensemble et dans ces cas-là, inférieure à l'ensemble. Ces élèves ont tendance à recourir aux fractions dès que la « forme générale » représentée n'est pas complète. Ce type de réponse erronée était attendue.

V.3.2. Section B

Ci-dessous est donné le graphique comparatif des pourcentages moyens d'élèves ayant commis les différents types d'erreurs liés au concept d'unité pour les deux classes concernant la section B :

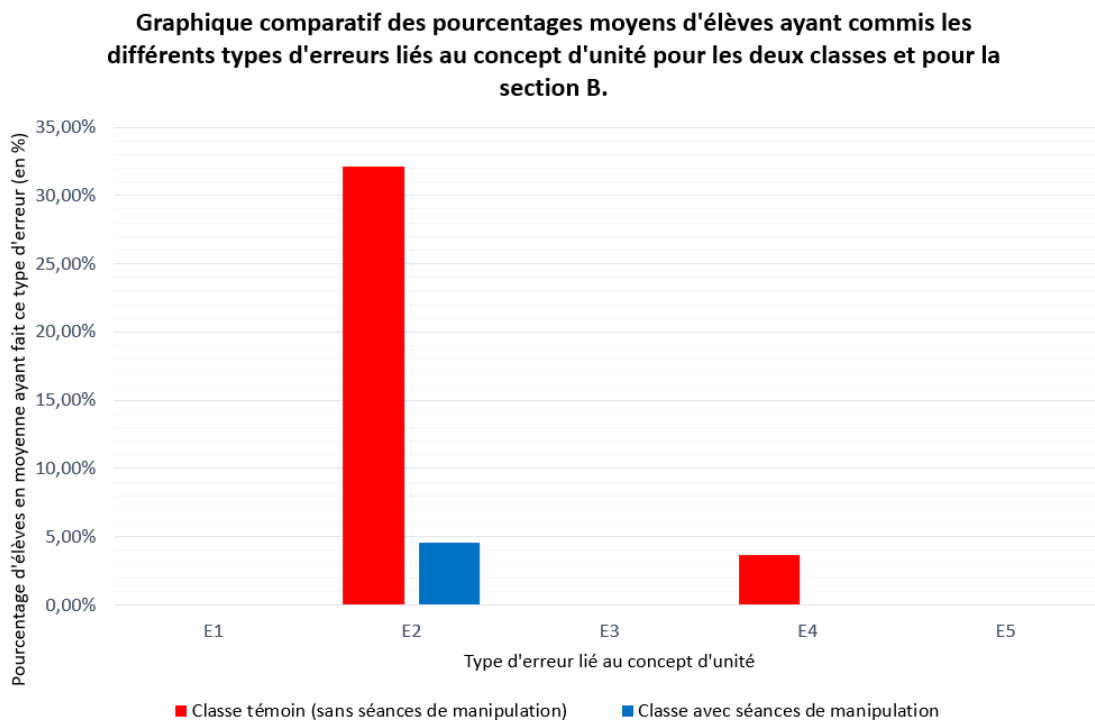


Figure 10 : graphique comparatif des pourcentages moyens d'élèves ayant commis les différents types d'erreurs liés au concept d'unité pour les deux classes et pour la section B.

Concernant la section B, les erreurs de type E1, E3 et E5 n'ont été commises par aucun élève, et ce, pour les deux classes. La majorité des erreurs recensées appartiennent à la catégorie E2 avec un pourcentage moyen d'élèves ayant fait ce type d'erreur atteignant plus de 30% pour la classe témoin et ne dépassant pas les 5% pour la classe ayant manipulé. Il est ainsi 6 fois plus important pour la classe témoin. En effet, environ un tiers des élèves de la classe témoin n'a pas réussi à jongler entre les différentes unités posées, considérant toujours que l'unité était d'un seul carré gris, comme le montre la production d'élève donnée ci-dessous.

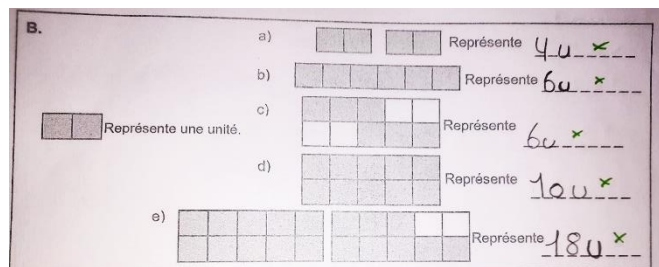


Figure 11 : production 1 erronée d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section B.

Ces erreurs fréquentes relèvent d'une difficulté à percevoir l'unité pour l'élève, bien qu'elle soit donnée explicitement, et ce même pour l'ensemble que sont les entiers. Il est aussi également envisageable de penser que certains élèves n'ont tout simplement pas pris en compte le changement d'unité dans la consigne, effectuant tous les cas avec la même unité. Cette hypothèse n'expliquerait probablement néanmoins pas ces erreurs pour tous les élèves.

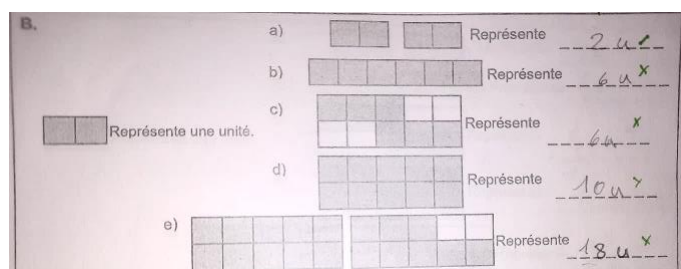


Figure 12 : production 2 erronée d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section B.

De même, la production d'élève donnée ci-dessus révèle que cet élève a bien pris en compte l'unité considérée lorsque les différentes unités étaient espacées (cas B. a) mais, dès que les unités étaient à nouveau juxtaposées pour les cas suivants, il a considéré à nouveau qu'une unité était représentée par un seul carré gris. Cet élève a probablement rencontré des difficultés à visualiser les unités pour ces cas, expliquant ainsi les réponses obtenues. Cela n'avait pas été mis en évidence dans l'analyse a priori et témoigne de la difficulté des élèves à percevoir et visualiser les unités pour certaines représentations mettant en jeu la variable de l'espacement entre chaque unité.

Une minorité des erreurs recensées relève de la catégorie E4. Ces erreurs n'ont été observées que pour la classe témoin avec un pourcentage moyen d'élèves ayant commis cette erreur ne dépassant pas les 5%. Les productions erronées des élèves renvoient à la sous-catégorie E4.4 de différentes manières, où l'élève rencontre des difficultés à identifier la partie et le tout.

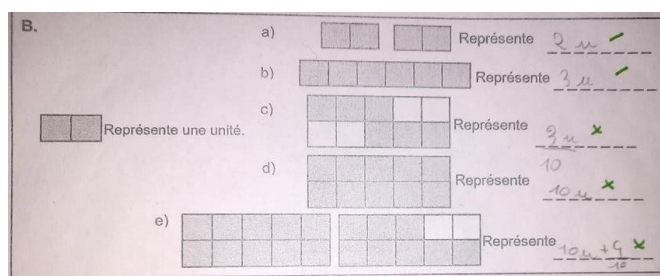


Figure 13 : production 3 erronée d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section B.

Cette première production d'élève montre que l'élève a bien pris en compte le changement d'unité pour les cas B.a) et B.b). Cependant, dès l'apparition de cases blanches, l'élève y associe systématiquement des fractions en prenant pour numérateur le nombre de doublets de carrés gris et pour dénominateur le nombre de carrés total formant la forme complète. La réponse donnée par l'élève au cas B.e) conforte cette idée. L'élève associe la partie de gauche entièrement grisée à des nombres entiers sans prendre en compte la bonne unité et la partie de droite à une fraction. Il effectue ensuite la somme des deux parties.

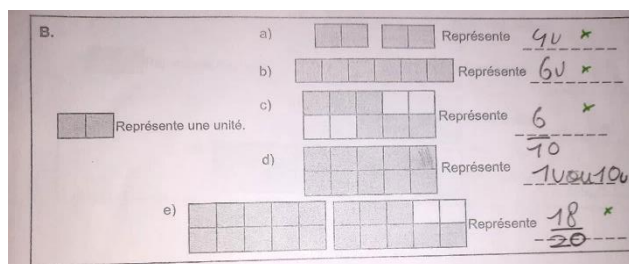


Figure 14 : production 4 erronée d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section B.

Cette seconde production d'élève reprend les éléments cités précédemment (unité prise en compte formée d'un seul carré gris pour les cas B.a) et B.b), association de la représentation sous forme de carrés gris et blancs à une fraction pour le cas B.c)). Concernant le cas B.d), l'élève a hésité entre deux réponses : 1u ou 10u. Cette réponse témoigne de la difficulté rencontrée par l'élève à identifier l'unité. La réponse 1u renvoie à l'hypothèse selon laquelle l'élève considère une forme complète comme étant forcément une unité, sans en être pour autant certain au vu des deux réponses apportées. Enfin, concernant le cas B.e), l'élève apporte la réponse $\frac{18}{20}u$, en considérant le tout comme étant l'ensemble des deux formes et la partie comme étant l'ensemble des carrés gris, soit 18.

V.3.3. Section C

Ci-dessous est donné le graphique comparatif des pourcentages moyens d'élèves ayant commis les différents types d'erreurs liés au concept d'unité pour les deux classes concernant la section C :

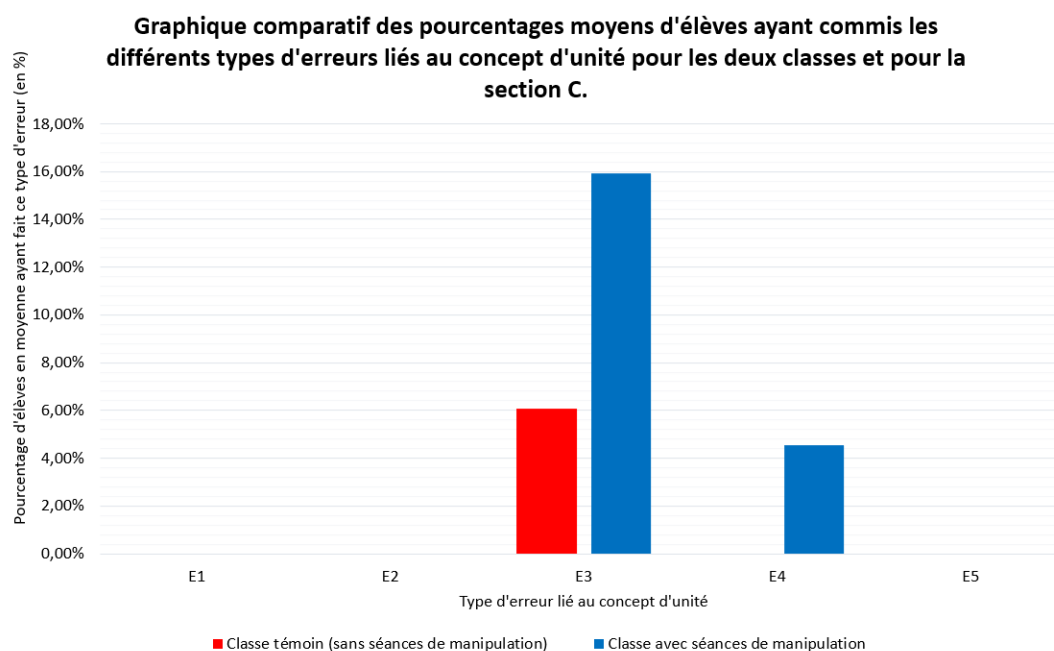


Figure 15 : graphique comparatif des pourcentages moyens d'élèves ayant commis les différents types d'erreurs liés au concept d'unité pour les deux classes et pour la section C.

Concernant la section C, les erreurs de type E1, E2 et E5 n'ont été commises par aucun élève, et ce, pour les deux classes. La majorité des erreurs recensées pour les deux classes appartiennent à la catégorie E3 avec un pourcentage moyen d'élèves ayant fait ce type d'erreur de 6% pour la classe témoin et atteignant 16% pour la classe ayant manipulé. En effet, généralement, les réponses apportées par les élèves concernant le cas C.a) où le trait de séparation entre les unités existait étaient correctes. Cependant, concernant le cas C.b), caractérisé par l'absence du trait de séparation entre les différentes unités, plusieurs élèves ont associé la représentation à 1u au lieu de l'associer à 2u, prenant en compte le nombre de formes grises présentes, quelles que soient leurs formes, plutôt que de prendre en compte l'unité définie. Ce cas a engendré beaucoup de questionnements de la part des élèves de la classe ayant manipulé, puisqu'il n'avait pas été abordé pendant les séances de manipulation. La production d'élève donnée ci-dessous est un exemple illustrant ce propos.

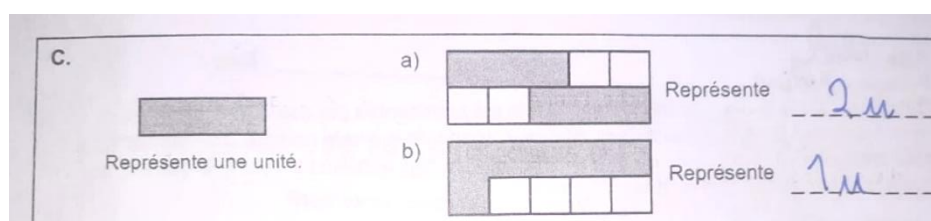


Figure 16 : production erronée 1 d'élève de CMI de la classe ayant manipulé, en réponse à la section C.

Toujours concernant le cas C.b), certains élèves de la classe ayant manipulé ont commis des erreurs de type E4, et plus précisément de type E4.1, en faisant le rapport entre le nombre de parties grises et le nombre de parties blanches, écrivant ainsi $\frac{1}{4}u$, sans être certain de la justesse de cette procédure au vu des échanges que nous avons eus lors de la réalisation de cette activité. Ces deux élèves ont énormément hésité concernant ce cas. Cette erreur n'a pas été retrouvée dans les productions des élèves de la classe témoin.

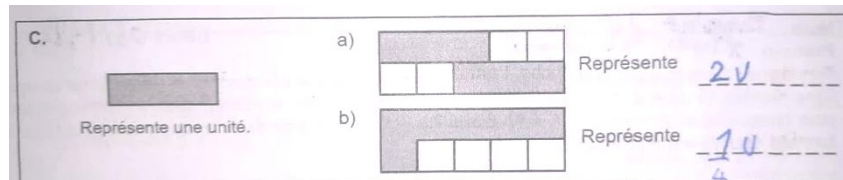


Figure 17 : production erronée 2 d'élève de CM2 de la classe ayant manipulé, en réponse à la section C.

V.3.4. Section D

Ci-dessous est donné le graphique comparatif des pourcentages moyens d'élèves ayant commis les différents types d'erreurs liés au concept d'unité pour les deux classes concernant la section D :

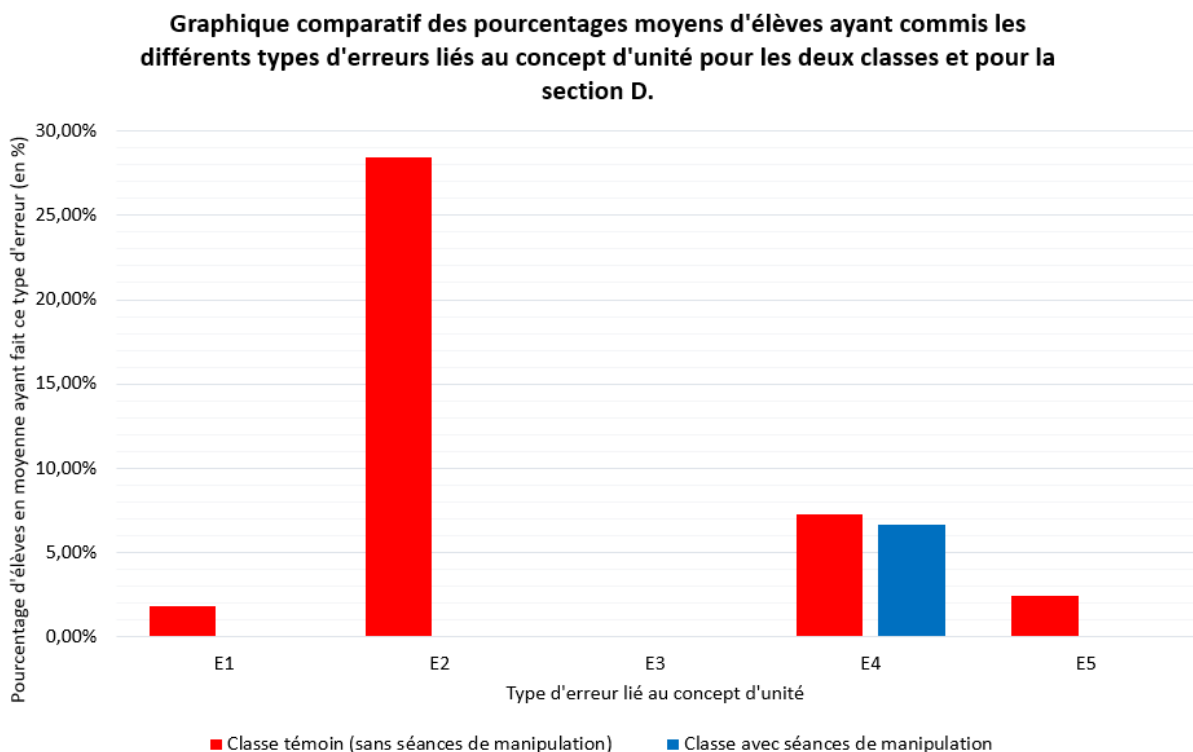


Figure 18 : graphique comparatif des pourcentages moyens d'élèves ayant commis les différents types d'erreurs liés au concept d'unité pour les deux classes et pour la section D.

Concernant la section D, les erreurs de type E3 n'ont été commises par aucun élève, et ce, pour les deux classes. Concernant la classe témoin, la majorité des erreurs recensées appartiennent à la catégorie E2 avec 28% des élèves en moyenne ayant répondu en considérant systématiquement que l'unité était d'un carré gris pour cette section. Ce type

d'erreur n'a pas été observé pour la classe ayant eu accès à des séances de manipulation. Une production d'élève relevant de cette catégorie d'erreur est donnée ci-après.

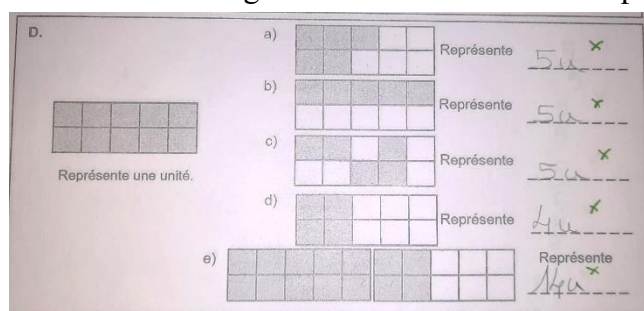


Figure 19 : production erronée 1 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section D.

De même, un nombre restreint d'élèves de la classe témoin a considéré qu'une unité était formée d'un carré, qu'il soit gris ou blanc, réponse erronée relevant de la catégorie E1. Ce type d'erreur reste néanmoins limité avec un pourcentage moyen d'élèves ayant commis cette erreur de 2%. Il n'a pas été observé pour la classe ayant manipulé.

De plus, des erreurs de types E5 ont été constatées dans les productions d'élèves de la classe témoin, avec un pourcentage faible d'environ 2%. En effet, certains élèves n'ont pas pris en compte l'ensemble de la représentation pour déterminer le nombre d'unités, comme l'atteste la production d'élève jointe ci-dessous. La représentation associée au cas *D.e*) composée de deux formes a engendré des difficultés pour les élèves, qui n'ont peut-être pas compris que la réponse attendue prenait en compte l'ensemble de la représentation. Ils ont peut-être également simplement oublié de prendre en compte la deuxième partie. Cette erreur n'était pas présente dans les productions des élèves de la classe ayant manipulé.

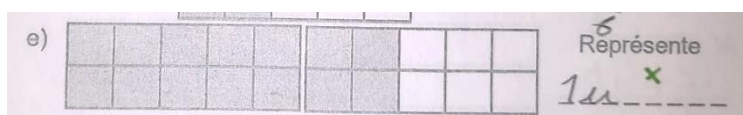


Figure 20 : production erronée 2 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section D.

Certains élèves des deux classes ont commis des erreurs de type E4. En effet, le pourcentage d'élèves moyen de la classe témoin ayant commis ce type d'erreur est semblable à celui de la classe ayant manipulé et est environ de 7%. Néanmoins, les erreurs relevées n'appartiennent pas aux mêmes sous-catégories selon les deux classes. Concernant la classe témoin, la production donnée ci-dessous montre que deux élèves ont réalisé des erreurs de type E4.1, dont les fractions sont le rapport entre le nombre de parts coloriées (carrés gris) et le nombre de parts non coloriées (carrés blancs), avec des réponses de type $\frac{4}{6}u$ à la place de $\frac{4}{10}u$ pour le cas *D. d*). La procédure adoptée par ces deux élèves pour les autres cas de la section est la même. Pour le cas *D.e*), l'élève semble avoir reconnu l'unité considérée dans la partie de gauche, puis il réutilise la même procédure erronée pour la partie de droite, expliquant ainsi sa réponse qui est de $1u + \frac{4}{6}u$.

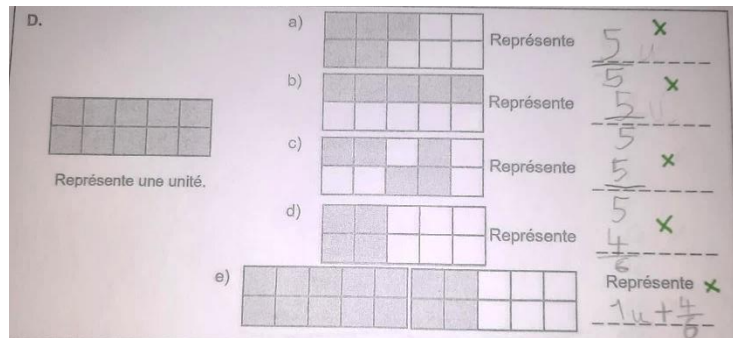


Figure 21 : production erronée 3 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section D.

Aussi, deux élèves de la classe témoin ont fait des erreurs de type E4.4, en apportant la réponse $\frac{14}{20}u$ pour le cas D.e), en considérant le tout (l'unité) comme étant l'ensemble des deux formes et la partie comme étant l'ensemble des carrés gris, soit 14, comme l'atteste la production d'élève suivante. Pour les cas précédents, où la représentation n'est formée que d'une seule forme, l'élève ne se questionne pas et apporte des réponses correctes.

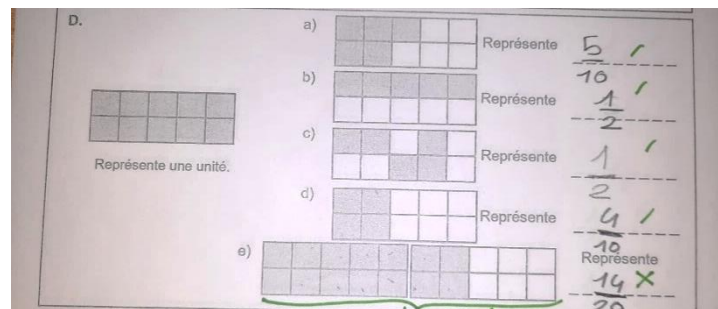


Figure 22 : production erronée 4 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section D.

Si ces erreurs n'ont pas été observées dans la classe ayant manipulé, d'autres erreurs ont tout de même été relevées uniquement dans cette classe. Un élève de la classe a considéré pour le cas D.e) la fraction comme étant le rapport entre la partie grisée de gauche et la partie grisée de droite, d'où la réponse $\frac{10}{4}u$. Cet élève n'a pas pris en compte les carrés blancs. De même que pour l'élève précédent, c'est cette représentation sous deux formes qui questionne l'élève, puisqu'il raisonne correctement pour les cas précédents. Ce type d'erreur, appartenant à la sous-catégorie E4.2 n'avait pas été anticipée lors de l'analyse a priori. Ci-dessous est donnée la production d'élève correspondante.

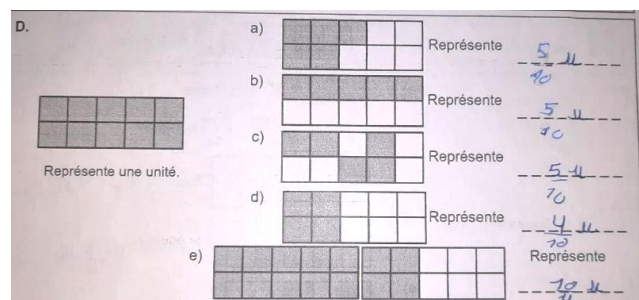


Figure 23 : production erronée 5 d'élève de CM2 de la classe ayant manipulé, en réponse à la section D.

Deux autres productions d'élèves témoignent de la confusion de certains élèves concernant la représentation *D.e*). Ces élèves ne semblent pas avoir pris la même unité pour les deux parties de la représentation. Une partie de la représentation prend en compte la bonne unité et pour l'autre partie, les élèves semblent à nouveau avoir raisonné en prenant un carré gris comme unité, menant à des réponses de type $\frac{10}{10}u + 4u$ ou $10u + \frac{4}{10}u$. Les productions de ces élèves sont les suivantes.

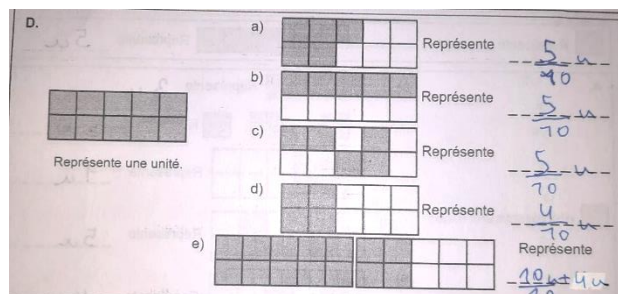


Figure 24 : production erronée 6 d'élève de CM2 de la classe ayant manipulé, en réponse à la section D.

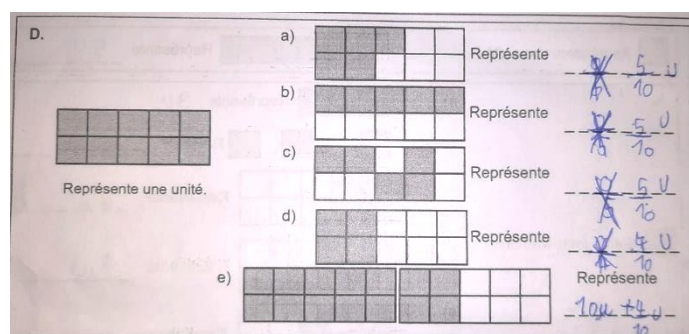


Figure 25 : production erronée 7 d'élève de CM2 de la classe ayant manipulé, en réponse à la section D.

Quoi qu'il en soit, bien que ces réponses erronées restent minoritaires, elles confortent l'idée selon laquelle certains élèves rencontrent encore des difficultés à identifier la partie et le tout dans le cadre de l'utilisation des fractions.

V.3.5. Section E

Ci-dessous est donné le graphique comparatif des pourcentages moyens d'élèves ayant commis les différents types d'erreurs liés au concept d'unité pour les deux classes concernant la section E :

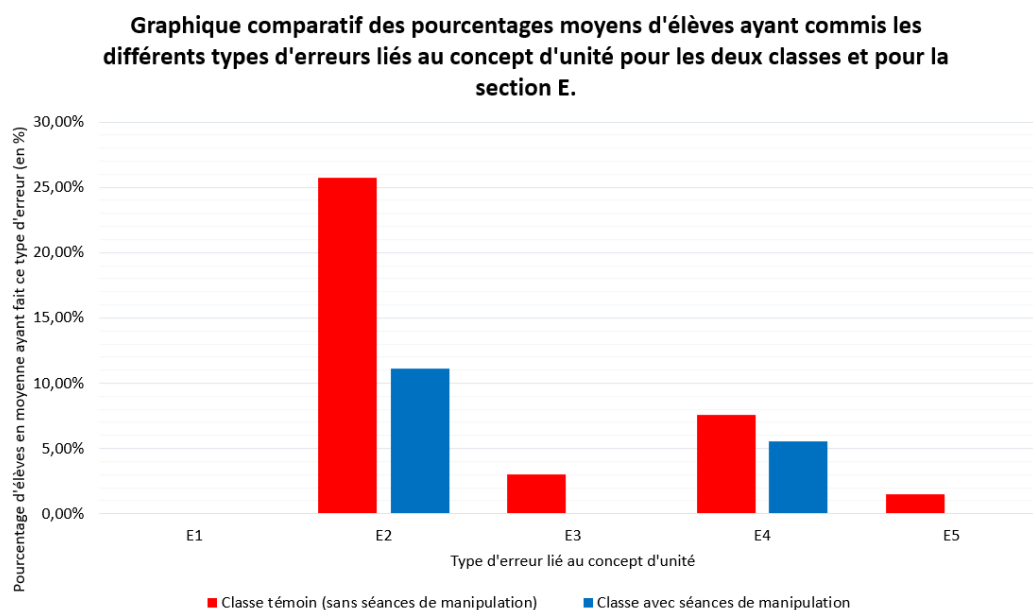


Figure 26 : graphique comparatif des pourcentages moyens d'élèves ayant commis les différents types d'erreurs liés au concept d'unité pour les deux classes et pour la section E.

Concernant la section E, les erreurs de type E1 n'ont été commises par aucun élève, et ce, pour les deux classes. Seuls des élèves de la classe témoin ont fait des erreurs de type E3 en considérant le nombre d'unités comme étant le nombre de formes grises pour le cas *E.a*) en l'associant à l'écriture 3u et des erreurs de type E5 en omettant une partie de la représentation, notamment pour le cas *E.b*). Ces erreurs restent néanmoins très minoritaires avec des pourcentages d'élèves moyens ayant commis ces erreurs respectivement de 3% et 1,5%.

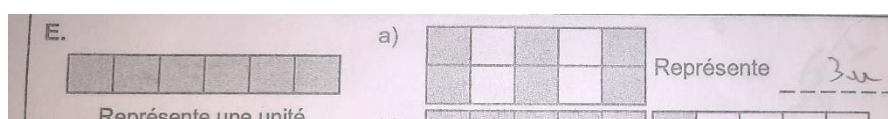


Figure 27 : production erronée 1 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section E.

De plus, la même catégorie d'erreur que pour la section D se retrouve. Il s'agit de la catégorie E2 où les élèves considèrent l'unité comme un seul carré gris. Ce type d'erreur est également le plus représenté et se retrouve dans les deux classes. Le pourcentage d'élèves moyen ayant fait ce type d'erreur est tout de même plus important pour la classe témoin en étant de 25%, soit un quart des élèves. Il n'est que de 10% pour la classe ayant manipulé.

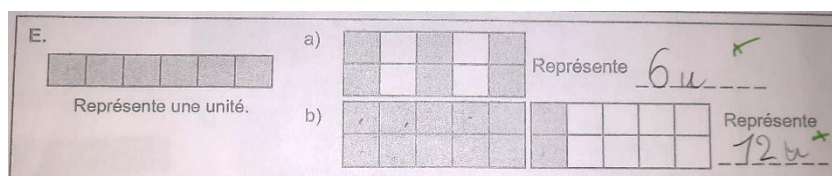


Figure 28 : production erronée 2 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section E.

Enfin, des erreurs de type E4 déjà présentes dans la section D se retrouvent également dans la section E pour la même minorité d'élèves comme le montrent ces productions d'élèves. Elles confortent l'idée selon laquelle les élèves ont des difficultés à identifier la partie et le tout.



Figure 29 : production erronée 3 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section E.

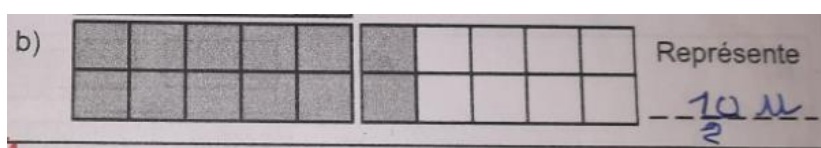


Figure 30 : production erronée 4 d'élève de CM2 de la classe ayant manipulé, en réponse à la section E.

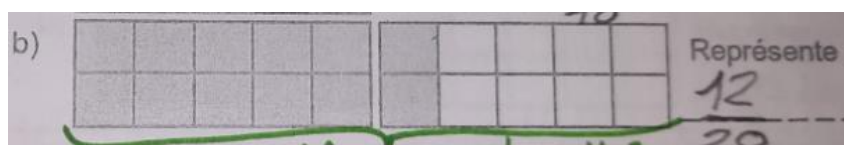


Figure 31 : production erronée 5 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section E.

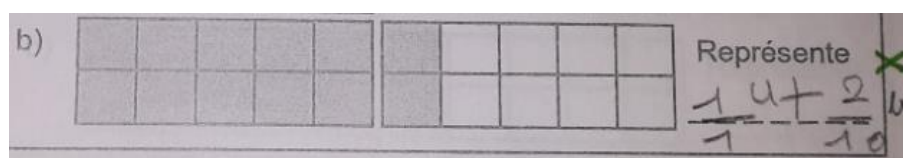


Figure 32 : production erronée 6 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section E.

Si certains perçoivent la fraction comme le rapport entre la partie grisée et la partie blanche, un autre fait le rapport entre la partie grisée de gauche et la partie grisée de droite. Un autre élève prend en compte les deux formes en tant qu'unité pour le cas E.b). D'autres élèves associent la forme entièrement grisée à une unité et utilise une fraction pour l'autre partie, en prenant toujours comme unité la forme complète, menant à des écritures sous la forme $1u + \frac{\dots}{\dots}u$.

V.3.6. Section F

Ci-dessous est donné le graphique comparatif des pourcentages moyens d'élèves ayant commis les différents types d'erreurs liés au concept d'unité pour les deux classes concernant la section F :

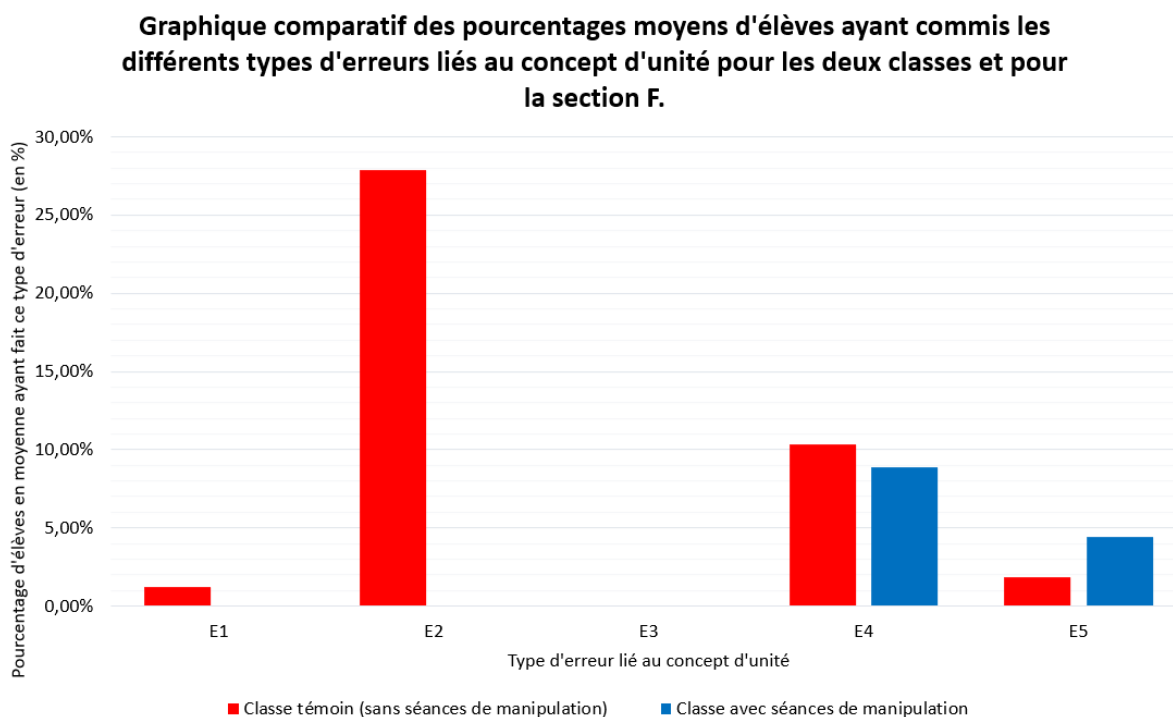


Figure 33 : graphique comparatif des pourcentages moyens d'élèves ayant commis les différents types d'erreurs liés au concept d'unité pour les deux classes et pour la section F.

Concernant la section F, les erreurs de type E3 n'ont été commises par aucun élève, et ce, pour les deux classes. Seuls des élèves de la classe témoin ont fait des erreurs de type E1 et E2 en considérant le nombre d'unités comme étant le nombre de carrés ou le nombre de carrés gris. Le pourcentage d'élèves en moyenne ayant fait ces types d'erreur atteint les 29%.

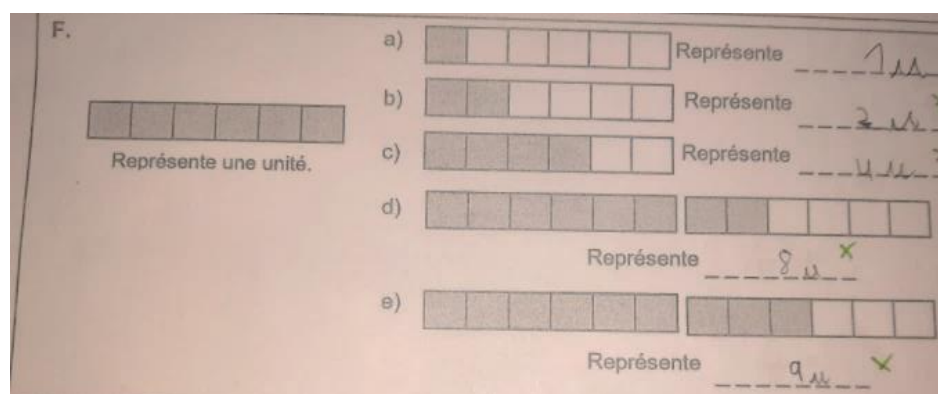


Figure 34 : production erronée 1 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section F.

De plus, des erreurs de type E4 ont été réalisées par certains élèves des deux classes. La majeure partie des erreurs commises renvoient là encore à celles déjà citées précédemment

(fractions comme étant le rapport entre les parties grises et les parties blanches, fractions où le tout renvoie à l'ensemble des deux formes pour les cas *F.d*) notamment, en associant la représentation à la fraction $\frac{8}{12}u$ au lieu de l'associer à la fraction $\frac{4}{3}u$). Ces deux types d'erreurs n'ont été commis que par les élèves de la classe témoin.

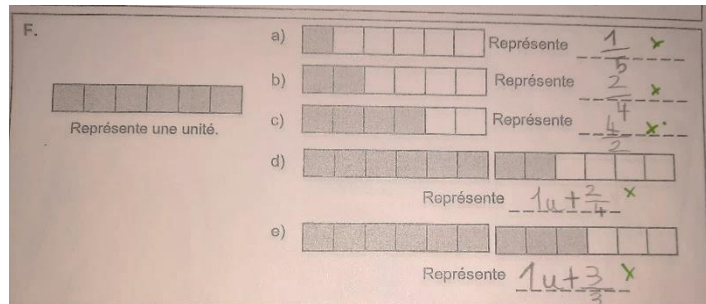


Figure 35 : production erronée 2 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section F.

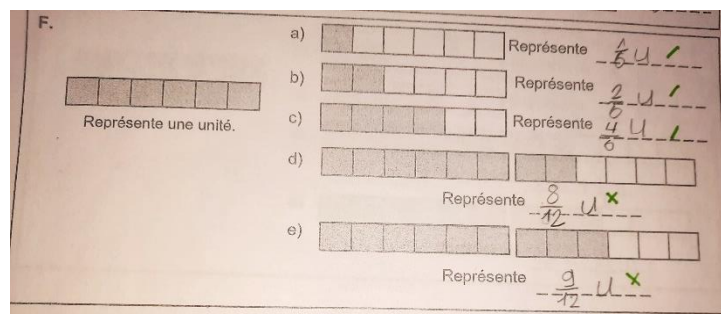


Figure 36 : production erronée 3 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section F.

Un élève de la classe témoin a utilisé une procédure non attendue pour la section F (erreur de type E4.3). Celui-ci, pour le cas *b*) par exemple, a considéré la fraction en faisant le rapport entre le tout (l'unité) au numérateur et la partie (nombre de carrés gris) au dénominateur, obtenant ainsi la fraction $\frac{6}{2}u$ au lieu de $\frac{2}{6}u$. Cependant, cette erreur, bien qu'elle ait été commise pour tous les cas de la section F n'a pas été observée dans la section D. Il est donc difficile de conclure avec certitude si cette stratégie témoigne réellement de la façon dont il conçoit la fraction ou s'il s'agit d'une inattention. Sa production est donnée ci-dessous.

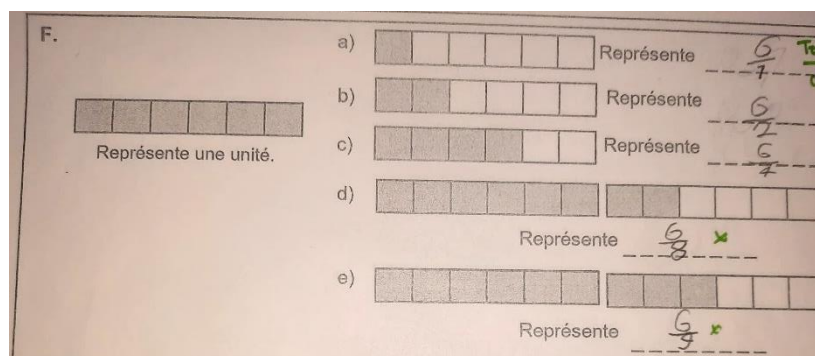


Figure 37 : production erronée 4 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section F.

Enfin, quelques élèves des deux classes ont réalisé des erreurs de type E5, en ne prenant pas en compte la totalité de la représentation pour répondre, comme l'atteste cette production d'élève où l'élève n'a pris en compte que la partie droite de la représentation, en omettant d'ajouter une unité, correspondant à la partie gauche de la représentation.

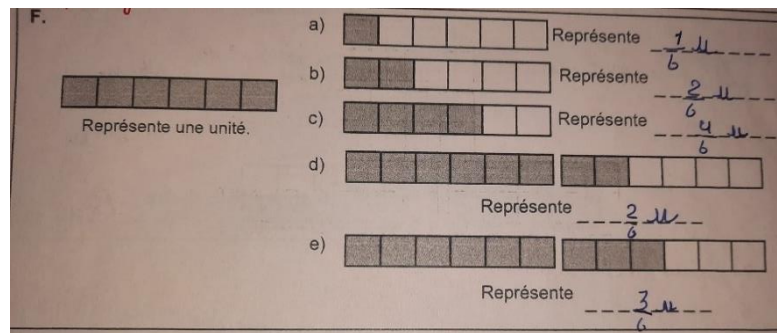


Figure 38 : production erronée 5 d'élève de CM2 de la classe ayant manipulé, en réponse à la section F.

VI. DISCUSSION

La problématique relative à cette étude était de savoir si la manipulation permet aux élèves de surmonter des difficultés liées à la maîtrise du concept d'unité lors de l'apprentissage des fractions au cycle 3, et si oui, d'identifier ces difficultés et de quelles manières la manipulation permet de les surmonter.

Cette étude a permis de mettre en évidence que les élèves rencontrent des difficultés à jongler entre les différentes unités, et ce, déjà dans le cadre de l'enseignement des nombres entiers. Ceux-ci, bien qu'ils soient plus à l'aise avec les nombres entiers qu'avec les fractions, ne le sont pas complètement en ce qui concerne le concept d'unité lié à ces nombres. À leur entrée en cycle 3, ils commencent donc à travailler sur les fractions qui sont directement en lien avec le concept d'unité sans pour autant maîtriser pleinement ce concept en ce qui concerne les nombres entiers, engendrant ainsi des difficultés.

Au regard des résultats apportés concernant les deux classes, il apparaît évident que la manipulation a eu un effet positif sur la conception de l'unité des élèves de la classe ayant manipulé, que ce soit pour les nombres entiers ou pour les fractions. Les séances de manipulation ont permis de faire travailler les élèves sur leur capacité à prendre en compte la bonne unité. Lors des séances, l'axe de travail s'est grandement tourné sur la nécessité de systématiquement se demander ce qu'était l'unité pour chaque cas considéré, comme en témoignent les traces écrites construites avec les élèves à l'issue des séances menées.

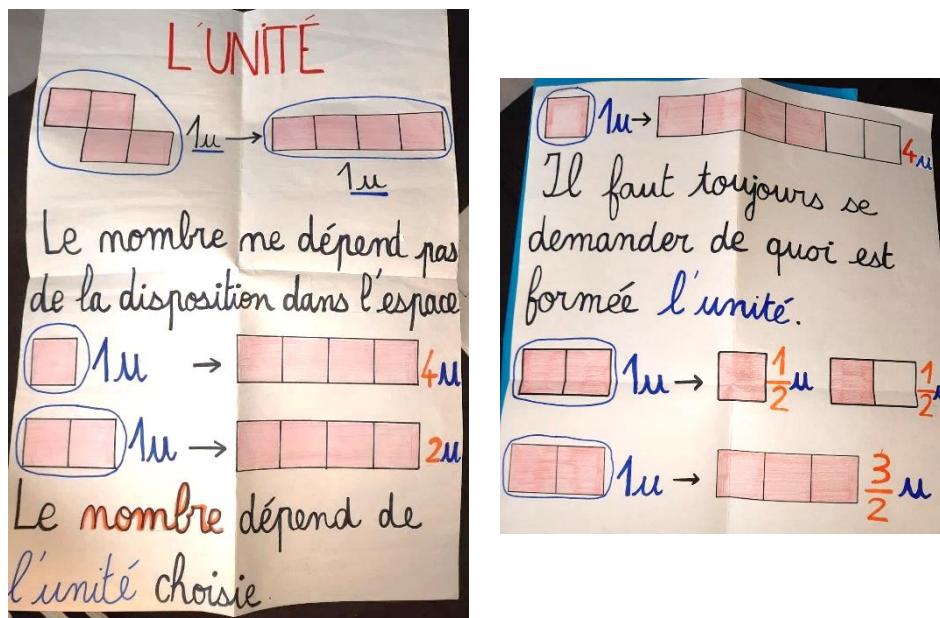


Figure 39 : Traces écrites construites avec les élèves à l'issue des séances de manipulation.

À l'issue des séances de manipulation, j'ai demandé aux élèves d'écrire en une phrase sur leur ardoise ce qu'il était important de retenir, selon eux, concernant le travail qui avait été mené lors des séances. Plusieurs élèves ont exprimé cette idée avec leurs propres mots, comme le montrent ces deux productions d'élèves.

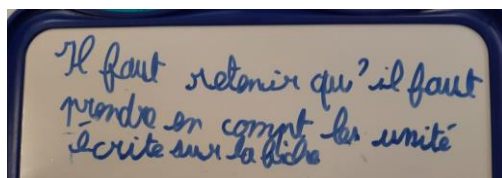


Figure 40 : Phrase proposée par un élève concernant l'idée importante à retenir des séances de manipulation : "Il faut retenir qu'il faut prendre en compte les unités écrites sur la fiche".

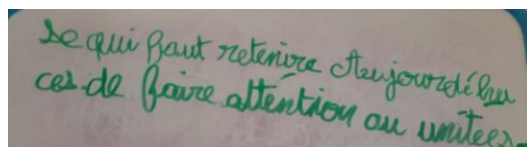


Figure 41 : Phrase proposée par un élève concernant l'idée importante à retenir des séances de manipulation : "Ce qu'il faut retenir aujourd'hui, c'est de faire attention aux unités".

Néanmoins, bien que les élèves ayant eu des séances aient une conception plus juste de ce qu'est l'unité que ceux n'ayant pas manipulé, les échanges menés avec les élèves laissent penser que ce n'est pas par la manipulation que les élèves ont consolidé ce concept pour les entiers, mais plutôt par la verbalisation. En effet, les élèves n'ont pas ressenti le besoin de manipuler lorsque l'enseignement mené était uniquement dédié aux nombres entiers. Cependant, les séances ayant continuellement confronté les élèves à des changements d'unités pour des mêmes représentations, les erreurs où l'unité était systématiquement considérée comme un carré ou comme un carré gris n'étaient presque plus présentes à l'issue des séances. Les élèves ayant manipulé parviennent à mieux jongler entre les différentes unités qui leur sont proposées.

Concernant les séances dédiées aux fractions, les élèves ont nettement plus ressenti le besoin de manipuler avec les cubes. Lors des séances, ils m'ont explicitement dit que la manipulation les avait grandement aidés à mieux visualiser l'unité en la construisant d'une part, et à mieux dénombrer le nombre d'unités en superposant directement l'unité sur la construction et en la reportant, ou en pouvant réarranger l'unité de manière à ce que le dénombrement d'unités soit plus aisé. Les élèves ont appris à utiliser la bonne procédure pour limiter les erreurs, en se demandant systématiquement ce qui représentait le tout et la partie. Ainsi, les fractions formées de la partie grisée au numérateur et de la partie blanche au dénominateur (qui ne correspond pas au tout) étaient absentes dans les productions de ces élèves. Néanmoins, certaines difficultés à identifier la partie et le tout persistent chez certains élèves ayant manipulé. Ces difficultés sont tout de même largement minoritaires par rapport à celles rencontrées par les élèves n'ayant pas manipulé.

De même, cette étude a permis de mettre en évidence que les élèves n'ayant pas manipulé rencontraient des difficultés à faire appel de façon adaptée aux nombres entiers ou aux fractions, en utilisant systématiquement les fractions pour les représentations sur lesquelles apparaissaient des carrés gris et blancs. Au contraire, les élèves ayant manipulé ont utilisé les nombres entiers et les fractions à bon escient. La manipulation leur a probablement permis de mieux visualiser si le nombre dont il était question devait être supérieur ou inférieur à l'unité, leur permettant de recourir aux fractions dès lors que le nombre en question était inférieur à l'unité.

Néanmoins, lors des séances de manipulation, il semblerait que les élèves se soient orientés vers un raisonnement s'apparentant davantage à un système de conversion plutôt que vers un raisonnement s'appuyant directement sur l'unité choisie, notamment pour les cas faisant appel à un réarrangement de l'unité. Par exemple, pour le cas S3.4, lorsque l'unité était formée de deux cubes rouges, la plupart des élèves ont eu tendance à raisonner de la manière suivante : « *l'unité est formée de deux cubes rouges, or il y a quatre cubes rouges, c'est-à-dire deux fois deux cubes rouges, il y a donc deux unités* ». Bien que j'aie essayé autant que possible de limiter cette procédure passant par la conversion de cubes en évitant de dire « *l'unité est formée de X cubes rouges* » mais en désignant directement l'unité, certains élèves semblent tout de même y avoir eu recours. Les représentations proposées, lorsque l'unité n'était pas directement perceptible, ont probablement orienté les élèves vers cette procédure, témoignant de la difficulté à raisonner directement en termes d'unités.

De même, l'utilisation de cubes de différentes couleurs y compris la couleur rouge systématiquement utilisée pour l'unité considérée est à questionner. Si ceux-ci m'ont permis de faire l'analogie avec la situation proposée lors du recueil de données et à faire le lien avec ce qui est généralement rencontré dans les manuels, ils laissent supposer que la couleur influence le concept d'unité. Il aurait donc probablement été préférable de ne pas se limiter à la couleur rouge pour l'unité choisie. Cependant, le matériel de manipulation utilisé m'a orienté dans cette voie.

Enfin, les élèves sont progressivement parvenus à se détacher de la manipulation pour n'y avoir recours que pour vérifier et valider leur raisonnement. Lors de la réalisation de l'activité finale, aucun élève de la classe ayant manipulé n'a demandé à avoir accès au matériel de manipulation, témoignant de leur évolution au cours des séances en s'extrayant de la manipulation.

VII. PERSPECTIVES

VII.1. Pistes d'évolution et d'amélioration possibles

Plusieurs pistes d'évolution et d'amélioration peuvent être proposées.

Concernant la méthodologie adoptée, il aurait été plus bénéfique que les deux groupes testés soient plus équilibrés. En effet, le fait d'avoir 33 élèves dans la classe témoin, et seulement 9 dans la classe ayant manipulé pour les questions liées aux fractions constitue une limite à cette étude, biaisant probablement les données statistiques obtenues. De même, il aurait été préférable que l'activité finale se fasse lors de la même période de l'année pour les deux classes, afin que la comparaison soit plus juste et précise. Cependant, des contraintes de temps m'ont menée à faire ce choix de proposer l'activité finale à des périodes différentes de l'année.

Concernant la réalisation de l'activité finale, celle-ci pourrait être améliorée concernant certains points. Premièrement, il aurait été intéressant de faire figurer davantage de représentations identiques où la seule variable différente est l'unité choisie (comme lors des séances de manipulation), afin de vraiment bien se rendre compte de la capacité ou non des élèves à jongler entre différentes unités pour une même représentation. Aussi, dans la mesure où il a pu être mis en évidence que les élèves rencontrent des difficultés à concevoir que l'unité puisse être inférieure à l'ensemble de la représentation, il pourrait être intéressant de faire figurer des représentations où l'unité serait plus grande que l'ensemble, par exemple en prenant comme unité six carrés gris et en mettant une représentation faisant apparaître

quatre carrés grisés d'un côté et quatre carrés de l'autre, dont deux gris, afin de voir si les élèves associeraient cette représentation à $1u$ ou à $1u + \dots u$. Dans la même dimension, il serait intéressant d'ajouter des représentations faisant apparaître plus de deux formes identiques avec une unité adaptée pour voir si l'unité est toujours perçue comme l'ensemble des formes pour certains élèves. Enfin, il aurait été intéressant, dans la section C, d'ajouter un cas supplémentaire de plus grande difficulté semblable au cas C. b) mais en ne faisant pas apparaître de cases laissées blanches, afin de conduire les élèves à raisonner sans cette aide.

VII.2. Perspectives professionnelles

Ce travail d'initiation à la recherche a été très enrichissant. Il m'a permis de m'interroger sur des stratégies pédagogiques généralement utilisées dans les classes, notamment concernant la manipulation. Il m'a conduit à me rendre compte du rôle de la manipulation dans le cadre de l'enseignement des mathématiques d'une part, mais également de m'interroger réellement sur la façon dont celle-ci doit être menée en vue d'être bénéfique pour les élèves.

Au-delà de la manipulation proprement dite, ce travail m'a fait prendre conscience des difficultés que peuvent rencontrer les élèves en mathématiques concernant le concept d'unité, concept initié dès le cycle 1 et qui est approfondi tout au long de la scolarité. De ce fait, lorsque j'aurai en charge une classe, quelle qu'elle soit, je pense que je ferai davantage preuve de vigilance vis-à-vis de la maîtrise de ce concept, en conduisant les élèves, du mieux que je peux, à mieux l'appréhender.

De même, j'ai pu me rendre compte des nombreux obstacles auxquels les élèves sont confrontés lors de l'introduction des fractions au cycle 3. Ayant travaillé sur ces obstacles, je pense que je serai en mesure de mieux repérer les difficultés rencontrées par les élèves et donc d'y remédier de façon plus adaptée.

Aussi, lors de la conception des séances de manipulation, j'ai mené un véritable travail concernant les variables didactiques, en m'interrogeant sur leurs effets concernant les procédures adoptées par les élèves. Ce travail m'a permis de mieux maîtriser ces variables didactiques mais aussi, plus largement, de me rendre vraiment compte de l'importance de la préparation en amont des supports pédagogiques. En effet, chaque choix pédagogique est à questionner puisqu'il a une influence sur les procédures adoptées, sur les éventuelles difficultés rencontrées par les élèves. Il est donc nécessaire de questionner ses choix pédagogiques en lien avec l'objectif fixé en amont de la séance et de savoir si les choix qui sont faits permettront ou non d'atteindre l'objectif visé avec les élèves.

En somme, bien que ce travail de recherche ait été appliqué au domaine des mathématiques, il changera incontestablement ma pratique enseignante dans l'ensemble des disciplines de l'école primaire, en me faisant davantage prendre le temps de laisser les élèves exprimer leurs raisonnements afin d'orienter ma pratique suivant les difficultés rencontrées par les élèves. Au travers de ce travail, j'ai pu confirmer mon idée selon laquelle un bon équilibre entre anticipation et adaptation est nécessaire pour un enseignement pertinent.

VIII. CONCLUSION

Ce travail d'initiation à la recherche a permis de me questionner suivant différentes dimensions.

Premièrement, il m'a conduit à approfondir les savoirs disciplinaires vis-à-vis des fractions, en m'interrogeant réellement sur ce qu'était une fraction et sur les différentes significations qu'elle pouvait avoir. Ces savoirs sont essentiels afin de pouvoir introduire de manière sereine les fractions avec les élèves et avoir conscience des enjeux de l'enseignement des fractions au cycle 3.

Deuxièmement, ce travail m'a conduit à m'interroger sur la didactique des mathématiques en général et de manière appliquée à l'enseignement des fractions, mais aussi sur certains choix pédagogiques faits dans le cadre de l'enseignement des mathématiques. L'idée selon laquelle la manipulation joue un rôle incontestable dans le cadre de l'enseignement des mathématiques a été confortée. Si celle-ci est généralement utilisée en vue d'introduire des concepts mathématiques, elle permet également aux élèves de surmonter des difficultés liées à des concepts déjà introduits, tel est le cas concernant le concept d'unité en lien avec l'enseignement des fractions. En effet, la manipulation menée avec les élèves a permis de remédier à certaines difficultés généralement constatées concernant les fractions. Les élèves ayant manipulé sont davantage parvenus à identifier l'unité considérée dans le cadre de l'utilisation des fractions. Aussi, leur capacité à jongler entre les différentes unités proposées a augmenté.

Cependant, la manipulation ne doit pas être une fin en soi. Il ne s'agit pas de faire manipuler les élèves pour manipuler, mais bien de faire manipuler un concept aux élèves en vue de l'abstraire, notamment grâce à la verbalisation, renvoyant au triptyque manipuler – verbaliser – abstraire souligné par le rapport Villani-Torossian. Le rôle du langage apparaît donc comme primordial pour accéder à cette abstraction et le travail mené en classe a également conforté cette idée. En effet, le langage utilisé par l'enseignant, les interactions entre pairs et l'explicitation des procédures sont essentiels pour progressivement mener à un détachement complet vis-à-vis de la manipulation. Celle-ci se doit donc d'être anticipée et réfléchie en amont afin d'être la plus bénéfique possible pour les élèves et doit véritablement être perçue comme une stratégie pédagogique au service des apprentissages visés.

Cette étude orientera sans nul doute ma pratique professionnelle lors de mes futures années en tant qu'enseignante et également cette année avec la classe de CM1-CM2 dans laquelle j'enseigne les mathématiques en qualité de contractuelle.

Bibliographie et sitographie

Académie de Besançon, *KLASMA, Matériel et Situations Pédagogiques Pour Les Fractions*.

ANSELMO, B. & ZUCCHETTA, H., *Construire les nouveaux nombres au cycle 3 : fractions et décimaux : mathématiques cycle 3, programmes 2016*, Éditions Canopé, 2018.

Archimaths CM2, Editions Magnard, 2019.

BARTH, B-M, *Jérôme Bruner et l'innovation pédagogique*, 1985.

BRIAND, J., 142 Au fil des maths Hors-série n°1 : *Manipuler en mathématiques... oui mais*, 2019.

BRIAND, J., *La place de l'expérience dans la construction des mathématiques en classe*, 2007.

BRISSIAUD, R., *Les fractions et les décimaux au CMI : une nouvelle approche*. Actes du XXVème colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres. IREM de Brest, France, 1998.

CARBONNEAU, K., MARLEY, S., & SELIG, J., *A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives*, Journal of Educational Psychology, 2013.

CNESCO, IFE, and ENS de Lyon, *Conférence de Consensus. Nombres et Opérations : Premiers Apprentissages à l'école Primaire. Recommandations Du Jury.*, 2015.

CORRIEU, L., *Dictionnaire du professeur des écoles: enseignement des mathématiques*, 1999.

DEPP, *Enquête PISA 2018, Note d'information.*, 2019.

DEPP, *Enquête TIMSS 2015*, Décembre 2016.

DEPP, *Enquête TIMSS 2019, Note d'information.*, Décembre 2020.

DIAS, T., *Manipuler et expérimenter en mathématiques : comprendre les difficultés des élèves pour mieux les résoudre*, Questions d'éducation, Editions Magnard, 2012.

Horaires Objectifs et Programmes Cycle Préparatoire, 1977

Instructions Relatives Au Nouveau Plan d'études Des Écoles Primaires Élémentaires, 1923

Ministère de l'Éducation Nationale, de la Jeunesse et des Sports, *Programme Du Cycle 3*, 2020.

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, *Fractions et Nombres Décimaux Au Cycle 3*, Ressource d'accompagnement.

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, *Socle commun de connaissances, de compétences et de culture*, 2015.

Pédagogie, Enseignements scolaires et Orientation, *Programme et Enseignement Des Mathématiques à l'école Élémentaire*, 1970.

PELAY, N., *Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*, 2011.

PELAY, N., L'atelier des potions : un jeu de société didactique et ludique pour apprendre les fractions, *Revue de mathématiques pour l'école*, 231, 2019.

PINEL, N., *M+HxM, La méthode heuristique de mathématiques : enseigner les mathématiques autrement à l'école*, 2019.

PLAISIR MATHS, Jeux Fractions, Atelier des Potions. <https://www.atelier-potions.fr>.

Tandem Maths CM1 et CM2, Editions Nathan, 2021.

VILLANI, C., & TOROSSIAN, C., *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*, 2018.

Table des tableaux

Tableau 1 : objectifs des différentes séances de la séquence.	25
Tableau 2 : tableau récapitulatif des différentes catégories d'erreurs recensées liées au concept d'unité.	31

Table des figures




Figure 1 : photographie des cubes de manipulation.	23
Figure 2 : photographie d'une "carte unité".....	23
Figure 3 : photographie d'une "carte représentation".	24
Figure 4 : exercices sur les fractions issus des manuels Archimaths CM2 (exercices 2 et 8) et Tandem CM1-CM2 (exercice 27).	26
Figure 5 : graphique comparatif des pourcentages de réussite aux différents cas de l'activité finale pour chacune des classes.	29
Figure 6 : graphique comparatif des pourcentages d'erreurs moyens pour les différentes sections de l'activité répartis selon trois catégories pour chacune des classes.	30
Figure 7 : graphique comparatif des pourcentages moyens d'élèves ayant commis les différents types d'erreurs liés au concept d'unité pour les deux classes et pour la section A. ..	32
Figure 8 : production erronée 1 d'élève de CM1 de la classe ayant manipulé, en réponse à la section A.....	32
Figure 9 : production erronée 2 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section A.	33
Figure 10 : graphique comparatif des pourcentages moyens d'élèves ayant commis les différents types d'erreurs liés au concept d'unité pour les deux classes et pour la section B. ..	33
Figure 11 : production 1 erronée d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section B.	34
Figure 12 : production 2 erronée d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section B.	34
Figure 13 : production 3 erronée d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section B.	35
Figure 14 : production 4 erronée d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section B.	35
Figure 15 : graphique comparatif des pourcentages moyens d'élèves ayant commis les différents types d'erreurs liés au concept d'unité pour les deux classes et pour la section C. ..	36




Figure 16 : production erronée 1 d'élève de CM1 de la classe ayant manipulé, en réponse à la section C.....	36
Figure 17 : production erronée 2 d'élève de CM2 de la classe ayant manipulé, en réponse à la section C.....	37
Figure 18 : graphique comparatif des pourcentages moyens d'élèves ayant commis les différents types d'erreurs liés au concept d'unité pour les deux classes et pour la section D... ..	37
Figure 19 : production erronée 1 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section D.....	38
Figure 20 : production erronée 2 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section D.....	38
Figure 21 : production erronée 3 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section D.....	39
Figure 22 : production erronée 4 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section D.....	39
Figure 23 : production erronée 5 d'élève de CM2 de la classe ayant manipulé, en réponse à la section D.....	39
Figure 24 : production erronée 6 d'élève de CM2 de la classe ayant manipulé, en réponse à la section D.....	40
Figure 25 : production erronée 7 d'élève de CM2 de la classe ayant manipulé, en réponse à la section D.....	40
Figure 26 : graphique comparatif des pourcentages moyens d'élèves ayant commis les différents types d'erreurs liés au concept d'unité pour les deux classes et pour la section E. ..	41
Figure 27 : production erronée 1 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section E.....	41
Figure 28 : production erronée 2 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section E.....	42
Figure 29 : production erronée 3 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section E.....	42
Figure 30 : production erronée 4 d'élève de CM2 de la classe ayant manipulé, en réponse à la section E.....	42
Figure 31 : production erronée 5 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section E.....	42
Figure 32 : production erronée 6 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section E.....	42





Figure 33 : graphique comparatif des pourcentages moyens d'élèves ayant commis les différents types d'erreurs liés au concept d'unité pour les deux classes et pour la section F....	43
Figure 34 : production erronée 1 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section F.	43
Figure 35 : production erronée 2 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section F.	44
Figure 36 : production erronée 3 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section F.	44
Figure 37 : production erronée 4 d'élève de CM2 de la classe n'ayant pas manipulé, en réponse à la section F.	44
Figure 38 : production erronée 5 d'élève de CM2 de la classe ayant manipulé, en réponse à la section F.	45
Figure 39 : Traces écrites construites avec les élèves à l'issue des séances de manipulation. .	46
Figure 40 : Phrase proposée par un élève concernant l'idée importante à retenir des séances de manipulation : "Il faut retenir qu'il faut prendre en compte les unités écrites sur la fiche".	47
Figure 41 : Phrase proposée par un élève concernant l'idée importante à retenir des séances de manipulation : "Ce qu'il faut retenir aujourd'hui, c'est de faire attention aux unités".	47





Annexes

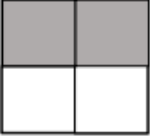
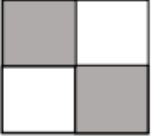
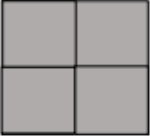
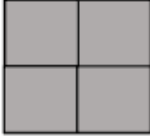

1. Évaluation diagnostique CP



A.  = 1u a)  = b)  =

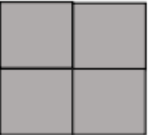
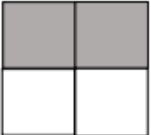
B.  = 1u a)  = b)  =

C.  = 1u a)  = b)   =

D.  = 1u a)  = b)  = c)  =








E.  = 1u a)   = b)   =

F.  = 1u a)  =

G.  = 1u a)  =










2. Tableaux des élèves à remplir (séances 2, 3, 4 et 5)

Séance 2 :




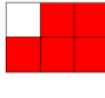


Unité \ Cas		S2.1	S2.2	S2.3	S2.4
					
A.					
B.					
C.					

Séance 3 :

PARTIE 1 :






Unité \ Cas		S3.1	S3.2	S3.3	S3.4	S3.5	S3.6
							
A.							
B.							
D.							

PARTIE 2 :


Unité \ Cas		S3.7	S3.8	S3.9	
					
A.					
B.					

Séance 4 :

PARTIE 1 :


Cas Unité	S4.1 	S4.2 
B.		
E.		
D.		

PARTIE 2 :





Cas Unité	S4.3 	S4.4 	S4.5 
D.			
G.			
H.			




Séance 5 :



PARTIE 1 :

Cas Unité	S5.1 	S5.2 	S5.3 	S5.4 	S5.5 
B.					
E.					

PARTIE 2 :

Cas Unité	S5.6 	S5.7 	S5.8 
I.			

Cas Unité	S5.11 	S5.12 
F.		

Cas Unité	S5.9 	S5.10  
J.		

3. Recueil des données : activité finale

Nom :







Date :







Prénom :

Consigne : Dans la colonne de gauche, l'**unité** est représentée par des **cases grises** pour chaque ligne numérotée de A à G. Ecris dans chaque colonne de droite le nombre d'unités correspondant pour chaque figure numérotée de a) à e). Attention, tu n'as le droit d'utiliser que des écritures sous forme **d'entiers et/ou de fractions**.

Exemple :


 Représente une unité.	 Représente _____
---	---


A.  Représente une unité.	a)	 Représente _____	
	b)	 Représente _____	
	c)	 Représente _____	
	d)	 Représente _____	
	e)	 Représente _____	

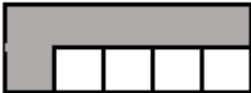
B.  Représente une unité.	a)	 Représente _____	
	b)	 Représente _____	
	c)	 Représente _____	
	d)	 Représente _____	
	e)	 Représente _____	

C.

Représente une unité.





a)  Représente -----

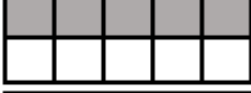
b)  Représente -----

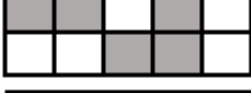
D.


Représente une unité.




a)  Représente -----

b)  Représente -----


c)  Représente -----


d)  Représente -----


e)  Représente -----

E.

Représente une unité.





a)  Représente -----

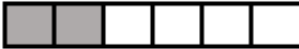
b)  Représente -----


F.


Représente une unité.




a)  Représente -----

b)  Représente -----

c)  Représente -----

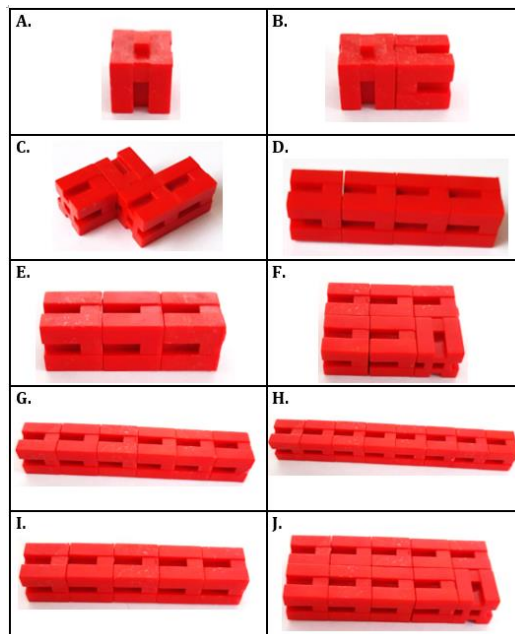
d)  Représente -----

e)  Représente -----

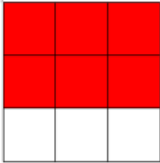
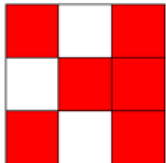

Réponses :




- A. a) 3u b) 3u c) 4u d) 5u e) 4u
- B. a) 2u b) 3u c) 3u d) 5u e) 9u
- C. a) 2u b) 2u
- D. a) $\frac{1}{2}$ u b) $\frac{1}{2}$ u c) $\frac{1}{2}$ u d) $\frac{2}{5}$ u e) $1u + \frac{2}{5}u = \frac{7}{5}u$
- E. a) 1u b) 2u
- F. a) $\frac{1}{6}$ u b) $\frac{1}{3}$ u c) $\frac{2}{3}$ u d) $\frac{4}{3}$ u e) $\frac{3}{2}$ u









4. Tableau récapitulatif des « cartes unité »





5. Tableaux récapitulatifs des « cartes représentation »

Séance 3		
S3.7	S3.8	S3.9
		

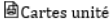
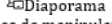
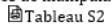
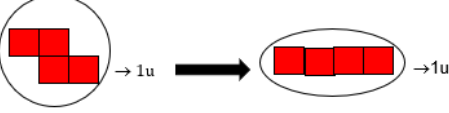
Séance 4		
S4.3	S4.4	S4.5
		



Séance 5			
S5.6	S5.7	S5.8	S5.9
			
S5.10		S5.11	S5.12
			

6. Fiche de préparation de la séance 1






Cycle :	Classe :	Discipline :	Titre :	Séance :	Période :
3	CM1-CM2	mathématiques	Découverte du matériel de manipulation et propriété de conservation du nombre Variable : espace	1/6	1
Objectif(s)	Découvrir le matériel de manipulation. Revoir la propriété de conservation du nombre pour l'ensemble que sont les entiers.				
Modalités	Déroulement				
	Activités de l'enseignant et des élèves			Matériel	
Dévolution 5 min Collectif/oral	<p>→ Donner la consigne : « vous avez devant vous des cubes rouges. Vous devez trouver le plus de façons possibles de disposer 4 cubes rouges. Vous représenterez les différents cas en les dessinant sur une feuille blanche au crayon de papier. Attention, les cubes rouges doivent s'emboîter correctement (pas en décalage) ». Faire deux exemples au tableau en dessinant les cas et un exemple qui ne fonctionnerait pas (cubes en décalage).</p> <p>Cas n°1 : 4 cubes assemblés</p>  <p>Cas n°2 : 4 cubes séparés.</p> 				
Action/mise en recherche 10 min Binôme Oral/écrit	<p>→ Les élèves s'engagent dans des procédures personnelles par binôme.</p> <p>→ Le PE passe vers les différents groupes pour les étayer et s'assurer de la bonne compréhension de la consigne.</p>			Cubes de manipulation Feuille blanche par binôme (pour les différentes représentations) Diaporama	
Formulation/validation (mise en commun) 10 min Collectif/oral	<p>→ Chaque binôme propose un cas au tableau. Si certains groupes ont d'autres cas, ils viennent également les représenter au tableau. Le PE fait valider ou invalider les propositions. (Si certaines propositions sont identiques, leur faire remarquer). Il peut faire visualiser les propositions en utilisant les cubes (si nécessaire).</p>			Tableau	
Institutionnalisation 5 min Collectif/oral	<p>→ Demander aux élèves si le nombre de cubes est le même pour chaque cas, c'est-à-dire s'il y a bien 4 cubes à chaque fois.</p> <p>→ Mettre en évidence (rappeler) que le nombre (valeur numérique) ne change pas, même si la disposition change.</p>				
Synthèse 5 min Collectif/oral	<p>→ Demander aux élèves : qu'avez-vous fait ? Qu'avez-vous appris ? Réponse attendue : le nombre de cubes ne dépend pas de leur disposition. Le nombre se conserve quelle que soit la disposition spatiale.</p>				

7. Fiche de préparation de la séance 2


Cycle :	Classe :	Discipline :	Titre :	Séance :	Période :
3	CM1-CM2	mathématiques	Manipuler avec les entiers (1)	2/6	2
Objectif(s)	Manipuler pour mettre en évidence que la valeur numérique (le nombre) dépend de l'unité choisie (pour l'ensemble que sont les entiers naturels).				
Modalités	Déroulement				
	Activités de l'enseignant et des élèves			Matériel	
Rappels 5 min Collectif/oral	<p>→ Faire des rappels sur la séance précédente (disposition des cubes qui n'a pas d'importance sur le nombre (valeur numérique))</p>				
Dévolution 5 min Collectif/oral	<p>→ Distribuer les cartes unité et le tableau à remplir.</p> <p>→ Énoncer : « vous avez devant vous des cartes unités. »</p> <p>→ Énoncer : « une unité sera représentée en rouge. ». Pour chaque carte unité, montrer la carte et la construction et dire : ça, c'est l'unité (en entourant et en écrivant 1u au tableau).</p> <p>→ Donner la consigne : « Vous devez remplir le tableau en écrivant, pour chaque carte unité, combien il y a d'unités pour chacun des cas. Vous pouvez manipuler les cubes si besoin. » Faire reformuler la consigne et faire un exemple au tableau ensemble.</p> <p>Bien préciser aux élèves d'écrire le u pour unité dans leurs réponses.</p>			  	
Action/mise en recherche 10 min Binôme Oral/écrit	<p>→ Distribuer les cubes de manipulation.</p> <p>→ Les élèves s'engagent dans des procédures personnelles en binôme pour déterminer le nombre d'unités (visualiser ou construire les différents cas).</p> <p>→ Le PE passe vers les différents groupes pour les étayer et s'assurer de la bonne compréhension de la consigne.</p>				
Formulation/validation (mise en commun) 10 min Collectif/oral	<p>→ Chaque binôme formule la procédure adoptée (visualisation, entourer, superposition puis superposition). Le PE fait valider ou invalider les propositions en demandant systématiquement s'il y a + ou - d'une unité (faire oraliser les élèves).</p> <p>Oralisation attendue : ça, c'est l'unité (en entourant). Il y a X fois l'unité et c'est plus qu'une unité. Il y a donc X unités (en vérifiant je peux mettre X fois l'unité)</p> <p>Il peut faire visualiser les propositions en utilisant les cubes et en entourant les unités (si nécessaire).</p>				
Institutionnalisation 15 min Collectif/oral	<p>→ Faire observer le tableau aux élèves. Demander ce qu'ils remarquent (étayer les élèves en les questionnant si nécessaire). Réponse attendue : Pour un même cas/même construction, le nombre n'est pas le même. Il dépend de l'unité choisie.</p> <p>→ Construire une affiche collective :</p> 			Affiche collective (trace écrite)	

	<p>Le nombre ne dépend pas de la disposition dans l'espace.</p>  <p>Le nombre dépend de l'unité choisie.</p> 	
Synthèse 5 min Collectif/oral	→ Demander aux élèves : qu'avez-vous fait ? Qu'avez-vous appris ? <i>Réponse attendue</i> : le nombre dépend de l'unité choisie.	

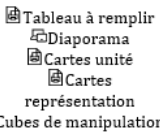




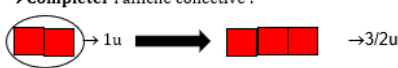
8. Fiche de préparation de la séance 3

Cycle : 3	Classe : CM1-CM2	Discipline : mathématiques	Titre : Manipuler avec les entiers (2) Variable : ajout de cubes d'une autre couleur (blancs)	Séance : 3/6	Période 2
Objectif(s)	Reconnaitre/identifier l'unité. (Manipuler pour mettre en évidence que la valeur numérique dépend de l'unité choisie (pour l'ensemble des entiers).) (Tendre vers l'abstraction en manipulant seulement pour vérifier/valider)				
Modalités	Déroulement				Matériel
	Activités de l'enseignant et des élèves				
Rappels 5 min Collectif/oral	→ Faire des rappels sur la séance précédente (nombre ou valeur numérique dépend de l'unité choisie)				
Dévolution (partie1) 5 min Collectif/oral	→ Distribuer les cartes unité et le tableau à remplir. → Énoncer : « vous avez devant vous des cartes unités. » → Énoncer : « une unité sera, comme la dernière fois, représentée en rouge. » Pour chaque carte unité, montrer la carte et la construction et dire : ça, c'est l'unité (en entourant et en écrivant 1u au tableau). → Donner la consigne : « Vous devez remplir le tableau en écrivant, pour chaque carte unité, combien il y a d'unités pour chacun des cas. Vous pouvez manipuler les cubes si besoin. » Faire reformuler la consigne.				
Action/mise en recherche 10 min Binôme Oral/écrit	→ Distribuer les cubes de manipulation. → Les élèves s'engagent dans des procédures personnelles en binôme pour déterminer le nombre d'unités (visualiser ou construire les différents cas). → Le PE passe vers les différents groupes pour les étayer et s'assurer de la bonne compréhension de la consigne.				
Formulation/validation (mise en commun) 10 min Collectif/oral	→ Chaque binôme formule la procédure adoptée (visualisation, entourer, superposition en comptant le nombre de fois où on peut mettre l'unité, réarrangement puis superposition). Le PE fait valider ou invalider les propositions en demandant systématiquement s'il y a + ou - d'une unité (faire oraliser les élèves). <i>Oralisation attendue : ça, c'est l'unité (en entourant). Il y a X fois l'unité et c'est plus qu'une unité. Il y a donc X unités (en vérifiant, je peux mettre X fois l'unité).</i> Il peut faire visualiser les propositions en utilisant les cubes et en entourant les unités (si nécessaire). → Comparer les cas S3.1, S3.2 et S3.3 et S3.4 et mettre en évidence, avec les élèves, que la présence d'autres cubes ne change pas la valeur numérique, car l'unité est représentée en rouge.				    représentation Cubes manipulation
Dévolution (partie 2) 5 min Collectif/oral	→ Retirer le matériel de manipulation et les cartes unités. → Distribuer les nouvelles cartes unités. « Vous avez désormais d'autres cartes unités devant vous ».				
Action/mise en recherche	→ Les élèves s'engagent dans des procédures personnelles pour déterminer le nombre d'unités. → Le PE passe vers les différents groupes pour les étayer et s'assurer de la bonne compréhension de la consigne.				
10 min Binôme Oral/écrit					
Formulation/validation (mise en commun) 10 min Collectif/oral	→ Chaque binôme formule la procédure adoptée (anticipation puis superposition directement l'unité sur la fiche ou réarrangement de l'unité en changeant la disposition puis superposition). Le PE fait valider ou invalider les propositions en demandant systématiquement s'il y a + ou - d'une unité. Il peut faire visualiser les propositions en utilisant les cubes (si nécessaire). <i>Oralisation attendue : ça, c'est l'unité (en entourant). Il y a X fois l'unité et c'est plus qu'une unité. Il y a donc X unités (en vérifiant, je peux mettre X fois l'unité).</i>				
Institutionnalisation 10 min Collectif/oral	→ Compléter l'affiche collective : Il faut toujours se demander de quoi est formée l'unité.				Affiche collective
					
Synthèse 5 min Collectif/oral	→ Demander aux élèves : qu'avez-vous fait ? Qu'avez-vous appris ? <i>Réponse attendue</i> : il faut toujours bien se demander de quoi est formée l'unité.				

9. Fiche de préparation de la séance 4

Cycle : 3	Classe : CM1-CM2	Discipline : mathématiques	Titre : Manipuler avec les fractions (1) Variable : nombres (fractions simples)	Séance : 4/6	Période 2
Objectif(s) $(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4})$ (Tendre vers l'abstraction en manipulant seulement pour vérifier/valider)					
Modalités		Déroulement			
		Activités de l'enseignant et des élèves		Matériel	
Rappels 5min Collectif/oral		→ Faire des rappels sur la séance précédente.			
Dévolution (partie1) 5 min Collectif/oral		→ Distribuer les cartes unité et le tableau à remplir. → Énoncer : « vous avez devant vous des cartes unités. » → Énoncer : « une unité sera, comme la dernière fois, représentée en rouge. ». Pour chaque carte unité, montrer la carte et la construction et dire : <i>ça, c'est l'unité (en entourant et en écrivant 1u au tableau).</i> → Donner la consigne : « Vous devez remplir le tableau en écrivant, pour chaque carte unité, combien il y a d'unités pour chacun des cas. Vous pouvez manipuler les cubes si besoin. » Faire reformuler la consigne.			
Action/mise en recherche 10 min Binôme Oral/écrit		→ Distribuer les cubes de manipulation → Les élèves s'engagent dans des procédures personnelles pour déterminer le nombre d'unités. → Le PE passe vers les différents groupes pour les étayer et s'assurer de la bonne compréhension de la consigne. <i>Si les élèves sont en difficultés, leur demander s'il y a plus ou moins d'une unité. Réponse attendue : Moins. Demander quels types de nombres va-t-on devoir utiliser. Réponse attendue : les fractions.</i>			
Formulation/validation (mise en commun) 1 ^{ère} institutionnalisation 15 min Collectif/oral		→ Chaque binôme formule la procédure adoptée (visualisation, entourer, superposition en comptant le nombre de fois où on peut mettre l'unité, réarrangement puis superposition). Le PE fait valider ou invalider les propositions en demandant systématiquement s'il y a + ou - d'une unité (faire oraliser les élèves). <i>Oralisation attendue : ça, c'est l'unité (en entourant). Le nombre de parts composant l'unité est X. Il y a moins qu'une unité. Ici, on a pris Z parts Il y a donc Z/X unité soit un demi/un tiers/un quart d'unités.</i> Faire émerger les termes de moitié, tiers, quart. Il peut faire visualiser les propositions en utilisant les cubes et en entourant les unités (si nécessaire). Questionner les élèves pour mettre en évidence que le nombre de cubes rouges (de parts total) qui constituent l'unité correspond au dénominateur, et le nombre de cubes rouges visibles sur la construction (nombres de parts prises) correspond au numérateur de la fraction.			☑ Tableau à remplir ☑ Diaporama ☑ Cartes unité ☑ Cartes représentation Cubes de manipulation
Dévolution (partie2) 5 min Collectif/oral		→ Retirer le matériel de manipulation et les cartes unités. → Distribuer les nouvelles cartes unités. « Vous avez désormais d'autres cartes unités devant vous ».			
Action/mise en recherche 10 min Binôme Oral/écrit		→ Les élèves s'engagent dans des procédures personnelles pour déterminer le nombre d'unités (visualiser ou construire les différents cas : superposer, ou réarranger puis superposer). → Le PE passe vers les différents groupes pour les étayer et s'assurer de la bonne compréhension de la consigne.			
Formulation/validation (mise en commun) 5 min Collectif/oral		→ Chaque binôme formule la procédure adoptée (anticipation puis superposition directement l'unité sur la fiche ou réarrangement de l'unité en changeant la disposition puis superposition). Le PE fait valider ou invalider les propositions en demandant systématiquement s'il y a + ou - d'une unité. Il peut faire visualiser les propositions en utilisant les cubes (si nécessaire). <i>Oralisation attendue : ça, c'est l'unité (en entourant). Le nombre de parts total est X. Il y a moins qu'une unité. Ici, on a pris Z parts. Il y a donc Z/X unité.</i>			
Institutionnalisation 10 min Collectif/oral		→ Compléter l'affiche collective : 			Affiche collective
Synthèse 5 min Collectif/oral		→ Demander aux élèves : qu'avez-vous fait ? Qu'avez-vous appris ? Réponse attendue : lorsque le nombre est plus petit que l'unité, on utilise les fractions. Le numérateur correspond au nombre pris et le dénominateur au nombre de parts qui composent l'unité.			

10. Fiche de préparation de la séance 5

Cycle :	Classe :	Discipline :	Titre :	Séance :	Période
3	CM1-CM2	mathématiques	Manipuler avec les fractions (2) Variable : nombres (fractions supérieures ou inférieures à 1)	5/6	2
Objectif(s)	Manipuler pour mettre en évidence que la valeur numérique dépend de l'unité choisie (pour l'ensemble que sont les fractions inférieures ou supérieures à 1 ($\frac{a}{2}$; $\frac{a}{3}$; $\frac{a}{4}$; $\frac{a}{5}$; $\frac{a}{6}$) où a est un entier naturel) (Tendre vers l'abstraction en manipulant seulement pour vérifier/valider)				
Modalités	Déroulement				
	Activités de l'enseignant et des élèves			Matériel	
Rappels 5 min Collectif/oral	→ Faire des rappels sur la séance précédente.				
Dévolution 5 min Collectif/oral	→ Distribuer les cartes unité et le tableau à remplir. → Énoncer : « vous avez devant vous des cartes unités. » → Énoncer : « une unité sera, comme la dernière fois, représentée en rouge. ». Pour chaque carte unité, montrer la carte et la construction et dire : ça, c'est l'unité (en entourant et en écrivant 1u au tableau). → Donner la consigne : « Vous devez remplir le tableau en écrivant, pour chaque carte unité, combien il y a d'unités pour chacun des cas. Vous pouvez manipuler les cubes si besoin. » Faire reformuler la consigne.				
Action/mise en recherche 10 min Binôme Oral/écrit	→ Distribuer les cubes de manipulation → Les élèves s'engagent dans des procédures personnelles pour déterminer le nombre d'unités. → Le PE passe vers les différents groupes pour les étayer et s'assurer de la bonne compréhension de la consigne				
Formulation/validation (mise en commun) 1^{ère} institutionnalisation 15 min Collectif/oral	→ Chaque binôme formule la procédure adoptée (visualisation, entourer, superposition en comptant le nombre de fois où on peut mettre l'unité, réarrangement puis superposition). Le PE fait valider ou invalider les propositions en demandant systématiquement s'il y a + ou - d'une unité (faire oraliser les élèves). <i>Oralisation attendue : ça, c'est l'unité (en entourant). Le nombre de part composant l'unité est X. Il y a plus/moins qu'une unité. Ici, on a pris Z parts il y a donc Z/X unité.</i>			<div style="font-size: small;">      </div>	
Dévolution 5 min Collectif/oral	→ Retirer le matériel de manipulation et les cartes unités. → Distribuer les nouvelles cartes unités. « Vous avez désormais d'autres cartes unités devant vous ». → Distribuer les cartes en 2D et donner la consigne : « Désormais, vous n'avez plus les constructions directement. Les cubes de différentes couleurs sont représentés par des cases de différentes couleurs ». « Vous devez remplir le tableau en écrivant, pour chaque carte unité, combien il y a d'unités pour chacun des cas (cartes avec cases). Une fois terminé, vous pourrez récupérer vos cubes pour vérifier en manipulant. »				
Action/mise en recherche 10 min Binôme Oral/écrit	→ Les élèves s'engagent dans des procédures personnelles pour déterminer le nombre d'unités (visualiser ou construire les différents cas : superposer, ou réarranger puis superposer). → Le PE passe vers les différents groupes pour les étayer et s'assurer de la bonne compréhension de la consigne.				
Formulation/validation (mise en commun) 5 min Collectif/oral	→ Chaque binôme formule la procédure adoptée (anticipation puis superposition directement l'unité sur la fiche ou réarrangement de l'unité en changeant la disposition puis superposition). Le PE fait valider ou invalider les propositions en demandant systématiquement s'il y a + ou - d'une unité. Il peut faire visualiser les propositions en utilisant les cubes (si nécessaire). <i>Oralisation attendue : ça, c'est l'unité (en entourant). Le nombre de parts total est X. Il y a plus/moins qu'une unité. Ici, on a pris Z parts. Il y a donc Z/X unité.</i>				
Institutionnalisation 10 min Collectif/oral	→ Compléter l'affiche collective : 			Affiche collective	
Synthèse 5 min Collectif/oral	→ Demander aux élèves : qu'avez-vous fait ? Qu'avez-vous appris ?				

11. Tableau des différentes procédures attendues pour chaque situation de manipulation proposée.

Cartes unité	Cas avec procédure de superposition directe	Cas avec procédure de réarrangement
SÉANCE 2		
A	<i>S2.1, S2.2, S2.3, S2.4</i>	<i>X</i>
B	<i>S2.2, S2.3, S2.4</i>	<i>S2.1</i>
C	<i>X</i>	<i>S2.1, S2.2, S2.3, S2.4</i>
SÉANCE 3		
A	<i>S3.1, S3.2, S3.3, S3.4, S3.5, S3.6, S3.7, S3.8, S3.9</i>	<i>X</i>
B	<i>S3.1, S3.2, S3.3, S3.5, S3.6, S3.7</i>	<i>S3.4, S3.8, S3.9</i>
D	<i>S3.1, S3.2, S3.3</i>	<i>S3.4, S3.5, S3.6</i>
SÉANCE 4		
B	<i>S4.1, S4.2</i>	<i>X</i>
E	<i>S4.1, S4.2</i>	<i>X</i>
D	<i>S4.1, S4.2, S4.3, S4.4, S4.5</i>	<i>X</i>
G	<i>S4.3, S4.4, S4.5</i>	<i>X</i>
H	<i>S4.3, S4.4, S4.5</i>	<i>X</i>
SÉANCE 5		
B	<i>S5.1, S5.2, S5.3, S5.4</i>	<i>S5.5</i>
E	<i>S5.1, S5.2, S5.3, S5.4, S5.5</i>	<i>X</i>
I	<i>S5.6, S5.7, S5.8</i>	<i>X</i>
J	<i>S5.9, S5.10</i>	<i>X</i>
F	<i>S5.11</i>	<i>S5.12</i>

12. Tableau associant les situations de manipulation proposées avec les cas proposés dans l'activité finale.

Situation proposée <i>Forme : carte unité, cas</i>	Cas de l'activité finale
A, S2.2	A.a)
A, S2.1	A.b)
A, S3.3 ; A, S3.7	A.c)
A, S3.4 ; A, S3.8	A.d)
A, S3.4 ; A, S3.8	A.e)
B, S2.3	B.a)
B, S2.2	B.b)
B, S3.3	B.c)
B, S2.4	B.d)
B, S3.5	B.e)
X	C.a)
X	C.b)
D, S4.3 ; D, S4.5	D.a)
D, S4.3 ; D, S4.5	D.b)
D, S4.4	D.c)
C, S5.8	D.d)
D, S5.10	D.e)
A, S5.2	E.a)
A, S5.5	E.b)
C, S5.6, A, S5.4	F.a)
C, S5.8, B, S5.4	F.b)
E, S5.12	F.c)
B, S5.5	F.d)
B, S5.5	F.e)

Année universitaire 2022-2023

Diplôme universitaire *Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation*

Mention *Premier degré*

Titre de l'écrit réflexif : la manipulation dans le cadre de l'enseignement des fractions en lien avec la consolidation du concept d'unité au cycle 3.

Auteur : PETIT Mylène

Résumé :

Le concept d'unité est travaillé dès le cycle 1 et tout au long de la scolarité de l'élève à l'école primaire et la manipulation tient généralement une place primordiale afin d'appréhender ce concept mathématique. Au cycle 3, l'introduction des fractions, qui apparaissent comme de nouveaux nombres permettant de pallier l'insuffisance des nombres entiers, représente un enjeu majeur de l'enseignement des mathématiques. Le travail mené sur ces nombres, directement en lien avec le concept d'unité, présente de nombreux obstacles pour les élèves. Dès lors, cette étude vise à montrer en quoi et comment la manipulation pourrait permettre de surmonter certaines difficultés d'apprentissage liées à la maîtrise du concept d'unité lors de l'apprentissage des fractions au cycle 3.

Mots-clés : **Mathématiques – Fractions - Manipulation – Unité – Difficultés**

Summary :

The concept of unit is worked on from cycle 1 and throughout the student's education in primary school. Manipulation generally plays a key role in understanding this mathematical concept. In cycle 3, the introduction of fractions, which appear as new numbers making it possible to compensate for the insufficiency of integers, represents a major challenge in the teaching of mathematics. The work carried out on these numbers, directly related to the concept of unit, presents many obstacles for students. Therefore, this study aims to show how the manipulation would make it possible to overcome some of the learning difficulties related to the concept of unit when learning fractions in cycle 3.

Key words : **Mathematics – Fractions - Manipulation – Unit – Learning difficulties**