



HAL
open science

Flambement d'une poutre sur appuis élastiques périodiques

Stanislas Antczak

► **To cite this version:**

Stanislas Antczak. Flambement d'une poutre sur appuis élastiques périodiques. Sciences de l'ingénieur [physics]. 2023. dumas-04345025

HAL Id: dumas-04345025

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-04345025v1>

Submitted on 14 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright



ENTPE

L'école de l'aménagement durable des territoires

TRAVAIL DE FIN D'ÉTUDES

POUR LE DIPLÔME D'INGÉNIEUR DES TRAVAUX PUBLICS DE L'ÉTAT

Année 2022-2023

Voie d'approfondissement : Génie civil

Soutenu le 4 septembre 2023

Devant le jury composé de :

- Président du jury : Denis Branque ;
- Tuteurs : Claude Boutin et Antoine Rallu ;
- Expert : Bruno Lombard.

Par :

Stanislas ANTCZAK

Flambement d'une poutre sur appuis élastiques périodiques

Organisme d'accueil : ENTPE/LTDS



Notice analytique

AUTEUR	
Prénom	Stanislas
Nom	Antczak
ORGANISME D'ACCUEIL	
Nom de l'organisme	Laboratoire de tribologie et dynamique des systèmes (LTDS)
Localisation	ENTPE, 3 rue Maurice Audin, 69120 Vaulx-en-Velin
Nom des tuteurs	Claude Boutin et Antoine Rallu
ANALYSE DU TFE	
Titre (français)	Flambement d'une poutre sur appuis élastiques périodiques
Titre (anglais)	Buckling of a beam on periodic elastic supports
Résumé (français)	<p>L'étude du comportement au flambement d'une poutre continue, reliée à intervalles réguliers à un bâti fixe par l'intermédiaire de liaisons élastiques, est réalisée, à l'aide d'une méthode d'homogénéisation périodique des milieux discrets, sous hypothèse de grande séparation d'échelles entre la taille d'un volume élémentaire représentatif et une longueur macroscopique caractéristique du flambement.</p> <p>L'étude explore divers contrastes de rigidité entre les liaisons élastiques et la raideur de flexion de la poutre, en envisageant une pseudo-périodicité sur une, deux, trois ou quatre poutres élémentaires. La méthode fournit la charge de flambement et la déformée associée à chaque mode prédit. Une comparaison avec un calcul aux éléments finis, mis au point pour l'occasion, est réalisée. Une discussion est menée sur les résultats fournis ou non par la méthode, et sur les questions spécifiques de la prise en compte des conditions aux limites et de la sélection du mode le plus critique.</p>
Résumé (anglais)	<p>The study of the buckling behaviour of a continuous beam, connected at regular intervals to a fixed frame via elastic links, is carried out using a periodic homogenization method for discrete media, under the assumption of a large scale separation between the size of a representative elementary volume and a macroscopic characteristic buckling length.</p> <p>The study explores various stiffness contrasts between the elastic connections and the bending stiffness of the beam, considering pseudo-periodicity over one, two, three or four elementary beams. The method provides the buckling load and deformation associated with each predicted mode.</p> <p>A comparison is made with a finite element calculation developed for the purpose. A discussion is held on the results provided or not by the method, and on the specific issues of taking into account boundary conditions and selecting the most critical mode.</p>
Mots-clés (français)	Flambement, Homogénéisation périodique des milieux discrets, Poutre suspendue
Mots-clés (anglais)	Buckling, Periodic homogenization of discrete media, Suspended beam
Termes géographiques	Vaulx-en-Velin, Rhône, France
COLLATION	
Nombre de pages	130 pages
Nombre de pages d'annexes	67 pages d'annexes
Nombre de références	22 références bibliographiques

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Présentation du problème	5
1.2	Contexte scientifique de l'étude	7
1.3	Démarche du travail effectué	8
2	Généralités	11
2.1	Position du problème	11
2.2	Étude d'une poutre élémentaire soumise au flambement	13
2.3	Étude des nœuds	18
2.4	Approche énergétique	20
2.5	Charges critiques de flambement local ou global	22
3	Homogénéisation périodique	25
3.1	Principe du développement asymptotique	25
3.2	Déroulement général de la résolution	27
3.3	Pseudo-périodicité à une cellule	28
3.4	Pseudo-périodicité à deux cellules	30
3.5	Autres pseudo-périodicités	31
4	Résultats	35
4.1	Modes critiques de flambement fournis par les éléments finis	35
4.2	Homogénéisation : pseudo-périodicité à une cellule	38
4.3	Charges critiques pour tous les modes étudiés	40
4.4	Commentaires sur les résultats	44
4.5	Conclusions	49
5	Discussions	51
5.1	La question des conditions aux limites	51
5.2	Discussions sur les règles de choix des modes de flambement	55
6	Conclusion	59
6.1	Résultats	59
6.2	Perspectives immédiates	60
6.3	Développements ultérieurs	61
A	Fonctions utilisées	63
A.1	Fonctions	63
A.2	Dérivées : tracés et valeurs remarquables	64
A.3	Dérivées secondes, troisièmes, quatrièmes	64
B	Résolutions de référence	65
B.1	Résolution exacte	65
B.2	Résolution numérique aux éléments finis	66
B.3	Adéquation des deux méthodes et contraintes techniques	68
B.4	Résolution exacte à deux poutres	71
B.5	Constatations physiques et commentaires	73

C Résultats des calculs aux éléments finis	77
C.1 Aucun ressort	77
C.2 Pas de ressort de translation	78
C.3 Ressorts de translation très souples	79
C.4 Ressorts de translation souples	80
C.5 Ressorts de translation de raideur moyenne	81
C.6 Ressorts de translation raides	82
C.7 Ressorts de translation très raides	83
C.8 Ressorts de rotation absents	84
C.9 Un cas de transition	85
D Solutions à périodicité exacte	87
D.1 Périodicité à une cellule	87
D.2 Périodicité à deux cellules	88
D.3 Périodicité à un nombre quelconque de cellules	90
D.4 Formalisme de Bloch	92
E Mise en œuvre de l'homogénéisation	95
E.1 Cas sans aucun ressort	95
E.2 Cas sans ressort de translation...	97
E.3 Toutes les raideurs du même ordre de grandeur	100
E.4 Exemple de cas délicat	101
E.5 Pseudo-périodicité à deux cellules	102
E.6 Pseudo-périodicité à trois cellules	108
F Résultats analytiques	113
F.1 Notations	113
F.2 Résultats	113
Bibliographie	127

Chapitre 1

Introduction

Ce chapitre introductif présente le travail de stage réalisé. La première section définit le sujet traité, tout d'abord en le replaçant dans le contexte plus général du flambement des structures réticulées, puis en décrivant le cas traité et le contexte pratique dans lequel est réalisé ce travail.

Dans une deuxième section, le contexte scientifique du sujet est donné, à la fois pour les aspects relevant du flambement et pour les aspects relevant des structures réticulées.

Ceci permet, dans une troisième partie, de préciser l'intérêt et l'originalité de l'approche du problème qui sera menée dans ce travail, en dérivant la démarche employée, pour terminer par une présentation du plan de ce rapport.

1.1 Présentation du problème

1.1.1 Les structures réticulées dans la construction

Une structure réticulée est un assemblage d'éléments (poutres, barres, tiges, rectilignes ou non ; plaques, planes ou non) reliés entre eux par des connexions de différentes natures. Les structures réticulées admettent généralement, pour des raisons de réalisation pratique, une périodicité spatiale, et présentent une grande variété d'aspects, d'échelles et d'emplois.

Dans le domaine du génie civil, des structures réticulées de grande échelle sont couramment employées, en particulier dans les ouvrages d'art depuis le XIX^e siècle : ponts en treillis métalliques, ponts en béton ou ponts mixtes béton-métal présentent des structures réticulées.

Les bâtiments utilisent également des poutres en treillis métallique. Le bois, le métal et le béton y sont employés comme éléments de structure ; un immeuble dans son ensemble peut être considéré, du point de vue structurel, comme une structure réticulée. On trouve également des structures réticulées métalliques, dans les fuselages d'avions ou les coques de bateaux.

À une échelle plus petite, de nombreux matériaux présentent une structure réticulée. Les matériaux alvéolaires, les résilles, les grillages, les mousses, les assemblages de matériaux en forme de sandwich, où deux plaques enserrant un matériau alvéolaire créant des ponts entre elles, ont une structure réticulée. Il faut noter qu'à cette échelle, les récents progrès de l'impression 3D rendent possible la fabrication de structures réticulées complexes de matériaux et d'emplois variés. Enfin, à l'échelle de la molécule, on observe et on recherche des structures réticulées pour les polymères, notamment en plasturgie.

Que ce soit à l'échelle de l'ouvrage d'art ou à celle du matériau alvéolaire, l'utilisation de ces structures répond souvent à une recherche d'économie de matière, dans un but de légèreté ou de réduction des coûts. Évidemment, cette économie de matière ne doit pas se faire au détriment des qualités de résistance nécessaires à l'emploi prévu de la structure. Et *a contrario*, un matériau architecturé, par exemple réticulé, peut avoir de meilleures propriétés que les matériaux naturels bruts.

1.1.2 Modes de flambement des structures réticulées

Les structures réticulées présentées ci-dessus peuvent, pour beaucoup d'entre elles, subir des sollicitations extérieures susceptibles de créer des instabilités.

Une poutre seule, ou un milieu massif en général, peut subir un flambement si l'effort normal est suffisant. Une structure réticulée, ayant de multiples cellules composées d'éléments qu'on peut assimiler à des poutres, présente donc des cinématiques de flambement potentiellement très variées. La figure 1.1 illustre pour une poutre-échelle : on peut envisager le flambement d'une seule cellule (flambement localisé), le flambement global de la structure hors du plan de la figure ou dans le plan de la figure, la répartition, sur toute l'échelle de la structure, du flambement des cellules (flambement interne distribué, qui peut se faire avec une périodicité

variable), ou encore un mode mixte dissymétrique, où l'un des montants subit un flambement global et l'autre un flambement distribué où l'on observe la modulation, à l'échelle macroscopique, du flambement de chaque poutre élémentaire. Sur cette illustration, les barreaux de l'échelle sont infiniment rigides ; s'ils ne l'étaient pas, la variété des modes de flambement serait encore enrichie.

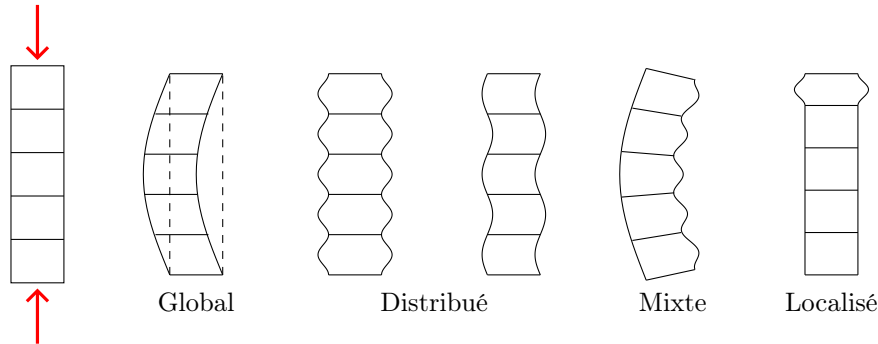


FIGURE 1.1 – Divers modes de flambement d'une poutre-échelle.

Pour les ouvrages de génie civil et du bâtiment, les instabilités sont maîtrisées du point de vue ingénierie, par l'utilisation de raidisseurs par exemple (l'Eurocode comporte des recommandations de dimensionnement au flambement des ouvrages). Le flambement est normalement évité et les déformations restent petites. Le dimensionnement de telles structures réticulées nécessite donc la connaissance des charges critiques au-delà desquelles le flambement survient.

À plus faible échelle, le chargement de matériaux réticulés employés comme éléments de structures peut engendrer des instabilités, sans garantie que les déformations restent petites. Il importe donc de bien connaître le comportement au flambement de telles structures si l'on veut employer ces matériaux.

1.1.3 Descriptif du sujet de ce travail de stage

L'objectif de ce travail est d'étudier le comportement au flambement d'une structure réticulée constituée d'une poutre continue reliée à un bâti fixe par des appuis périodiquement répartis, les liaisons étant modélisées par des ressorts. La figure 1.2 présente le détail de cette poutre entre deux appuis. Au niveau macroscopique, la poutre dans son ensemble est supposée appuyée à ses deux extrémités avec des conditions pouvant être variables. Elle est sollicitée au flambement, c'est-à-dire qu'un effort de compression est appliqué à ses extrémités.

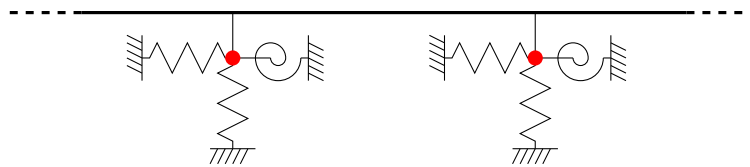


FIGURE 1.2 – Détail d'une poutre élémentaire sur appuis élastiques.

Une telle poutre sur appuis élastiques peut ainsi constituer une modélisation d'un des montants de la poutre-échelle présentée en figure 1.1 : l'action des barreaux de l'échelle sur le montant est ici représentée par les ressorts de différents types.

La périodicité d'une telle structure permet d'envisager son étude en utilisant les méthodes relevant de l'homogénéisation périodique des milieux discrets, qui tirent parti de la périodicité de la structure pour en extraire le comportement macroscopique. Une condition pour ce faire est qu'il y ait une grande séparation d'échelle entre la taille du volume élémentaire représentatif constitué par une section de poutre entre deux points d'appuis (consécutifs ou non), et la taille caractéristique de la grandeur liée au flambement évoluant macroscopiquement, que l'on observe dans les cas des flambements global ou distribué modulé, comme vu ci-dessus avec la poutre-échelle.

Étudier une telle structure vis-à-vis du flambement, cela signifie prédire au-delà de quelle charge de compression l'instabilité de flambement est sollicitée, et avec quelle cinématique. La méthode employée devra fournir ces éléments de réponse. Elle devra également permettre l'étude systématique de la variabilité des résultats vis-à-vis :

- du type de périodicité ou pseudo-périodicité envisagé (sur une, deux, trois cellules ou plus) ;
- des ordres grandeurs relatifs des différentes raideurs intervenant dans le problème : raideurs des ressorts et raideur de flexion de la poutre.

Une validation des résultats obtenus est attendue, si besoin à l'aide de résolutions numériques.

1.1.4 Contexte pratique et objectifs ultérieurs

Ce travail est réalisé au cours d'un stage de vingt semaines dans le double cadre du travail de fin d'études du cycle d'ingénieur de l'ENTPE et du master MEAGC (Méthodes et expérimentations avancées en génie civil).

Si le sujet de ce stage se veut autonome pour conclure un cycle d'études, il constitue néanmoins également une entrée en matière pour la thèse de doctorat intitulée *Mécanismes de flambement dans les structures réticulées* qui sera réalisée dans les mêmes conditions : par Stanislas Antczak, sous la direction de Claude Boutin et Antoine Rallu, au LTDS à l'ENTPE.

Les recherches effectuées dans le cadre de ce stage ont donc pour vocation d'être étendues et généralisées à des situations plus complexes de structures réticulées : tout d'abord au cas de la poutre-échelle précédemment mentionnée, puis à des structures de géométries variées, ayant plus d'une dimension.

Il s'agit donc, sur le cas d'école traité ici, d'évaluer ce que peut ou ne peut pas réaliser la méthode employée, de manière à pouvoir orienter les recherches ultérieures, notamment en circonscrivant les domaines de rigidités où la méthode peut fournir des résultats.

1.2 Contexte scientifique de l'étude

1.2.1 Flambement d'une poutre

Le problème de flambement d'une poutre élastique de longueur constante, encadrée à une extrémité et soumise à une charge de compression de direction fixe à l'autre, connu sous le nom latin d'*elastica*, a été posé en 1691 par Jacques Bernoulli. Si plusieurs savants y ont contribué, dont son frère Jean Bernoulli et son neveu Daniel, c'est Leonhard Euler qui publie en 1744 le travail de synthèse qu'on retient habituellement comme donnant l'expression de la formule de charge critique qui porte son nom. (Pour une revue historique du problème de l'*elastica*, on peut consulter par exemple le chapitre 5 de [1].)

Il est remarquable que ce problème intervienne à cette époque de l'histoire des sciences, utilisant le calcul différentiel ou la théorie de l'élasticité très récents, et qu'il occasionne le développement, par Euler notamment, des méthodes variationnelles et des fonctions elliptiques qui sont utilisées aujourd'hui (le problème n'était en effet pas posé en petites déformations).

Depuis cette époque pionnière, de nombreux travaux sont venus raffiner la connaissance du problème : étude des différentes conditions aux limites, de l'effet des variations de section, de l'effet des imperfections géométriques, des comportements thermiques, prise en compte de l'effort tranchant, utilisation de méthodes énergétiques pour donner des approximations des charges critiques, prise en compte du comportement plastique du matériau (et non plus seulement élastique)... On trouvera dans les manuels de Timoshenko [2] et Jones [3] un traitement complet de la question du flambement des barres, ainsi que du flambement des plaques et des coques.

Une revue des différents apports récents au problème de flambement des poutres est réalisée par [4], distinguant les situations où les extrémités de la poutre sont axialement mobiles de celles où elles sont fixes (ce qui correspond à des cas de précontrainte ou de flambement thermique), prenant en compte ou non l'extensibilité longitudinale de la poutre ou les efforts tranchants. Cet article cite également des développements applicatifs récents utilisant des poutres flambées, pour les microsystèmes électromécaniques ou l'isolation de structures vis-à-vis des vibrations par exemple.

1.2.2 Flambement des structures réticulées

De nombreuses études expérimentales traitent de la stabilité des structures réticulées, motivées pour certaines par la recherche d'optimisation de structures de génie civil, par exemple pour éviter leur rupture fragile par flambements en cascade de poutres élémentaires. C'est le cas des expériences de [5], où est décrit le renforcement de structures par ajout de raidisseurs de manière à éviter le flambement d'un treillis métallique supportant une dalle. Autre exemple : l'étude expérimentale du flambement d'un treillis par [6] a pour objectif de vérifier les règles de l'Eurocode 3 sur le flambement des treillis.

Hors du génie civil, les récents développements des matériaux composites ont motivé de nombreuses études expérimentales. Des calculs aux éléments finis sont souvent menés en parallèle des études expérimentales, comme c'est le cas par exemple pour [7] qui étudie l'écrasement d'un élément de treillis pyramidal. Les éléments finis sont largement utilisés dans les études de stabilité des structures réticulées, pour la détermination des charges critiques et des cinématiques post-flambement. Les études sont nombreuses et le domaine est vivace [8, 9].

Les études analytiques existent aussi, quoique moins nombreuses. Citons [10], qui utilise l'homogénéisation périodique pour le flambement d'un treillis, [11] où l'étude d'un matériau composite en sandwich est menée expérimentalement, numériquement et analytiquement en utilisant le formalisme des ondes de Bloch, ou [12] et [13], qui font la résolution analytique du problème discret, le premier pour une poutre-treillis et le deuxième pour des grillages.

1.2.3 Le cas d'école traité ici

Le problème de flambement traité ici est celui d'une poutre continue, liée périodiquement à un bâti fixe par des liaisons élastiques, censées modéliser la liaison entre cette poutre et d'autres éléments d'une structure composite périodique.

Il s'agit d'un problème ancien, comme en témoigne pour l'anecdote l'article [14], daté de 1952, qui fait la résolution analytique d'un problème de ce type, auparavant posé dans un ouvrage de 1912 écrit par Ivan Bubnov, ingénieur de la marine impériale russe, traitant de la structure des coques de bateau et de sous-marins.

Le cas de la poutre continue sur supports élastiques périodiques est traité analytiquement, par exemple par Timoshenko ([2], p. 23) qui considère uniquement des ressorts de translation transversale, ou Géry ([15], p. 75), aussi avec seulement des ressorts de translation, qui applique la méthode des matrices-transfert. On trouvera en annexe B.1 une résolution analytique du problème similaire à celles-là.

L'article [16], dont l'objectif est de prévoir le flambement de structures réticulées en coques (dômes, voûtes...) traite analytiquement un problème similaire moyennant certaines approximations.

À notre connaissance, ce cas d'école n'est pas traité par la méthode d'homogénéisation employée dans le présent travail.

1.2.4 Méthodes d'homogénéisation des structures réticulées en dynamique

Une méthode d'homogénéisation a pour objectif la description d'un milieu hétérogène de manière à le traiter comme un milieu continu homogène. Elle suppose l'existence d'un volume élémentaire représentatif (VER), donc d'une certaine invariance spatiale, au moins statistique, du matériau étudié, et une séparation d'échelle entre la taille du VER et la taille caractéristique du phénomène étudié.

Il existe deux grandes familles de méthodes d'homogénéisation : celles basées sur le principe de Hill d'équivalence énergétique et celles faisant appel à la périodicité des structures étudiées. La méthode d'équivalence énergétique peut être appliquée aux structures réticulées [17].

Nous utiliserons ici l'homogénéisation périodique des milieux discrets [10]. Cette méthode a été largement utilisée en dynamique, en particulier dans l'équipe encadrante de ce stage de Master : voir [18, 19] par exemple. La figure 1.3, issue de [18], présente les déformées de quelques modes de vibration d'une poutre-échelle aux extrémités encastées. Aux faibles fréquences, les modes sont globaux, sans vibration interne d'une cellule élémentaire ; à fréquences plus élevées on observe des modes où une cellule élémentaire est déformée, avec modulation globale. On verra de nombreuses correspondances entre ces résultats de dynamique et les résultats obtenus pour le flambement.

1.3 Démarche du travail effectué

1.3.1 Approche du problème

L'approche originale de ce travail consiste à transposer la méthode d'homogénéisation périodique des milieux discrets, utilisée en dynamique, au problème du flambement de la poutre sur appuis élastiques. Cela permet de tirer profit des analogies entre les deux situations, et de réemployer des méthodes connues, comme par exemple la prise en compte de plusieurs cellules dans le volume élémentaire représentatif.

Cependant, le flambement étant un phénomène à seuil, par essence non-linéaire, l'analogie avec les études dynamiques est limitée. En revanche, ce caractère non-linéaire n'empêche pas de préserver des hypothèses classiques effectuées dans le cadre de la linéarité, comme l'utilisation des lois de comportement de l'élasticité linéaire. Leur utilisation dans des équations d'équilibre écrites sur la configuration déformée de la poutre suffit pour obtenir un problème aux valeurs propres, dont les solutions en valeurs propres donnent les charges de flambement et dont les vecteurs propres associés fournissent les modes de flambement, c'est-à-dire l'allure de la déformée de la poutre juste après flambement, avec une amplitude arbitraire. Pour obtenir la déformée réelle une fois le flambement effectif pour une charge dépassant la charge critique, une résolution tenant compte de grandes transformations est nécessaire et ne sera pas faite ici.

L'approche consiste alors à écrire les équilibres locaux sur une configuration déformée des éléments du dispositif étudié, ce qui permet de tenir compte du couplage entre effort normal et déplacements transversaux. Les champs cinématiques sont développés asymptotiquement sous condition de grande séparation d'échelle entre la taille du volume élémentaire représentatif (en l'occurrence, une ou plusieurs poutres élémentaires) et la dimension caractéristique de variation d'amplitude de modulation du mode de flambement (commensurable à la taille de la poutre macroscopique).

L'écriture des équations d'équilibre à chaque ordre du développement fournit, ou non, une solution non identiquement nulle pour les variables cinématiques. Si le processus ne donne aucune solution non identiquement nulle, on en conclut que le flambement ne peut pas survenir avec les paramètres utilisés. Si le processus fournit une ou plusieurs solutions non identiquement nulles, on a trouvé un ou plusieurs modes de flambement de la

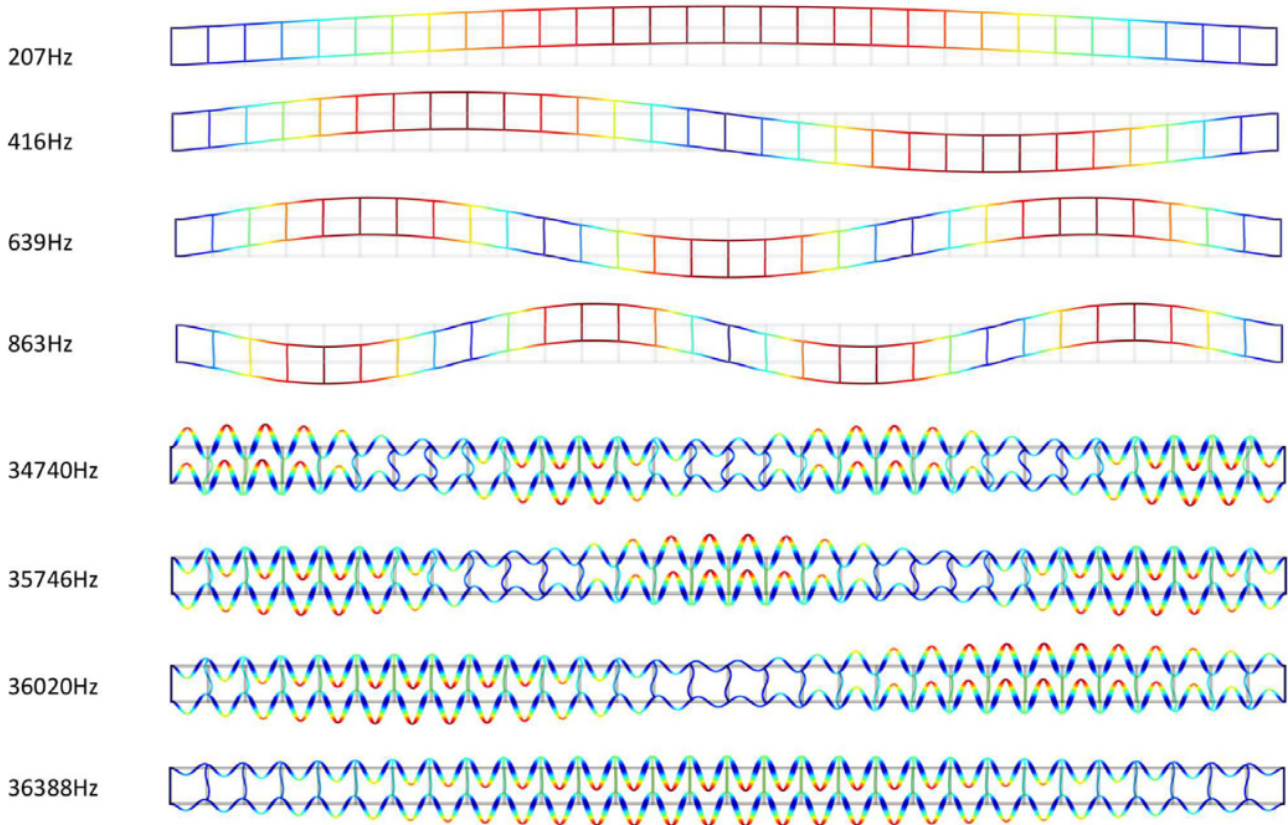


FIGURE 1.3 – Quelques déformées modales des modes globaux d’une poutre-échelle aux extrémités encastées, figure extraite de [18].

structure avec les paramètres utilisés. Ces modes sont décrits par une charge critique de flambement et une déformée modale.

Il s’agit alors de déterminer, parmi tous les modes fournis par le calcul homogénéisé pour un jeu donné de paramètres, lequel a la charge critique de flambement la plus faible. Pour savoir si le calcul homogénéisé fournit ainsi bel et bien le mode de flambement le plus probable de la structure, ou si au contraire il a manqué des modes de flambement, on utilisera des solutions de référence, en l’occurrence données par un calcul aux éléments finis mis au point pour l’occasion.

Comme dit plus haut, une fois la méthode d’homogénéisation périodique mise au point, une revue systématique du comportement au flambement du système étudié pour différents contrastes de paramètres (raideurs, en l’occurrence) sera menée, de manière à circonscrire différents régimes possibles.

Les calculs sont effectués à la fois à la main et à l’aide du logiciel de calcul formel Mathematica. Les calculs à la main servent dans un premier temps pour mettre au point la méthode et programmer les routines. Dans un deuxième temps, l’utilisation presque exclusive de Mathematica permet de gagner beaucoup de temps par une semi-automatisation du processus.

1.3.2 Plan de ce rapport

Ce rapport est divisé en deux parties : le corps proprement dit et les annexes. On a choisi de présenter en annexes le plus possible d’éléments pour centrer le corps du rapport sur l’essentiel de la démarche. Cependant, chaque annexe est associée à un ou plusieurs chapitres du corps du rapport.

Le chapitre 2, intitulé *Généralités*, fait la présentation du problème, détaille les hypothèses et en écrit les équations ; l’aboutissement de ce chapitre est l’équation matricielle d’équilibre d’un nœud du système. Cette équation d’équilibre sera la base des solutions de référence développées en annexe B.

Dans le chapitre 3, la méthode d’homogénéisation périodique utilisée ici est présentée dans ses grandes lignes, puis son application au problème utilisé (en l’occurrence, à l’équation d’équilibre mentionnée ci-dessus) est détaillée : passage au continu, développement asymptotique et exploitation. Les équations obtenues pour différents ordres sont données pour la pseudo-périodicité à une et deux poutres élémentaires ; la mise en place du problème est faite pour la pseudo-périodicité à trois ou quatre cellules. Le détail de résolution sur quelques exemples est présenté, lui, en annexe E.

Les résultats obtenus sont présentés de manière synthétique dans le chapitre 4. Vu la grande quantité de résultats obtenus, il n'est pas aisé d'en produire une synthèse qui soit lisible dans le format d'un rapport. C'est ce qui est tenté, partiellement, dans ce chapitre, dans un premier temps. Dans un deuxième temps, un focus est fait sur certaines observations consécutives aux résultats.

En cela, le chapitre de discussions 5 est intimement lié au chapitre de résultats. Il s'agit d'un détail porté sur deux questions importantes soulevées par les résultats : la question de l'utilisation des conditions aux limites et la question de la sélection du mode de flambement critique.

Enfin, la conclusion (chapitre 6) fait le bilan des résultats obtenus, à l'actif et au passif, et identifie des pistes d'approfondissement.

L'annexe A montre l'étude des fonctions f_i apparaissant tout au long de la résolution.

L'annexe B présente les solutions de référence utilisées. Tout d'abord, la solution analytique exacte consistant à inverser le système d'équations ; cette méthode analytique implique des calculs assez lourds vu les expressions manipulées, et ne sera utilisée que pour valider la deuxième méthode de résolution de référence : celle des éléments finis. Un programme spécifique a été créé dans le cadre de ce stage. Après l'avoir validé sur une structure à faible nombre de cellules, il a été utilisé pour évaluer les résultats obtenus par homogénéisation. Une résolution exacte du problème à deux poutres est également menée. Des commentaires physiques sont faits sur les résultats obtenus, présentés dans l'annexe C, qui montre une exploration systématique des déformées obtenues par le calcul aux éléments finis.

En annexe D, on étudie analytiquement les cas où la périodicité est exacte, qu'il est bon d'avoir en tête pour examiner les résultats obtenus par homogénéisation. Le travail est fait pour la périodicité à une cellule, pour la périodicité à deux cellules (qui fait émerger les deux modes antipériodiques possibles), et ébauché pour la périodicité à un nombre quelconque de cellules. Enfin, le problème périodique est repris en utilisant le formalisme de Bloch.

L'annexe E détaille la mise en œuvre du procédé d'homogénéisation périodique pour plusieurs cas, dans le but de faire apparaître les points principaux de la méthode, ses principales difficultés aussi.

Enfin, dans l'annexe F, le compte-rendu systématique des résultats obtenus par la méthode d'homogénéisation périodique est fait, pour les pseudo-périodicités à une ou à deux cellules.

Remerciements

Je remercie Antoine Rallu et Claude Boutin, qui m'ont accueilli en stage avant de m'accueillir en thèse. Tous deux m'ont fait profiter de leurs conseils et de leurs apports au cours de ce stage.

Je remercie également Bruno Lombard non seulement d'avoir accepté de faire partie du jury de soutenance de ce stage, en venant sur place, mais aussi d'avoir organisé les cours d'Udine auxquels j'ai assisté et qui m'ont inspiré certaines réflexions utiles à ce stage.

Merci aussi à Denis Branque de présider le jury de soutenance.

La vie de laboratoire est faite d'interactions humaines ; à la fois les chercheurs permanents, le personnel administratif et les camarades doctorants et stagiaires m'ont réservé un excellent accueil : qu'ils en soient ici remerciés.

Chapitre 2

Généralités

Ce chapitre présente le problème étudié et sa mise en équation.

Une première section détaille les hypothèses effectuées et définit une partie du paramétrage employé, le reste étant défini au fur et à mesure des besoins.

Les deux sections suivantes réalisent la mise en équation du problème compte tenu des hypothèses, d'abord par l'écriture des équations d'équilibre et de comportement pour une poutre élémentaire, puis par la déduction des équations des déformées d'une poutre élémentaire, et enfin par l'écriture des équilibres des nœuds, fournissant une équation matricielle d'équilibre qui sera utilisée dans les différentes méthodes de résolution.

Dans la section suivante sont écrits les différents termes énergétiques correspondant à l'approche statique.

La dernière section présente les différentes manières de décrire la charge critique de flambement, issues des différentes approches.

2.1 Position du problème

2.1.1 Système étudié et objectif de l'étude

Le système étudié est une poutre retenue par deux appuis à ses extrémités et soumise à un effort normal de compression exercé à ses points d'appuis. Cette poutre est reliée périodiquement à un bâti fixe par l'intermédiaire de liaisons élastiques. Les figures 2.1 et 2.2 décrivent ce dispositif.

L'objectif de l'étude est l'utilisation d'une méthode d'homogénéisation périodique des milieux discrets, de manière à prévoir, pour le système étudié, son comportement au flambement, c'est-à-dire :

- la valeur de la charge critique de flambement ;
- la cinématique suivie si cette charge critique est atteinte.

2.1.2 Hypothèses

2.1.2.1 Hypothèses géométriques

La poutre considérée est supposée :

- de fibre moyenne rectiligne en l'absence de flambement ;
- de section et inertie uniformes.

Le problème est supposé plan, dans le plan où l'inertie de la poutre est la plus faible. Aucun mouvement hors de ce plan n'est envisagé, ni la torsion de la poutre. Ainsi, seuls trois degrés de liberté sont considérés pour un point quelconque de la fibre moyenne :

- déplacement longitudinal ;
- déplacement transversal ;
- rotation dans le plan.

La poutre est supposée obéir à l'hypothèse d'Euler-Bernoulli : les sections initialement planes et orthogonales à la fibre moyenne restent, dans toute configuration déformée, planes et orthogonales à la fibre moyenne.

Les déformations envisagées seront supposées petites, ce qui autorise à linéariser bien des expressions.

2.1.2.2 Hypothèses mécaniques

Le cadre de l'étude est celui de l'élasticité linéaire, que ce soit pour la poutre ou pour les liaisons qui la retiennent périodiquement.

Pour la poutre, on utilise la loi de Hooke pour la compression et la relation moment-courbure linéaire du cadre de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli.

Les liaisons élastiques aux nœuds sont modélisées par des ressorts idéaux, avec pour chaque nœud :

- un ressort de translation longitudinale ;
- un ressort de translation transversale ;
- un ressort spiral de rotation.

Hormis les forces élastiques aux nœuds, la poutre subit les efforts aux appuis, en particulier l'effort normal de compression, compté positif dans le sens de la compression.

Aucune autre force extérieure n'est prise en compte, en particulier pas le poids propre de la poutre.

Les efforts intérieurs sont modélisés par des forces s'appliquant aux points de la fibre moyenne : l'effort normal parallèle à la fibre moyenne en configuration non déformée, l'effort tranchant dans le plan, perpendiculaire à l'effort normal, le moment fléchissant orthogonal au plan.

2.1.2.3 Conditions aux limites

La poutre étudiée est de fait subdivisée en tronçons dans l'intervalle entre deux nœuds consécutifs où agissent les liaisons élastiques. Ces tronçons seront nommés *poutres élémentaires* ou *cellules*, dont l'ensemble constitue la *poutre macroscopique*. Mais il s'agit bien d'une seule poutre, le passage d'une poutre élémentaire à sa voisine se faisant mathématiquement à l'aide d'équations d'équilibre aux nœuds.

Les extrémités de la poutre macroscopique, là où est imposé l'effort normal de compression susceptible d'engendrer le flambement, sont supposées être en appui rotulé avec un bâti : le déplacement transversal de la poutre est nul vis-à-vis du bâti, le moment imposé par la liaison est nul, le déplacement longitudinal des extrémités, s'il existe, est celui du bâti. Aucun ressort n'agit à ces nœuds extrêmes.

Ce choix de conditions aux limites est arbitraire et n'est fait que pour fixer les idées. D'autres conditions pourraient être envisagées (encastrement par exemple). La question des conditions aux limites est d'ailleurs importante dans la technique d'homogénéisation employée, et sera discutée par la suite.

2.1.3 Paramétrage

2.1.3.1 Géométrie macroscopique

La figure 2.1 montre les paramètres relatifs à la poutre macroscopique :

- sa longueur entre appuis H ;
- l'aire S de sa section et son inertie I ;
- la distance ℓ entre deux nœuds successifs où sont fixées les liaisons élastiques, figurés en rouge.

La position sur la poutre est repérée par une abscisse dont l'axe coïncide avec la fibre moyenne au repos. Comme il est nécessaire de distinguer entre échelle macroscopique et microscopique pour la suite de l'étude, on note cette abscisse s lorsqu'elle concerne l'échelle microscopique, x lorsqu'elle concerne l'échelle macroscopique. Des définitions plus précises seront données en temps utile.

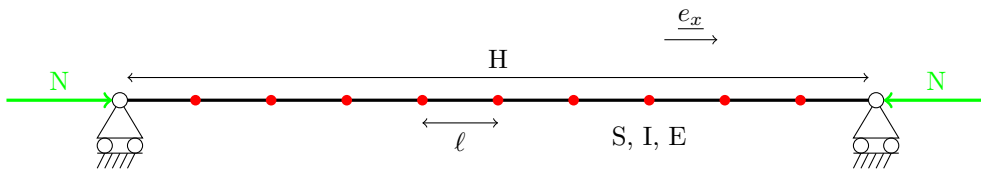


FIGURE 2.1 – Poutre macroscopique.

2.1.3.2 Paramètres mécaniques

Le module d'Young du matériau constituant la poutre est noté E .

Sur la figure 2.2 sont représentées les liaisons élastiques, partant d'un nœud, en rouge, représenté déporté pour les besoins du schéma mais à imaginer à hauteur de la fibre moyenne de la poutre. On note k la raideur des ressorts longitudinaux, \mathcal{K} celle des ressorts transversaux, \mathcal{C} celle des ressorts spiraux.

La figure 2.2 n'est qu'indicative de la modélisation utilisée et ne pourrait pas représenter en l'état un dispositif expérimental ; il ne faut pas en déduire que le ressort spiral empêche les déplacements longitudinaux ou transversaux, par exemple.

2.1.3.3 Efforts internes et déplacements

Soit une section droite coupant la fibre moyenne au repos en A . Dans une configuration déformée, le point A devient A' . La figure 2.3 montre les conventions pour :

- l'écriture des déplacements suffisant à décrire la configuration déformée : le déplacement longitudinal u , le déplacement transversal v et l'inclinaison de la fibre moyenne θ ;

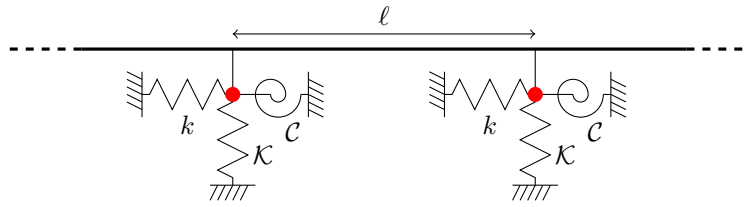


FIGURE 2.2 – Poutre élémentaire retenue.

- les efforts exercés sur la partie de la poutre située en deçà de A (pour des valeurs de s inférieures à l'abscisse de A) sur la partie située au-delà de A : l'effort normal \underline{N} , l'effort tranchant \underline{T} et le moment fléchissant \underline{M} .

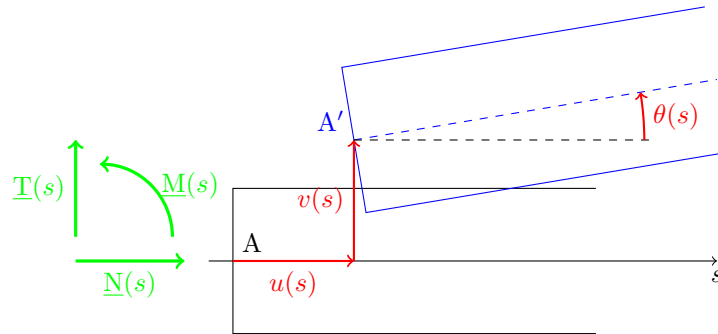


FIGURE 2.3 – Déplacements et efforts en tout point.

2.2 Étude d'une poutre élémentaire soumise au flambement

On considère dans cette section une poutre élémentaire, c'est-à-dire une portion de poutre comprise entre deux nœuds successifs. L'objectif est ici d'établir les expressions de ses déformées, ainsi que des efforts aux extrémités, en fonction des déplacements aux extrémités.

2.2.1 Système élémentaire infinitésimal

Soit une portion infinitésimale de poutre, correspondant au segment $[AB]$ de fibre moyenne au repos, devenant $[A'B']$ en configuration déformée. La figure 2.4 indique ce que devient ce système en configuration déformée.

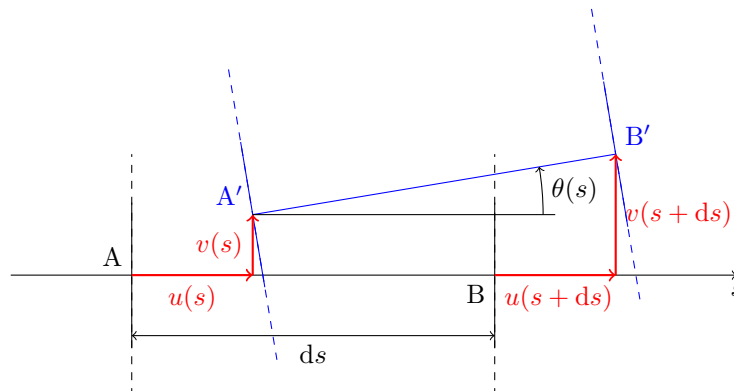


FIGURE 2.4 – Système élémentaire infinitésimal : déplacements en configuration déformée.

2.2.2 Angle selon l'hypothèse d'Euler-Bernoulli

La figure 2.4 est conforme à l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, selon laquelle l'angle $\theta(s)$ est l'angle entre la fibre moyenne dans la configuration déformée et la fibre moyenne dans la configuration de référence. Ce schéma

montre qu'on peut écrire

$$\tan \theta(s) = \frac{v(s+ds) - v(s)}{ds + u(s+ds) - u(s)} \quad \text{soit} \quad \tan \theta = \frac{dv}{ds} \frac{1}{1 + \frac{du}{ds}} \quad (2.1)$$

En petites déformations, on suppose $\left| \frac{du}{ds} \right| \ll 1$ et $\tan \theta = \theta + o(\theta^2)$, ce qui donne la relation

$$\theta = \frac{dv}{ds} \quad (2.2)$$

2.2.3 Équations d'équilibre

On écrit les équations d'équilibre dans la configuration déformée ; les efforts subis par le système infinitésimal étudié sont représentés sur la figure 2.5.

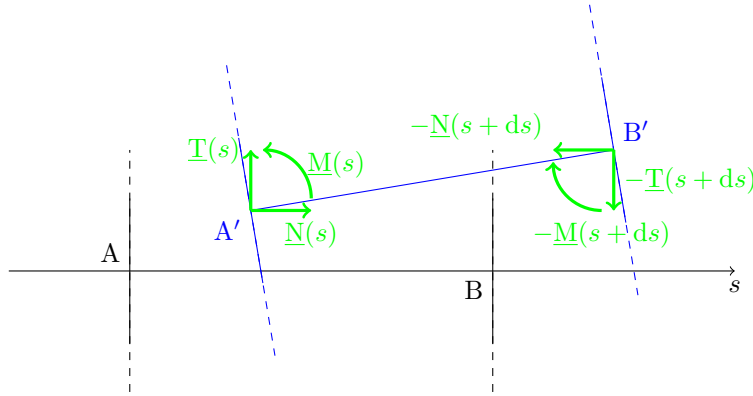


FIGURE 2.5 – Système élémentaire infinitésimal : efforts.

2.2.3.1 Équation d'équilibre longitudinal

Sur l'axe longitudinal le système subit à droite $-N(s+ds)$, à gauche $N(s)$, et c'est tout, donc au total l'équilibre longitudinal s'écrit

$$-N(s+ds) + N(s) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{dN}{ds} = 0 \quad (2.3)$$

2.2.3.2 Équation d'équilibre transversal

De même, transversalement, le système subit à droite $-T(s+ds)$, à gauche $T(s)$, et c'est tout, donc au total l'équilibre transversal s'écrit

$$-T(s+ds) + T(s) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{dT}{ds} = 0 \quad (2.4)$$

2.2.3.3 Équation d'équilibre en rotation

Écrivons par exemple l'équilibre en rotation en exprimant les moments en A' . Le système subit à droite les moments suivants :

- le moment fléchissant exercé par la partie de poutre située au-delà de B, de valeur $-M(s+ds)$;
- le moment de l'effort tranchant exercé par la poutre située au-delà de B, de valeur $-T(s+ds) ds$ puisque le bras de levier est ds ;
- le moment de l'effort normal exercé par la poutre située au-delà de B, $N(s+ds)(v(s+ds) - v(s))$ puisque les résultantes sont supposées s'appliquer aux points de la fibre moyenne, donc le bras de levier est $v(s+ds) - v(s)$ (rappelons ici que l'équilibre est écrit en configuration déformée).

Et à gauche, le système subit uniquement le moment exercé par la partie de la poutre située en deçà de A, de valeur $M(s)$. Au total l'équilibre en rotation s'écrit

$$-M(s+ds) + M(s) + N(s+ds)(v(s+ds) - v(s)) - T(s+ds) ds = 0 \quad (2.5)$$

Ceci donne après simplification

$$\frac{dM}{ds} + T = N \frac{dv}{ds} \quad (2.6)$$

2.2.4 Lois de comportement

2.2.4.1 Compression

Le segment $[AB]$ de fibre moyenne (voir toujours la figure 2.4), de longueur ds dans la configuration de référence, prend, dans la configuration déformée, la longueur

$$A'B' = \frac{ds + u(s+ds) - u(s)}{\cos \theta(s)} \quad (2.7)$$

À l'ordre 1 en θ cela donne une élongation relative de cette fibre

$$\frac{u(s+ds) - u(s)}{ds} = \frac{du}{ds} \quad (2.8)$$

Comme N est positive dans le sens de la compression alors que la loi de Hooke exprime des forces d'étirement, l'intégration sur toute la section donne la loi de comportement suivante :

$$N = -ES \frac{du}{ds} \quad (2.9)$$

2.2.4.2 Relation moment-courbure

Considérons une tranche de poutre de longueur ds . Soit une fibre située à distance y de la fibre moyenne, de section infinitésimale dS . Sous l'effet d'une flexion, la fibre passe de la longueur ds à la longueur ds' . La force df allongeant cette fibre a pour mesure, d'après la loi de Hooke,

$$df = dS E \frac{ds' - ds}{ds} \quad (2.10)$$

D'après la figure 2.6 montrant la tranche de poutre fléchie, la longueur de fibre moyenne est liée au rayon de courbure r par $ds = r d\theta$ alors que la longueur de la fibre excentrée est $ds' = (r + y) d\theta$.

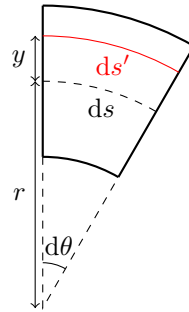


FIGURE 2.6 – Courbure d'une tranche de poutre.

On en déduit ainsi

$$\frac{ds' - ds}{ds} = y \frac{d\theta}{ds} \quad \text{puis} \quad df = dS E y \frac{d\theta}{ds} \quad (2.11)$$

Le moment élémentaire de cette force est donc

$$df y = dS E y^2 \frac{d\theta}{ds} \quad (2.12)$$

Vu la définition de M donnée plus haut, cela donne, pour l'ensemble de la section, un couple

$$M = - \int_S df y = - \int_S dS E y^2 \frac{d\theta}{ds} = -E \frac{d\theta}{ds} \int_S y^2 dS \quad (2.13)$$

Comme on a $\theta = \frac{dv}{ds}$ d'une part, et en posant $I = \int_S y^2 dS$ d'autre part, on obtient la relation moment-courbure :

$$M = -EI \frac{d^2v}{ds^2} \quad (2.14)$$

2.2.5 Équation de déformation longitudinale

D'après ce qui précède, on a d'une part $\frac{dN}{ds} = 0$, qui donne N uniforme. D'autre part $N = -ES \frac{du}{ds}$, donc on obtient directement

$$\frac{d^2u}{ds^2} = 0 \quad (2.15)$$

2.2.6 Équation de déformation transversale

En remplaçant M par $-EI \frac{d^2v}{ds^2}$ dans l'équation d'équilibre en rotation, on obtient

$$-EI \frac{d^3v}{ds^3} + T = N \frac{dv}{ds} \quad (2.16)$$

En dérivant ceci, compte tenu du fait que $\frac{dT}{ds} = 0$, cela donne

$$\frac{d^4v}{ds^4} + \frac{N}{EI} \frac{d^2v}{ds^2} = 0 \quad (2.17)$$

Cette équation peut être rapprochée d'autres équations classiques :

— l'équation de la déformation transversale d'une poutre non comprimée soumise à une force transversale linéique q :

$$\frac{d^4v}{ds^4} = \frac{q}{EI} \quad (2.18)$$

— l'équation de la déformation dynamique d'une poutre non comprimée (de masse volumique ρ) :

$$\frac{\partial^4v}{\partial s^4} + \frac{\rho S}{EI} \frac{\partial^2v}{\partial t^2} = 0 \quad (2.19)$$

qui devient en régime harmonique de pulsation ω :

$$\frac{\partial^4v}{\partial s^4} - \frac{\rho S}{EI} \omega^2 v = 0 \quad (2.20)$$

Dans chaque cas on retrouve la dérivée quatrième spatiale du déplacement transversal. Mais les différences entre ces équations montrent la spécificité du flambement relativement aux études dynamiques notamment, et les précautions qu'il faut prendre en effectuant d'éventuelles analogies, concernant la modulation par exemple.

2.2.7 Résolution : déformée longitudinale et effort normal

On considère une poutre élémentaire comprise entre $s = 0$ et $s = \ell$. On notera $u^B = u(0)$ et $u^E = u(\ell)$ les déplacements longitudinaux aux extrémités (B pour *beginning* et E pour *end*). Compte tenu de ce qui précède, l'intégration sur une poutre élémentaire de l'équation de la déformée longitudinale donne simplement une fonction affine :

$$u(s) = \frac{u^E - u^B}{\ell} s + u^B \quad (2.21)$$

L'effort normal, uniforme sur la poutre élémentaire, s'obtient par $N = -ES \frac{du}{ds}$, soit

$$N = -ES \frac{u^E - u^B}{\ell} \quad (2.22)$$

2.2.8 Résolution : déformée transversale

L'équation 2.17, elle, peut se réécrire

$$\frac{d^4v}{ds^4} + \left(\frac{2\gamma}{\ell}\right)^2 \frac{d^2v}{ds^2} = 0 \quad (2.23)$$

où l'on a posé

$$\gamma = \frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad \text{ou encore} \quad N = \frac{4EI\gamma^2}{\ell^2} \quad (2.24)$$

La solution générale de cette équation du déplacement transversal s'écrit

$$v(s) = c_1 \cos\left(\frac{2\gamma s}{\ell}\right) + c_2 \sin\left(\frac{2\gamma s}{\ell}\right) + c_3 \frac{s}{\ell} + c_4 \quad (2.25)$$

où les fonctions f_i sont ainsi définies (de manière à avoir $f_i(0) = 1$) :

$$\begin{cases} f_1(\gamma) = \frac{\gamma^3}{3(\tan \gamma - \gamma)} \\ f_2(\gamma) = \frac{\gamma^2 \tan \gamma}{3(\tan \gamma - \gamma)} \\ f_3(\gamma) = \frac{\gamma}{4(\tan \gamma - \gamma)} \left(1 - \frac{2\gamma}{\tan 2\gamma}\right) \\ f_4(\gamma) = \frac{\gamma}{2(\tan \gamma - \gamma)} \left(\frac{2\gamma}{\sin 2\gamma} - 1\right) \end{cases} \quad (2.26)$$

La figure 2.7 donne le graphe de ces fonctions en fonction de $\frac{\gamma}{\pi}$.

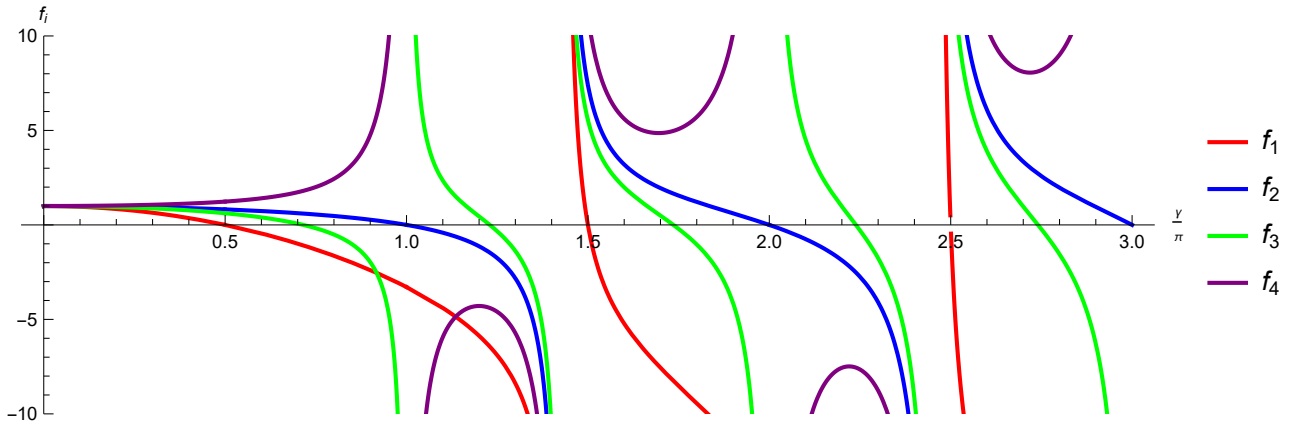


FIGURE 2.7 – Fonctions f_i en fonction de $\frac{\gamma}{\pi}$.

2.2.9 Valeurs remarquables de γ

2.2.9.1 $\gamma = 0$

La valeur $\gamma = 0$, compte tenu des expressions des paramètres apparaissant dans l'équation de la déformée d'une poutre élémentaire, n'est possible que si $v^B - v^E = 0$ et $\theta^B = \theta^E = 0$: cela correspond à une poutre non déformée.

On infère ainsi que les valeurs faibles de γ correspondent à une poutre déformée avec les déplacements transversaux aux extrémités des poutres élémentaires, v^B et v^E , variant peu entre deux poutres successives, et les angles aux extrémités θ^B et θ^E faibles. Si l'on transfère ceci à la poutre macroscopique comprenant une succession de poutres élémentaires, ceci décrit le flambement global de la poutre macroscopique.

2.2.9.2 $\gamma = \frac{\pi}{2}$

La valeur $\gamma = \frac{\pi}{2}$ (pour laquelle f_1 est nulle) correspond à $N = \frac{EI\pi^2}{\ell^2}$, charge critique connue d'une poutre bi-rotulée de longueur ℓ (les poutres élémentaires ici). Dans le système macroscopique, on s'attend donc à retrouver cette valeur de γ pour des déformées où deux nœuds successifs ont presque le même déplacement transversal v , mais des angles presque opposés (c'est ce que l'on nommera le mode *antipériodique en angle*). Si l'on écrit les expressions des déformées en déplacement et angle, on peut obtenir avec $\gamma = \frac{\pi}{2}$ les moments d'extrémité :

$$M^B = EI \frac{\pi^2}{4\ell^2} (2(v^B - v^E) + \ell\theta^B + \ell\theta^E) \quad \text{et} \quad M^E = -M^B \quad (2.27)$$

On le voit, si l'on impose $v^B = v^E$, on a bien $M^B = M^E = 0$ à condition que $\theta^B = -\theta^E$, ce qui traduit l'antipériodicité en angle.

Cependant, c'est aussi la charge critique d'une poutre de longueur ℓ avec déplacements libres mais rotations empêchées aux extrémités : c'est ce que l'on retrouvera dans la poutre macroscopique pour le mode dit *antipériodique en déplacement*.

2.2.9.3 $\gamma = \pi$

La valeur $\gamma = \pi$ correspond à $N = \frac{4EI\pi^2}{\ell^2}$, charge critique d'une poutre bi-encastée de longueur ℓ . En $\gamma = \pi$, f_2 est nulle et f_3 et f_4 sont infinies. Ceci est possible si $\theta^B = 0$ et $\theta^E = 0$. L'équation de la déformée transversale se résume alors à

$$\begin{cases} v(s) = (v^B - v^E) \left(\frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi s}{\ell} - \frac{s}{\ell} \right) + v^B \\ \ell \theta(s) = (v^B - v^E) \left(\cos \frac{2\pi s}{\ell} - 1 \right) \end{cases} \quad (2.28)$$

On remarque aussi que si $\theta^B = \theta^E$, la simplification de $f_3(\gamma) + \frac{1}{2}f_4(\gamma)$ en $\frac{3}{2}f_2(\gamma)$ élimine la divergence et autorise une cinématique non nulle avec angles non nuls aux extrémités. On retrouvera ces modes à angle constant dans le calcul par homogénéisation.

2.2.10 Moment et effort tranchant dans une poutre élémentaire

Le moment de flexion au sein d'une poutre élémentaire dépend de la position ; on le notera $M(s)$. Il s'obtient en tout point par $M = -EI \frac{d^2v}{ds^2}$, soit

$$M(s) = EI \left(\frac{2\gamma}{\ell} \right)^2 \left(c_1 \cos \frac{2\gamma s}{\ell} + c_2 \sin \frac{2\gamma s}{\ell} \right) \quad (2.29)$$

L'effort tranchant, uniforme sur une poutre élémentaire et noté T , s'obtient par $T = N \frac{dv}{ds} - \frac{dM}{ds}$. Il ne dépend que du paramètre c_3 :

$$T = \frac{4EI\gamma^2}{\ell^3} c_3 \quad (2.30)$$

2.3 Étude des nœuds

2.3.1 Numérotation des nœuds et poutres

Comme le montre la figure 2.8, on numérote les poutres élémentaires par l'indice n , variant de 1 à n_p (on a donc $H = n_p \ell$). Les nœuds sont numérotés de même, la poutre n étant comprise entre le nœud $n-1$ et le nœud n . Pour les nœuds, n varie donc de 0 à n_p , les nœuds numérotés 0 et n_p étant les nœuds d'appuis extrêmes, dépourvus de ressorts.

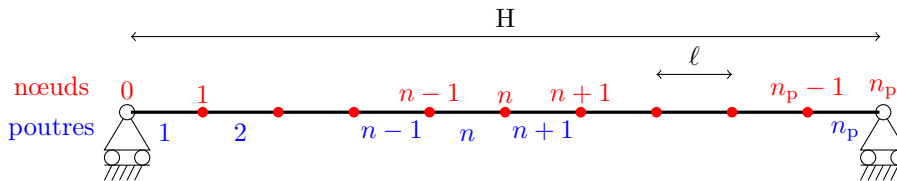


FIGURE 2.8 – Numérotation des nœuds et poutres.

Les déplacements et angles au nœud n sont notés u_n , v_n et θ_n . Notons ici qu'il y a continuité des fonctions u , v et θ au passage d'un nœud, malgré la présence des ressorts. En revanche, il n'y a pas continuité de la courbure (dérivée seconde de v ou dérivée première de θ par rapport à s).

2.3.2 Efforts internes aux nœuds

Pour une poutre élémentaire de numéro n , on notera M_n^B le moment en $s = 0$ (donc au nœud $n - 1$) et M_n^E le moment en $s = \ell$ (au nœud n). En rassemblant les résultats ci-dessus, on peut écrire les efforts aux nœuds :

$$\begin{cases} N_n = -K_c (u_n - u_{n-1}) \\ T_n = K_f \left(f_1(\gamma_n) (v_{n-1} - v_n) + \frac{1}{2} f_2(\gamma_n) \ell \theta_{n-1} + \frac{1}{2} f_2(\gamma_n) \ell \theta_n \right) \\ \frac{M_n^B}{\ell} = K_f \left(\frac{1}{2} f_2(\gamma_n) (v_{n-1} - v_n) + \frac{1}{3} f_3(\gamma_n) \ell \theta_{n-1} + \frac{1}{6} f_4(\gamma_n) \ell \theta_n \right) \\ \frac{M_n^E}{\ell} = -K_f \left(\frac{1}{2} f_2(\gamma_n) (v_{n-1} - v_n) + \frac{1}{6} f_4(\gamma_n) \ell \theta_{n-1} + \frac{1}{3} f_3(\gamma_n) \ell \theta_n \right) \end{cases} \quad (2.31)$$

où l'on a posé K_c , raideur de compression de la poutre élémentaire, et K_f , raideur de flexion de la poutre élémentaire, telles que

$$K_c = \frac{ES}{\ell} \quad \text{et} \quad K_f = \frac{12EI}{\ell^3} \quad (2.32)$$

2.3.3 Efforts extérieurs aux nœuds

En chaque nœud de numéro 1 à $n_p - 1$, les liaisons élastiques créent les actions suivantes :

- la force élastique longitudinale, de valeur $F_n = -k u_n$;
- la force élastique transversale, de valeur $Y_n = -\mathcal{K} v_n$;
- le couple élastique de valeur $\Gamma_n = -\mathcal{C} \theta_n$.

On utilisera par la suite les raideurs adimensionnelles des ressorts, définies relativement à la raideur de compression K_c d'une poutre élémentaire pour k , et relativement à la raideur de flexion K_f d'une poutre élémentaire pour \mathcal{K} et \mathcal{C} . Ainsi, on posera :

$$\begin{cases} \kappa = \frac{k}{K_c} \\ \phi = \frac{\mathcal{K}}{K_f} \\ \chi = \frac{\mathcal{C}}{\ell^2 K_f} \end{cases} \quad \text{ce qui donne} \quad \begin{cases} F_n = -K_c \kappa u_n \\ Y_n = -K_f \phi v_n \\ \frac{\Gamma_n}{\ell} = -K_f \chi \ell \theta_n \end{cases} \quad (2.33)$$

2.3.4 Équations d'équilibre aux nœuds

2.3.4.1 Équilibre en translation longitudinale

Le nœud n subit l'effort extérieur longitudinal F_n et les efforts normaux N_n et $-N_{n+1}$. L'équilibre longitudinal s'écrit donc

$$N_n - N_{n+1} + F_n = 0 \quad (2.34)$$

soit après simplification

$$u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1} - \kappa u_n = 0 \quad (2.35)$$

2.3.4.2 Équilibre en translation transversale

Le nœud n subit l'effort extérieur transversal Y_n et les efforts tranchants T_n et $-T_{n+1}$. L'équilibre s'écrit donc

$$T_n - T_{n+1} + Y_n = 0 \quad (2.36)$$

soit après simplification

$$\begin{aligned} f_1(\gamma_n) v_{n-1} - [f_1(\gamma_n) + f_1(\gamma_{n+1})] v_n + f_1(\gamma_{n+1}) v_{n+1} \\ - \frac{1}{2} (f_2(\gamma_{n+1}) \ell \theta_{n+1} + [f_2(\gamma_{n+1}) - f_2(\gamma_n)] \ell \theta_n - f_2(\gamma_n) \ell \theta_{n-1}) - \phi v_n = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.3.4.3 Équilibre en rotation

Le nœud n subit le couple extérieur Γ_n et les moments M_n^E et $-M_{n+1}^B$. L'équilibre s'écrit donc

$$M_n^E - M_{n+1}^B + \Gamma_n = 0 \quad (2.38)$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (f_2(\gamma_{n+1}) v_{n+1} - [f_2(\gamma_{n+1}) - f_2(\gamma_n)] v_n - f_2(\gamma_n) v_{n-1}) \\ - \frac{1}{6} (f_4(\gamma_n) \ell \theta_{n-1} - [f_4(\gamma_n) + f_4(\gamma_{n+1})] \ell \theta_n + f_4(\gamma_{n+1}) \ell \theta_{n+1}) \\ - \frac{1}{2} [f_2(\gamma_n) + f_2(\gamma_{n+1})] \ell \theta_n - \chi \ell \theta_n = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

2.3.5 Cas particulier sans ressorts longitudinaux

L'étude qui va suivre est consacrée aux cas où les ressorts longitudinaux sont absents. Alors, $k = 0$, $\kappa = 0$ et N_n est indépendant de n , de même que γ_n et $u_n - u_{n-1}$. On écrit alors simplement N et γ , on ne s'intéresse qu'aux déplacements transversal et angulaire et pas au déplacement longitudinal, et on peut écrire la formulation matricielle suivante pour le problème :

$$\underline{\mathbf{U}}_n = \begin{bmatrix} v_n \\ \ell \theta_n \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \chi \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

et

$$\underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -f_2(\gamma) \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0 & f_2(\gamma) \\ -f_2(\gamma) & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} f_1(\gamma) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} f_4(\gamma) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Alors, l'équilibre du nœud n peut s'écrire

$$\underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{U}}_n - \frac{1}{2} \underline{\mathbf{C}} (\underline{\mathbf{U}}_{n+1} - \underline{\mathbf{U}}_{n-1}) + \underline{\mathbf{D}} (\underline{\mathbf{U}}_{n-1} - 2 \underline{\mathbf{U}}_n + \underline{\mathbf{U}}_{n+1}) - \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{U}}_n = \underline{\mathbf{0}} \quad (2.42)$$

2.4 Approche énergétique

L'objectif de cette section est d'écrire les égalités énergétiques correspondant aux équations d'équilibre écrites ci-dessus. On propose deux approches équivalentes, dans le cadre où il n'y a pas de ressorts longitudinaux. La première considère l'énergie du système macroscopique dans son ensemble, la deuxième bâtit la même relation en partant de l'équation différentielle d'équilibre local d'une poutre élémentaire.

2.4.1 Approche globale

On étudie le système constitué par la poutre macroscopique et les ressorts de translation transversale et de rotation qui y sont accrochés.

Lors de l'action de la force de compression N à l'extrémité de la poutre, s'il y a flambement il y a déplacement du point extrême mobile (nœud n_p sur la figure 2.8). Si l'on note δH la variation (négative) de longueur longitudinale de la poutre macroscopique, l'énergie ainsi communiquée à la poutre est égale au travail de N sur ce déplacement, donc vaut $-N \delta H$.

Pour calculer δH , écrivons qu'à une longueur infinitésimale dh le long de la poutre déformée correspond une longueur longitudinale ds (projection sur l'axe de la poutre non déformée) telle que

$$dh = \frac{ds}{\cos \theta} \quad \text{soit} \quad dh = ds \left(1 + \frac{1}{2} \theta^2 + o(\theta^3) \right) \quad (2.43)$$

Si l'on néglige la compression de la poutre dans sa configuration déformée, on peut intégrer ce qui précède sur toute la longueur de la poutre H . Comme h va de 0 à H et s va de 0 à $H + \delta H$, cela donne

$$H = \int_0^H dh = \int_0^{H+\delta H} ds \left(1 + \frac{1}{2} \theta^2 + o(\theta^3) \right) = H + \delta H + \frac{1}{2} \int_0^{H+\delta H} ds (\theta^2 + o(\theta^3)) \quad (2.44)$$

ce qui donne, à l'ordre 3 en $\theta = \frac{dv}{ds}$ et compte tenu du fait que $\delta H \ll H$,

$$\delta H = -\frac{1}{2} \int_0^H \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 ds \quad (2.45)$$

Ainsi, l'énergie communiquée par N à la poutre lors du flambement est

$$E_N = \frac{1}{2} N \int_0^H \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 ds \quad (2.46)$$

La poutre une fois fléchie emmagasine de l'énergie, essentiellement de flexion. En négligeant l'énergie de compression et l'énergie d'effort tranchant, approximation classique, l'énergie E_f de la poutre déformée s'écrit

$$E_f = \frac{1}{2} EI \sum_{n=1}^{n_p} \int_{(n-1)\ell}^{n\ell} \left(\frac{d^2v}{ds^2} \right)^2 ds \quad (2.47)$$

Dans l'égalité précédente l'écriture sous forme d'une somme sur chaque poutre élémentaire permet d'exclure les nœuds, où $\frac{d^2v}{ds^2}$ est discontinue. Notons que $\frac{dv}{ds}$ est continue aux nœuds, d'où l'écriture directement globale pour l'expression de E_N .

Enfin, les ressorts emmagasinent de l'énergie. Le ressort de translation du nœud n emmagasine $\frac{1}{2} \mathcal{K} v_n^2$, le ressort spiral du nœud n emmagasine $\frac{1}{2} \mathcal{C} \theta_n^2$.

En écrivant E_ϕ l'énergie emmagasinée par l'ensemble des ressorts de translation, E_χ l'énergie emmagasinée par l'ensemble des ressorts de translation, la conservation de l'énergie s'écrit :

$$E_N = E_f + E_\phi + E_\chi \quad (2.48)$$

soit

$$\frac{1}{2} N \int_0^H \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 ds = \frac{1}{2} EI \sum_{n=1}^{n_p} \int_{(n-1)\ell}^{n\ell} \left(\frac{d^2v}{ds^2} \right)^2 ds + \frac{1}{2} \mathcal{K} \sum_{n=1}^{n_p-1} v_n^2 + \frac{1}{2} \mathcal{C} \sum_{n=1}^{n_p-1} \theta_n^2 \quad (2.49)$$

Compte tenu du fait que $N = \frac{4EI\gamma^2}{\ell^2}$ et des définitions des raideurs adimensionnelles, ceci donne une égalité de la forme

$$\frac{4\gamma^2}{\ell^2} \int_0^H \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 ds = \sum_{n=1}^{n_p} \int_{(n-1)\ell}^{n\ell} \left(\frac{d^2v}{ds^2} \right)^2 ds + \frac{12\phi}{\ell^3} \sum_{n=1}^{n_p-1} v_n^2 + \frac{12\chi}{\ell^3} \sum_{n=1}^{n_p-1} (\ell\theta_n)^2 \quad (2.50)$$

Dans cette expression, les intégrales sont entièrement calculables en fonction de θ_n et v_n à l'aide des expressions des c_i apparaissant dans les équations des déformées. Ainsi, pour une valeur de γ et des paramètres donnés, l'énergie est entièrement déterminée par les déplacements aux nœuds.

2.4.2 Approche locale

On repart de l'équation 2.17, que l'on multiplie par $\frac{1}{2} v$ et intègre sur une poutre élémentaire (supposée comprise entre $s = 0$ et $s = \ell$) :

$$\frac{1}{2} EI \int_0^\ell \frac{d^4v}{ds^4} v ds + \frac{1}{2} N \int_0^\ell \frac{d^2v}{ds^2} v ds = 0 \quad (2.51)$$

Après intégrations par parties, ceci donne

$$\frac{1}{2} EI \left(\left[\frac{d^3v}{ds^3} v - \frac{d^2v}{ds^2} \frac{dv}{ds} \right]_0^\ell + \int_0^\ell \left(\frac{d^2v}{ds^2} \right)^2 ds \right) + \frac{1}{2} N \left(\left[\frac{dv}{ds} v \right]_0^\ell - \int_0^\ell \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 ds \right) = 0 \quad (2.52)$$

Or, pour la poutre élémentaire numéro n ,

$$\begin{cases} v(0) = v_{n-1} \\ v(\ell) = v_n \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dv}{ds}(0) = \theta_{n-1} \\ \frac{dv}{ds}(\ell) = \theta_n \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d^2v}{ds^2}(0) = -\frac{M_n^B}{EI} \\ \frac{d^2v}{ds^2}(\ell) = -\frac{M_n^E}{EI} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d^3v}{ds^3}(0) = \frac{T_n - N\theta_{n-1}}{EI} \\ \frac{d^3v}{ds^3}(\ell) = \frac{T_n - N\theta_n}{EI} \end{cases} \quad (2.53)$$

En réécrivant l'équation 2.52 en particulierisant la poutre n (entre $s = (n-1)\ell$ et $s = n\ell$), on obtient

$$\frac{1}{2} (T_n v_n - T_n v_{n-1}) + \frac{1}{2} (M_n^E \theta_n - M_n^B \theta_{n-1}) + \frac{1}{2} EI \int_{(n-1)\ell}^{n\ell} \left(\frac{d^2v}{ds^2} \right)^2 ds = \frac{1}{2} N \int_{(n-1)\ell}^{n\ell} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 ds \quad (2.54)$$

L'addition pour toutes les poutres élémentaires fait apparaître, pour deux poutres consécutives, des termes de la forme $(T_n - T_{n+1}) v_n$ et $(M_n^E - M_{n+1}^B) \theta_n$ qui, compte tenu des équations d'équilibre d'un nœud, peuvent se réécrire respectivement $\mathcal{K} v_n^2$ et $\mathcal{C} \theta_n^2$.

Ainsi, on retrouve l'équation 2.50 obtenue par une autre méthode.

2.4.3 Équilibre et stabilité

En utilisant les relations qui précèdent, on peut définir l'énergie potentielle totale du système, pour un état quelconque :

$$V = E_f + E_\phi + E_\chi - E_N \quad (2.55)$$

Les équations d'équilibre au nœud n se retrouvent alors en écrivant les conditions

$$\frac{\partial V}{\partial v_n} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial \theta_n} = 0 \quad (2.56)$$

et la condition de stabilité de l'équilibre, impliquant que la seconde variation de V est positive, permet d'obtenir l'expression de la charge critique de flambement.

2.5 Charges critiques de flambement local ou global

2.5.1 Définitions

On se place ici en l'absence de ressorts longitudinaux. On a introduit le paramètre γ , lié à l'effort normal N par

$$\gamma = \frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad \text{ou} \quad N = \frac{4EI\gamma^2}{\ell^2} \quad (2.57)$$

On utilisera également le paramètre géométrique ξ , quotient de la longueur d'une poutre élémentaire par la longueur de la poutre macroscopique :

$$\xi = \frac{\ell}{H} \quad \text{ou} \quad \xi = \frac{1}{n_p} \quad (2.58)$$

On introduit également la charge adimensionnelle \bar{N} , quotient de N par la charge de flambement d'Euler d'une poutre élémentaire en appui bi-rotulé :

$$\bar{N} = \frac{N\ell^2}{EI\pi^2} \quad \text{ou} \quad \bar{N} = \frac{4}{\pi^2} \gamma^2 \quad (2.59)$$

2.5.2 Longueur de flambement et conditions aux limites

Pour certaines valeurs de N , le flambement survient. La longueur de flambement d'Euler, notée ici L_E , est définie relativement à la charge critique N donnant cette longueur de flambement (on ne mentionne ici que la longueur de flambement d'Euler du premier mode de flambement) :

$$N = \frac{EI\pi^2}{L_E^2} \quad (2.60)$$

À cette charge critique N correspondent les valeurs critiques adimensionnelles

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \frac{\ell}{L_E} \quad \text{et} \quad \bar{N} = \frac{\ell^2}{L_E^2} \quad (2.61)$$

La table 2.1 donne les valeurs des longueurs de flambement d'Euler L_E , pour une poutre élémentaire de longueur ℓ , en fonction des différentes conditions aux limites possibles.

Ces valeurs sont obtenues en résolvant le problème précédemment posé sur une poutre élémentaire. La valeur $\gamma = 2,24$ est la plus petite solution de $\tan(2\gamma) = 2\gamma$.

Notons que dans une perspective de périodicité ou pseudo-périodicité d'un système composé d'une succession de poutres élémentaires, les conditions aux limites présentant une dissymétrie n'ont *a priori* pas d'utilisation pratique.

Notons également que les deux conditions dissymétriques de ce tableau sont équivalentes à deux autres du point de vue de la charge critique :

- la condition *encastré-libre* est équivalente à une situation où une extrémité est à rotation empêchée mais déplacement libre, l'autre à déplacement empêché mais rotation libre ;
- la condition *encastré-rotulé* est équivalente à une situation où une extrémité est encastrée et l'autre est à rotation empêchée mais déplacement libre.

Ces deux équivalents auront leur importance pour interpréter les cas extrêmes.

Conditions aux limites	$\frac{L_e}{\ell}$	γ	\bar{N}
Encastré-libre	2	$\frac{\pi}{4} = 0,785$	$\frac{1}{4}$
Rotulé-rotulé	1	$\frac{\pi}{2} = 1,57$	1
Encastré-rotulé	0,699	2,24	2,04
Encastré-encastré	$\frac{1}{2}$	$\pi = 3,14$	4

TABLE 2.1 – Longueur de flambement d’Euler relative à la longueur de la poutre, et valeur de γ et de la charge adimensionnelle \bar{N} , pour différentes conditions aux limites.

2.5.3 Flambement global ou flambement localisé

Lorsque les raideurs des ressorts sont très faibles, on s’attend à ce que le dispositif présente un flambement globalisé, c’est-à-dire celui d’une poutre de longueur $H = n_p \ell$. Les deux appuis étant supposés rotulés, cela correspond aux valeurs critiques

$$N = \frac{EI\pi^2}{H^2} \quad \text{soit} \quad \gamma = \frac{\pi}{2} \xi \quad \text{ou} \quad \bar{N} = \xi^2 \quad (2.62)$$

En revanche, pour des raideurs élevées, on s’attend à ce que le flambement ne soit pas global, mais que l’on observe le flambement d’une poutre élémentaire de longueur ℓ , dont la charge critique dépend des conditions aux limites. On pourra se référer aux valeurs de la table 2.1.

Quoi qu’il en soit, on voit que pour un processus d’homogénéisation comme on va le réaliser, c’est-à-dire un processus cherchant à donner les caractéristiques physiques du milieu discret avec ressorts du point de vue macroscopique, le comportement au flambement fera intervenir ces valeurs critiques de γ , \bar{N} ou L_E .

Chapitre 3

Homogénéisation périodique

Ce chapitre décrit le principe de la méthode d'homogénéisation périodique par développement asymptotique des équations d'équilibre passées du discret au continu. Les équations utilisées sont ensuite données, pour divers ordres de grandeur des ressorts employés.

Dans ce chapitre, on suppose qu'il n'y a pas de ressorts longitudinaux. Ceci implique que l'effort normal N est uniforme sur l'ensemble de la poutre macroscopique, donc que γ est indépendant du numéro n de la poutre.

3.1 Principe du développement asymptotique

3.1.1 Discrétisation et définition du paramètre d'échelle ε

La poutre macroscopique, certes continue, est dans un premier temps discrétisée en poutres élémentaires (aussi appelées *cellules*) comprises entre deux nœuds successifs (points d'appuis extrêmes et appuis à liaisons élastiques). L'étude réalisée au chapitre 2 a fourni, pour ce système discret, l'équation matricielle 2.42 traduisant l'équilibre en rotation et en translation transversale, aux nœuds.

Le problème fait ainsi intervenir la longueur ℓ d'une poutre élémentaire et deux autres longueurs, macroscopiques celles-là : la longueur H totale de la poutre macroscopique entre ses appuis extrêmes, déjà introduite, et une longueur L , caractéristique de l'évolution macroscopique du flambement, qui n'a *a priori* pas de matérialité physique bien définie : elle peut être du même ordre de grandeur que H si le flambement est global, elle peut être plus petite dans le cas contraire.

Cette longueur L est supposée grande devant ℓ , de sorte que le paramètre d'échelle $\varepsilon = \frac{\ell}{L}$ est supposé petit devant 1.

3.1.2 Développement asymptotique des grandeurs

La méthode employée consiste à attribuer à toute grandeur physique intervenant dans le problème un développement asymptotique, et à écrire les équations d'équilibre aux différents ordres du développement, en faisant varier les contrastes de rigidité entre la poutre et les ressorts latéraux.

On considère une grandeur g quelconque : soit une grandeur définie aux nœuds, et alors elle dépend de n , comme v , θ ; soit une grandeur caractéristique du problème, comme ϕ , χ ou γ . Le développement asymptotique de cette grandeur s'écrit ici

$$g = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i g^{(i)} \quad \text{avec} \quad g^{(i)} = \mathcal{O}(g^{(j)}) \quad \forall i, j \quad (3.1)$$

On notera aussi $\hat{g}^{(i)} = \varepsilon^i g^{(i)}$.

Dans ce qui précède on commence le développement en $i = 0$, mais il peut en aller autrement. Par exemple, dans le cas des ressorts très raides par rapport à la raideur de flexion d'une poutre élémentaire, on sera amené à écrire $\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ ou $\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$.

En outre, comme on a écrit les équations pour y faire apparaître $\ell\theta$ et non θ (de manière à avoir une grandeur cinématique homogène à v), l'ordre en ε^0 de $\ell\theta$ sera donc naturellement noté $\ell\hat{\theta}^{(-1)}$.

3.1.3 Recherche de la charge critique

Rappelons que dans ce problème où l'effort normal de compression N est uniforme, on a défini

$$\gamma = \frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad \text{soit} \quad N = \frac{4EI}{\ell^2} \gamma^2 \quad (3.2)$$

Le paramètre γ pilote donc le flambement car il définit la charge critique. Son développement s'écrit

$$\gamma = \gamma^{(0)} + \hat{\gamma}^{(1)} + \hat{\gamma}^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = \gamma^{(0)} + \varepsilon \gamma^{(1)} + \varepsilon^2 \gamma^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (3.3)$$

La valeur de γ à l'ordre dominant, $\gamma^{(0)}$, est fondamentale pour évaluer la localité du flambement : si $\gamma^{(0)} = 0$, le flambement est global, comme on l'a dit au paragraphe 2.2.9.1.

Les fonctions de γ sont développées autour de $\gamma^{(0)}$, selon

$$f(\gamma) = f(\gamma^{(0)}) + (\gamma - \gamma^{(0)}) f'(\gamma^{(0)}) + \frac{1}{2} (\gamma - \gamma^{(0)})^2 f''(\gamma^{(0)}) + \frac{1}{6} (\gamma - \gamma^{(0)})^3 f'''(\gamma^{(0)}) + o((\gamma - \gamma^{(0)})^3) \quad (3.4)$$

Cela donne, en y injectant le développement 3.3 :

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= f(\gamma^{(0)}) \\ &+ \varepsilon \gamma^{(1)} f'(\gamma^{(0)}) \\ &+ \varepsilon^2 \left[\gamma^{(2)} f'(\gamma^{(0)}) + \frac{1}{2} \gamma^{(1)2} f''(\gamma^{(0)}) \right] \\ &+ \varepsilon^3 \left[\gamma^{(3)} f'(\gamma^{(0)}) + \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} f''(\gamma^{(0)}) + \frac{1}{6} \gamma^{(1)3} f'''(\gamma^{(0)}) \right] + o(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

3.1.4 Passage du discret au continu

Les équations d'équilibre aux nœuds, données par l'équation matricielle 2.42, étant des relations discrètes, on les transforme au préalable en équations différentielles en transformant la grandeur cinématique discrète \underline{U}_n en grandeur continue $\underline{U}(x)$.

3.1.4.1 Choix d'un VER

Ce passage au continu nécessite avant tout le choix d'un volume élémentaire représentatif (VER). Celui-ci peut contenir une poutre élémentaire au minimum, ou deux, trois ou plus. La figure 3.1 illustre la différence entre poutre élémentaire (aussi nommée *cellule*) et VER choisi.

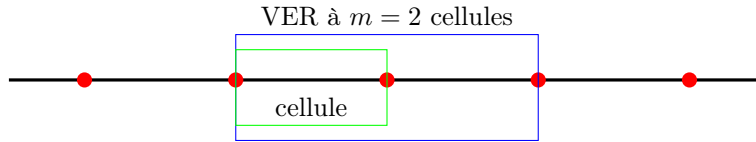


FIGURE 3.1 – VER et poutre élémentaire pour $m = 2$.

Une contrainte dans ce choix est que la poutre macroscopique doit contenir un nombre suffisant de VER (typiquement, cinq est un strict minimum) pour que l'homogénéisation ait un sens, ce qui est d'autant plus le cas que ε est petit. Ainsi, pour un VER à m cellules, la séparation d'échelle impose non seulement que $\varepsilon \ll 1$, mais aussi $m\varepsilon = \frac{m\ell}{L} \ll 1$.

D'un VER à son voisin, les grandeurs cinématiques seront supposées lentement variables, ce qui autorise un développement de Taylor. Au sein même d'un VER, aucune supposition de ce genre n'est faite, et on peut au contraire voir apparaître, par exemple, pour les VER contenant un nombre pair de poutres élémentaires, des régimes où deux nœuds consécutifs sont en opposition de déplacement ou d'inclinaison.

On désignera par la suite ce choix de nombre de poutres élémentaires par VER par l'expression de pseudo-périodicité à m cellules, ou par abus simplement périodicité à m cellules.

3.1.4.2 Principe du passage au continu

Soit une grandeur dont la valeur au nœud n est g_n . On transforme cette grandeur en fonction continue, en l'écrivant alors $g(x)$, telle que $g(x) = g_n$ en $x = n\ell$.

Si l'on suppose une pseudo-périodicité à m cellules, donc si l'on postule les faibles variations de g entre deux nœuds séparés par m poutres élémentaires, on peut utiliser ensuite un développement de Taylor pour écrire g_{n+m} ou g_{n-m} , par exemple :

$$g_{n+m} = g(n\ell + m\ell) = g(x + m\varepsilon L) \quad (3.5)$$

$$= g(x) + m\varepsilon L \partial_x g(x) + \frac{1}{2} m^2 \varepsilon^2 L^2 \partial_x^2 g(x) + \frac{1}{6} m^3 \varepsilon^3 L^3 \partial_x^3 g(x) + \frac{1}{24} m^4 \varepsilon^4 L^4 \partial_x^4 g(x) + o(\varepsilon^4) \quad (3.6)$$

En particulier, on a aussi

$$g_{n+m} - g_{n-m} = m \varepsilon L \left(2 \partial_x g(x) + \frac{1}{3} m^2 \varepsilon^2 L^2 \partial_x^3 g(x) \right) + o(\varepsilon^4) \quad (3.7)$$

et

$$g_{n-m} - 2 g_n + g_{n+m} = m^2 \varepsilon^2 L^2 \partial_x^2 g(x) + \frac{1}{12} m^4 \varepsilon^4 L^4 \partial_x^4 g(x) + o(\varepsilon^4) \quad (3.8)$$

3.1.4.3 Taille du VER et nombre d'équations

La pseudo-périodicité à une cellule ($m = 1$) implique l'utilisation de deux grandeurs cinématiques dépendant de la variable d'espace macroscopique x : le déplacement v et l'inclinaison θ .

Si l'on choisit un VER à $m > 1$ cellules, il faut introduire $2m$ variables cinématiques, un déplacement et une inclinaison par nœud intérieur au VER. Le problème dans sa version continue contiendra donc $2m$ équations différentielles impliquant ces variables cinématiques.

Pour effectuer la résolution, il est nécessaire d'effectuer un changement de variable de manière à découpler au maximum ces équations entre elles, du moins à l'ordre dominant.

3.2 Déroulement général de la résolution

La méthode utilisée dans la suite de ce travail pour décrire les modes de flambement de la structure étudiée est la suivante.

3.2.1 Choix des raideurs

On choisit des ordres de grandeur pour les contrastes entre les raideurs des ressorts agissant aux nœuds et les raideurs d'une poutre élémentaire, c'est-à-dire les ordres de grandeur de ϕ et χ . Ils sont exprimés en fonction du paramètre d'échelle ε .

On balayera ainsi le plus possible de cas, de $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ (ressorts très souples en comparaison de la raideur de flexion d'une poutre élémentaire) à $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$ (ressorts très raides), sans oublier les valeurs $\phi = 0$ et $\chi = 0$ pour la poutre sans ressorts.

3.2.2 Choix d'une taille de VER

Le volume élémentaire représentatif contient un nombre entier de poutres élémentaires. Dans ce travail on a étudié des VER à une, deux, trois ou quatre poutres élémentaires.

3.2.3 Écriture des équations aux différents ordres et propagation des conditions

Il faut ensuite écrire le développement asymptotique des équations d'équilibre dans leur version continue compte tenu du nombre de poutres élémentaires choisi pour le volume élémentaire représentatif.

On examine les différents ordres ainsi obtenus, dans l'ordre croissant, chaque ordre fournissant une ou plusieurs conditions permettant de réécrire les équations, éventuellement à ce même ordre pour obtenir d'autres expressions des autres conditions, en tout cas aux ordres suivants. Ces conditions peuvent être des conditions sur la charge de flambement (γ et ses différents ordres) ou sur les grandeurs cinématiques; elles peuvent faire intervenir les raideurs des ressorts.

3.2.4 Exploitation des conditions

À chaque ordre, il convient d'examiner les conditions obtenues, qui présentent plusieurs aspects.

3.2.4.1 Nullité d'une grandeur cinématique de déplacement

Dans le cas où une condition conduit à écrire la nullité de la dérivée ou de la dérivée seconde d'une grandeur cinématique de déplacement transversal, impliquant que celle-ci soit constante ou affine le long de la structure macroscopique, cela impose en réalité que la grandeur soit identiquement nulle sur toute la structure, vu qu'un déplacement constant ou affine sur la poutre serait incompatible avec des conditions aux limites de type appui, rotule ou encastrement aux deux extrémités, sauf en cas de nullité.

Notons que ceci n'est pas vrai pour les grandeurs cinématiques angulaires : on peut très bien avoir une inclinaison aux nœuds identique en tout nœud à condition que les conditions d'extrémité ne restreignent pas la valeur de l'angle, comme c'est le cas dans la situation étudiée de double appui rotulé.

3.2.4.2 Nullité de toutes les grandeurs cinématiques

Certaines conditions conduisent à écrire la nullité des grandeurs cinématiques les unes après les autres. Si toutes les grandeurs sont nulles à l'ordre dominant, alors elles sont nulles à tous les ordres car l'expression du problème à l'ordre dominant est la même à tout ordre, comme on le verra. Aucun mode de flambement ne peut donc être décrit dans ces conditions.

3.2.4.3 Relations entre grandeurs cinématiques

De nombreuses conditions à un ordre donné s'écrivent sous la forme de relations entre grandeurs cinématiques, faisant souvent intervenir un gradient, par exemple $\theta^{(0)} = \Psi \partial_x z^{(0)}$, avec Ψ fonction des raideurs, de $\gamma^{(0)}$ ou d'autres ordres de γ . On les utilise pour éliminer des grandeurs et ne garder qu'une grandeur cinématique de l'ordre dominant.

3.2.4.4 Équation différentielle sur une grandeur cinématique

L'aboutissement du processus est en général (sauf dans les cas de cinématique nulle ou de mode à θ constant) une équation différentielle vérifiée par une grandeur cinématique de l'ordre dominant. Dans tous les cas étudiés ce sont des équations présentant la forme suivante :

$$a \partial_x^4 g + b \partial_x^2 g + c g = 0 \quad (3.9)$$

où g est une variable cinématique à un ordre dominant (déplacement à l'ordre 0 ou angle à l'ordre -1). L'un des paramètres a , b ou c peut être nul. Ils peuvent s'exprimer en fonction des raideurs ϕ et χ des ressorts, en fonction de ℓ , en fonction de $\gamma^{(0)}$ par l'intermédiaire des fonctions f_i et en fonction d'un ordre supérieur de γ .

Cette équation différentielle suffit à décrire le comportement du système global. Il faut néanmoins en faire la résolution, compte tenu de conditions aux limites d'extrémité pour la structure macroscopique, pour connaître la charge critique de flambement et la cinématique de flambement correspondante.

Dans le cas très fréquent où $a = 0$, ceci pose la question du nombre d'équations, car l'équation différentielle est d'ordre deux alors que les conditions aux limites s'écrivent sous forme de quatre équations. Ce point important sera discuté en section 5.1.

L'application des conditions aux limites conduit à une solution pour la grandeur cinématique concernée. Cette solution est écrite à une amplitude arbitraire près. Toutes les autres grandeurs cinématiques sont soit nulles, soit exprimées en fonction de cette amplitude arbitraire.

3.2.4.5 Conditions de quantification

L'application des conditions aux limites conduit également à une condition de quantification impliquant un des ordres de γ . Alors, cet ordre de γ présente plusieurs solutions possibles, fonctions d'un entier q qui donne également le numéro du mode de flambement.

La règle choisie *a priori* consiste à retenir la solution qui donne la charge de flambement la plus faible possible pour bien avoir une charge critique, et d'éliminer les solutions qui ne donnent pas de valeur minimale.

Si on a par exemple une équation de la forme $\hat{\gamma}^{(1)2} = q^2 \alpha^2 \ell^2$ avec $\gamma^{(0)}$ non nul (nécessairement positif) et $\alpha = \mathcal{O}(1)$ fonction de $\gamma^{(0)}$, on peut écrire $\hat{\gamma}^{(1)} = q |\alpha| \ell$, donc $\gamma = \gamma^{(0)} + q |\alpha| \ell + o(\varepsilon)$ vu que q est un entier *a priori* relatif.

Considérer les solutions avec q négatif et chercher la plus petite valeur de charge, donc de γ , tout en gardant γ positif, reviendrait à choisir une valeur négative de q de sorte que $\gamma^{(0)} + q |\alpha| \ell \geq 0$ mais $\gamma^{(0)} + (q-1) |\alpha| \ell < 0$. Ceci revient à dire que $\gamma^{(0)}$ et $\hat{\gamma}^{(1)}$ ont des valeurs quasi-identiques, ce qui est contradictoire avec la séparation d'échelle.

On choisit donc, dans ce cas, de ne pas tenir compte de la possibilité que q soit négatif. Avec q seulement positif, choisir la plus petite valeur de charge revient alors à choisir $q = 1$ et $\gamma = \gamma^{(0)} + |\alpha| \ell$.

Cette règle sera systématiquement appliquée, mais on verra dans la section 5.2 qu'elle mérite d'être sérieusement remise en question.

3.3 Pseudo-périodicité à une cellule

3.3.1 Passage du discret au continu

On rappelle l'équation d'équilibre 2.42 écrite en version matricielle :

$$\underline{\underline{B}} \underline{U}_n - \frac{1}{2} \underline{\underline{C}} (\underline{U}_{n+1} - \underline{U}_{n-1}) + \underline{\underline{D}} (\underline{U}_{n-1} - 2 \underline{U}_n + \underline{U}_{n+1}) = \underline{\underline{R}} \underline{U}_n \quad (3.10)$$

Cette équation fait apparaître des combinaisons discrètes qui, par passage au continu, vont conduire à des dérivées macroscopiques première et seconde en x à l'ordre dominant. Si l'on pose les opérateurs \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 tels que :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \underline{U}_n = \frac{1}{2} (\underline{U}_{n+1} - \underline{U}_{n-1}) \\ \mathcal{D}_2 \underline{U}_n = \underline{U}_{n-1} - 2\underline{U}_n + \underline{U}_{n+1} \end{cases} \quad (3.11)$$

cette équation d'équilibre se réécrit

$$\left(\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{C}} \mathcal{D}_1 + \underline{\underline{D}} \mathcal{D}_2 \right) \underline{U}_n = \underline{\underline{R}} \underline{U}_n \quad (3.12)$$

En introduisant $\underline{U}(x)$ tel que $\underline{U}(n\ell) = \underline{U}_n$, cette équation donne avec le passage au continu ci-dessus, notamment compte tenu des égalités 3.7 et 3.8 avec $m = 1$:

$$\left(\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{C}} \varepsilon L \left(\partial_x + \varepsilon^2 \frac{L^2}{6} \partial_x^3 \right) + \underline{\underline{D}} \varepsilon^2 L^2 \left(\partial_x^2 + \varepsilon^2 \frac{L^2}{12} \partial_x^4 \right) \right) \underline{U} + o(\varepsilon^4) = \underline{\underline{R}} \underline{U} \quad (3.13)$$

3.3.2 Développement asymptotique

En développant asymptotiquement le problème avec $\varepsilon = \frac{\ell}{L}$ comme paramètre, le membre de gauche de l'équation 3.13 s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{B}}_0 \underline{U}^{(0)} \\ & + \varepsilon \left(\underline{\underline{B}}_0 \underline{U}^{(1)} + \gamma^{(1)} \underline{\underline{B}}_1 \underline{U}^{(0)} - L \underline{\underline{C}}_0 \partial_x \underline{U}^{(0)} \right) \\ & + \varepsilon^2 \left(\underline{\underline{B}}_0 \underline{U}^{(2)} + \gamma^{(1)} \underline{\underline{B}}_1 \underline{U}^{(1)} + \left[\gamma^{(2)} \underline{\underline{B}}_1 + \frac{1}{2} \gamma^{(1)^2} \underline{\underline{B}}_2 \right] \underline{U}^{(0)} - L \underline{\underline{C}}_0 \partial_x \underline{U}^{(1)} - \gamma^{(1)} L \underline{\underline{C}}_1 \partial_x \underline{U}^{(0)} + L^2 \underline{\underline{D}}_0 \partial_x^2 \underline{U}^{(0)} \right) \\ & + \varepsilon^3 \left(\underline{\underline{B}}_0 \underline{U}^{(3)} + \gamma^{(1)} \underline{\underline{B}}_1 \underline{U}^{(2)} + \left[\gamma^{(2)} \underline{\underline{B}}_1 + \frac{1}{2} \gamma^{(1)^2} \underline{\underline{B}}_2 \right] \underline{U}^{(1)} + \left[\gamma^{(3)} \underline{\underline{B}}_1 + \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} \underline{\underline{B}}_2 + \frac{1}{6} \gamma^{(1)^3} \underline{\underline{B}}_3 \right] \underline{U}^{(0)} \right. \\ & \quad \left. - L \underline{\underline{C}}_0 \left[\partial_x \underline{U}^{(1)} + \frac{L^2}{6} \partial_x^3 \underline{U}^{(0)} \right] - L \gamma^{(1)} \underline{\underline{C}}_1 \partial_x \underline{U}^{(1)} - L \left[\gamma^{(2)} \underline{\underline{C}}_1 + \frac{1}{2} \gamma^{(1)^2} \underline{\underline{C}}_2 \right] \partial_x \underline{U}^{(1)} \right. \\ & \quad \left. + L^2 \underline{\underline{D}}_0 \partial_x^2 \underline{U}^{(1)} + L^2 \gamma^{(1)} \underline{\underline{D}}_1 \partial_x^2 \underline{U}^{(0)} \right) \\ & + \varepsilon^4 \left(\underline{\underline{B}}_0 \underline{U}^{(4)} + \gamma^{(1)} \underline{\underline{B}}_1 \underline{U}^{(3)} + \left[\gamma^{(2)} \underline{\underline{B}}_1 + \frac{1}{2} \gamma^{(1)^2} \underline{\underline{B}}_2 \right] \underline{U}^{(2)} + \left[\gamma^{(3)} \underline{\underline{B}}_1 + \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} \underline{\underline{B}}_2 + \frac{1}{6} \gamma^{(1)^3} \underline{\underline{B}}_3 \right] \underline{U}^{(1)} \right. \\ & \quad \left. + \left[\gamma^{(4)} \underline{\underline{B}}_1 + \left(\frac{1}{2} \gamma^{(2)^2} + \gamma^{(1)} \gamma^{(3)} \right) \underline{\underline{B}}_2 + \frac{1}{2} \gamma^{(1)^2} \gamma^{(2)} \underline{\underline{B}}_3 + \frac{1}{24} \gamma^{(1)^4} \underline{\underline{B}}_4 \right] \underline{U}^{(0)} \right. \\ & \quad \left. - L \underline{\underline{C}}_0 \left[\partial_x \underline{U}^{(3)} + \frac{L^2}{6} \partial_x^3 \underline{U}^{(1)} \right] - L \gamma^{(1)} \underline{\underline{C}}_1 \left[\partial_x \underline{U}^{(2)} + \frac{L^2}{6} \partial_x^3 \underline{U}^{(0)} \right] \right. \\ & \quad \left. - L \left[\gamma^{(2)} \underline{\underline{C}}_1 + \frac{1}{2} \gamma^{(1)^2} \underline{\underline{C}}_2 \right] \partial_x \underline{U}^{(1)} - L \left[\gamma^{(3)} \underline{\underline{C}}_1 + \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} \underline{\underline{C}}_2 + \frac{1}{6} \gamma^{(1)^3} \underline{\underline{C}}_3 \right] \partial_x \underline{U}^{(0)} \right. \\ & \quad \left. + L^2 \underline{\underline{D}}_0 \left[\partial_x^2 \underline{U}^{(2)} + \frac{L^2}{12} \partial_x^4 \underline{U}^{(0)} \right] + L^2 \gamma^{(1)} \partial_x^2 \underline{U}^{(1)} + L^2 \left[\gamma^{(2)} \underline{\underline{D}}_1 + \frac{1}{2} \gamma^{(1)^2} \underline{\underline{D}}_2 \right] \partial_x^2 \underline{U}^{(0)} \right) \\ & + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \end{aligned}$$

Les matrices utilisées ci-dessus sont ainsi définies : $\underline{\underline{B}}_0 = \underline{\underline{B}}(\gamma^{(0)})$, $\underline{\underline{B}}_1 = \underline{\underline{B}}'(\gamma^{(0)})$, $\underline{\underline{B}}_2 = \underline{\underline{B}}''(\gamma^{(0)})$, etc., c'est-à-dire :

$$\underline{\underline{B}}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -f_2(\gamma^{(0)}) \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{B}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -f_2'(\gamma^{(0)}) \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{B}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -f_2''(\gamma^{(0)}) \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.14)$$

$$\underline{\underline{C}}_0 = \begin{bmatrix} 0 & f_2(\gamma^{(0)}) \\ -f_2(\gamma^{(0)}) & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{C}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & f_2'(\gamma^{(0)}) \\ -f_2'(\gamma^{(0)}) & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.15)$$

$$\underline{\underline{D}}_0 = \begin{bmatrix} f_1(\gamma^{(0)}) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} f_4(\gamma^{(0)}) \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{D}}_1 = \begin{bmatrix} f_1'(\gamma^{(0)}) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} f_4'(\gamma^{(0)}) \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.16)$$

Quant au membre de droite, il dépend des ordres de grandeur de ϕ et χ :

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}\underline{\underline{\mathbf{U}}} = \begin{bmatrix} \eta \varepsilon^{\tau\kappa} & 0 \\ 0 & \psi \varepsilon^{\tau c} \end{bmatrix} \left(\underline{\underline{\mathbf{U}}}^{(0)} + \varepsilon \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{(1)} + \varepsilon^2 \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{(2)} + \dots \right) \quad (3.17)$$

où l'on a posé $\phi = \eta \varepsilon^{\tau\kappa}$ et $\chi = \psi \varepsilon^{\tau c}$, avec $\eta = \mathcal{O}(1)$ et $\psi = \mathcal{O}(1)$.

3.3.3 Remarque sur la nullité à l'ordre dominant

On peut remarquer dans le membre de gauche que l'ordre i contient le terme en $\underline{\underline{\mathbf{U}}}^{(i)}$ toujours sous la même forme $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_0 \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{(i)}$. Les autres termes font intervenir les ordres inférieurs de $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$. Ceci a une implication importante : si la résolution conduit, à une étape donnée, à obtenir $\underline{\underline{\mathbf{U}}}^{(0)} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$, alors cela implique nécessairement que $\underline{\underline{\mathbf{U}}}^{(i)} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$ à tout ordre, donc la résolution n'apporte rien d'autre que la solution nulle, et donc en particulier pas de flambement.

Dans le processus de résolution, on n'explore donc pas les ordres supérieurs à partir du moment où toutes les variables cinématiques sont nulles à leur ordre dominant.

3.4 Pseudo-périodicité à deux cellules

3.4.1 Réécriture du problème discret

Si l'on autorise à présent les variations cinématiques brusques entre deux nœuds successifs tout en imposant la lente variation sur une période de deux cellules élémentaires, on est conduit à distinguer entre les nœuds pairs et les nœuds impairs. L'équation 2.42 peut être écrite pour le nœud $2n$ et le nœud $2n+1$:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathbf{B}}}\underline{\underline{\mathbf{U}}}_{2n} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}(\underline{\underline{\mathbf{U}}}_{2n-1} - 2\underline{\underline{\mathbf{U}}}_{2n} + \underline{\underline{\mathbf{U}}}_{2n+1}) + \frac{1}{2}\underline{\underline{\mathbf{C}}}(\underline{\underline{\mathbf{U}}}_{2n+1} - \underline{\underline{\mathbf{U}}}_{2n-1}) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}\underline{\underline{\mathbf{U}}}_{2n} \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}}\underline{\underline{\mathbf{U}}}_{2n+1} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}(\underline{\underline{\mathbf{U}}}_{2n} - 2\underline{\underline{\mathbf{U}}}_{2n+1} + \underline{\underline{\mathbf{U}}}_{2n+2}) + \frac{1}{2}\underline{\underline{\mathbf{C}}}(\underline{\underline{\mathbf{U}}}_{2n+2} - \underline{\underline{\mathbf{U}}}_{2n}) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}\underline{\underline{\mathbf{U}}}_{2n+1} \end{cases} \quad (3.18)$$

On effectue ensuite un changement de variables cinématiques en définissant $\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_n$ et $\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_n$:

$$\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_n = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{U}}}_{2n} + \underline{\underline{\mathbf{U}}}_{2n+1}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbf{Z}}}_n = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{U}}}_{2n} - \underline{\underline{\mathbf{U}}}_{2n+1}) \quad (3.19)$$

Pour l'élément à double-cellule numéro n , $\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_n$ pilote les modes où les deux nœuds sont en phase (c'est-à-dire que si $\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_n = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$, on retrouve les modes avec périodicité à une cellule, déjà vus) et à l'inverse $\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_n$ pilote les modes où les deux nœuds sont en opposition de phase, c'est-à-dire que si $\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_n = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$ on doit trouver des modes spécifiques.

L'introduction de $\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_n$ et $\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_n$ dans les deux équations d'équilibre ci-dessus, et l'écriture de la demi-somme et de la demi-différence de ces deux équations, donnent les deux équations ci-après :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathbf{B}}}\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_n - \frac{1}{4}\underline{\underline{\mathbf{C}}}(\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_{n+1} - \underline{\underline{\mathbf{Y}}}_{n-1}) + \frac{1}{2}\underline{\underline{\mathbf{D}}}(\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_{n-1} - 2\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_n + \underline{\underline{\mathbf{Y}}}_{n+1}) \\ \quad - \frac{1}{4}\underline{\underline{\mathbf{C}}}(\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_{n+1} - \underline{\underline{\mathbf{Z}}}_{n-1}) + \frac{1}{2}\underline{\underline{\mathbf{D}}}(\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_{n-1} - 2\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_n + \underline{\underline{\mathbf{Z}}}_{n+1}) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_n \\ (\underline{\underline{\mathbf{B}}} - 4\underline{\underline{\mathbf{D}}})\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_n + \frac{1}{4}\underline{\underline{\mathbf{C}}}(\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_{n+1} - \underline{\underline{\mathbf{Z}}}_{n-1}) - \frac{1}{2}\underline{\underline{\mathbf{D}}}(\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_{n-1} - 2\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_n + \underline{\underline{\mathbf{Z}}}_{n+1}) \\ \quad + \frac{1}{4}\underline{\underline{\mathbf{C}}}(\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_{n+1} - \underline{\underline{\mathbf{Y}}}_{n-1}) - \frac{1}{2}\underline{\underline{\mathbf{D}}}(\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_{n-1} - 2\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_n + \underline{\underline{\mathbf{Y}}}_{n+1}) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_n \end{cases} \quad (3.20)$$

que l'on peut réécrire avec les opérateurs définis en 3.11 :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathbf{B}}}\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\underline{\underline{\mathbf{C}}}\mathcal{D}_1 - \underline{\underline{\mathbf{D}}}\mathcal{D}_2\right)(\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_n + \underline{\underline{\mathbf{Z}}}_n) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_n \\ (\underline{\underline{\mathbf{B}}} - 4\underline{\underline{\mathbf{D}}})\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\underline{\underline{\mathbf{C}}}\mathcal{D}_1 - \underline{\underline{\mathbf{D}}}\mathcal{D}_2\right)(\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_n + \underline{\underline{\mathbf{Z}}}_n) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_n \end{cases} \quad (3.21)$$

On voit ici l'intérêt du changement de variable : à l'ordre dominant, les équations en $\underline{\underline{\mathbf{Y}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{Z}}}$ seront découplées.

3.4.2 Passage du discret au continu

Comme précédemment on passe du discret au continu en posant $\underline{Y}(x)$ et $\underline{Z}(x)$ tels que $\underline{Y}(2n\ell) = \underline{Y}_n$ et $\underline{Z}(2n\ell) = \underline{Z}_n$. Il vient ensuite par exemple $\underline{Y}_{n+1} = \underline{Y}(x+2\ell)$, qui subit un développement de Taylor. Les équations d'équilibre ainsi passées du discret au continu deviennent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{B}}\underline{Y} - \underline{\underline{C}} \left(\ell \partial_x \underline{Y} + \frac{2\ell^3}{3} \partial_x^3 \underline{Y} \right) + \underline{\underline{D}} 2\ell^2 \partial_x^2 \underline{Y} \\ \quad - \underline{\underline{C}} \ell^2 \partial_x^2 \underline{Z} + \underline{\underline{D}} \left(2\ell \partial_x \underline{Z} + \frac{4\ell^3}{3} \partial_x^3 \underline{Z} \right) + o(\ell^3) = \underline{\underline{R}}\underline{Y} \\ \left(\underline{\underline{B}} - 4\underline{\underline{D}} \right) \underline{Z} + \underline{\underline{C}} \left(\ell \partial_x \underline{Z} + \frac{2\ell^3}{3} \partial_x^3 \underline{Z} \right) - \underline{\underline{D}} 2\ell^2 \partial_x^2 \underline{Z} \\ \quad + \underline{\underline{C}} \ell^2 \partial_x^2 \underline{Y} - \underline{\underline{D}} \left(2\ell \partial_x \underline{Y} + \frac{4\ell^3}{3} \partial_x^3 \underline{Y} \right) + o(\ell^3) = \underline{\underline{R}}\underline{Z} \end{array} \right. \quad (3.22)$$

3.4.3 Développements asymptotiques

En notant comme précédemment $\underline{\underline{B}}_0 = \underline{\underline{B}}(\gamma^{(0)})$, $\underline{\underline{B}}_1 = \underline{\underline{B}}'(\gamma^{(0)})$, etc., et en effectuant un développement asymptotique selon le paramètre $\varepsilon = \frac{\ell}{L}$, on obtient les équations suivantes (on se limite ici à l'écriture de l'ordre ε^2 , même si en pratique il faut souvent pousser à un ordre plus élevé pour obtenir certaines informations).

$$\varepsilon^0 \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{B}}_0 \underline{Y}^{(0)} = \left(\underline{\underline{R}}\underline{Y} \right)^{(0)} \\ \left(\underline{\underline{B}}_0 - 4\underline{\underline{D}}_0 \right) \underline{Z}^{(0)} = \left(\underline{\underline{R}}\underline{Z} \right)^{(0)} \end{array} \right. \quad (3.23)$$

$$\varepsilon^1 \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{B}}_0 \underline{Y}^{(1)} + \gamma^{(1)} \underline{\underline{B}}_1 \underline{Y}^{(0)} - L \underline{\underline{C}}_0 \partial_x \underline{Y}^{(0)} + 2L \underline{\underline{D}}_0 \partial_x \underline{Z}^{(0)} = \left(\underline{\underline{R}}\underline{Y} \right)^{(1)} \\ \left(\underline{\underline{B}}_0 - 4\underline{\underline{D}}_0 \right) \underline{Z}^{(1)} + \gamma^{(1)} \left(\underline{\underline{B}}_1 - 4\underline{\underline{D}}_1 \right) \underline{Z}^{(0)} + L \underline{\underline{C}}_0 \partial_x \underline{Z}^{(0)} - 2L \underline{\underline{D}}_0 \partial_x \underline{Y}^{(0)} = \left(\underline{\underline{R}}\underline{Z} \right)^{(1)} \end{array} \right. \quad (3.24)$$

$$\varepsilon^2 \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{B}}_0 \underline{Y}^{(2)} + \gamma^{(1)} \underline{\underline{B}}_1 \underline{Y}^{(1)} + \left(\gamma^{(2)} \underline{\underline{B}}_1 + \frac{1}{2} \gamma^{(1)2} \underline{\underline{B}}_2 \right) \underline{Y}^{(0)} \\ \quad - L \underline{\underline{C}}_0 \partial_x \underline{Y}^{(1)} - L \gamma^{(1)} \underline{\underline{C}}_1 \partial_x \underline{Y}^{(0)} + 2L^2 \underline{\underline{D}}_0 \partial_x^2 \underline{Y}^{(0)} \\ \quad - L^2 \underline{\underline{C}}_0 \partial_x^2 \underline{Z}^{(0)} + 2L \underline{\underline{D}}_0 \partial_x \underline{Z}^{(1)} + 2L \gamma^{(1)} \underline{\underline{D}}_1 \partial_x \underline{Z}^{(0)} = \left(\underline{\underline{R}}\underline{Y} \right)^{(2)} \\ \left(\underline{\underline{B}}_0 - 4\underline{\underline{D}}_0 \right) \underline{Z}^{(2)} + \gamma^{(1)} \left(\underline{\underline{B}}_1 - 4\underline{\underline{D}}_1 \right) \underline{Z}^{(1)} \\ \quad + \left(\gamma^{(2)} \left(\underline{\underline{B}}_1 - 4\underline{\underline{D}}_1 \right) + \frac{1}{2} \gamma^{(1)2} \left(\underline{\underline{B}}_2 - 4\underline{\underline{D}}_2 \right) \right) \underline{Z}^{(0)} \\ \quad + L \underline{\underline{C}}_0 \partial_x \underline{Z}^{(1)} + L \gamma^{(1)} \underline{\underline{C}}_1 \partial_x \underline{Z}^{(0)} - 2L^2 \underline{\underline{D}}_0 \partial_x^2 \underline{Z}^{(0)} \\ \quad + L^2 \underline{\underline{C}}_0 \partial_x^2 \underline{Y}^{(0)} - 2L \underline{\underline{D}}_0 \partial_x \underline{Y}^{(1)} - 2L \gamma^{(1)} \underline{\underline{D}}_1 \partial_x \underline{Y}^{(0)} = \left(\underline{\underline{R}}\underline{Z} \right)^{(2)} \end{array} \right. \quad (3.25)$$

3.5 Autres pseudo-périodicités

On donne ci-après la réécriture du problème discret pour les pseudo-périodicités à trois et quatre cellules. En pratique, la déduction du problème passé au continu est faite analytiquement par Mathematica, une fois renseignées les équations discrètes.

Le système discret à passer au continu puis développer asymptotiquement est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{B}}\underline{Y}_n - \frac{1}{4} \left[\underline{\underline{C}}\underline{\mathcal{D}}_1 - \underline{\underline{D}}\underline{\mathcal{D}}_2 \right] \underline{Y}_n - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \underline{\underline{C}}\underline{\mathcal{D}}_2 - \underline{\underline{D}}\underline{\mathcal{D}}_1 \right] \underline{Z}_n \\ \quad + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{D}} \right] \tilde{\mathcal{D}}_1 \underline{\mathbb{T}}_{n-1} - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \underline{\underline{C}} - \underline{\underline{D}} \right] \tilde{\mathcal{D}}_1 \underline{\mathbb{S}}_{n-1} = \underline{\underline{R}}\underline{Y}_n \\ \left[\underline{\underline{B}} - 4\underline{\underline{D}} \right] \underline{Z}_n + \frac{1}{4} \left[\underline{\underline{C}}\underline{\mathcal{D}}_1 - \underline{\underline{D}}\underline{\mathcal{D}}_2 \right] \underline{Z}_n + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \underline{\underline{C}}\underline{\mathcal{D}}_2 - \underline{\underline{D}}\underline{\mathcal{D}}_1 \right] \underline{Y}_n \\ \quad + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{D}} \right] \tilde{\mathcal{D}}_1 \underline{\mathbb{T}}_{n-1} + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \underline{\underline{C}} - \underline{\underline{D}} \right] \tilde{\mathcal{D}}_1 \underline{\mathbb{S}}_{n-1} = \underline{\underline{R}}\underline{Z}_n \\ \quad \left[\underline{\underline{B}} - 2\underline{\underline{D}} \right] \underline{\mathbb{S}}_n - \underline{\underline{C}}\underline{\mathbb{T}}_n \\ - \frac{1}{4} \underline{\underline{C}}\tilde{\mathcal{D}}_1 (\underline{Y}_{n-1} - \underline{Z}_{n-1} - \underline{\mathbb{T}}_{n-1}) + \frac{1}{2} \underline{\underline{D}}\tilde{\mathcal{D}}_1 (-\underline{Y}_{n-1} + \underline{Z}_{n-1} + \underline{\mathbb{T}}_{n-1}) = \underline{\underline{R}}\underline{\mathbb{S}}_n \\ \left[\underline{\underline{B}} - 2\underline{\underline{D}} \right] \underline{\mathbb{T}}_n + \underline{\underline{C}}\underline{\mathbb{S}}_n - \frac{1}{4} \underline{\underline{C}}\tilde{\mathcal{D}}_1 (-\underline{Y}_n - \underline{Z}_n - \underline{\mathbb{S}}_n) + \frac{1}{2} \underline{\underline{D}}\tilde{\mathcal{D}}_1 (-\underline{Y}_n - \underline{Z}_n + \underline{\mathbb{S}}_n) = \underline{\underline{R}}\underline{\mathbb{T}}_n \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Comme pour la pseudo-périodicité à trois cellules, on constate un découplage des équations régissant \underline{Y} et \underline{Z} à l'ordre dominant (correspondant aux modes à deux cellules, qu'on a déjà vu), mais un couplage à l'ordre dominant des équations en $\underline{\mathbb{S}}$ et $\underline{\mathbb{T}}$, donnant un mode couplé propre à la pseudo-périodicité à quatre cellules.

Chapitre 4

Résultats

Ce chapitre présente de manière synthétique les résultats obtenus (en commençant par les solutions de références fournies par le calcul aux éléments finis), de manière à illustrer tant les divers aspects de la méthode employée que le comportement physique du système étudié.

On rappelle que les raideurs adimensionnelles sont définies par les relations 2.33. On utilisera le rapport ξ entre longueur d'une poutre élémentaire et longueur de la poutre macroscopique :

$$\xi = \frac{\ell}{H} = \frac{1}{n_p} \quad (4.1)$$

On utilisera également la charge critique réduite \bar{N} , charge critique divisée par la charge critique de flambement d'Euler d'une poutre microscopique bi-rotulée :

$$\bar{N} = \frac{N \ell^2}{EI \pi^2} \quad (4.2)$$

On a également $\bar{N} = \frac{4}{\pi^2} \gamma^2$. Ainsi, \bar{N} vaut 1 pour le flambement d'une poutre élémentaire bi-rotulée, 4 pour le flambement d'une poutre élémentaire bi-encastée, ξ^2 pour le flambement de la poutre macroscopique bi-rotulée.

4.1 Modes critiques de flambement fournis par les éléments finis

On présente dans cette section quelques résultats et observations concernant les modes critiques de flambement du système, calculés par éléments finis comme décrit dans l'annexe C. L'objet du stage étant la validation d'une méthode d'homogénéisation, on ne s'étendra pas outre mesure sur ces résultats.

4.1.1 Résultats : déformées et charges critiques

L'annexe C présente un panorama complet des résultats des calculs aux éléments finis. La figure 4.1 résume ces résultats en montrant les déformées transversales du premier mode (donc le mode le plus critique de flambement) calculé par éléments finis, pour chaque cas de contraste de raideur étudié, avec $n_p = 8$ poutres élémentaires. Les charges critiques correspondant à ces modes critiques sont données en figure 4.2.

4.1.2 Commentaires sur les allures des déformées

Quelques observations s'imposent au vu de ces déformées. On pourra également consulter les commentaires faits à la section B.5.

4.1.2.1 Perte de périodicité pour des ressorts spiraux assez raides

Si, pour les raideurs faibles des ressorts spiraux, on constate des allures de déformées présentant un aspect périodique, ce n'est pas le cas quand les ressorts spiraux sont raides. Pour $\chi = 1$ ou $\chi = 10$, il apparaît plutôt une couche limite de flambement, où seules les poutres extrêmes (en gros, une ou deux poutres de chaque côté dans ce cas à huit poutres élémentaires) absorbent le flambement.

On imagine donc que le calcul homogénéisé, qui fait intervenir la pseudo-périodicité, aura quelque peine à prédire le flambement pour des ressorts spiraux trop raides.

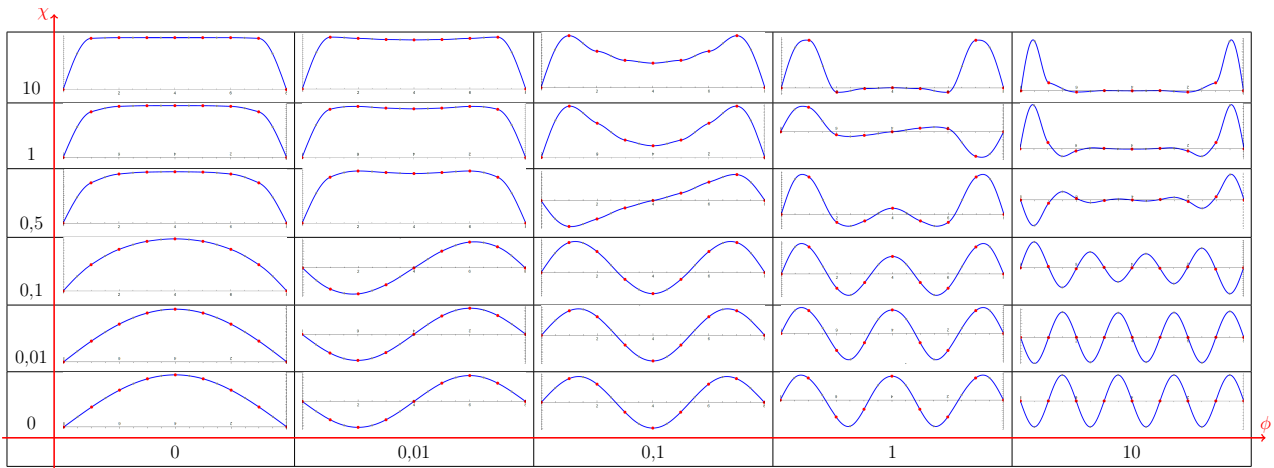


FIGURE 4.1 – Résultats des calculs aux éléments finis : déformées en translation des premiers modes prévus pour différents contrastes de raideurs.

10	0,779	0,831	1,098	1,622	2,226
1	0,725	0,792	1,055	1,549	2,079
0,5	0,675	0,756	1,007	1,502	1,975
0,1	0,465	0,623	0,865	1,385	1,719
0,01	0,246	0,474	0,765	1,315	1,593
0	0,196	0,450	0,750	1,305	1,577
	0	0,01	0,1	1	10

FIGURE 4.2 – Charges critiques adimensionnelles γ des premiers modes prévus par éléments finis.

4.1.2.2 Passage du flambement global au flambement distribué

Pour des ressorts spiraux très souples, on constate, lorsque la raideur des ressorts transversaux grandit, le passage progressif d'un flambement global (une seule arche de sinus sur l'ensemble de la poutre macroscopique) à un flambement distribué où chaque poutre élémentaire est fléchiée comme entre deux appuis rotulés.

Tous ces cas présentent une allure périodique, la longueur d'onde variant de $2H$ (flambement global quand aucun ressort n'est présent) à 2ℓ pour le flambement distribué où chaque poutre élémentaire présente une arche de sinus.

4.1.2.3 Symétries ou antisymétries par rapport au centre de la poutre macroscopique

À quelques exceptions près, on observe au sein d'une même colonne (c'est-à-dire à ressorts transversaux identiques) un même régime de symétrie. Commentons ici deux des exceptions :

- pour $\phi = 0,1$, la courbe à $\chi = 0,5$ présente une antisymétrie au lieu d'une symétrie ;
- pour $\phi = 1$, on observe la même chose pour $\chi = 1$.

La figure 4.3 montre qu'en réalité, pour ces deux cas, il y a deux modes de charges critiques très proches, l'un présentant une symétrie, l'autre une antisymétrie.

Ceci permet de mieux comprendre l'évolution, au sein des colonnes à ϕ constant, l'évolution de la déformée du premier mode quand les ressorts spiraux sont raidis : ils ont pour effet de redresser la poutre macroscopique au niveau des nœuds en amenuisant les oscillations vers le centre de la poutre, ce qui crée cette couche limite de flambement observée pour les ressorts spiraux très raidis.

4.1.2.4 Changement d'allure brutal pour $\phi = 0,01$

Dans la colonne $\phi = 0,01$ on peine *a priori* à faire le raisonnement ci-dessus, car il semble y avoir une discontinuité brutale dans le régime de flambement, présentant une allure de sinus pour χ jusqu'à 0,1, un pont bien plat au-dessus.

La figure 4.4 montre ici aussi l'existence de deux modes, dont les charges critiques sont proches pour χ voisin de 0,1, et qui se rencontrent quelque part entre 0,10 et 0,11 (en l'occurrence entre 0,107 et 0,108, comme on le voit sur les courbes de la section C.9).

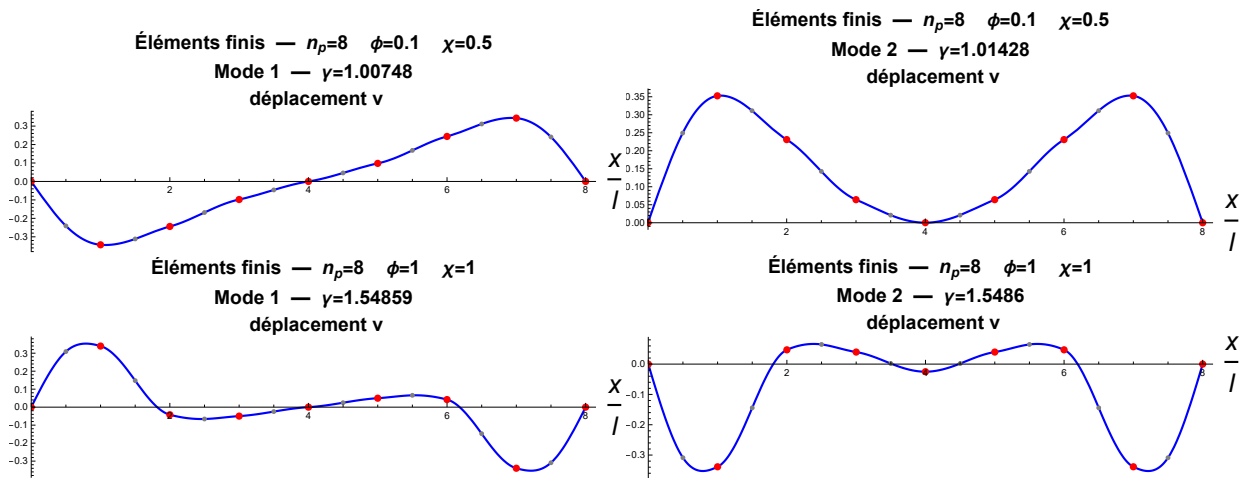


FIGURE 4.3 – Résultats des calculs aux éléments finis : modes 1 et 2 pour deux cas.

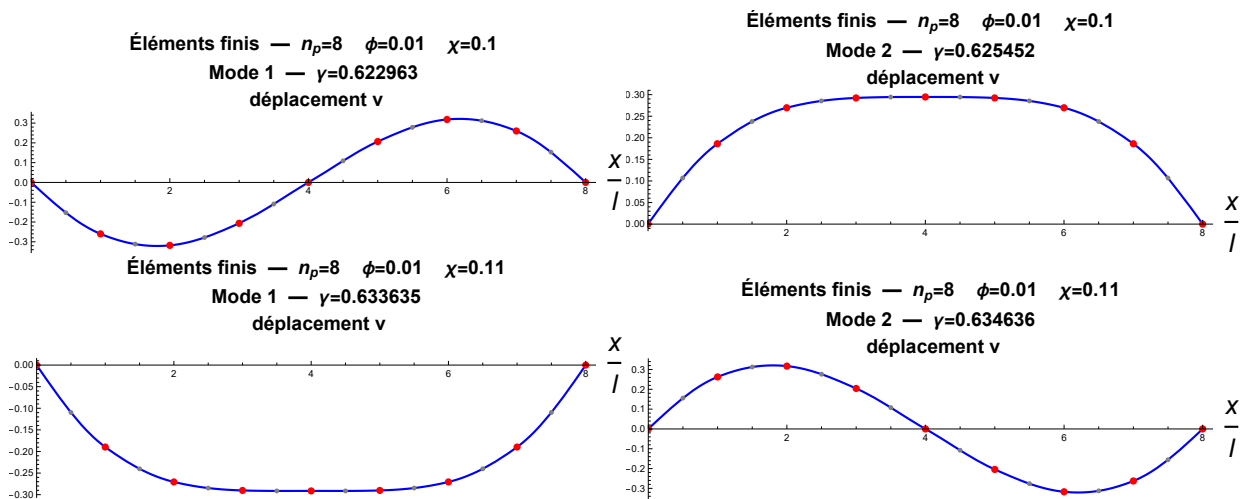


FIGURE 4.4 – Résultats des calculs aux éléments finis : modes 1 et 2 pour deux cas à $\phi = 0,01$.

4.1.3 Bilan sur les résultats aux éléments finis

L'évolution globale des charges critiques prévues par éléments finis est conforme à l'intuition : plus les ressorts sont raides, plus la structure macroscopique est raide et difficile à faire flamber, plus les charges critiques sont élevées.

Certains commentaires sur lesdites charges critiques ont été faits à la section B.5 ; on reprend ici schématiquement ces observations ; il est bon au préalable de se rappeler la section 2.5.2 et en particulier le tableau 2.1 donnant les valeurs de γ pour diverses conditions aux limites. La figure 4.5 résume les observations faites à la section B.5 sur les comportements limites observés.

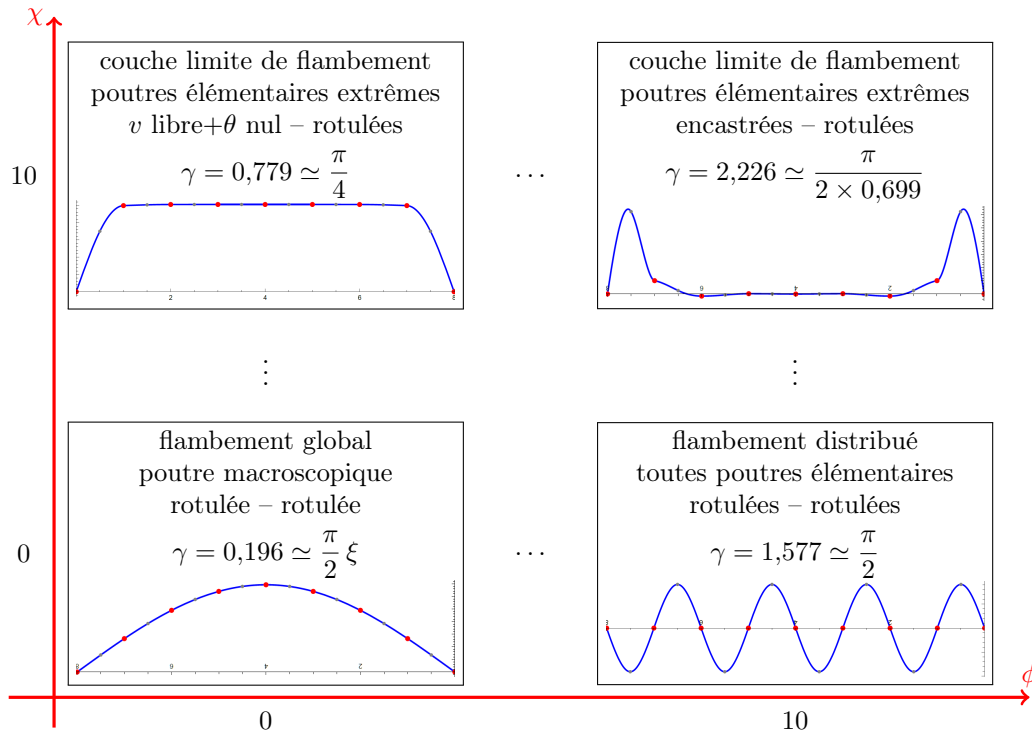


FIGURE 4.5 – Résumé schématique des significations des charges limites de flambement.

4.2 Homogénéisation : pseudo-périodicité à une cellule

Cette section a pour vocation de présenter les résultats obtenus avec le calcul homogénéisé en régime de pseudo-périodicité à une cellule. Dans l'idéal, il faudrait faire ce travail pour chaque type de mode étudié par le calcul homogénéisé, mais le temps nous a manqué pour ce faire. Les résultats bruts pour les modes en pseudo-périodicité à deux cellules se trouvent en annexe F.

4.2.1 Équations

La figure 4.6 présente une synthèse des équations obtenues pour la pseudo-périodicité à une cellule. À chaque fois, l'équation différentielle régissant la variable cinématique dominante est donnée (avec un facteur 1 devant la dérivée d'ordre le plus élevé de l'équation), puis l'expression de $\gamma^{(0)}$ et la relation liant les variables cinématiques. On a aussi noté γ_s , valeur de γ aux ordres supérieurs, pour faire apparaître une forme compacte dans l'équation différentielle (et donc, parfois, $\gamma_s = \gamma^{(0)}$).

Par souci de simplification, lorsqu'il est écrit f_i ou f'_i seul, il faut lire $f_i(\gamma^{(0)})$ ou $f'_i(\gamma^{(0)})$.

On n'a donné ici d'expressions que pour les solutions modulées (cases blanches et jaunes). Les cases grisées sont les situations pour lesquelles il n'émerge aucune cinématique pour une pseudo-périodicité à une cellule. Les cases jaunes et les cases pourpres sont celles pour lesquelles existe une possibilité de cinématique à θ uniforme.

Trois courbes de déformées transversales, typiques des modes de flambement rencontrés, sont présentées pour fixer les idées. Elles sont obtenues avec résolution des équations différentielles avec deux appuis extrêmes rotulés (à noter qu'une correction sur la prise en compte des conditions aux limites changera l'allure de la déformée pour le cas $\phi = 0$, $\chi = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, comme on le verra en section 5.1.2).

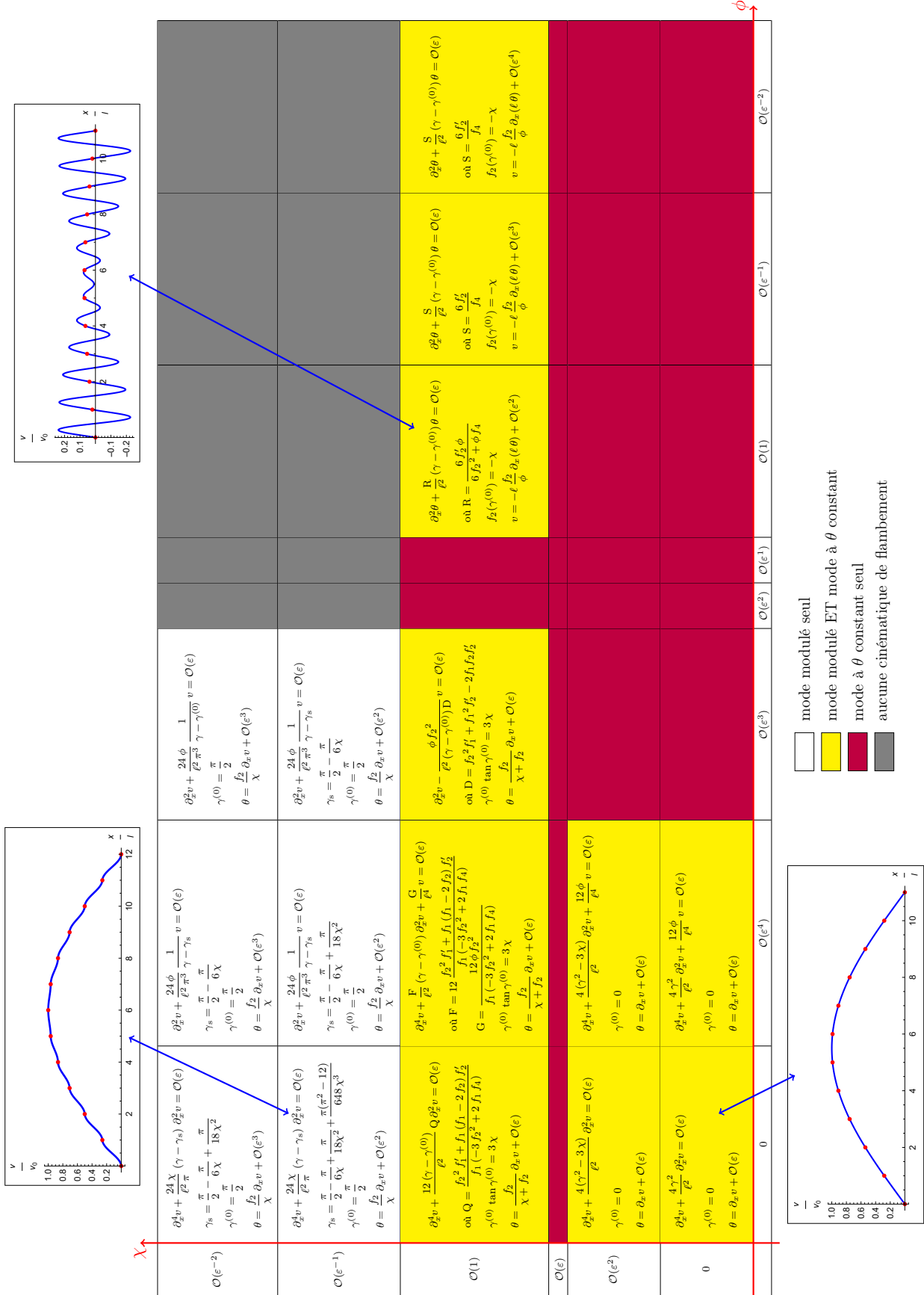


FIGURE 4.6 – Synthèse des équations obtenues pour les modes pseudo-périodiques à une cellule, en fonction des différents ordres de grandeur des raideurs des ressorts. Les trois déformées présentées sont obtenues avec des appuis extrêmes rotulés.

4.2.2 Les différents modes de flambement

On identifie trois zones bien distinctes, en dehors desquelles aucun mode de flambement modulé n'est prévu par le calcul homogénéisé.

Deux zones, pour des ressorts de translation très souples (ϕ d'ordre inférieur ou égal à ε^3), sont des zones de flambement global : le mode de flambement modulé en pseudo-périodicité à une cellule est piloté par le déplacement transversal v et la poutre macroscopique présente une allure correspondant au premier mode de flambement d'une poutre d'Euler de longueur H .

Au sein de cette partie à flambement global, l'effet des ressorts spiraux se fait sentir pour χ assez élevé, par le maintien de l'angle aux nœuds des poutres élémentaires : voilà pourquoi on retrouve dans ce cas γ voisin de $\frac{\pi}{2}$, qui correspond à la charge critique de flambement d'une poutre élémentaire d'extrémités à déplacements libres mais aux rotations empêchées.

Pour des ressorts de translation plus raides (ϕ d'ordre supérieur ou égal à 1) avec des ressorts de rotation de raideur du même ordre de grandeur que la raideur de flexion des poutres élémentaires, il y a une zone de flambement distribué, où l'angle θ pilote la modulation, avec γ supérieur à π , qui correspond au mode 2 du flambement d'Euler d'une poutre élémentaire dont les déplacements aux extrémités sont empêchés mais les rotations libres. Il faut noter que ces modes à θ modulé sont à rapprocher des modes à θ uniformes, prédits par le calcul dans cette gamme de valeurs de ϕ pour χ en dessous de $\mathcal{O}(1)$.

Quant aux cinématiques à θ constant, elles sont rendues possibles dès que les ressorts spiraux sont assez souples (ϕ inférieur ou égal à $\mathcal{O}(1)$).

4.2.3 Observations générales

Toutes les équations différentielles, en v comme en θ , peuvent se mettre sous la forme

$$A \partial_x^4 w + \frac{B}{\ell^2} (\gamma^2 - \gamma_s^2) \partial_x^2 w + \frac{C}{\ell^4} w = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (4.3)$$

où w désigne v ou θ , et où A , B et C sont des fonctions de $\gamma^{(0)}$, χ et ϕ , de sorte que tous les termes de l'équation différentielle sont du même ordre de grandeur.

En effet, on peut écrire $\gamma^2 - \gamma_s^2 = (\gamma - \gamma_s)(\gamma + \gamma_s)$. Or, $\gamma = \gamma_s + \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha)$, où l'ordre α est au moins égal à 1 vu la définition de γ_s . Donc on peut écrire $\gamma^2 - \gamma_s^2 = (\gamma - \gamma_s)(2\gamma_s + \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha))$, ce qui permet bien d'écrire toutes les équations sous la forme ci-dessus même quand c'est $\gamma - \gamma_s$ qui apparaît.

Au sein d'une même colonne (ϕ constant) ou d'une même ligne (χ constant), on peut observer comment est faite la prise en compte des variations de l'autre raideur. Par exemple, en partant de la case $\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^4)$, $\chi = \mathcal{O}(1)$ où $\gamma^{(0)}$ est solution de $\gamma^{(0)} \tan \gamma^{(0)} = -3\chi$:

- si l'on raidit les ressorts spiraux (χ augmente) sans changer ϕ , alors $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2}$, plus petite solution de $\gamma^{(0)} \tan \gamma^{(0)} \rightarrow +\infty$; or comme alors $f_1(\gamma^{(0)}) = 0$ les dénominateurs des facteurs F et G s'annulent, ce qui revient à éliminer le terme en $\partial_x^4 v$, et l'on retrouve les équations de la case au-dessus;
- au contraire si on assouplit les ressorts spiraux (χ diminue) sans changer ϕ , alors $\gamma^{(0)} = 0$, solution de $\gamma^{(0)} \tan \gamma^{(0)} \rightarrow 0$ et l'on voit apparaître l'équation de la case du dessous;
- si l'on raidit les ressorts transversaux (ϕ augmente) sans changer χ , alors facteur G du le terme en v grandit mais pas le terme en $\partial_x^4 v$, ce qui donne l'équation présente en case de droite;
- au contraire si l'on assouplit les ressorts transversaux (ϕ diminue) sans changer χ , alors le terme G disparaît de l'équation différentielle, ce qui élimine le terme en v et donne l'équation en case de gauche.

On remarque que pour tous ces modes à pseudo-périodicité à une cellule, la valeur de $\gamma^{(0)}$ (ou de γ_s) est déterminée par la raideur des ressorts spiraux χ . La raideur des ressorts transversaux intervient, elle, dans les coefficients de l'équation différentielle pilotant la modulation ou dans les relations entre variables cinématiques. Cette observation est propre aux modes à une cellule, ce ne sera pas le cas pour les modes à plus d'une cellule.

L'absence de flambement possible en pseudo-périodicité à une cellule, pour les ressorts raides (portion en haut à droite du tableau) s'interprète comme une rigidité excessive donnée à la poutre macroscopique par les ressorts, qui interdit d'envisager le flambement en pseudo-périodicité à une cellule. Nous n'avons en revanche pas spécialement d'explication physique à donner au fait qu'aucun mode modulé n'émerge, en régime de pseudo-périodicité à une cellule, pour certaines autres valeurs des ordres de grandeurs des raideurs, comme $\chi = \mathcal{O}(\varepsilon)$, $\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ou $\phi = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

4.3 Charges critiques pour tous les modes étudiés

Les figures 4.7, 4.9 et 4.12 présentent une vue d'ensemble des résultats concernant les charges critiques de flambement, dans divers cas de valeurs des raideurs ϕ et χ , pour $n_p = 24$ poutres élémentaires.

4.3.1 Présentation des courbes

Les courbes présentent les valeurs de \bar{N} , charge critique adimensionnelle de flambement, pour chaque type de régime de pseudo-périodicité, en fonction de la raideur ϕ , la raideur χ étant fixée, ou bien en fonction de χ , à ϕ fixé. Les tracés sont présentés avec une échelle logarithmique en abscisse, entre $-2,5$ et $+2,5$. À chaque fois, le ressort est plus raide vers la droite, plus souple vers la gauche. On a pris $\varepsilon = 0,1$ arbitrairement. Ainsi, par exemple, $\chi = \varepsilon^{-1}$ sera à lire à l'abscisse $\log \chi = 1$. Attention, les échelles en ordonnées ne sont pas les mêmes sur tous les graphiques.

Sauf exceptions, les calculs de γ , donc de \bar{N} , sont faits à l'ordre ε^2 au moins. Les exceptions sont hélas les cas où $\phi = \mathcal{O}(1)$ ou $\chi = \mathcal{O}(1)$ ou les deux, pour lesquels on doit se limiter à ε^1 car les calculs analytiques sont trop grands pour aboutir sous Mathematica.

Chaque graphique présente d'une part, les résultats obtenus par calcul aux éléments finis, pour le premier mode (on a tracé une courbe continue, lissée par interpolation à partir de points discrets). D'autre part, les résultats des calculs par la méthode d'homogénéisation sont présentés morceaux par morceaux. Une couleur désigne un mode recherché :

- noir pour la pseudo-périodicité sur une cellule élémentaire ;
- pour la pseudo-périodicité sur deux cellules élémentaires, on ne représente que les modes spécifiques, le mode à une cellule étant déjà tracé ; on distingue le cas où les angles aux nœuds sont nuls au premier ordre (mode qu'on a nommé *antipériodique en déplacement*), en bleu, le cas où les déplacements aux nœuds sont nuls au premier ordre (mode *antipériodique en angle*), en rouge, et le cas où les deux ne sont pas nuls (mode *antipériodique tout court*), en gris ;
- pour la pseudo-périodicité à trois cellules (violet) ou quatre cellules (vert), on représente le mode modulé double.

On distingue pour chaque couleur que la courbe présente plusieurs tronçons. Ils correspondent aux différents ordres de grandeur des valeurs de ϕ et χ étudiés un par un. Comme on a arbitrairement pris $\varepsilon = 0,1$, on a choisi que les frontières entre les différents cas soient aux moitiés d'impairs en échelle logarithmique, avec une petite marge de recouvrement.

Ainsi, par exemple, on voit sur la figure 4.9 le tracé de \bar{N} en fonction de ϕ , dans le cas où $\chi = 0$, pour le mode antipériodique en déplacement (courbe bleue). Le calcul n'a donné un résultat que pour $\phi = \mathcal{O}(1)$, donc le tracé est fait entre $\log \phi = -0,6$ et $\log \phi = 0,6$.

On a tracé tous les tronçons disponibles à la suite du calcul. Si une portion de courbe est absente c'est que le calcul ne donne rien d'autre que la cinématique nulle pour ces paramètres. C'est le cas par exemple avec $\phi = 0$, pour $\chi = \mathcal{O}(\varepsilon)$, pour le mode pseudo-périodique sur une cellule : voilà pourquoi la courbe noire du bas manque entre $\log \phi = -1,4$ et $\log \phi = -0,6$ sur la figure 4.7.

Pour les modes à angle constant, le tracé n'a pas toujours été fait par souci de clarté des courbes étant donné que les valeurs de γ sont très proches de celles du mode modulé correspondant.

4.3.2 Bilan sans ressorts de translation transversale

La figure 4.7 montre les résultats sans ressorts de translation transversale ($\phi = 0$). Il y a deux courbes noires : celle qui se situe vers $\bar{N} = 4$ correspond au mode à θ constant, celle en dessous de $\bar{N} = 1$ correspond au mode modulé.

Lorsque les ressorts de rotation sont très souples ($\log \chi$ voisin de -2), le calcul avec le mode à une cellule rejoint le calcul aux éléments finis, pour $\bar{N} = \xi^2$: il s'agit de la charge critique de flambement de la poutre macroscopique.

En revanche, lorsque les ressorts de rotation sont très raides, aucun des régimes de périodicité étudié ne coïncide avec les résultats des éléments finis. Tous les modes qui existent pour les grandes valeurs de $\log \chi$ convergent vers $\bar{N} = 1$, charge critique de flambement d'une poutre élémentaire bi-rotulée, qui est également la charge critique de flambement d'une poutre élémentaire où les deux appuis sont empêchés en rotation, mais libres de se déplacer, comme le montre la figure 4.8.

On constate qu'hormis pour les très faibles raideurs des ressorts spiraux, le calcul par homogénéisation périodique ainsi mené échoue à prédire le premier mode de flambement, dont on a pu voir sur la figure de calcul aux éléments finis qu'il est localisé aux deux poutres extrêmes ; la charge critique est celle d'une poutre élémentaire encastree-libre, $\bar{N} = \frac{1}{4}$ ou $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

4.3.3 Bilan sans ressorts de rotation

La figure 4.9 montre les résultats sans ressorts de rotation ($\chi = 0$). (Sur cette figure on a tracé en pointillés une partie rouge, ce qui sera expliqué dans la discussion à la section 5.2.1.)

Bilan tous modes, $\phi=0$, $n_p=24$

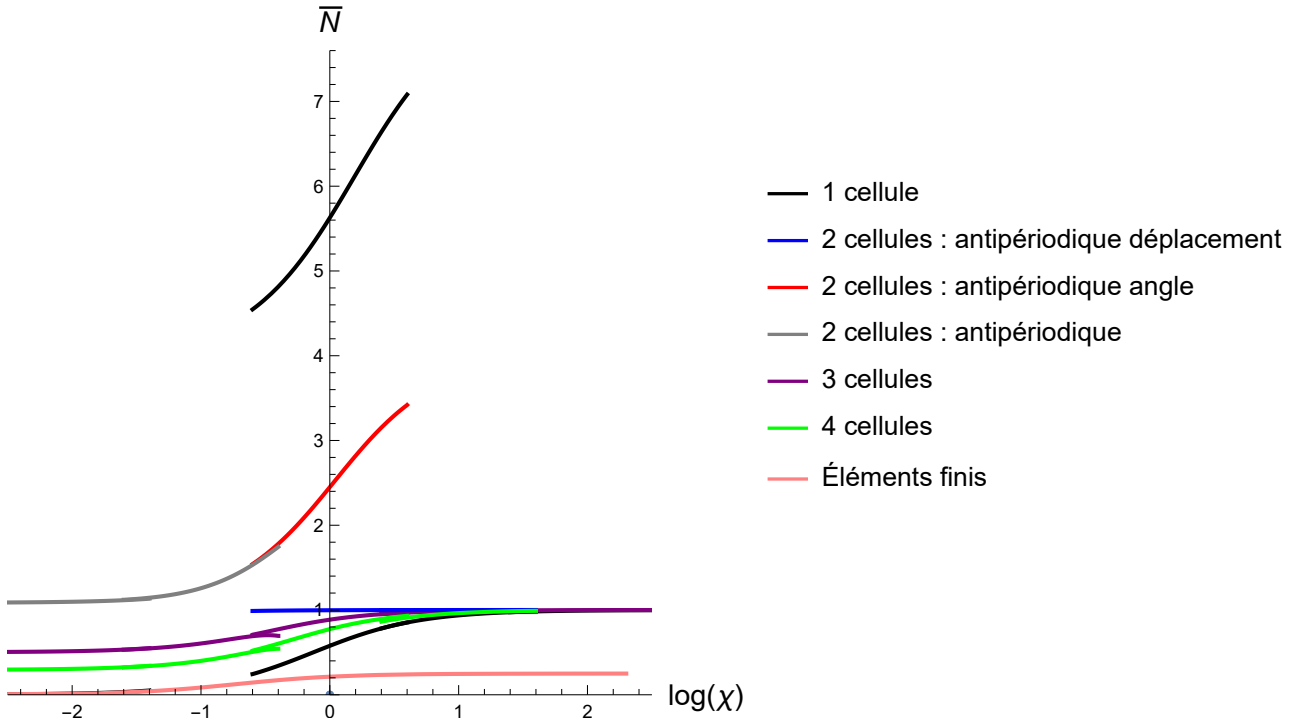


FIGURE 4.7 – Bilan pour tous les modes étudiés, sans ressorts transversaux ($\phi = 0$), lorsque la raideur χ des ressorts spiraux varie. Comparaison avec les résultats des calculs aux éléments finis.

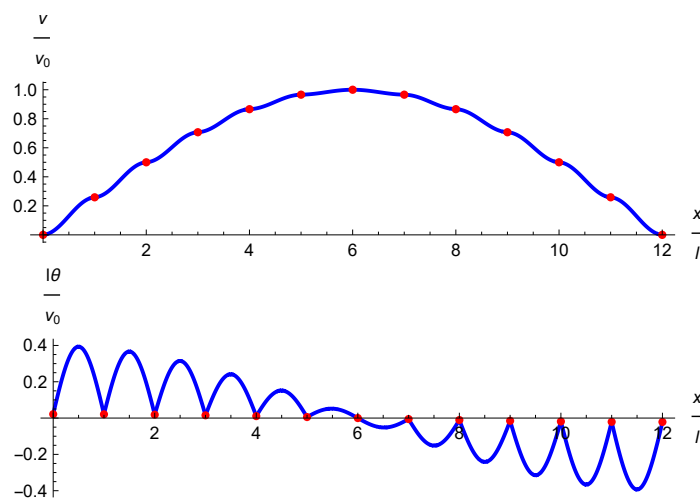


FIGURE 4.8 – Déformées en déplacement (en haut) et rotation (en bas) pour $\phi = 0$, $\chi = 10$, $n_p = 24$, avec pseudo-périodicité à une cellule.

Bilan tous modes, $\chi=0$, $n_p=24$

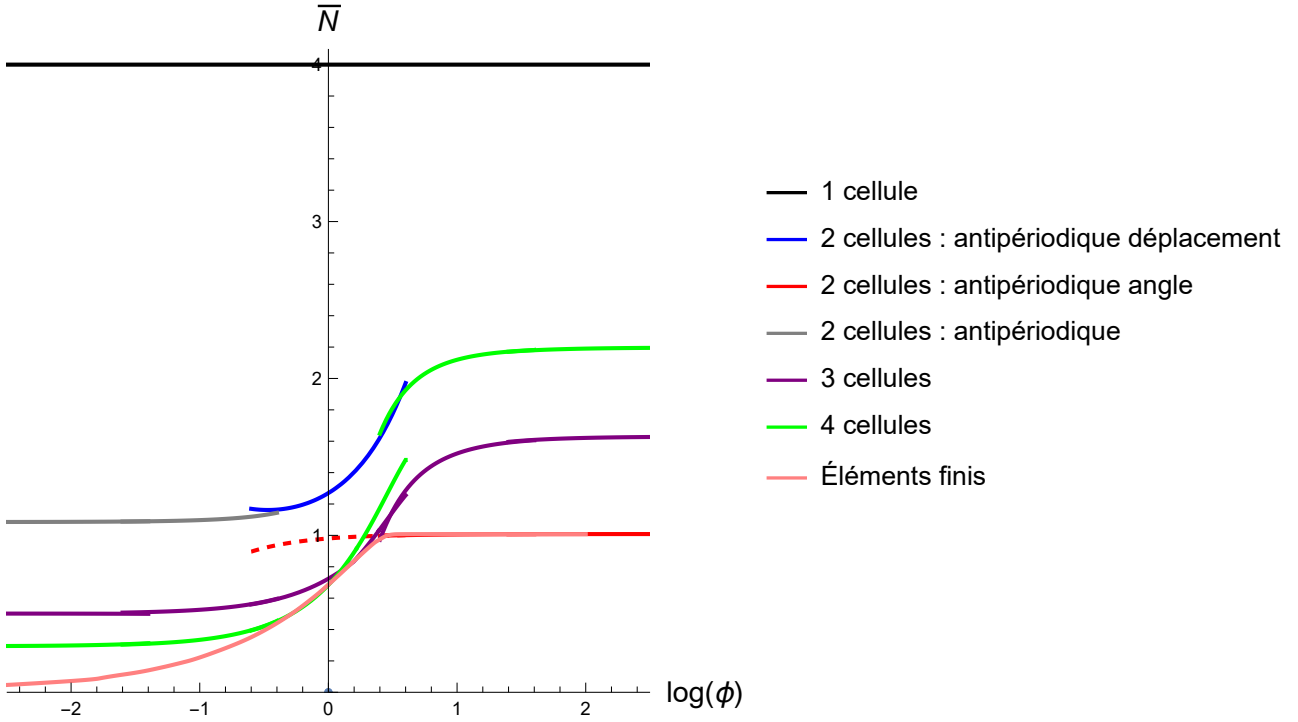


FIGURE 4.9 – Bilan pour tous les modes étudiés, sans ressorts spiraux ($\chi = 0$), lorsque la raideur ϕ des ressorts transversaux varie. Comparaison avec les résultats des calculs aux éléments finis.

Le mode pseudo-périodique à une cellule qui apparaît pour toute valeur de ϕ est un mode où l'angle aux nœuds est uniforme et le déplacement nul. La charge critique est $\bar{N} = 4$, ce qui correspond au deuxième mode pour une poutre élémentaire bi-rotulée, comme l'explique la déformée visible en figure 4.10.

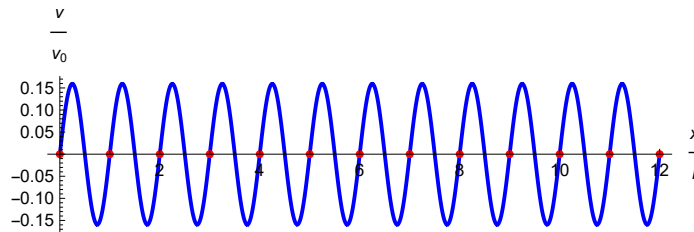


FIGURE 4.10 – Déformée en déplacement pour $\phi = 0$, $\chi = 0$, $n_p = 12$, avec pseudo-périodicité à une cellule.

La forte discontinuité observée dans la courbe du mode à quatre cellules est certainement due au fait que γ n'est calculé qu'à l'ordre ε pour $\phi = \mathcal{O}(1)$.

Pour $\phi = \mathcal{O}(1)$ ou $\phi = \mathcal{O}(\varepsilon)$, le premier mode de flambement prédit par éléments finis est celui des modes spécifiques à trois cellules ou quatre cellules, et l'on devine que si le calcul de pseudo-périodicité à cinq cellules ou plus avait été fait, l'enveloppe des courbes correspondantes reproduirait l'allure de la courbe aux éléments finis. À l'extrémité gauche, pour les deux types de ressorts infiniment souples, on doit retrouver le flambement de la poutre macroscopique à une arche de sinus, donc de périodicité $2H$, ou $2n_p$ cellules (avec $\bar{N} = \xi^2$).

On constate que le mode à deux cellules antipériodique en angle coïncide, pour les grandes raideurs ϕ , avec la prédiction aux éléments finis (les deux courbes sont indiscernables sur le graphique), avec $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ou $\bar{N} = 1$, charge de flambement d'une poutre élémentaire bi-rotulée. Cependant, si l'on est plus précis on constate qu'il y a en réalité deux modes superposés :

- le mode où $\nu^{(-1)}$ est uniforme, avec périodicité parfaite (voir figure 4.11, en haut), pour lequel $\gamma = \frac{\pi}{2}$ exactement ;
- le mode où $\nu^{(-1)}$ est modulé en amplitude (figure 4.11, en bas), pour lequel

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^3 \xi^2}{8} - \frac{\pi^5 \xi^2}{24\phi} + o(\xi^2) \quad (4.4)$$

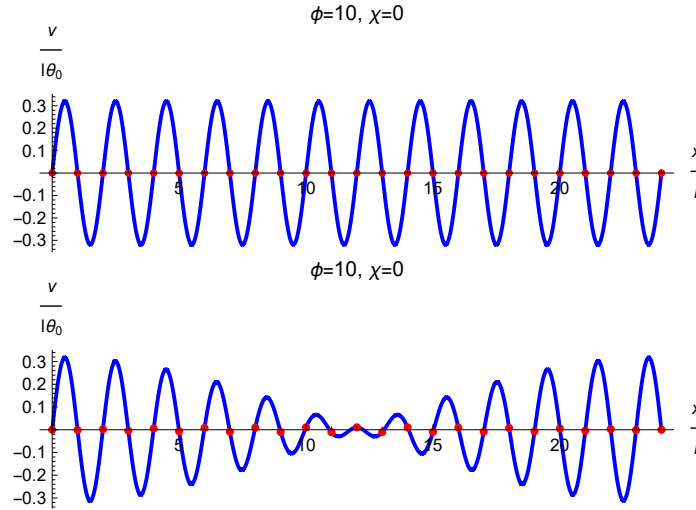


FIGURE 4.11 – Déformées en déplacement $\phi = 10$, $\chi = 0$, $n_p = 24$, avec pseudo-périodicité à deux cellules : le mode exactement antipériodique (en haut) et le mode modulé (en bas).

Quoi qu'il en soit, la prédiction du premier mode de flambement par la méthode utilisée est possible.

4.3.4 Bilans pour $\phi = \mathcal{O}(1)$ et $\chi = \mathcal{O}(1)$

La figure 4.12 montre les résultats avec les raideurs des ressorts de même ordre de grandeur que la raideur de flexion des poutres élémentaires : $\phi = 1$ avec χ variable, à gauche, et $\chi = 1$ avec ϕ variable, à droite. Sur ces graphiques aussi les discontinuités fortes observées pour les modes à trois ou quatre cellules viennent du fait que le calcul de γ est fait à l'ordre ε^1 et pas ε^2 pour le cas où on a conjointement $\phi = \mathcal{O}(1)$ et $\chi = \mathcal{O}(1)$.

On constate ici aussi que dès lors que χ est trop élevé (typiquement supérieur à l'ordre ε^2), les différents modes calculés par la technique d'homogénéisation échouent à obtenir le mode de flambement de plus faible charge critique.

4.4 Commentaires sur les résultats

4.4.1 Influence de la raideur des ressorts spiraux

On l'a vu, dès que la raideur des ressorts spiraux n'est pas nulle, la méthode de calcul par homogénéisation ne parvient pas à déterminer la charge critique de flambement la plus faible donnée par le calcul aux éléments finis. La figure 4.13, qui réalise un zoom de la figure 4.7, montre que la valeur de γ prédite par le calcul par homogénéisation s'écarte notablement de la valeur obtenue par calcul aux éléments finis dès que χ excède ε^2 .

Ceci s'explique par la forme de la déformée de ce premier mode de flambement. La figure 4.14 montre que cette forme s'éloigne rapidement de l'arche de sinus au-delà de $\chi = 0,01$.

Or, le calcul par homogénéisation avec $\phi = 0$ et $\chi = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ fournit les expressions suivantes pour γ aux différents ordres :

$$\gamma^{(0)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \sqrt{3\chi + \frac{b^2 \xi^2}{4}} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(3)} = -\frac{3\chi^2}{2\hat{\gamma}^{(1)}} \quad \hat{\gamma}^{(4)} = 0 \quad (4.5)$$

avec b déterminé à l'aide des conditions aux limites, indépendant de χ , très voisin de π , en l'occurrence un développement limité montre que $b = \pi + \frac{\pi^3 \xi^3}{15} + o(\xi^3)$ (ceci étant réalisé avec la prise en compte des conditions aux limites conformément à la solution émergente dans la discussion que l'on verra en section 5.1).

Le déplacement d'un nœud n pouvant s'écrire sous la forme $v_n = a_1 \sin(bn\xi) + a_2 \cos(bn\xi) + a_3 n\xi + a_4$, on comprend que la déformée fournie par le calcul par homogénéisation est indépendante de χ pour ce qui concerne les valeurs aux nœuds et ne diffère pas, aux nœuds, de l'arche de sinus obtenue pour $\chi = 0$.

En résumé, le calcul par homogénéisation ne peut prédire correctement à la fois la valeur de la charge critique et l'allure de la déformée que si χ ne dépasse guère 10^{-2} . Au-delà, l'écart est sensible. Ceci a été vérifié avec $\phi = 0$, ce qui correspond à un flambement global, mais est vérifiable aussi pour d'autres valeurs de ϕ , dans les cas où le flambement est distribué.

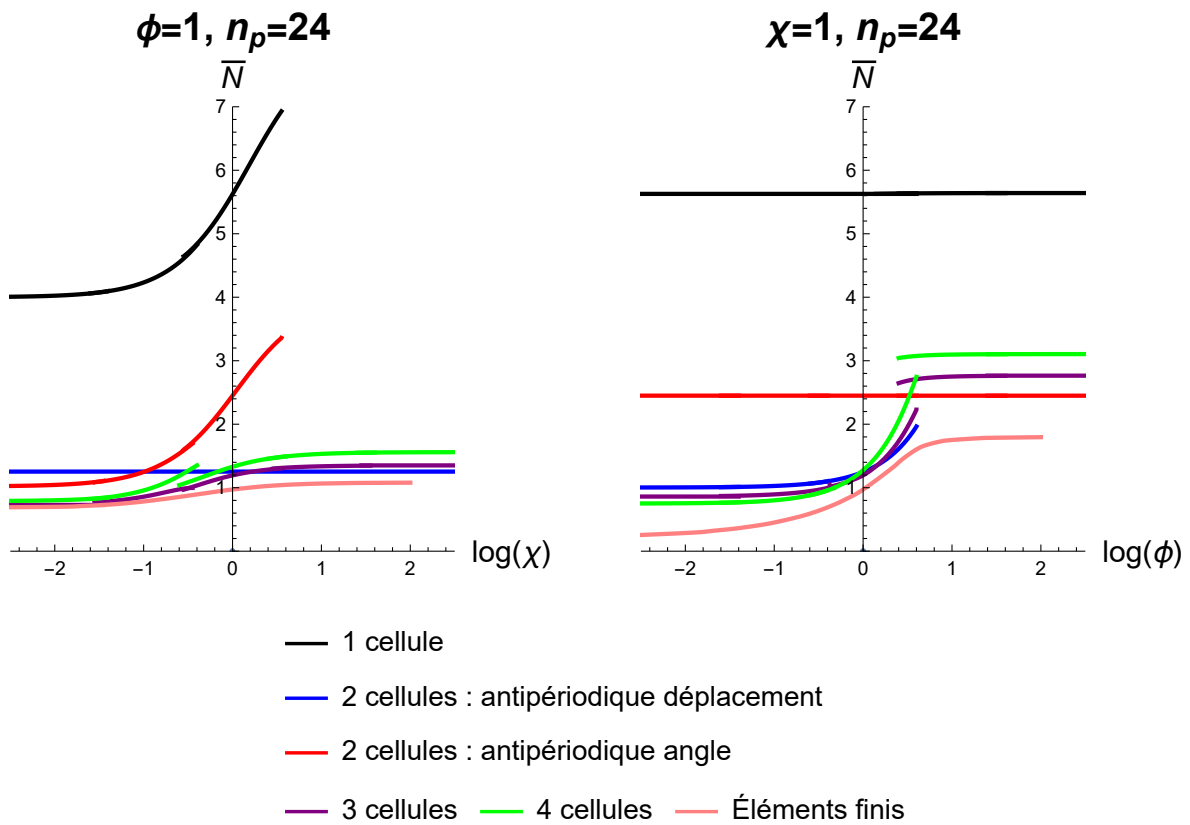


FIGURE 4.12 – Bilan pour tous les modes étudiés, avec $\phi = \mathcal{O}(1)$, lorsque χ varie (à gauche) et avec $\chi = \mathcal{O}(1)$ lorsque ϕ varie (à droite). Comparaison avec les résultats des calculs aux éléments finis.

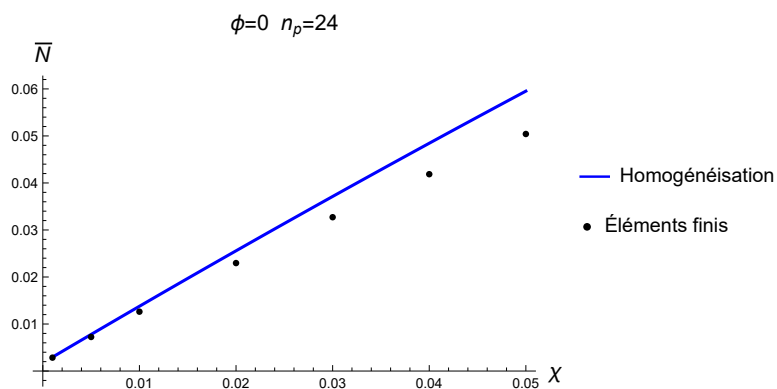


FIGURE 4.13 – Valeurs de γ du mode 1 calculée par éléments finis, et valeurs de γ (à l'ordre ε^4 près) fournies par le calcul par homogénéisation (mode pseudo-périodique à une cellule), pour $\phi = 0$ en fonction de $\chi = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

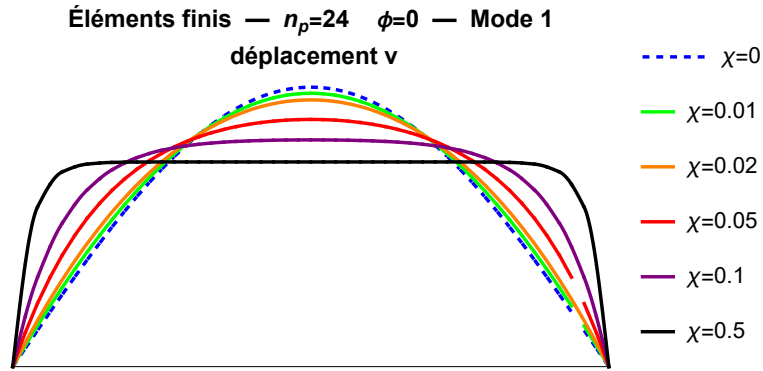


FIGURE 4.14 – Déformées en déplacement pour plusieurs valeurs de $\chi = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, obtenues par calcul aux éléments finis.

4.4.2 Prédiction des modes de flambement distribués dans le cas $\chi = 0$ et ϕ élevé

La figure 4.9 montre que le calcul par homogénéisation parvient à obtenir le mode de flambement de plus petite charge critique lorsque $\chi = 0$. Par exemple, pour $\chi = 10$ (ressorts de translation transversale très raides), il y a superposition entre les résultats aux éléments finis et la courbe du mode antipériodique en angle sur deux cellules.

La figure 4.15 montre le bon accord à la fois de la valeur de γ et de l’allure des déformées pour le premier mode prédit par le calcul aux éléments finis. Il s’agit du mode exactement périodique où les nœuds n’ont pas de déplacement transversal et où la variable cinématique ν est constante, c’est-à-dire où les angles aux nœuds sont alternés. Alors, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ exactement d’après le calcul homogénéisé.

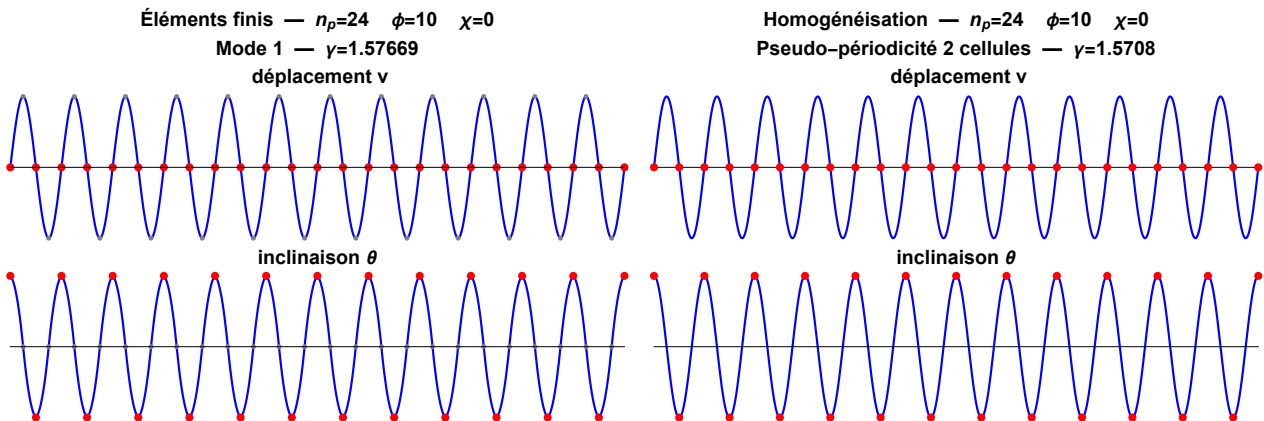


FIGURE 4.15 – Déformées en déplacement et angle pour $\chi = 0$, $\phi = 10$, $n_p = 24$: comparaison entre le premier mode donné par le calcul aux éléments finis (à gauche) et le calcul homogénéisé à ν constant (à droite).

Il existe un mode de γ très proche, antipériodique en angle également, modulé en amplitude, prédit à la fois par les éléments finis (c’est le deuxième mode) et le calcul par homogénéisation. La figure 4.16 montre les déformées correspondantes.

Pour ces deux cas, la prédiction est très bonne à la fois pour les valeurs des charges critiques et l’allure des déformées.

4.4.3 Prédiction des modes de flambement distribués dans le cas $\chi = 0$ et $\phi = \mathcal{O}(1)$ ou moins

On illustre ici le fait que dans le cas $\chi = 0$, il paraît toujours possible de déterminer à l’aide du calcul par homogénéisation le premier mode de flambement prévu par le calcul aux éléments finis.

4.4.3.1 Comparaison avec les éléments finis

La figure 4.17 montre cinq cas où $\phi = \mathcal{O}(1)$, zone de transition où la périodicité des modes varie. À gauche, les déformées en déplacement données par le calcul aux éléments finis, pour le mode de plus petite charge

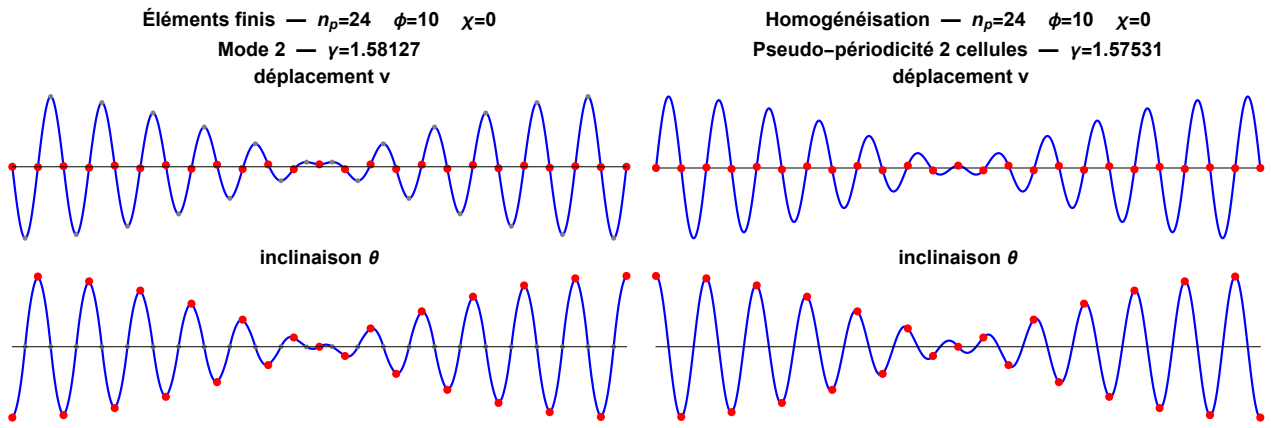


FIGURE 4.16 – Déformées en déplacement et angle pour $\chi = 0$, $\phi = 10$, $n_p = 24$: comparaison entre le deuxième mode donné par le calcul aux éléments finis (à gauche) et le calcul homogénéisé à ν modulé (à droite).

critique. À droite, les déformées obtenues par le calcul par homogénéisation, avec une pseudo-périodicité bien choisie.

Dans les quatre cas l'accord des valeurs de γ est bon et l'allure des déformées paraît convenable (avec des différences sensibles au voisinage des extrémités toutefois).

4.4.3.2 Possibilité de déterminer le mode de flambement le plus critique

On le voit, la détermination du mode de flambement le plus critique paraît toujours possible dans le cas $\chi = 0$, dans le cas $\phi = O(1)$, pour peu que l'on parvienne à sélectionner le bon cas de pseudo-périodicité et la bonne valeur de q . Nous extrapolons ceci aux cas, non étudiés, où ϕ est encore plus faible, et où les modes de flambement les plus critiques ont une pseudo-périodicité à nombre de cellules plus élevée (par exemple pour $\phi = 0,1$ le calcul aux éléments finis montre un premier mode de périodicité sur six cellules).

Les valeurs de ϕ ont été choisies pour illustrer le caractère délicat de la sélection du type de pseudo-périodicité à utiliser dans le calcul par homogénéisation, pour sélectionner le mode qui est effectivement celui de plus faible charge critique.

Rappelons que dans le processus de calcul par homogénéisation, pour ces modes à pseudo-périodicité sur trois ou quatre cellules, une étape consiste à résoudre une équation différentielle d'ordre deux sur une variable cinématique, ce qui, compte tenu des conditions aux limites, conduit à une condition de quantification de mode. Pour fixer les idées, écrivons que cette condition de quantification conduit à une expression de $\hat{\gamma}^{(1)}$ sous la forme $\hat{\gamma}^{(1)} = q \pi \xi g_1(\gamma^{(0)})$, avec $q \in \mathbb{Z}^*$ a priori.

On discutera dans la section 5.2 que le raisonnement consistant à rechercher la plus faible charge critique, donc le plus faible γ , conduirait à éliminer comme non physiques les cas où $\hat{\gamma}^{(1)}$ est une fonction décroissante de q , ainsi que les cas où $\hat{\gamma}^{(1)}$ est une fonction croissante de q mais où q peut être négatif. Ce raisonnement conduirait donc à choisir d'écrire $\hat{\gamma}^{(1)} = q \pi \xi |g_1(\gamma^{(0)})|$ avec $q \in \mathbb{N}^*$, et alors la plus petite charge critique serait obtenue pour $q = 1$. Or, on verra que ceci conduit à éliminer des modes de flambement pourtant effectivement obtenus par éléments finis.

Ici, ce point est particulièrement crucial. En effet, voici comment ont été obtenues les déformées issues du calcul par homogénéisation, et correspondant aux premiers modes prédits par éléments finis, pour la figure 4.17 :

- pour $\phi = 2$, on a sélectionné la pseudo-périodicité à trois cellules, en dérogeant à la règle de la croissance de $\hat{\gamma}^{(1)}$ en l'ordre du mode, et en choisissant le mode $q = -1$;
- pour $\phi = 0,86$, on a sélectionné la pseudo-périodicité à trois cellules, avec cette fois $q = -2$;
- pour $\phi = 0,85$, c'est la pseudo-périodicité à quatre cellules, avec de même $q = -2$;
- pour $\phi = 0,8$, c'est la pseudo-périodicité à quatre cellules, avec $q = -1$;
- pour $\phi = 0,6$, c'est la pseudo-périodicité à quatre cellules, pour le mode à angle constant.

La détermination du mode le plus critique est donc certes possible, mais avec la difficulté qu'il faut pouvoir choisir le régime de pseudo-périodicité adéquat ET la valeur de q adéquate. Ceci rend difficile, par conséquent, de prédire analytiquement, pour une valeur de ϕ donné, quelle pseudo-périodicité il faut choisir. En effet, si l'on avait su que $q = 1$ quoi qu'il arrive pour le mode de plus petite charge critique pour une pseudo-périodicité donnée, il suffisait de comparer les fonctions donnant γ et de sélectionner, pour la valeur de ϕ donnée, la pseudo-périodicité qui donne la plus petite valeur de γ . Mais si q varie de sorte que $\hat{\gamma}^{(1)}$ peut diminuer a priori autant que l'on veut la valeur de $\gamma^{(0)}$, ce moyen de sélection est impossible.

Tout au plus peut-on avoir une approximation du basculement entre les régimes en recherchant l'égalité des

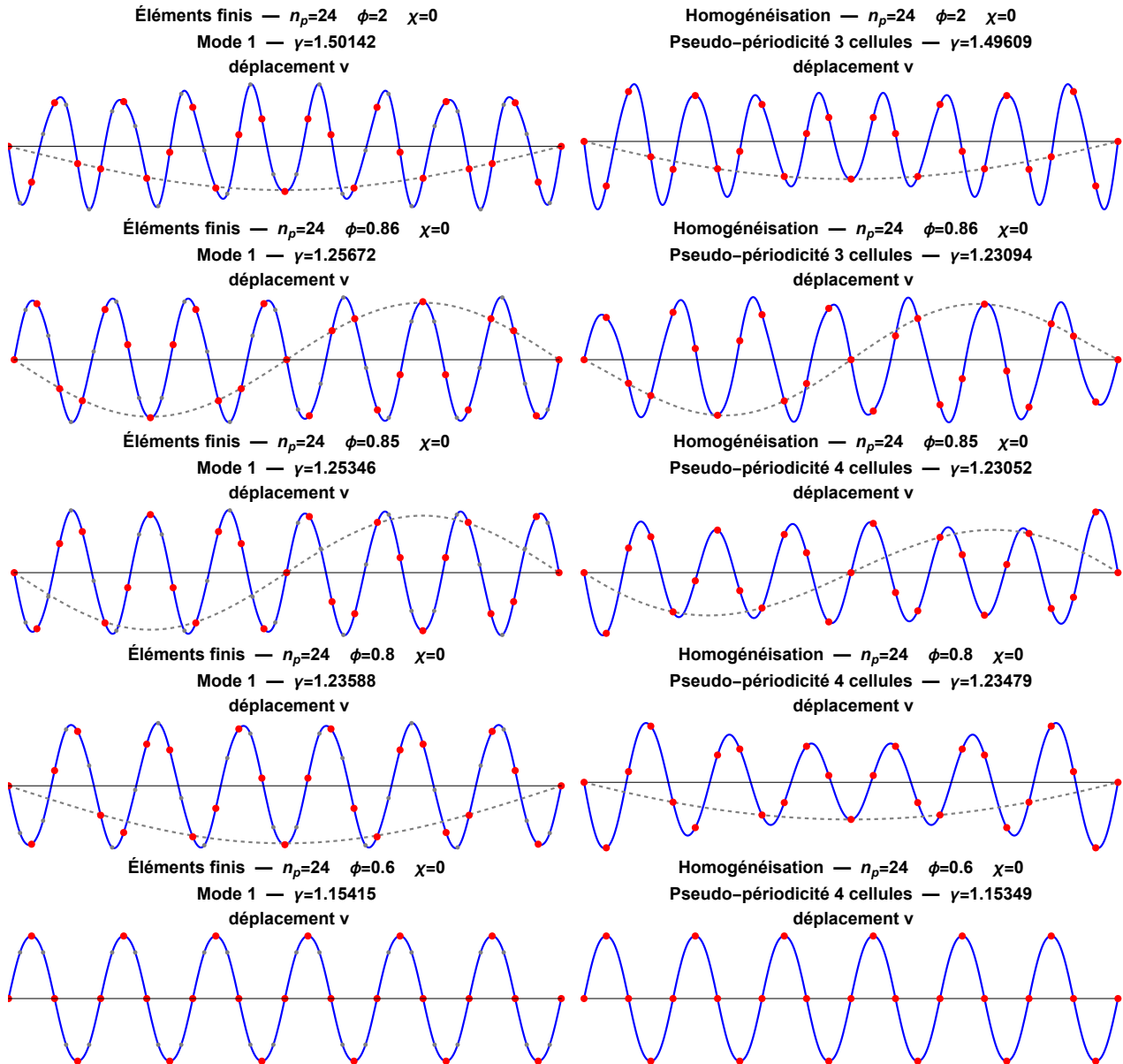


FIGURE 4.17 – Déformées en déplacement pour $\chi = 0$, $\phi = 2, 1, 0,8$ et $0,6$, $n_p = 24$: comparaison entre le premier mode donné par le calcul aux éléments finis (à gauche) et le calcul homogénéisé à périodicité bien choisie (à droite).

charges critiques à l'ordre supérieur. Par exemple ici, $\gamma^{(0)}$ est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \phi = -3 f_1(\gamma^{(0)}) + \frac{3 f_2(\gamma^{(0)})^2}{4 f_2(\gamma^{(0)}) - 2 f_4(\gamma^{(0)})} & \text{pour la pseudo-périodicité à trois cellules} \\ \phi = -2 f_1(\gamma^{(0)}) + \frac{3 f_2(\gamma^{(0)})^2}{3 f_2(\gamma^{(0)}) - f_4(\gamma^{(0)})} & \text{pour la pseudo-périodicité à quatre cellules} \end{cases} \quad (4.6)$$

L'égalité des deux valeurs de $\gamma^{(0)}$ s'obtient pour $\phi = 0,91$. C'est très voisin de la transition observée, entre $\phi = 0,86$ et $\phi = 0,85$.

4.4.4 Modes les plus critiques et précision des calculs

Une autre difficulté rencontrée ici réside dans la proximité des charges critiques des différents modes, et dans la nécessaire imprécision du calcul aux éléments finis utilisé comme référence. Par exemple, dans le cas où $\phi = 0,6$, le calcul aux éléments finis donne pour le premier mode $\gamma = 1,154\ 15$ (mode à quatre cellules non modulé), mais le deuxième mode a $\gamma = 1,154\ 25$ (mode à quatre cellules modulé). Ce, pour un calcul aux éléments finis à deux éléments finis par poutre élémentaire. Si l'on passe à trois, on obtient pour le mode 1 non modulé $\gamma = 1,153\ 62$ et pour le mode 2 modulé $\gamma = 1,153\ 64$.

Cette question de la précision des valeurs de γ se pose aussi pour le calcul par homogénéisation, vu que γ est connu à un certain ordre de ε près (en l'occurrence l'ordre ε pour nos calculs à pseudo-périodicité sur trois ou quatre cellules, pour $\phi = \mathcal{O}(1)$ et $\chi = 0$).

Et vu l'existence de modes de charges critiques très proches, y compris pour les modes les plus critiques, la question de la précision des calculs (numériques dans le cas des éléments finis, analytiques dans le cas de l'homogénéisation) est cruciale.

4.5 Conclusions

Les illustrations de comparaisons faites ci-avant paraissent toutes aller dans le sens des conclusions suivantes.

4.5.1 Prévision correcte des modes suffisamment périodiques

La méthode d'homogénéisation périodique utilisée fournit, tant au niveau des valeurs des charges critiques qu'à celui de l'aspect des déformées, un calcul des modes en bon accord avec le calcul aux éléments finis, moyennant les conditions suivantes :

- le mode recherché doit présenter un caractère suffisamment périodique, c'est-à-dire doit pouvoir être décrit par une modulation, et il faut savoir sélectionner, dans le calcul par homogénéisation, le bon régime de pseudo-périodicité ;
- il faut savoir sélectionner, parmi les modes prévus, le bon numéro de mode (ceci est un point critique et fera l'objet d'une discussion en section 5.2) ;
- il faut correctement prendre en compte les conditions aux limites (voir la discussion en section 5.1).

Autrement dit, étant donné un mode prédit par le calcul par homogénéisation, on le retrouve dans les modes calculés par éléments finis ; alors l'adéquation en valeur de γ et allure de déformée est très bonne. Le problème étant, on l'a vu, que ces modes ne sont pas les plus critiques sauf pour χ très faible ou nul.

4.5.2 Inadaptation de la méthode pour les modes insuffisamment périodiques

À l'inverse, on a vu qu'avec χ significativement élevé, le mode le plus critique obtenu par le calcul aux éléments finis montre un flambement localisé à une couche limite, sur une ou plusieurs poutres extrêmes.

Constitutivement, la méthode de calcul par homogénéisation est inadaptée pour déterminer ces modes, qui ne présentent ni périodicité ni séparation d'échelles entre une longueur caractéristique de flambement et la taille d'une poutre élémentaire.

Chapitre 5

Discussions

Ce chapitre discute des deux principales questions qui soulèvent des difficultés dans l'emploi de la méthode d'homogénéisation périodique : la question de la prise en compte des conditions aux limites et les questions relatives au choix des correctifs au paramètre de charge de flambement γ , et donc du numéro du mode.

5.1 La question des conditions aux limites

5.1.1 Mise en évidence du problème

Les conditions aux limites utilisées pour terminer la résolution du problème et tracer les déformées étaient, pour chaque cas, des conditions d'extrémités rotulées. Deux d'entre elles ne posent pas de problème de mise en œuvre : les conditions de déplacement nul $v(0) = 0$ et $v(H) = 0$. Ce sont ces deux conditions qui ont été utilisées lorsque l'équation différentielle régissant les déplacements aux nœuds à l'ordre dominant étaient d'ordre deux. Cela signifie que dans ces cas, rien n'a été imposé au système quant aux rotations aux extrémités, donc il est normal de voir apparaître sur la déformée des angles aux extrémités ne présentant pas d'extremum (voir par exemple la figure E.10).

Lorsque l'équation différentielle est d'ordre quatre, on a besoin de quatre conditions aux limites. On a formulé systématiquement ces conditions sous la forme $\partial_x^2 v(0) = 0$ et $\partial_x^2 v(H) = 0$, suivant ainsi des idées émergeant de travaux initiaux. Or, ceci est inexact : la nullité des moments d'extrémité s'écrit en réalité $\partial_s^2 v(0) = 0$ pour la poutre extrême de gauche et $\partial_s^2 v(\ell) = 0$ pour la poutre extrême de droite (en supposant s entre 0 et ℓ pour chaque poutre). Ainsi, même dans le cas d'une équation d'ordre quatre, les conditions aux limites bi-rotulées sont mal prises en compte.

Le cas $\phi = 0$ (pas de ressorts de translation), $\chi = 1$ et $n_p = 24$, en pseudo-périodicité à une cellule, où le calcul fait émerger une équation d'ordre quatre, illustre cela. La figure 5.1 montre les déformées obtenues par le calcul homogénéisé, à droite (avec $\gamma = 1,194$ à l'ordre ε^2). On peut les comparer aux déformées obtenues pour le calcul aux éléments finis, présentées à gauche.

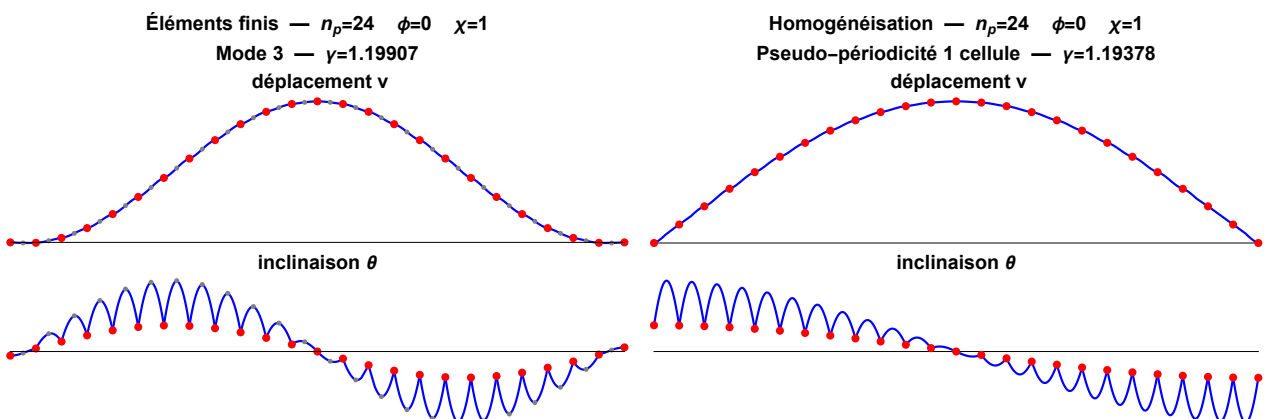


FIGURE 5.1 – Déformées pour $\phi = 0$, $\chi = 1$, $n_p = 24$, par éléments finis (à gauche) et homogénéisation avec périodicité à une cellule, avec conditions aux limites naïves (à droite).

On constate un bon accord dans la valeur de la charge critique, mais l'allure des déformées diffère en cela que les poutres extrêmes ont bel et bien leurs extrémités rotulées en rotation libre dans les déformées aux éléments finis, pas dans le cas du calcul homogénéisé.

5.1.2 Conditions aux limites plus réalistes dans le cas des équations d'ordre quatre

Pour faire en sorte que les conditions aux limites de libre rotation soit bien prises en compte, il faut résoudre l'équation différentielle vérifiée par la cinématique en utilisant les conditions aux limites de moments nuls. En pratique, pour le cas $\chi = O(1)$, $\phi = 0$, on a :

$$\hat{\theta}^{(-1)} = 0 \quad \theta^{(0)} = \delta \partial_x v^{(0)} \quad \partial_x^4 v^{(0)} + \beta^2 \partial_x^2 v^{(0)} = 0 \quad (5.1)$$

avec $\gamma^{(0)}$ donné par $\gamma^{(0)} \tan \gamma^{(0)} = 3\chi$ et où on a noté $\delta = \frac{f_2(\gamma^{(0)})}{\chi + f_2(\gamma^{(0)})} = \frac{\gamma^{(0)}}{\tan \gamma^{(0)}}$ et où β fait intervenir $\hat{\gamma}^{(2)}$ et des fonctions de $\gamma^{(0)}$. On peut alors écrire

$$v^{(0)}(x) = a_1 \sin \beta x + a_2 \cos \beta x + a_3 x + a_4 \quad (5.2)$$

puis écrire les équations des moments nuls à l'ordre dominant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} f_2(\gamma^{(0)}) (v^{(0)}(0) - v^{(0)}(\ell)) + \frac{1}{3} f_3(\gamma^{(0)}) \ell \theta^{(0)}(0) + \frac{1}{6} f_4(\gamma^{(0)}) \ell \theta^{(0)}(\ell) = 0 \\ -\frac{1}{2} f_2(\gamma^{(0)}) (v^{(0)}(H - \ell) - v^{(0)}(H)) - \frac{1}{6} f_4(\gamma^{(0)}) \ell \theta^{(0)}(H - \ell) - \frac{1}{3} f_3(\gamma^{(0)}) \ell \theta^{(0)}(H) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

puis traduire ces deux équations, ainsi que $v^{(0)}(0) = 0$ et $v^{(0)}(H) = 0$, en système sur a_1, a_2, a_3 et a_4 , sous la forme $\underline{\underline{M}}(\beta) [a_i]$.

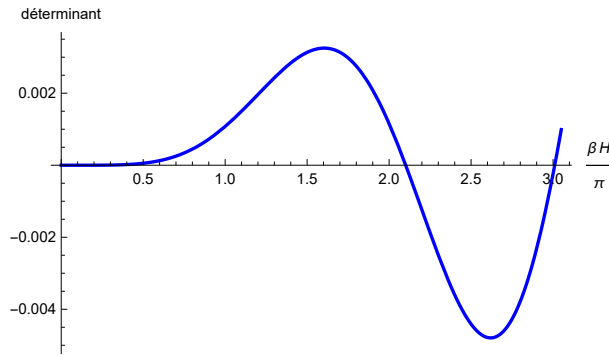


FIGURE 5.2 – Déterminant de $\underline{\underline{M}}$ en fonction de $\frac{\beta H}{\pi}$, pour $\chi = 1$, $\phi = 0$ et $n_p = 24$.

La figure 5.2 montre l'allure du déterminant de $\underline{\underline{M}}$ en fonction de β . On remarque que la valeur $\beta = \frac{\pi}{H}$ n'est pas donnée par ce calcul, alors que c'est celle que l'on a retenue en utilisant la méthode initiale de calcul des conditions aux limites. C'est cohérent avec la périodicité complète sur la cellule macroscopique observée sur la déformée obtenue par calcul aux éléments finis.

Il faut ensuite chercher la plus petite racine en β de $\det \underline{\underline{M}}$; la plus petite parce qu'en l'occurrence cela donnera la plus petite valeur de $\hat{\gamma}^{(2)}$ vu le lien entre β et $\hat{\gamma}^{(2)}$, et ainsi connaître γ à l'ordre ε^2 . En l'occurrence, on trouve une valeur de β proche de $\frac{2\pi}{H}$ qui, comme on l'a dit, divise par deux la longueur d'onde de la modulation, modifiant ainsi très fortement l'allure de la déformée. Mais comme cela ne change que $\hat{\gamma}^{(2)}$ et pas $\gamma^{(0)}$, la valeur de γ est très peu affectée.

Le noyau du système avec cette valeur de β donne une répartition des amplitudes a_i , ce qui permet d'avoir à une amplitude près l'expression de $v^{(0)}$ et $\ell \theta^{(0)}$ aux nœuds, et ainsi de tracer les déformées.

La figure 5.3 a été réalisée de cette manière. La valeur de γ obtenue est 1,198 à l'ordre ε^2 , ce qui est toujours très proche de la valeur obtenue par éléments finis. Cet accord des valeurs de γ est normal, comme on l'a dit, étant donné que la différence entre les deux prises en compte des conditions aux limites agit sur $\hat{\gamma}^{(2)}$, donc modifie peu γ .

On constate que l'allure des déformées est à présent pleinement conforme aux résultats obtenus par le calcul aux éléments finis. Des essais menés dans d'autres cas présentent également ce bon accord.

Cette manière de procéder paraît donc satisfaisante. Elle est automatisable, mais nécessite une résolution numérique pour la détermination de β . Elle convient donc pour les cas où l'équation différentielle est d'ordre quatre. En l'occurrence, c'est le cas des situations où il n'y a pas de ressorts de translation ($\phi = 0$).

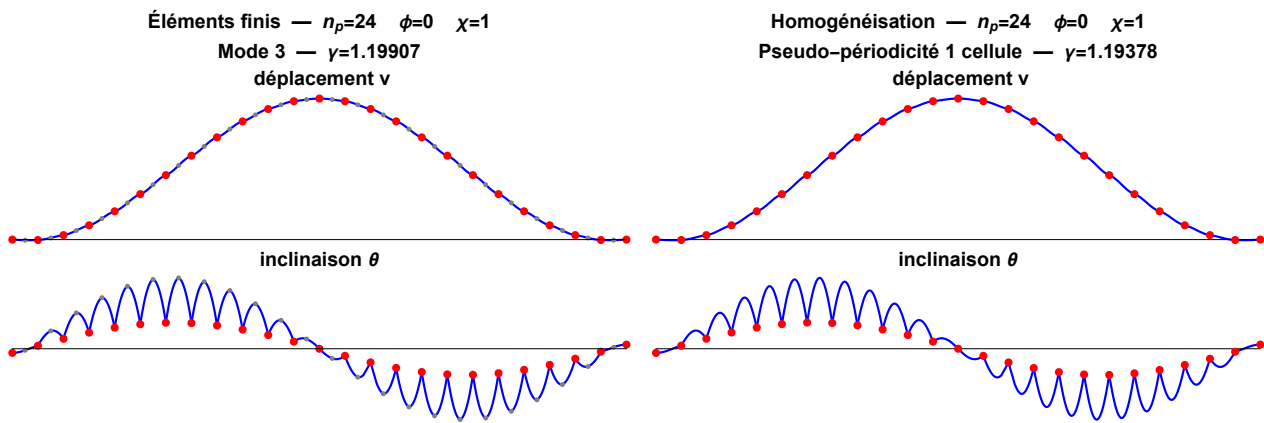


FIGURE 5.3 – Déformées pour $\phi = 0$, $\chi = 1$, $n_p = 24$, par éléments finis (à gauche) et homogénéisation avec périodicité à une cellule avec prise en compte des conditions aux limites réalistes (à droite).

5.1.3 Tentatives de correction dans le cas des équations d'ordre deux

La section précédente ne résout en rien la question de la prise en compte des conditions aux limites de rotation libre dans les cas, les plus courants, où l'équation différentielle régissant la cinématique à l'ordre dominant n'est que d'ordre deux et ne nécessite que deux conditions aux limites.

Or, une telle résolution ne conduit pas *a priori* à des moments d'extrémités nuls (même si c'est le cas pour certaines situations). Deux idées de corrections arbitraires ont été essayées.

5.1.3.1 Correction de la déformée des poutres extrêmes

Une première idée a été de corriger uniquement la déformée des poutres extrêmes sans affecter les déplacements des nœuds intérieurs. Il s'agit juste d'ajouter aux déformées obtenues par le calcul homogénéisé des équations des déformées en angle et déplacement pour les poutres extrêmes, obtenues en appliquant les conditions aux limites suivantes :

- déplacements transversaux nuls aux nœuds extrêmes et au nœud adjacent ;
- inclinaison nulle au nœud adjacent ;
- moment d'extrémité opposé au moment d'extrémité résultant du calcul homogénéisé, de sorte que le moment total soit nul.

La figure 5.4 montre le résultat obtenu par cette tentative.

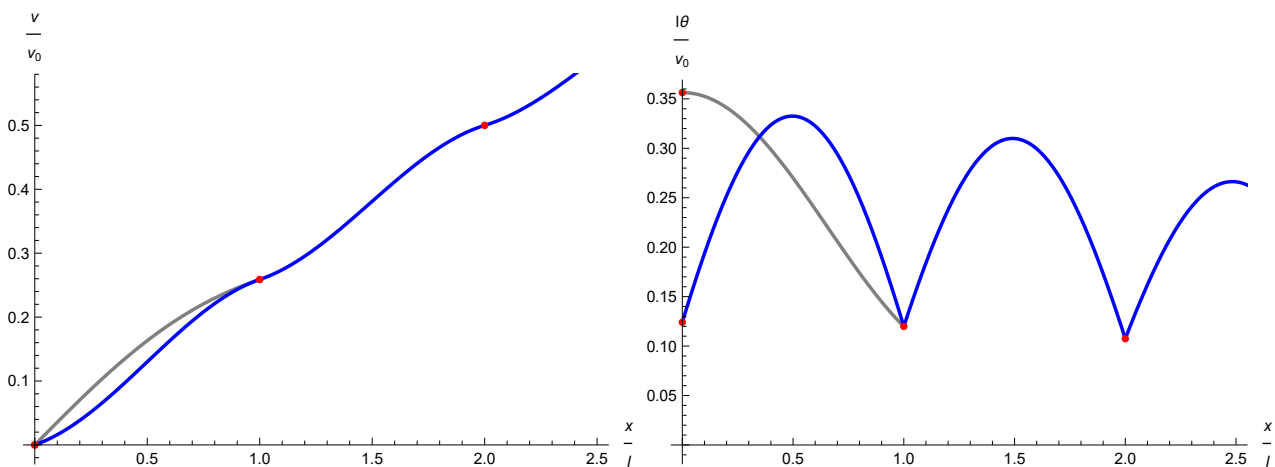


FIGURE 5.4 – Déformées pour $\phi = 0$, $\chi = 1$, $n_p = 12$, en déplacement (à gauche) et en angle (à droite), montrant une extrémité avec correction ; la courbe bleue est la déformée obtenue par homogénéisation, la courbe grise la déformée après correction.

Il y a effectivement correction du moment d'extrémité. Cette correction arbitraire paraît toujours applicable.

5.1.3.2 Correction globale

Une autre idée est de superposer, toujours arbitrairement, à la déformée obtenue par le calcul homogénéisé, une déformée où la barre macroscopique, sans effort normal mais munie de ses ressorts, est fléchie par des moments d'extrémités opposés à ceux créés par le calcul homogénéisé avec effort normal.

Les équations matricielles régissant le problème aux nœuds sont connues, puisqu'il s'agit des équations du problème avec effort normal, dans le cas où celui-ci est nul ($\gamma = 0$). On a réalisé cela dans le cas $\phi = 2$, $\chi = 1$, $n_p = 12$ de la figure E.10. La figure 5.5, à droite, montre le résultat obtenu (avec $\gamma = 2,46$ à l'ordre ε^2), mise en regard de la figure correspondante obtenue par calcul aux éléments finis (à gauche), en l'occurrence il s'agit du mode 12.

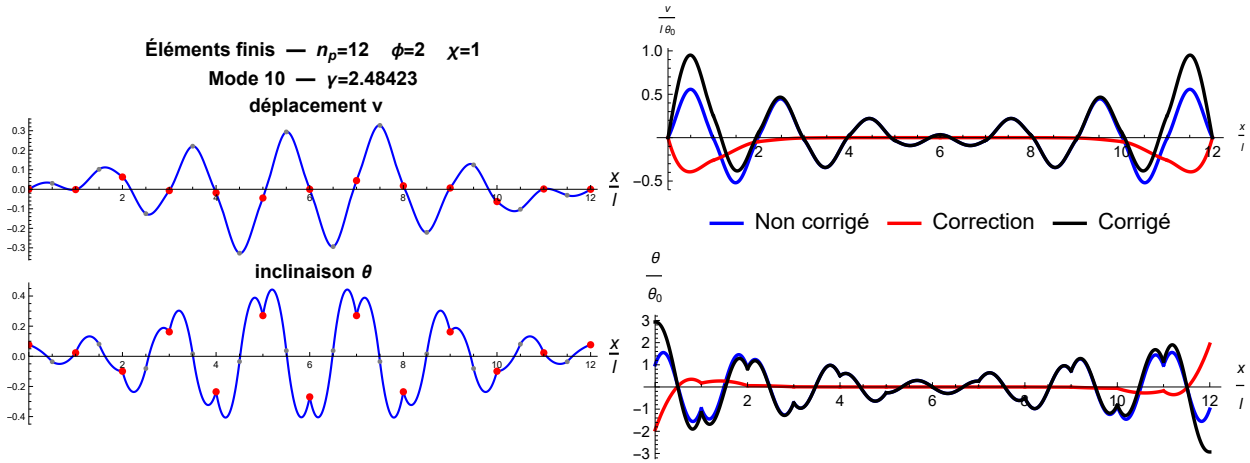


FIGURE 5.5 – À gauche : déformées du mode 12 calculé par éléments finis avec $\phi = 2$, $\chi = 1$ et $n_p = 12$. À droite : déformées en déplacement (en haut) et rotation (en bas) pour $\phi = 2$, $\chi = 1$, $n_p = 12$, avec pseudo-périodicité à deux cellules, mode antipériodique en angle, avec ou non prise en compte de la correction du moment d'extrémité.

La correction du moment d'extrémité est bien réalisée. Néanmoins l'allure obtenue ne correspond pas à celle calculée par éléments finis, qui est bien antipériodique en angle sur deux cellules, avec déplacements aux nœuds quasi-nuls, et avec une valeur de γ conforme.

La comparaison des deux déformées laisse penser qu'une modulation de l'angle par un sinus au lieu d'un cosinus serait plus adéquate. Nous proposons à la section 5.1.4 une idée pour la faire émerger.

Cette opération de correction est réalisable sans difficultés. Mais elle ne corrige pas les allures des déformées au point de les rendre ressemblantes aux prédictions faites par éléments finis, d'une part. Et d'autre part, comme la précédente tentative de correction, elle est arbitraire.

5.1.3.3 Écriture des conditions aux limites sur plusieurs ordres du développement

Une autre idée, empruntée à [20], consisterait à écrire les conditions aux limites non seulement sur l'ordre dominant des déplacements, mais sur une superposition de deux ordres. En effet, chaque ordre du développement asymptotique apporte une équation différentielle d'ordre deux sur une variable cinématique. Si l'on écrit le déplacement transversal, par exemple, comme la somme $v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)}$, où $v^{(0)}$ et $v^{(1)}$ vérifient tous deux une équation d'ordre deux, donc dépendent de deux constantes, cela fait quatre constantes pour les quatre conditions aux limites, ce qui pourrait lever le problème.

Cependant, ceci s'avère une impasse dans tous les cas où le problème présente la même forme à tout ordre.

Pour expliquer cela, prenons l'exemple de la pseudo-périodicité à une cellule, avec $\tau_c = 0$ et $\tau_\chi = 0$. Le calcul donne $v^{(0)} = 0$ et l'inclinaison à l'ordre dominant $\ell \hat{\theta}^{(-1)}$ qui vérifie une équation différentielle d'ordre deux de la forme $\partial_x^2 \ell \hat{\theta}^{(-1)} + \beta^2 \ell \hat{\theta}^{(-1)} = 0$.

Le calcul montre aussi que $\ell \theta^{(0)}$ vérifie la même équation différentielle et que l'on a des relations de la forme $\hat{v}^{(1)} = -\alpha \partial_x \ell \hat{\theta}^{(-1)}$ et $\hat{v}^{(2)} = -\alpha \partial_x \ell \theta^{(0)}$ donnant les ordres supérieurs des déplacements transversaux.

Alors, on peut certes poser $\ell \hat{\theta}^{(-1)} = A \sin \beta x + B \cos \beta x$ et $\ell \theta^{(0)} = C \sin \beta x + D \cos \beta x$, si l'écriture des conditions aux limites se fait sur $v = \hat{v}^{(1)} + \hat{v}^{(2)}$ et sur $\ell \theta = \ell \hat{\theta}^{(-1)} + \ell \theta^{(0)}$, on voit que les constantes intervenant sont $A + C$ et $B + D$, soit deux constantes et non quatre, ce qui ramène au problème initial.

Cette idée paraît donc inopérante, du fait que le problème se présente de la même manière tout ordre.

5.1.4 Un essai fructueux de correction dans le cas des équations d'ordre deux

On reprend le cas du paragraphe précédent, en lui appliquant la correction utilisée pour le cas des équations d'ordre quatre à la section 5.1.2. En l'occurrence, l'équation différentielle régissant le mode antipériodique en angle pour le cas $\phi = 2$, $\chi = 1$, est

$$\partial_x^2(\ell \hat{v}^{(-1)}) + \beta^2 \ell \hat{v}^{(-1)} = 0 \quad (5.4)$$

Il s'agit ici de faire comme si cette équation était en réalité d'ordre quatre :

$$\partial_x^4(\ell \hat{v}^{(-1)}) + \beta^2 \partial_x^2(\ell \hat{v}^{(-1)}) = 0 \quad (5.5)$$

et de lui appliquer, comme on l'a fait à la section 5.1.2, les conditions aux limites permettant la nullité des moments d'extrémités. La figure 5.6, à droite, montre le résultat ainsi obtenu (avec $\gamma = 2,47$ à l'ordre ε^2).

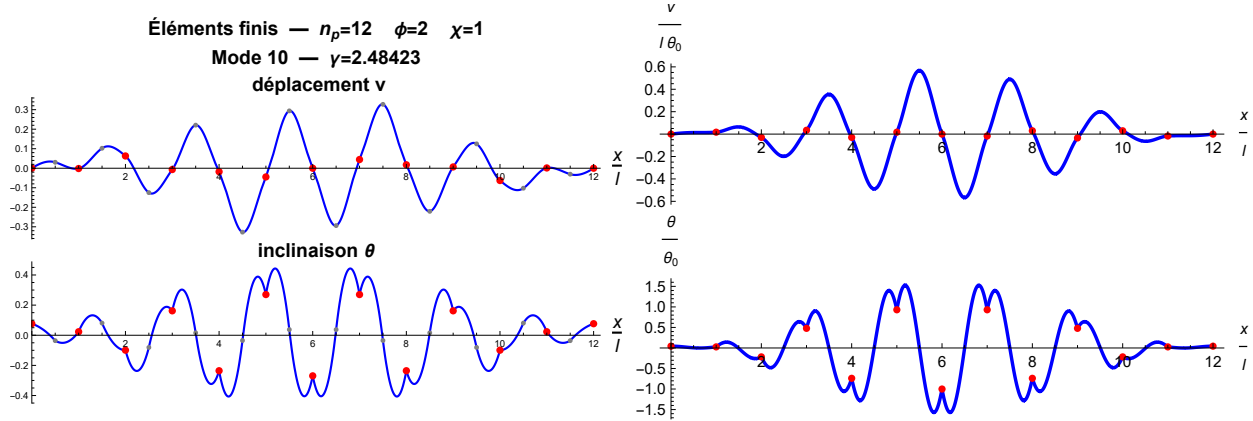


FIGURE 5.6 – À gauche : déformées du mode 12 calculé par éléments finis avec $\phi = 2$, $\chi = 1$ et $n_p = 12$. À droite : déformées en déplacement (en haut) et rotation (en bas) pour $\phi = 2$, $\chi = 1$, $n_p = 12$, avec pseudo-périodicité à deux cellule, mode antipériodique en angle, correction du moment d'extrémité selon la méthode utilisée pour les équations d'ordre quatre.

On le voit, l'allure des déformées est vraiment semblable aux allures obtenues par éléments finis visibles en figure 5.6, à gauche, avec une valeur de γ très proche. La différence la plus visible est au voisinage des extrémités. Rappelons que les déformées ne sont tracées qu'avec les variables cinématiques à l'ordre dominant, ce qui peut expliquer les différences visibles lorsque les déplacements à l'ordre dominant sont faibles.

Ce processus paraît corriger l'allure des déformées dans les cas similaires à celui-ci, mais faute d'argument supplémentaire il semble artificiel vu que les solutions d'une équation différentielle d'ordre quatre ne sont pas les solutions d'une équation différentielle d'ordre deux.

5.2 Discussions sur les règles de choix des modes de flambement

La méthode employée repose sur le fait qu'à une étape, elle fournit une équation différentielle du deuxième ou quatrième ordre, qui implique, compte tenu des conditions aux limites, une relation de quantification des modes, où apparaît l'un des ordres de γ . La sélection du mode de flambement le plus probable est alors faite en le choisissant tel que γ soit le plus petit possible. Si γ est une fonction décroissante de l'ordre du mode de quantification, on devrait alors choisir un mode d'ordre éventuellement élevé, correspondant à une poutre macroscopique très fléchie, ce qui est contradictoire avec le fait que la charge critique de flambement la plus faible correspond *a priori* à l'énergie la plus faible pour le système. Cela peut également contredire la séparation d'échelle entre les différents ordres de γ , comme on l'a vu.

Voilà pourquoi on élimine les cas où γ est une fonction décroissante de l'ordre de quantification. Cependant, certaines constatations et comparaisons avec les résultats aux éléments finis tend à mettre ceci en question. On a déjà vu en section 4.4.3.2 la mise en évidence de la complexité de la question ; nous y revenons ici.

5.2.1 Nécessité des zones de validité

Cette section discute un aspect de la question du choix du mode de flambement, sur l'exemple de la pseudo-périodicité à deux cellules, avec $\phi = \mathcal{O}(1)$ et $\chi = 0$, pour le mode antipériodique en angle.

La résolution par homogénéisation donne $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2}$, puis $\gamma^{(1)} = 0$, puis une équation différentielle d'ordre deux en $\hat{v}^{(-1)}$, angle du vecteur cinématique antipériodique à deux cellules \underline{Z} à l'ordre dominant :

$$\partial_x^2 \hat{v}^{(-1)} - \frac{24 \hat{\gamma}^{(2)} \phi}{\pi (\pi^2 - 3\phi) \ell^2} \hat{v}^{(-1)} = 0 \quad (5.6)$$

La résolution de cette équation compte tenu des deux conditions aux limites de nullité de v en $x = 0$ et $x = H$ donne $\hat{\gamma}^{(2)}$ sous la forme

$$\hat{\gamma}^{(2)} = -\frac{\pi^3 (\pi^2 - 3\phi) q^2 \xi^2}{24\phi} \quad (5.7)$$

On a noté q le numéro du mode de quantification ($q \in \mathbb{N}^*$) et $\xi = \frac{\ell}{H}$. On voit que $\hat{\gamma}^{(2)}$, donc γ à l'ordre ε^2 , n'est une fonction croissante de q que lorsque $\phi \geq \frac{\pi^2}{3} = 3,29$. Il faudrait en conclure que ce mode serait à éliminer dès lors que ϕ est en dessous de cette valeur.

Cependant, la figure 5.7 montre que le calcul aux éléments finis trouve bien, parmi les modes de flambement possibles, ce mode antipériodique en angle, et pour une valeur de γ très proche, alors même que $\phi = 1$, qui n'est pas supérieur à la limite de $\frac{\pi^2}{3}$.

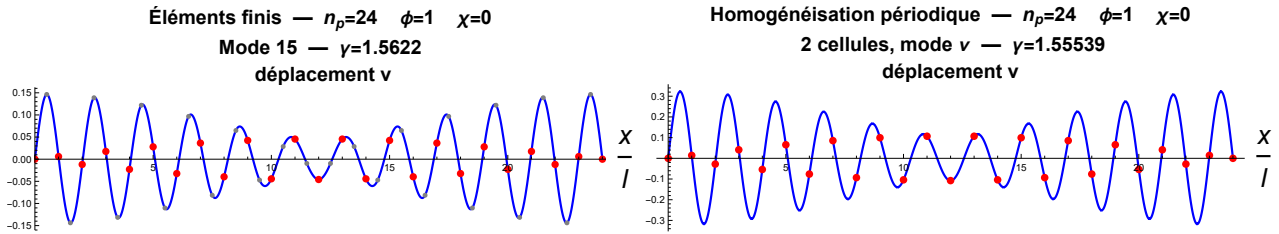


FIGURE 5.7 – Comparaison des déformées en déplacement transversal pour $n_p = 24$, $\phi = 1$, $\chi = 0$: à droite la résolution en homogénéisation périodique à deux cellules, mode antipériodique en angle, à gauche la résolution aux éléments finis (mode 15).

Ceci tend à remettre en question ce processus de sélection du mode. Voilà pourquoi on a tracé, sur la figure 4.9 la portion correspondante en pointillés. Cependant, nous n'avons pas fait ces tracés pointillés pour chaque cas concerné pour ne pas alourdir les figures et faute d'avoir fait une étude systématique.

5.2.2 Choix de $\gamma^{(1)}$: valeur absolue ou pas ?

Cette section discute un autre aspect de la question du choix du mode sur un exemple : celui de la pseudo-périodicité à quatre cellules, avec $\phi = O(1)$ et $\chi = 0$.

Le processus à l'ordre ε^0 conduit à une équation donnant $\gamma^{(0)}$:

$$-\frac{3 f_2(\gamma^{(0)})^2}{f_4(\gamma^{(0)}) - 3 f_2(\gamma^{(0)})} - 2 f_1(\gamma^{(0)}) = \phi \quad (5.8)$$

Ceci correspond à $\gamma^{(0)}$ fonction croissante de ϕ , comprise entre $\frac{\pi}{4}$ et $0,715\pi$. La suite du processus donne $\hat{\gamma}^{(1)}$ dont nous ne donnons pas l'expression ici, mais qui est de la forme :

$$\hat{\gamma}^{(1)} = \pm q \pi \xi g_1(\gamma^{(0)}) \quad (5.9)$$

On a noté g_1 une fonction de $\gamma^{(0)}$ s'exprimant à partir des fonctions f_i , q le numéro du mode de quantification ($q \in \mathbb{N}^*$) et $\xi = \frac{\ell}{H}$. Le tracé de la fonction g_1 dans la gamme où varie $\gamma^{(0)}$ montre que cette fonction change de signe. Si l'on veut que $\hat{\gamma}^{(1)}$ soit une fonction croissante de q , de manière à pouvoir sélectionner le mode avec la règle énoncée ci-dessus, on est donc conduit à choisir le signe plus ou moins selon le signe de g_1 , autrement dit à écrire

$$\hat{\gamma}^{(1)} = q \pi \xi \left| g_1(\gamma^{(0)}) \right| \quad (5.10)$$

et alors $q = 1$ donne la plus petite valeur de γ possible à l'ordre ε .

Comme on a vu précédemment qu'un mode *a priori* éliminé pouvait figurer dans les modes possibles du calcul aux éléments finis, on a cherché ici à faire cette vérification.

La figure 5.8 montre les déformées en déplacement transversal pour le calcul aux éléments finis et pour le calcul par homogénéisation, avec $\phi = 2$, $\chi = 0$ et $n_p = 24$. On constate une bonne adéquation entre les deux déformées. À noter : la déformée par homogénéisation présentée ici est obtenue pour γ calculé sans la valeur absolue pour $\hat{\gamma}^{(1)}$, mais on aurait pu présenter la déformée obtenue avec la valeur absolue : les deux sont absolument indiscernables à l'œil.

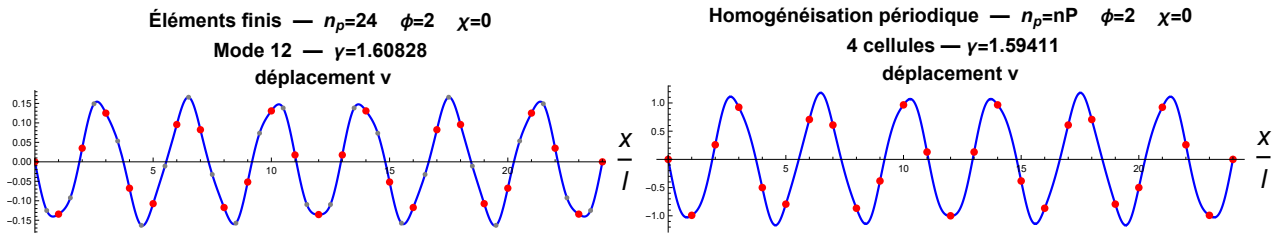


FIGURE 5.8 – Comparaison des déformées en déplacement transversal pour $n_p = 24$, $\phi = 2$, $\chi = 0$: à gauche la résolution aux éléments finis (mode 12), à droite haut la résolution en homogénéisation périodique à quatre cellules.

Cependant, la valeur de γ à l'ordre ε obtenue sans la valeur absolue semble plus conforme à la valeur obtenue par le calcul aux éléments finis, comme le montre la table 5.1.

Avec valeur absolue	Sans valeur absolue	Par éléments finis
1,758	1,594	1,608

TABLE 5.1 – Valeurs de γ à l'ordre ε dans le cas pseudo-périodique à quatre cellules, pour $n_p = 24$, $\phi = 2$, $\chi = 0$: comparaison de trois manières de calculer.

Ceci semble plaider une fois de plus en faveur d'une remise en question de la manière de choisir les modes ou d'éliminer les possibilités avec la règle énoncée ci-dessus. Toutefois, notons que pour la pseudo-périodicité à quatre cellules, nous ne sommes pas parvenus à calculer $\hat{\gamma}^{(2)}$, qui apporterait peut-être une correction.

Ce problème du choix de $\hat{\gamma}^{(1)}$ est particulièrement important lorsqu'il s'agit de déterminer le mode de plus petite charge critique possible, comme vu aux sections 4.4.2 et 4.4.3.

Chapitre 6

Conclusion

L'étude du flambement d'une poutre continue sur appuis périodiques modélisés par des liaisons élastiques a été réalisée. L'approche du problème a consisté à utiliser l'homogénéisation périodique des milieux discrets, méthode amplement employée dans le cadre dynamique et adaptée ici à la détermination, pour les différents modes de flambement possibles, de la charge et de la déformée modale associées. Une comparaison avec des calculs aux éléments finis a été faite, utilisant un programme réalisé pour l'occasion.

L'étude a exploré divers contrastes de raideurs entre les différents éléments, ainsi que divers régimes de pseudo-périodicité à une, deux, trois ou quatre cellules.

Ce chapitre de conclusion reprend les quelques résultats, positifs ou négatifs, émergeant de l'étude réalisée, et identifie des pistes d'améliorations ou de recherches ultérieures.

6.1 Résultats

En résumé, la méthode d'homogénéisation périodique utilisée est capable de prédire correctement (c'est-à-dire conformément aux résultats des calculs aux éléments finis réalisés) à la fois leurs charges de flambement et leurs déformées, à quatre principales conditions.

6.1.1 Il faut pouvoir mener le calcul avec le régime de pseudo-périodicité choisi

On a mené les calculs ici avec jusqu'à quatre cellules par période, ce qui a parfois conduit à des calculs que Mathematica ne parvient pas à mener au bout. Donc à moins de renoncer au caractère analytique, il est possible que la méthode soit limitée par la puissance de calcul analytique des logiciels si l'on cherche la pseudo-périodicité sur cinq cellules ou plus. Notons qu'il est possible aussi que notre programmation de Mathematica soit très médiocre et complique les calculs inutilement.

En outre, mener les calculs avec une pseudo-périodicité à nombre de cellules élevé nécessite de formuler le problème analytiquement, ce que nous n'avons pas fait dans le cas général (mais nous avons donné une méthode pour le faire).

6.1.2 Il faut savoir appliquer les conditions aux limites correctement

On a vu que la prise en compte correcte des conditions aux limites d'appuis extrêmes rotulés nécessitait parfois certaines contorsions théoriques que l'on ne sait pas justifier dans le cas où les équations différentielles de modulation sont d'ordre deux et pas d'ordre quatre.

Indépendamment de ces justifications, la méthode utilisée pour écrire la nullité des moments extrêmes fait appel à la détermination numérique de la racine d'une équation : c'est un bémol au caractère analytique de la résolution.

6.1.3 Il faut savoir sélectionner le mode le plus critique

Sélectionner le mode le plus critique, cela signifie choisir, parmi les différentes solutions prédites par la condition de quantification résultant de l'application des conditions aux limites, celui qui donne la charge critique la plus faible.

On a vu que la règle initialement employée s'avère trop restrictive. Aucune règle alternative n'a pu être établie.

6.1.4 Il faut que le mode de flambement présente une périodicité suffisante

Hormis dans les cas où les raideurs des ressorts de rotation sont très faibles, on a vu que les déformées des modes les plus critiques effectivement prédits par les calculs aux éléments finis présentent une allure qu'il paraît difficile de décrire à l'aide d'une solution périodique modulée.

Il est donc normal que la méthode d'homogénéisation périodique utilisée, qui est basée sur le caractère pseudo-périodique de la déformée envisagée, échoue à prédire ces modes.

6.2 Perspectives immédiates

6.2.1 Améliorations du programme existant

Dans l'état actuel des choses, la programmation est faite à l'aide de Mathematica, dans une feuille de calcul qui, construite au fil du stage sans aucune connaissance initiale dudit logiciel, a pris une ampleur assez grosse et manque d'efficacité et de clarté pour un œil extérieur. De nombreuses opérations pourraient être automatisées, de nombreuses lourdeurs de calcul pourraient être évitées par une programmation plus efficace. Le mieux serait probablement de repartir à zéro pour construire une feuille de calcul mieux commentée et plus cohérente.

6.2.2 Exploration systématique de certains paramètres

Au détour des études réalisées, plusieurs paramètres ont été reconnus comme importants mais n'ont pas donné lieu à exploration systématique, faute de temps. Citons-en certains pour mémoire.

6.2.2.1 Utilisation d'autres conditions aux limites

On a bien identifié que la question des conditions aux limites est cruciale et on a proposé une manière de la résoudre dans le cas étudié du double appui rotulé, mais on n'a pas du tout exploré d'autres possibilités de conditions aux limites pour la poutre macroscopique.

Or on se rend bien compte que ceci peut libérer ou annihiler certains modes. Si les appuis extrêmes sont des encastremements, par exemple, tous les modes à θ uniforme sont par construction impossibles.

Il conviendrait donc d'explorer d'autres conditions aux limites que le double appui rotulé. Au passage, on peut nourrir l'espoir que cette étude clarifierait la question de la prise en compte des conditions aux limites, laissée pour l'instant en suspens.

6.2.2.2 Influence de la multiplicité du nombre de poutres élémentaires

Lors des études des pseudo-périodicités à deux, trois ou quatre cellules, on a volontairement à chaque fois choisi un nombre total de cellules égal à un multiple entier du nombre de cellules du VER. Ceci permettrait d'écrire plus simplement les conditions aux limites.

Ceci n'est assurément pas sans incidence sur les allures des modes prédits par le calcul, et probablement sur la prédiction du mode le plus critique, dont on a vu, dans les cas où notre calcul parvenait à le prédire correctement, qu'il dépendait finement du régime de pseudo-périodicité choisi et du numéro du mode.

Il faudrait alors, pour chaque régime de pseudo-périodicité et chaque type de conditions aux limites, déterminer l'influence de cette multiplicité.

6.2.2.3 Influence du nombre total de cellules

Si nous avons fait varier le nombre de poutres pour des raisons de commodité de visualisation ou de multiplicité (voir ci-avant), aucune étude systématique n'a été menée sur l'influence du nombre total de poutres sur le mode de flambement. Il conviendrait de réaliser cette étude pour en avoir le cœur net.

6.2.3 Mise en place de ressorts longitudinaux

Par commodité et souci d'efficacité, on a sans cesse remis à plus tard, au cours de ce stage, l'intégration dans le calcul de la présence de ressorts longitudinaux. Leur absence permet que l'effort normal de compression soit uniforme, donc que γ soit indépendant de n .

Il paraît assez clair qu'ajouter des ressorts longitudinaux accentuera le phénomène de couche limite de flambement observé dès que les ressorts spiraux sont trop raides. En outre, la question des conditions aux limites serait encore compliquée par la prise en compte de ressorts longitudinaux, car il faudrait envisager d'autres cas d'appuis, éventuellement dissymétriques : rotulé mobile d'un côté, rotulé fixe de l'autre par exemple.

Néanmoins, dans l'optique d'utiliser les résultats obtenus ici pour circonscrire l'étude d'une poutre-échelle, la modélisation complète de l'action d'un barreau de l'échelle sur le montant de l'échelle implique la prise en compte des ressorts longitudinaux.

Pour aller encore plus loin dans la modélisation de la poutre-échelle, il faudrait appliquer la même méthode à une poutre non pas sur appuis élastiques, mais liée périodiquement à d'autres poutres elles-mêmes liées à un bâti.

6.2.4 Éluclidation du critère de choix des modes

Comme cela a été montré plusieurs fois, la règle de choix des modes initialement employée est inopérante. Cette question est pour l'heure en suspens, et est d'ailleurs intimement liée à la question des conditions aux limites puisque la condition de quantification qui donne tous les modes possibles dans un régime de pseudo-périodicité donné résulte de l'application des conditions aux limites.

Peut-être que des considérations énergétiques sont à mettre en œuvre. Des essais ont été faits dans ce sens, mais n'ont pas abouti et ne sont pas présentés ici. Il conviendrait de les reprendre pour savoir si l'on ne peut pas utiliser un argument énergétique pour sélectionner correctement le mode le plus critique.

6.2.5 Correspondance avec les résultats en dynamique

On a utilisé ici une méthode héritée des études de structures réticulées en dynamique. Et en effet, les modes modulés de flambement obtenus présentent des analogies avec les modes obtenus en dynamique (revoir la figure 1.3 donnée en introduction).

La correspondance entre dynamique et flambement n'est cependant pas systématique : des modes de flambement non analogues à des modes dynamiques apparaissent. Il conviendrait d'étudier cela plus en détail.

6.3 Développements ultérieurs

Ce travail de stage de Master constituant un préalable à un travail de thèse de doctorat, les perspectives de développement dépassant le cadre de ce stage sont celles de la thèse.

Le travail de thèse sera en partie expérimental, avec la mise au point d'une expérience de laboratoire permettant de mesurer la charge critique de flambement d'une structure réticulée, et de visualiser la cinématique du mode de flambement correspondant. La structure sera *a priori* produite à l'imprimante 3D et placée entre deux mâchoires fixes au sein d'une enceinte thermique créant une dilatation contrariée susceptible d'engendrer le flambement.

Ces expériences, ainsi que de probables développements numériques, viendront à l'appui des travaux théoriques se plaçant dans le prolongement direct du travail réalisé dans ce stage. L'objectif de la thèse est d'établir un cadre d'étude des instabilités élastiques dans les structures réticulées périodiques, prenant en compte la variété de la géométrie des structures, de leurs matériaux, des cinématiques de flambement possibles, et prenant en compte la possibilité de grandes déformations.

À l'heure actuelle, il n'existe pas de cadre théorique pour traiter à la fois le flambement localisé et le flambement global, en particulier en grandes transformations. Ainsi, la question est largement ouverte et intéresse, le domaine de la construction à la fois pour de grands ouvrages et pour les nouveaux matériaux. À cet égard, le domaine est en train d'être revisité, en particulier du côté de la micromécanique, car l'impression 3D autorise à concevoir des microstructures très variées, dont le comportement reste à étudier. Ce travail de TFE-stage de Master constitue donc la première pierre apportée à cet édifice.

Annexe A

Fonctions utilisées

A.1 Fonctions

A.1.1 Définitions, tracés, valeurs remarquables

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(\gamma) = \frac{\gamma^3}{3(\tan \gamma - \gamma)} \\ f_2(\gamma) = \frac{\gamma^2 \tan \gamma}{3(\tan \gamma - \gamma)} \\ f_3(\gamma) = \frac{\gamma}{4(\tan \gamma - \gamma)} \left(1 - \frac{2\gamma}{\tan 2\gamma} \right) \\ f_4(\gamma) = \frac{\gamma}{2(\tan \gamma - \gamma)} \left(\frac{2\gamma}{\sin 2\gamma} - 1 \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

γ	f_1	f_2	f_3	f_4
0	1	1	1	1
$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi^2}{12}$	$\frac{\pi^2}{16}$	$\frac{\pi^2}{8}$
π	$-\frac{\pi^2}{3}$	0	∞	∞
$1,430\pi$	∞			

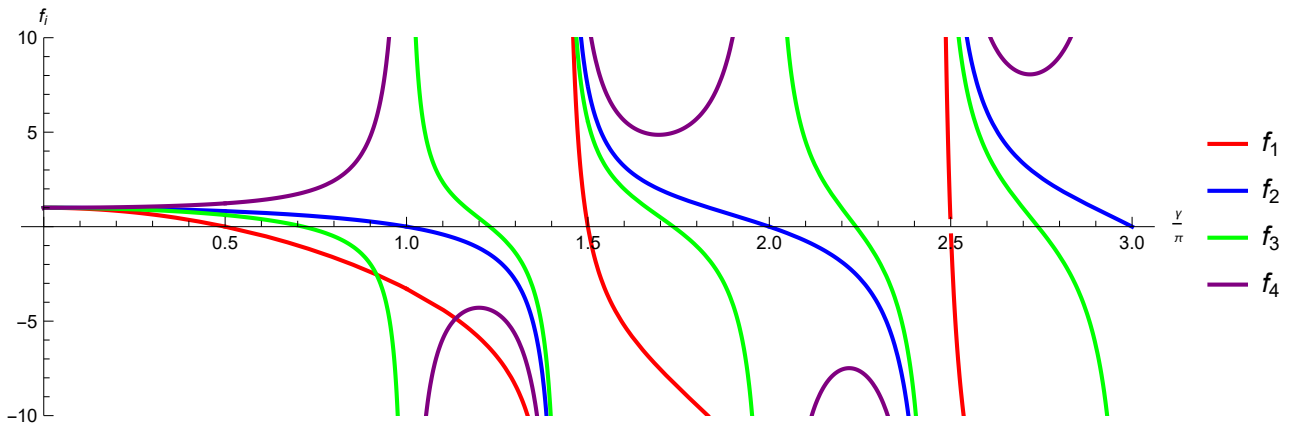


FIGURE A.1 – Fonctions f_i .

A.1.2 Relations

$$2f_3(\gamma) + f_4(\gamma) = 3f_2(\gamma) \quad \frac{f_2(\gamma)}{f_1(\gamma)} = \frac{\tan \gamma}{\gamma} \quad f_2(\gamma) - f_1(\gamma) = \frac{\gamma^2}{3}$$

$$-f_4(\gamma) + 2f_2(\gamma) - \frac{1}{2}f_1(\gamma) = \frac{\gamma}{6} \left(\gamma + \frac{3}{\tan \gamma} \right) \quad \frac{1}{3}f_4(\gamma) - \frac{2}{3}f_3(\gamma) = -\frac{\gamma}{3 \tan \gamma}$$

A.2 Dérivées : tracés et valeurs remarquables

γ	f'_1	f'_2	f'_3	f'_4
0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi^3}{24}$	$\frac{\pi}{6} \left(2 - \frac{\pi^2}{4} \right)$	$\frac{\pi}{32} (4 - \pi^2)$	$\frac{\pi}{16} (12 - \pi^2)$
π	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	∞	∞
$1,430 \pi$	∞			

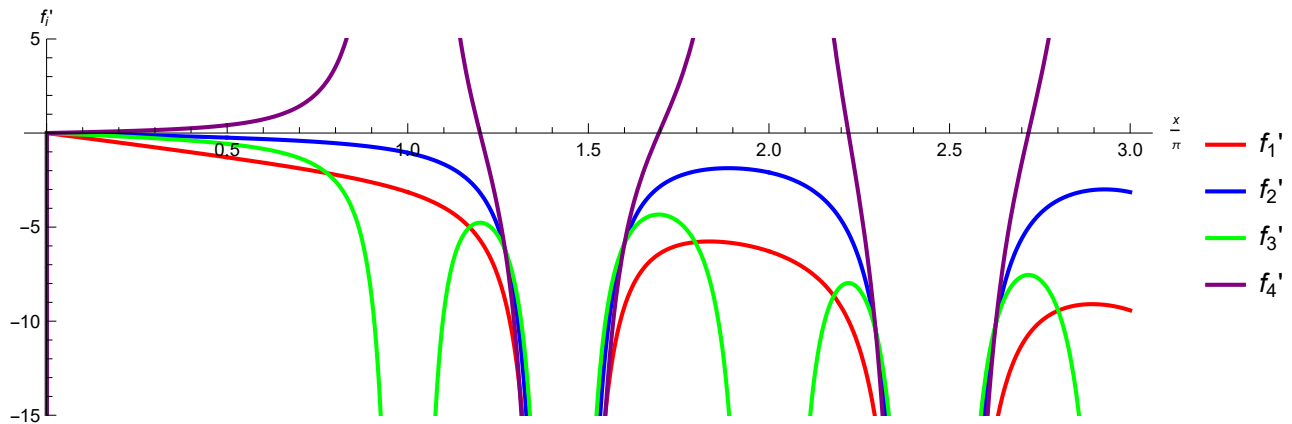


FIGURE A.2 – Fonctions f'_i .

A.3 Dérivées secondes, troisièmes, quatrièmes

γ	f''_1	f''_2	f''_3	f''_4
0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi^2}{6} \left(-3 + \frac{\pi^2}{4} \right)$	$\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^4}{24}$	$\frac{\pi^2}{32} (\pi^2 - 12)$	$2 - \frac{3}{4} \pi^2 + \frac{\pi^4}{16}$
π	-2	$-\frac{4}{3}$	∞	∞

γ	f'''_1 et f'''_2	f'''_3	f'''_4
0	0	0	0
π	$-\frac{2}{\pi} - \frac{2\pi}{3}$	∞	∞

γ	f''''_1 et f''''_2	f''''_3	f''''_4
0	$-\frac{8}{175}$	$-\frac{88}{525}$	$\frac{104}{525}$
π	-8	∞	∞

Annexe B

Résolutions de référence

Dans l'objectif de disposer de valeurs de référence pour les charges critiques de flambement et de formes de référence pour les déformées, deux résolutions sont ici mises en œuvre :

- la résolution dite *exacte*, qui consiste à inverser le problème matriciel créé par l'ensemble des équations 2.42 d'équilibre des nœuds et les conditions aux limites ;
- une résolution numérique aux éléments finis.

Les résultats des deux méthodes sont comparés pour discuter de leur validité et de leur efficacité.

À titre accessoire, la présentation des résultats analytiques obtenus dans le cas le plus simple de deux poutres élémentaires (donc un seul nœud avec ressorts) est donnée.

On se place ici dans le cas sans ressorts longitudinaux.

B.1 Résolution exacte

Cette section présente le principe de résolution exacte ; les résultats obtenus seront présentés ultérieurement en parallèle des résultats obtenus avec le calcul aux éléments finis.

B.1.1 Principe

On dispose de l'équation 2.42 traduisant l'équilibre à un nœud interne pourvu de ressorts, donc valable pour n allant de 1 à $n_p - 1$.

On dispose également de quatre conditions aux limites, à savoir :

- nullité du déplacement transversal aux nœuds extrêmes, donc $v_0 = 0$ et $v_{n_p} = 0$;
- liberté de rotation des nœuds extrêmes, donc $M_1^B = 0$ et $M_{n_p}^E = 0$, que l'on peut traduire en termes de v et θ à l'aide des expressions des efforts aux nœuds donnés en équation 2.31 (avec γ uniforme).

L'ensemble de ces équations constitue un système homogène de $2n_p + 2$ équations (deux fois le nombre total de nœuds). La solution nulle est toujours possible : alors aucun nœud ne se déplace transversalement ni ne tourne, il n'y a pas de flambement et la poutre reste droite. Si le déterminant du système est nul, il existe des solutions où les déplacements et angles aux nœuds ne sont pas nuls : ce sont les situations de flambement.

On cherche donc les valeurs de γ racines du déterminant du système, qui donnent les charges critiques de flambement. Pour chacune de ces valeurs, le noyau du système donne une répartition possible des valeurs des déplacements et angles aux nœuds, donc décrit le mode de flambement associé à cette charge critique, puisqu'on peut alors tracer la déformée de la poutre sur toute sa longueur.

Dans le cadre de cette étude, la plus petite valeur de charge critique, et le premier mode de flambement qui lui est associé, sont les données recherchées. Lors de la mise en œuvre, on tracera cependant plusieurs modes, qui seront utiles par la suite vu que la méthode d'homogénéisation périodique qui sera employée ne garantit pas *a priori* de trouver le premier mode.

qui permettent de reconstruire angle et déplacement de l'élément fini de poutre compris entre le nœud i et le nœud j :

$$\begin{cases} v_{ij}(a) = v_i \Phi_v^B(a) + v_j \Phi_v^E(a) + e \theta_i \Phi_\theta^B(a) + e \theta_j \Phi_\theta^E(a) \\ e \theta_{ij}(a) = v_i \Phi_v^{B'}(a) + v_j \Phi_v^{E'}(a) + e \theta_i \Phi_\theta^{B'}(a) + e \theta_j \Phi_\theta^{E'}(a) \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

La matrice de rigidité élémentaire d'un élément fini de poutre, sans tenir compte du flambement peut alors être construite. La relation entre efforts aux nœuds et déplacements des nœuds s'écrit, en tenant compte de la présence de la compression longitudinale susceptible d'engendrer le flambement,

$$\begin{bmatrix} f_i \\ \frac{\Gamma_i}{e} \\ f_j \\ \frac{\Gamma_j}{e} \end{bmatrix} = \frac{\text{EI}}{e^3} \left(\begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} - \frac{\text{N} e^2}{30 \text{EI}} \begin{bmatrix} 36 & 3 & -36 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \\ -36 & -3 & 36 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_i \\ e \theta_i \\ v_j \\ e \theta_j \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Dans cette relation, f_i et Γ_i sont les efforts extérieurs (respectivement force et moment) subis par le nœud i .

En procédant à l'assemblage pour obtenir l'équation concernant tous les nœuds de la poutre macroscopique, il faut ajouter dans la matrice de rigidité globale, seulement pour les nœuds concernés, les actions des ressorts. Celles-ci s'écrivant, on l'a vu,

$$f_{i,\text{ressort}} = -\frac{12 \text{EI}}{\ell^3} \phi v_i \quad \text{et} \quad \Gamma_{i,\text{ressort}} = -\frac{12 \text{EI}}{\ell} \chi \theta_i \quad (\text{B.8})$$

il faut rajouter, sur la diagonale aux nœuds concernés, $\frac{12 \text{EI}}{\ell^3} \phi$ pour v et $\frac{12 \text{EI}}{\ell} \chi$ pour $e \theta$. Comme en pratique on met $\frac{\text{EI}}{e^3}$ en facteur, cela introduit des termes diagonaux égaux à $\frac{12 \phi}{p^3}$ et $\frac{12 \chi}{p}$ seulement aux nœuds où il y a les ressorts.

Moyennant quoi, après assemblage et ajout des ressorts, le problème à résoudre se met sous la forme

$$\left(\underline{\underline{\mathbf{K}}}_e - \frac{\text{N} e^2}{\text{EI}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_n \right) \underline{\underline{\mathbf{U}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \quad (\text{B.9})$$

où $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_e$ est la matrice de rigidité globale contenant les termes de flexion seule et les termes dus aux ressorts, $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_n$ la matrice de rigidité globale contenant les termes dus à la présence de la force de compression, et $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$ le vecteur des déplacements aux nœuds comme précédemment (mais pour tous les nœuds, pas seulement pour ceux qui sont liés aux ressorts), et $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ le vecteur des efforts extérieurs, ayant toutes ses composantes nulle sauf la première et l'avant-dernière (force aux extrémités). Comme le déplacement est imposé nul aux extrémités (première et avant-dernière ligne de $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$ nulles), ceci se réduit à un problème aux valeurs propres généralisé : on résout en λ l'équation

$$\det \left(\underline{\underline{\mathbf{K}}}_e^* - \lambda \underline{\underline{\mathbf{K}}}_n^* \right) = 0 \quad (\text{B.10})$$

où $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_e^*$ et $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_n^*$ sont obtenues à partir de $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_e$ et $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_n$ en leur retirant premières et avant-dernières lignes et colonnes, et où la valeur propre λ est liée à la compression N , donc à γ , par

$$\lambda = \frac{\text{N} e^2}{\text{EI}} \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{4 \gamma^2}{p^2} \quad (\text{B.11})$$

B.2.2 Processus de résolution

Le processus de calcul est alors le suivant :

- définition de n_p , p , ϕ et χ ;
- construction des matrices et résolution en valeurs propres λ ;
- ordonnancement par ordre croissant des valeurs de λ , donnant les charges critiques de flambement dans l'ordre croissant ;
- pour chaque λ , détermination du noyau de $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_e^* - \lambda \underline{\underline{\mathbf{K}}}_n^*$, donnant les coefficients du mode de flambement associé à la charge critique correspondant à λ ; ceci permet de tracer les déformées.

B.3 Adéquation des deux méthodes et contraintes techniques

On ne présentera pas ici de comparaison systématique, pour des raisons de place. On se contentera de discuter de quelques points de comparaison entre les deux méthodes. En résumé, la résolution exacte et la résolution numérique aux éléments finis sont en très bonne adéquation, moyennant certaines précautions.

B.3.1 Difficulté de la détermination des racines dans la résolution exacte

La résolution exacte présente une limitation pratique de taille : il s'agit de calculer, en fonction de γ , le déterminant d'une matrice $2n_p + 2$, puis d'en trouver les racines, puis de trouver le noyau de la matrice pour chaque racine. Or, la dépendance en γ se faisant via les fonctions f_i , la résolution en γ est nécessairement numérique. Pour certaines valeurs de ϕ , χ et n_p , il peut y avoir beaucoup de racines très proches les unes des autres. Ceci nécessite donc une résolution avec une grande précision de calcul. Plus n_p est grand, plus ceci est difficile.

La figure B.1 illustre ceci en montrant, pour une situation où $n_p = 8$, $\phi = 1$, $\chi = 1$, le graphe de $\det \underline{\underline{A}}$ (la matrice $\underline{\underline{A}}$ donnée par l'équation B.1) en fonction de γ . On voit que vers $\gamma = 1,55$ et $\gamma = 1,74$, il y a à chaque fois deux valeurs très proches de γ qui annulent $\det \underline{\underline{A}}$.

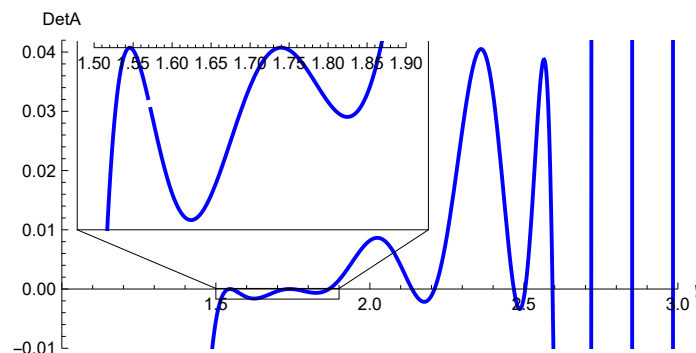


FIGURE B.1 – Déterminant de la matrice $\underline{\underline{A}}$ donnée en B.1, en fonction de γ , pour $n_p = 8$, $\phi = 1$, $\chi = 1$.

La figure B.2 montre les déformées en déplacement pour les deux premiers modes de ce même cas. Les valeurs de γ correspondantes diffèrent de seulement $2,4 \times 10^{-5}$. La difficulté de Mathematica dans ce cas vient du calcul du noyau de la matrice pour ces racines. Il n'est possible qu'en augmentant la précision demandée (en l'occurrence, il faut plus de 100 chiffres de précision...).

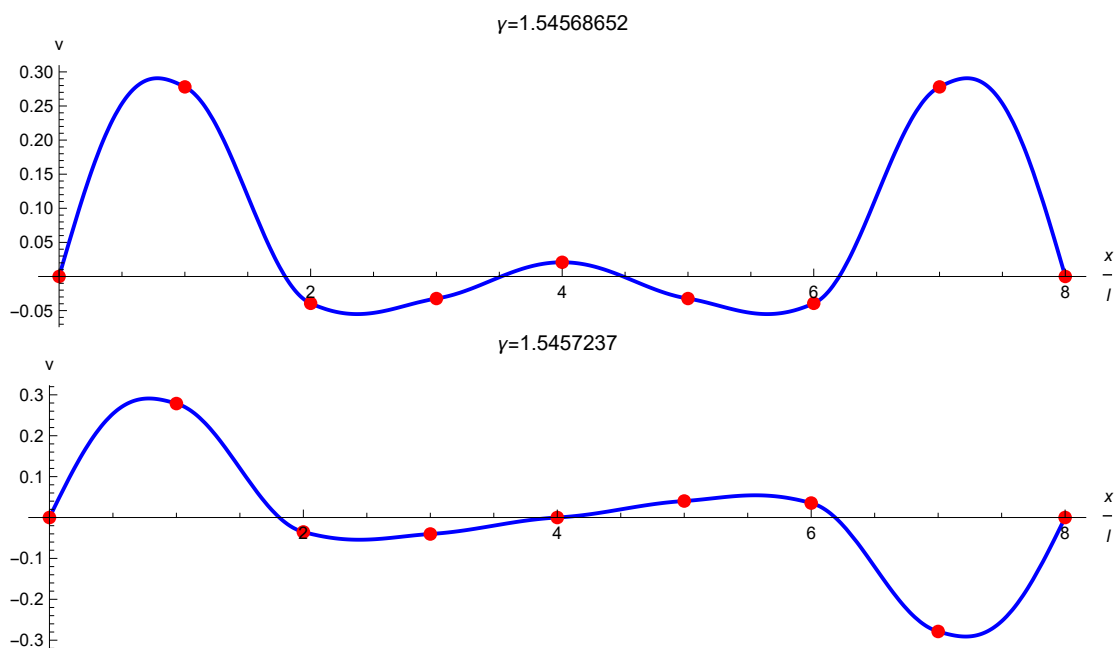


FIGURE B.2 – Déformées en déplacement des deux premiers modes du cas $n_p = 8$, $\phi = 1$, $\chi = 1$ obtenus par résolution exacte.

On comprend aisément pourquoi ces deux modes ont la même charge critique : la poutre étant peu inclinée en son centre, avec un déplacement faible, dans le premier mode, le deuxième peut être obtenu à partir du premier en prenant le symétrique d'une moitié de la poutre macroscopique. Cette circonstance se rencontre très souvent : les deux premiers modes sont souvent des modes présentant cette symétrie avec des charges critiques très proches.

Ce n'est pas toujours le cas : dans cette même situation, la figure B.3 montre deux déformées d'allures assez différentes pour les modes 3 et 4 du même cas, qui ont aussi des γ identiques à $7,7 \times 10^{-4}$ près. Les deux figures ne présentent pas entre elles la relation de symétrie sur une demi-poutre macroscopique que l'on a identifiée sur les deux premiers modes.

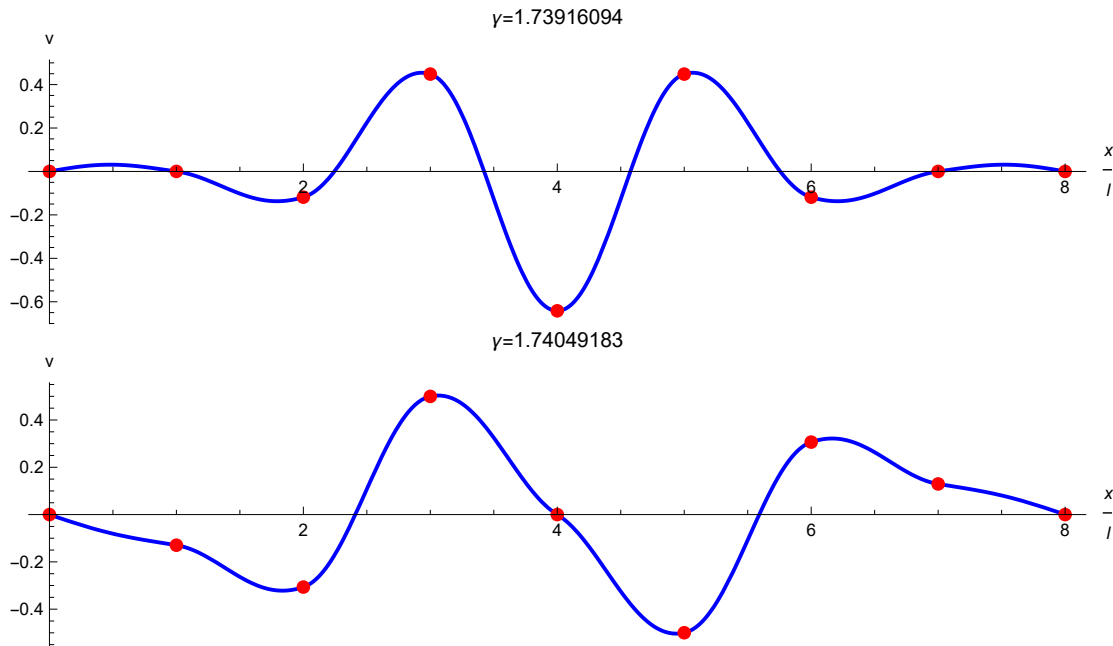


FIGURE B.3 – Déformées en déplacement des modes 3 et 4 du cas $n_p = 8$, $\phi = 1$, $\chi = 1$ obtenus par résolution exacte.

En outre, le tracé de $\det \underline{\underline{A}}$ en fonction de γ sous Mathematica présente, sans que cela soit expliqué, une allure incorrecte pour les faibles valeurs de γ , typiquement sous $\gamma = 0,5$. Lorsque les premières racines recherchées sont loin au-delà de cette gamme, comme c'est le cas dans la figure B.1, cela ne pose pas de problème. Mais si les premiers modes de flambement sont obtenus pour de faibles valeurs de γ , dans le cas de raideurs faibles, cela empêche leur détermination.

Pour illustrer cela, on a tracé le graphe de la figure B.4, obtenue pour $n_p = 8$ avec des raideurs nulles pour les deux types de ressorts. Alors on devrait retrouver comme premier mode de flambement la charge critique de flambement d'Euler d'une poutre de longueur $n_p \ell$, c'est-à-dire $\frac{EI \pi^2}{(n_p \ell)^2}$, ce qui correspond à $\gamma = \frac{\pi}{2 n_p}$, soit $\gamma = 0,196$ pour $n_p = 8$. La figure montre que le tracé chaotique au-dessous de $\gamma = 0,3$ empêche de trouver cette valeur ; la première valeur que l'on peut déterminer est $\gamma = 0,393$ qui est la charge critique du deuxième mode de flambement.

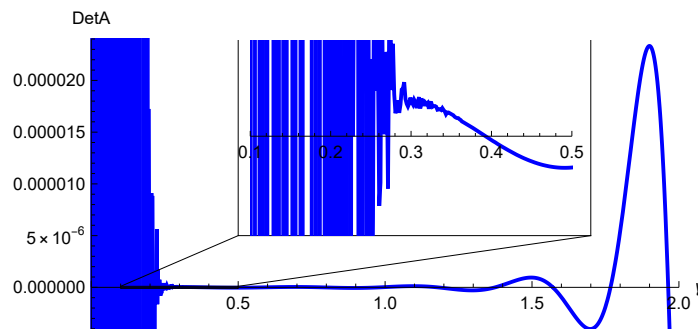


FIGURE B.4 – Déterminant de la matrice $\underline{\underline{A}}$ donnée en B.1, en fonction de γ , pour $n_p = 8$, $\phi = 0$, $\chi = 0$.

Ce problème est mentionné pour mémoire, mais sera sans incidence sur la suite. En effet l'objet de ce travail n'est pas *in fine* d'utiliser la résolution exacte, mais d'utiliser celle-ci pour valider la résolution aux éléments finis qui elle-même servira à effectuer une comparaison avec l'homogénéisation périodique. Voilà pourquoi on n'a pas spécialement cherché à comprendre ou résoudre ce problème.

B.3.2 Nombre d'éléments finis par poutre élémentaire

La résolution aux éléments finis présente un choix de plus que la résolution exacte, celui du nombre d'éléments finis de poutre par poutre élémentaire, p . On a évidemment intérêt, pour minimiser la durée de calcul, à ce que p soit le plus petit possible, 1 idéalement, mais encore faut-il que les charges critiques de flambement et les déplacements aux nœuds soient correctement prédits.

Logiquement, l'adéquation est d'autant meilleure, pour p faible, que le numéro du mode est faible, car c'est là que les variations sont les moins brusques et donc le plus susceptibles d'être prédites correctement avec un faible nombre de points.

On illustre ce fait avec un cas à $n_p = 8$ poutres élémentaires, des raideurs relatives $\phi = 1$ et $\chi = 1$. Le tableau B.1 montre les écarts relatifs sur la valeur de γ obtenue pour le premier mode de flambement, entre les calculs aux éléments finis et la résolution exacte, en fonction du nombre d'éléments finis par poutre élémentaire (un, deux ou trois éléments finis par poutre élémentaire).

La figure B.5 montre les comparaisons des déformées en déplacement pour les deux premiers cas $p = 1$ et $p = 2$ (pour $p = 3$ l'allure est la même à l'œil nu que pour $p = 2$). Pour effectuer cette figure, comme les résolutions donnent les déformées avec une amplitude arbitraire, on a choisi de les représenter avec la même valeur au point central de la poutre macroscopique.

Nombre p d'éléments finis par poutre élémentaire	1	2	3
Écart relatif sur γ pour le premier mode	2,0%	0,18%	0,040%

TABLE B.1 – Écart relatif des valeurs de γ pour les premiers modes calculés entre la résolution exacte et la résolution aux éléments finis, en fonction du nombre d'éléments finis de poutre par poutre élémentaire, avec $n_p = 8$, $\phi = 1$, $\chi = 1$.

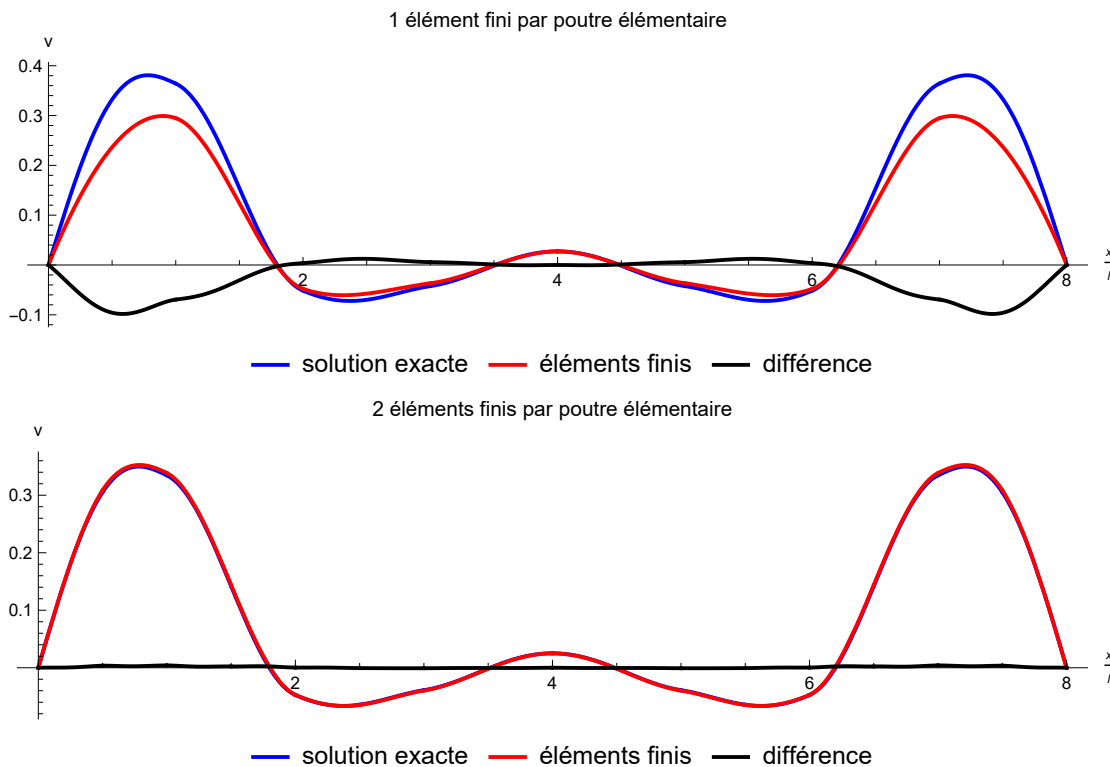


FIGURE B.5 – Déformée en déplacement pour le premier mode calculé par résolution exacte et résolution aux éléments finis, et différence des deux, en fonction du nombre d'éléments finis de poutre par poutre élémentaire, avec $n_p = 8$, $\phi = 1$, $\chi = 1$. En haut : un élément fini par poutre élémentaire. En bas : deux.

On voit sur cet exemple que la résolution aux éléments finis peut se faire avec une précision satisfaisante avec deux éléments finis par poutre élémentaire. C'est à la fois très satisfaisant à l'œil pour l'allure de la déformée et numériquement pour la valeur de la charge critique. Dans la suite c'est ce que nous utiliserons.

Il faut noter que l'écart entre les deux solutions est d'autant plus élevé que la poutre est déformée, donc que le numéro d'ordre du mode de flambement recherché est élevé. La figure B.6 montre les déformées de la même manière que précédemment, mais pour le douzième mode de flambement. L'écart entre les deux solutions est à présent élevé. Il en va de même pour la charge critique de ce mode de flambement, pour laquelle il y a un écart relatif de 1,3% (contre 0,18% pour le premier mode).

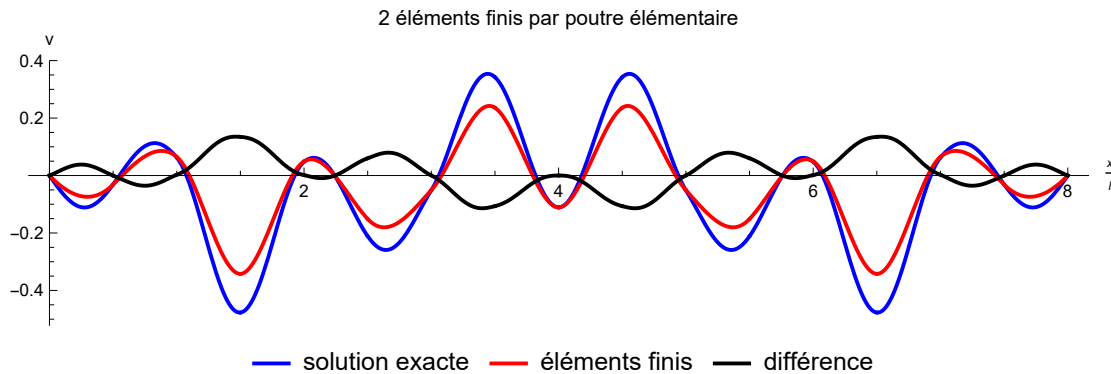


FIGURE B.6 – Déformée en déplacement pour le douzième mode calculé par résolution exacte et résolution aux éléments finis, et différence des deux, avec $n_p = 8$, $\phi = 1$, $\chi = 1$ et deux éléments finis par poutre élémentaire.

B.3.3 Durée du calcul

La durée du calcul est aussi un facteur limitant, que ce soit pour la résolution exacte ou le calcul aux éléments finis.

En résolution exacte, avec notre programmation sous Mathematica, on peut aller jusqu'à n_p de l'ordre de 10 pour une durée de calcul de quelques minutes sur le portable de bureau utilisé. La recherche des racines dans l'ordre croissant n'a pas pu être automatisée et doit être faite au cas par cas précautionneusement.

Avec un calcul aux éléments finis utilisant deux éléments finis de poutre par poutre élémentaire, on peut aller jusqu'à n_p de l'ordre de la vingtaine pour une durée de calcul de l'ordre de la minute au maximum.

Ces performances très médiocres peuvent paraître surprenantes étant données les capacités actuelles des logiciels de calcul, notamment aux éléments finis. Elles s'expliquent par le fait que le logiciel de calcul formel utilisé, Mathematica, n'est pas le plus adapté à la gestion de matrices. Comme l'objet de ce travail n'est pas la résolution exacte ni le calcul aux éléments finis, qui ne sont ici que pour servir de référence, nous n'avons pas cherché à optimiser la programmation.

B.4 Résolution exacte à deux poutres

Cette section donne les résultats la résolution exacte à seulement deux poutres, donc un seul nœud connecté à des ressorts, car les solutions analytiques sont simples et certains résultats sont riches d'enseignements pour les cas plus complexes, notamment à nombre pair de poutres élémentaires.

B.4.1 Deux modes

La résolution de $\det \underline{\underline{A}} = 0$ fait apparaître deux possibilités de cinématiques de flambement :

- un type de modes est piloté par le ressort transversal, l'inclinaison du nœud central étant toujours nulle ; alors la valeur de γ dépend uniquement de celle de ϕ selon :

$$-\frac{4\gamma^3}{3(\tan(2\gamma) - 2\gamma)} = \phi \quad (\text{B.12})$$

- un type de modes est piloté par le ressort spiral, le déplacement du nœud central étant toujours nul ; alors la valeur de γ dépend uniquement de celle de χ selon :

$$-\frac{2\gamma^2}{3\left(1 - \frac{2\gamma}{\tan(2\gamma)}\right)} = \chi \quad (\text{B.13})$$

Les tracés de ces fonctions est donné en figure B.7. On voit que le mode piloté par ϕ est toujours à une charge critique plus faible que le mode piloté par χ , quel que soit le numéro du mode, si ϕ et χ ont des valeurs proches, et d'autant plus que leurs ordres de grandeur sont faibles, c'est-à-dire que les ressorts sont souples.

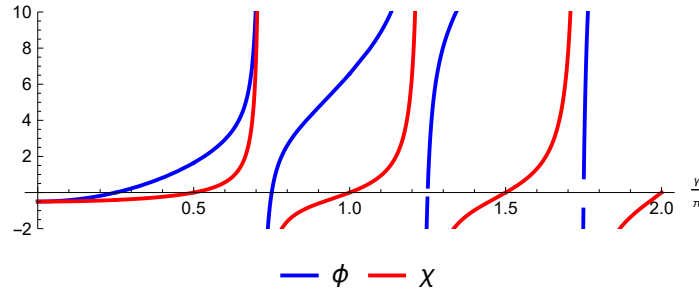


FIGURE B.7 – Situation à deux poutres : fonctions donnant γ pour chaque mode.

Le premier mode piloté par ϕ correspond à γ entre $\frac{\pi}{4}$ et $0,714\pi$: pour les faibles valeurs de ϕ , on a $\gamma = \frac{\pi}{4}$, ce qui fait une charge critique $\frac{EI\pi^2}{(2\ell)^2}$: c'est bien la charge critique de flambement d'Euler d'une poutre unique bi-rotulée de longueur 2ℓ .

Le premier mode piloté par χ , quant à lui, correspond à γ entre $\frac{\pi}{2}$ et $0,714\pi$: pour les faibles valeurs de χ , on a $\gamma = \frac{\pi}{2}$, donc une charge critique $\frac{EI\pi^2}{\ell^2}$, charge critique de flambement d'Euler d'une poutre bi-rotulée de longueur ℓ . Il est également normal de retrouver cette valeur, vu que ce mode impose que le nœud central ne se déplace pas, donc les deux poutres élémentaires de longueur ℓ flambent selon le flambement d'Euler.

Pour une valeur de χ donnée, on voit qu'il faut que ϕ soit bien plus élevée pour que le mode à plus faible charge critique soit le mode piloté par χ . Sinon, c'est le mode piloté par ϕ , donc pour lequel le nœud central n'est pas incliné, qui survient en premier.

B.4.2 Énergie

La relation 2.49 permet de calculer la répartition de l'énergie dans le système en fonction de γ . Ici, pour chaque mode, on peut donc, pour des valeurs de ϕ et χ variables, déterminer quelle proportion de l'énergie totale est emmagasinée par le ressort de translation ou le ressort spiral (étant entendu que dans le mode piloté par ϕ , le ressort spiral n'emmagasine rien vu que l'inclinaison du nœud central est nulle, et vice-versa pour le mode piloté par χ).

La figure B.8 montre ces courbes. Les abscisses sont en échelles logarithmiques. Attention au fait que les ordonnées ne sont pas identiques. Dans le mode piloté par le ressort de translation, l'énergie maximale emmagasinée par le ressort est voisine de 65%, alors qu'elle n'est que de 19% pour le ressort spiral dans le mode piloté par χ , et pour une raideur adimensionnelle bien plus faible. On constate ainsi que les fonctionnements des deux modes sont différents.

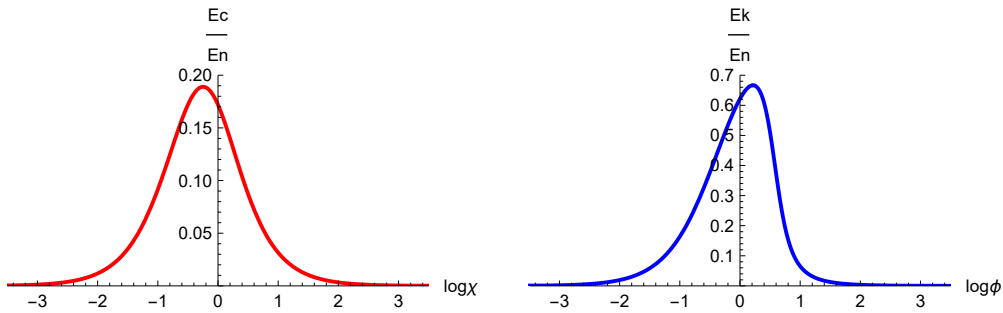


FIGURE B.8 – Proportion de l'énergie totale emmagasinée par le ressort : à gauche, par le ressort de translation transversale pour le mode piloté par ϕ , à droite, par le ressort spiral pour le mode piloté par χ . L'abscisse est en échelle logarithmique.

B.4.3 Déformées

Les équations des déformées en déplacement sont :

— pour le mode piloté par le ressort de translation,

$$\begin{aligned} \text{pour } s \in [0; \ell], \quad v(s) &= v_0 \left(\sin \left(2\gamma \frac{s}{\ell} \right) - 2\gamma \frac{s}{\ell} \cos(2\gamma) \right) \\ \text{pour } s \in [\ell, 2\ell], \quad v(s) &= v_0 \left(\sin \left(2\gamma \frac{2\ell - s}{\ell} \right) - 2\gamma \frac{2\ell - s}{\ell} \cos(2\gamma) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

— pour le mode piloté par le ressort spiral,

$$\begin{aligned} \text{pour } s \in [0; \ell], \quad v(s) &= v_0 \left(\sin \left(2\gamma \frac{s}{\ell} \right) - \frac{s}{\ell} \sin(2\gamma) \right) \\ \text{pour } s \in [\ell, 2\ell], \quad v(s) &= v_0 \left(-\sin \left(2\gamma \frac{2\ell - s}{\ell} \right) + \frac{2\ell - s}{\ell} \sin(2\gamma) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Pour différentes valeurs de ϕ et χ , on donne en figure B.9 les déformées en déplacement et inclinaison pour chacun des modes. Les courbes en noir sont obtenues pour les valeurs de ϕ et χ correspondant au maximum d'énergie emmagasinée par le ressort.

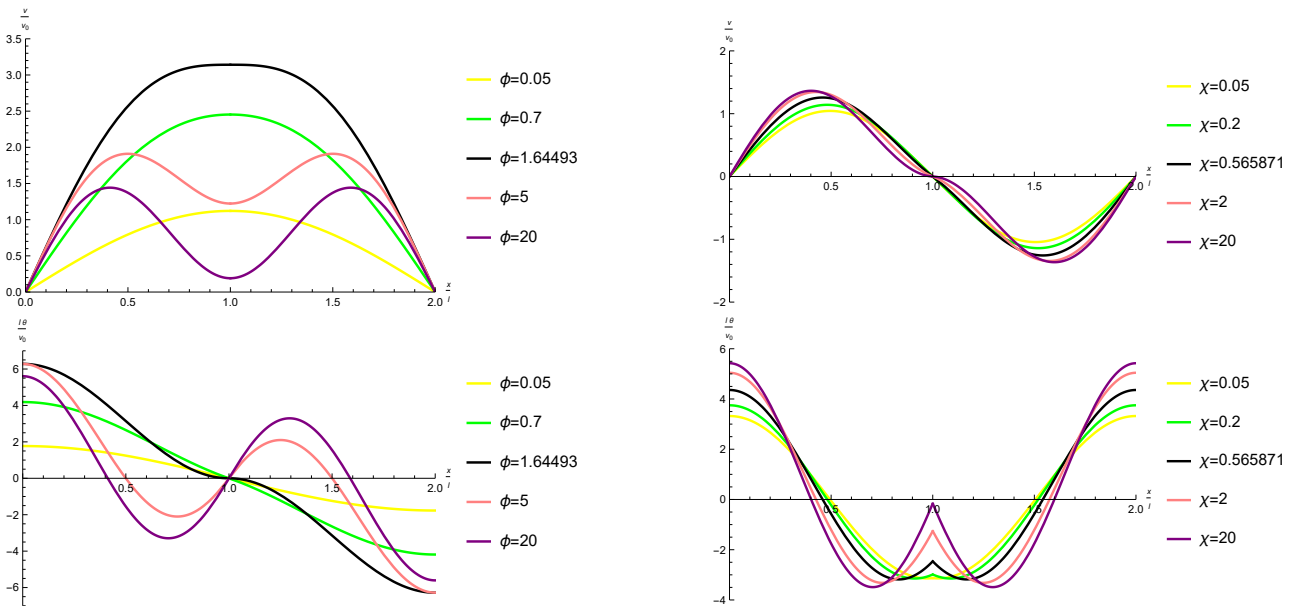


FIGURE B.9 – Déformées en déplacement et inclinaison pour les deux modes. En haut : les déplacements ; en bas : les inclinaisons. À gauche : mode piloté par le ressort de translation ; à droite : mode piloté par le ressort spiral.

Le mode piloté par le ressort de translation montre une symétrie en déplacement (et donc une antisymétrie en inclinaison). Le mode piloté par le ressort spiral montre une antisymétrie en déplacement (et donc une symétrie en inclinaison). Cette dualité se retrouvera dans tous les modes à deux cellules, où l'on observera la possibilité d'une pseudo-périodicité en déplacement, les rotations des nœuds étant faibles, ou alors une pseudo-périodicité en inclinaison, les déplacements des nœuds étant faibles.

On constate sur la figure B.7 que pour des valeurs élevées de ϕ et χ , la valeur de la charge critique des deux modes est presque la même ($\gamma = 0,714\pi$, solution de $\tan(2\gamma) = 2\gamma$, qui est la charge critique du mode de flambement d'une poutre élémentaire encastree d'un côté, rotulée de l'autre). Ceci se retrouve sur la figure B.9 : en effet pour le mode piloté par ϕ , si ϕ est grande, à la fois le déplacement et l'inclinaison sont nulles ou presque au nœud central (donc c'est bien un encastrement) ; il en va de même pour le mode piloté par χ . On retrouve alors des déformées quasi-identiques pour les deux modes, si l'on prend soin de prendre le symétrique d'une seule des deux poutres. C'est ce qu'on avait constaté pour des situations où la poutre macroscopique contient davantage de poutres élémentaires.

B.5 Constatations physiques et commentaires

L'objectif de cette section est de donner quelques constatations physiques concernant le système étudié sur la base des calculs par résolution exacte ou éléments finis, étant admis que les deux méthodes donnent les mêmes

résultats compte tenu des précautions mentionnées plus haut. Ces constatations seront utiles pour envisager l'homogénéisation du problème.

L'étude du système a été faite pour $n_p = 8$ avec la méthode des éléments finis, à deux éléments finis de poutre par poutre élémentaire, en balayant les valeurs de ϕ et χ à différents ordres de grandeur. Cette faible valeur de n_p permet que les calculs soient faits rapidement et permet de vérifier les résultats des calculs aux éléments finis par comparaison avec la résolution exacte.

L'ensemble des courbes est donné en annexe C.

On s'attend évidemment à ce que le flambement soit global pour les faibles valeurs de raideurs, c'est-à-dire que l'on retrouve le flambement d'Euler d'une poutre de longueur $n_p \ell$ sur deux appuis rotulés, soit une charge critique $N = \frac{EI\pi^2}{(n_p \ell)^2}$, ou encore $\gamma = \frac{\pi}{2n_p}$ dont la valeur est $\gamma = 0,196$ pour $n_p = 8$.

B.5.1 Observations

En observant les courbes de l'annexe C, on constate que les résultats sont conformes aux attentes ci-dessus.

B.5.1.1 Ressorts absents

Pour $\phi = 0$ et $\chi = 0$, on a un flambement global (une arche de sinus) avec $\gamma = 0,196$ comme prévu.

B.5.1.2 Ressorts spiraux très souples ou absents

Pour des ressorts spiraux absents ($\chi = 0$) ou très souples ($\chi = 0,01$), l'augmentation de la raideur ϕ des ressorts transversaux revient à créer un flambement de plus en plus réparti, comme si c'étaient les modes supérieurs de flambement d'Euler de la poutre macroscopique qui étaient sollicités.

On observe ainsi le passage brusque du flambement global à une arche de sinus sur la poutre macroscopique, pour $\chi = 0$ et $\phi = 0$, au flambement à deux arches, puis trois, etc., quand ϕ augmente. La table B.2 donne les valeurs de ϕ et de γ correspondant aux transitions entre modes à q arches.

Passage à un nombre d'arches de	2	3	4	5	6	7	8
ϕ	0,007 93	0,071 5	0,287	0,801	1,73	2,68	3,19
γ	0,439	0,708	0,982	1,25	1,47	1,566	1,577

TABLE B.2 – Passage de mode pour $n_p = 8$, avec $\chi = 0$, quand ϕ augmente.

On constate que γ , pour le mode à 8 arches quand ϕ est élevé, est très voisin de $\frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à des poutres élémentaires en flambement comme si elles étaient en double appui rotulé, ce qui est cohérent avec le fait que la rotation de chaque nœud est libre, même si la poutre macroscopique est continue, vu que $\chi = 0$. Pour ce mode, les ressorts de translation ne sont pas actionnés et l'énergie est entièrement répartie en énergie de flexion des poutres élémentaires.

B.5.1.3 Ressorts transversaux très souples ou absents

Lorsque les ressorts transversaux sont absents ($\phi = 0$), on passe progressivement, en augmentant la raideur χ des ressorts spiraux, du flambement global à une arche de sinus (pour $\chi = 0$) à un flambement global où seules les deux poutres élémentaires extrêmes sont fléchies et absorbent toute l'énergie (pour $\chi = 10$). La valeur de γ pour $\phi = 0$ et $\chi = 10$ est 0,779, très proche de $\frac{\pi}{4}$, valeur obtenue pour le flambement d'une poutre élémentaire en appuis encasturé-libre, qui est également la valeur obtenue avec une extrémité en rotation libre et déplacement nul et l'autre en rotation empêchée et déplacement libre.

B.5.1.4 Augmentation de la raideur des ressorts spiraux pour des ressorts transversaux donnés

Pour une valeur de ϕ donnée, lorsque χ augmente, l'allure de la déformée change progressivement, dans le sens où les arches de flambement, bien réparties et d'amplitudes comparables lorsque χ est faible, s'écrasent progressivement au centre de la poutre macroscopique, pour ne conserver, pour les grandes valeurs de χ , que les poutres élémentaires extrêmes flambées et concentrant toute l'énergie.

Pour les valeurs de ϕ élevées, cette transition paraît progressive, sans saut de régime pour une valeur de χ précise. Pour les valeurs de ϕ faibles, on constate un saut de régime, comme le montrent les figures placées en annexe C.9, où $\phi = 0,01$ et χ passe de 0,107 à 0,108 : on observe le passage de deux arches à une seule sur la déformée, et les graphes énergétiques montrent une sollicitation des ressorts de translation bien plus élevée dans le deuxième cas.

B.5.1.5 Raideurs élevées

Lorsqu'à la fois la raideur des ressorts transversaux ϕ et la raideur des ressorts spiraux χ sont élevées, le flambement est limité aux deux poutres élémentaires d'extrémité. La valeur de γ obtenue est celle d'une poutre élémentaire rotulée-encastrée, ce qui est cohérent avec le fait que les premiers nœuds à ressorts aux extrémités sont comme encastrés vu que leurs raideurs sont élevées.

B.5.2 Conclusions

On observe sur ce panorama l'ensemble des situations de flambement possible :

- flambement global de la poutre macroscopique pour les raideurs faibles ;
- flambement local distribué pour les raideurs des ressorts spiraux faibles ;
- flambement localisé aux poutres extrêmes pour des raideurs de ressorts spiraux élevées.

Les calculs par homogénéisation devront idéalement prévoir ces cas. Cependant, l'homogénéisation périodique paraît *a priori* peu adaptée pour prévoir des cas où le flambement est localisé aux poutres extrêmes. On s'attend donc à ce que ces prévisions soient opérantes pour les faibles valeurs de raideurs des ressorts spiraux, mais moins pour les valeurs élevées.

Annexe C

Résultats des calculs aux éléments finis

Cette annexe donne sans commentaire les graphiques de résultats des calculs aux éléments finis, avec deux éléments finis de poutre par poutre élémentaire. À chaque fois sont présentés la déformée en déplacement transversal, la déformée en inclinaison et la répartition de l'énergie totale. Les paramètres employés sont en en-tête des graphiques. Le numéro du mode (souvent 1) et la valeur de γ sont donnés.

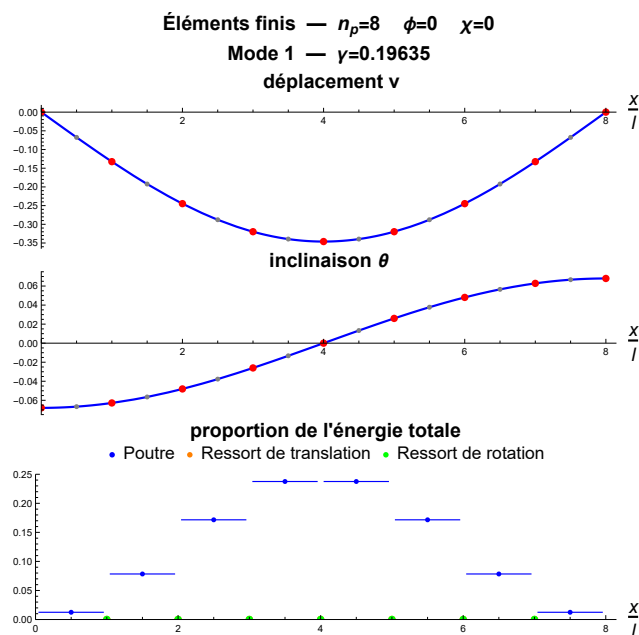
Arbitrairement les résultats sont classés par ordre croissant de la raideur adimensionnelle des ressorts de translation, ϕ , puis par ordre croissant de la raideur adimensionnelle χ des ressorts spiraux. On présente également en section C.8 les courbes avec $\chi = 0$ (ressorts spiraux absents) dans l'ordre croissant de ϕ , et un cas particulier en section C.9.

Le choix a été fait de considérer $n_p = 8$ poutres élémentaires pour la poutre macroscopique, pour faciliter la lecture des graphiques, permettre la comparaison avec les résultats obtenus par résolution exacte et limiter le temps de calcul sous Mathematica.

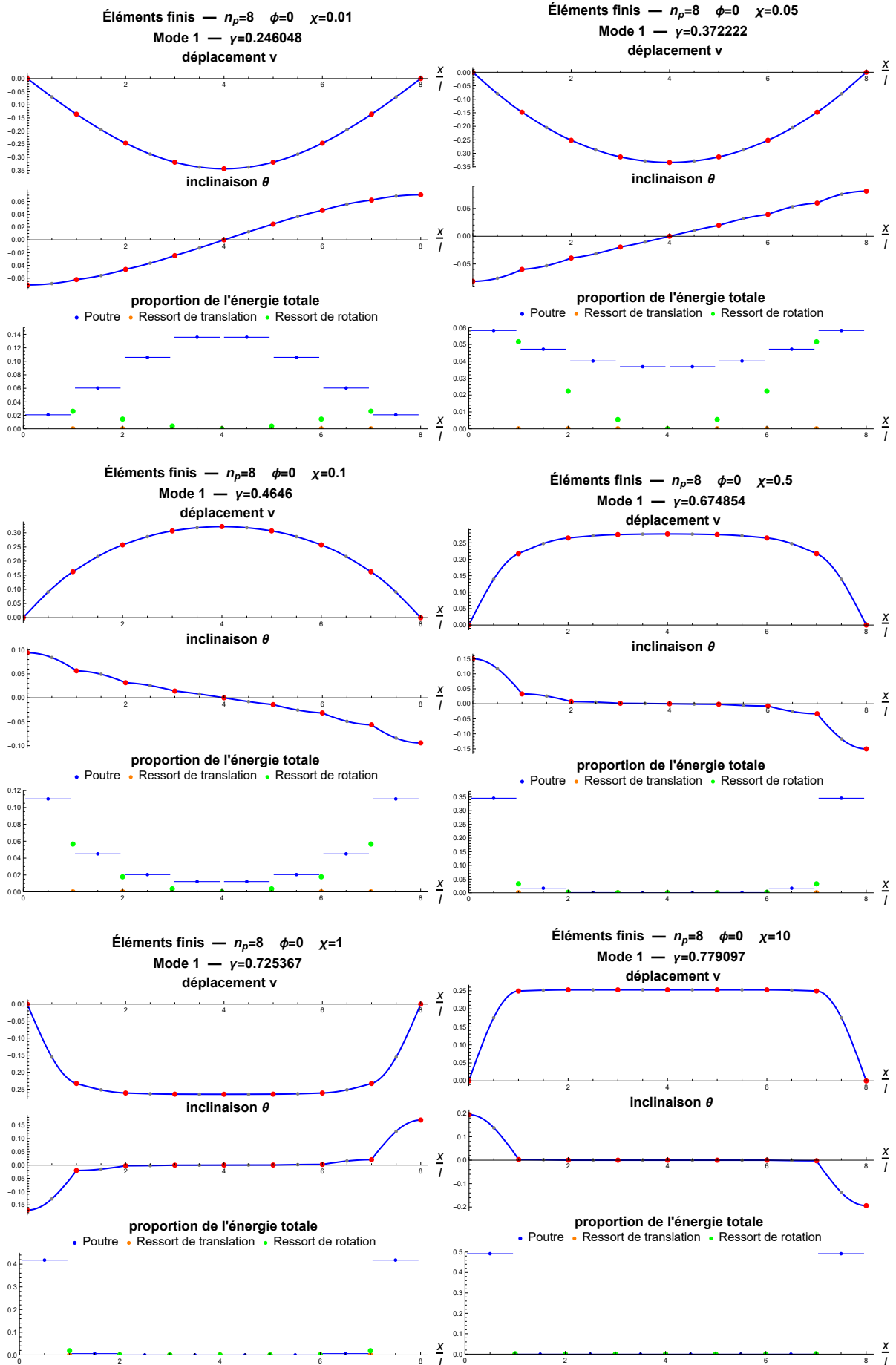
Les ressorts de translation sont qualifiés de *très souples* ($\phi = 0,01$), *souples* ($\phi = 0,1$), *de raideur moyenne* ($\phi = 1$), *raides* ($\phi = 10$), *très raides* ($\phi = 100$).

Les amplitudes des déplacements sont à regarder comme arbitraires, en particulier du point de vue de leur signe. Nous ne donnons ici que le premier mode fourni par le calcul numérique, étant entendu qu'il est souvent double, avec antisymétrie sur une moitié de poutre macroscopique et deux valeurs de γ tellement proches que les deux modes peuvent être inversés du fait de l'approximation du calcul.

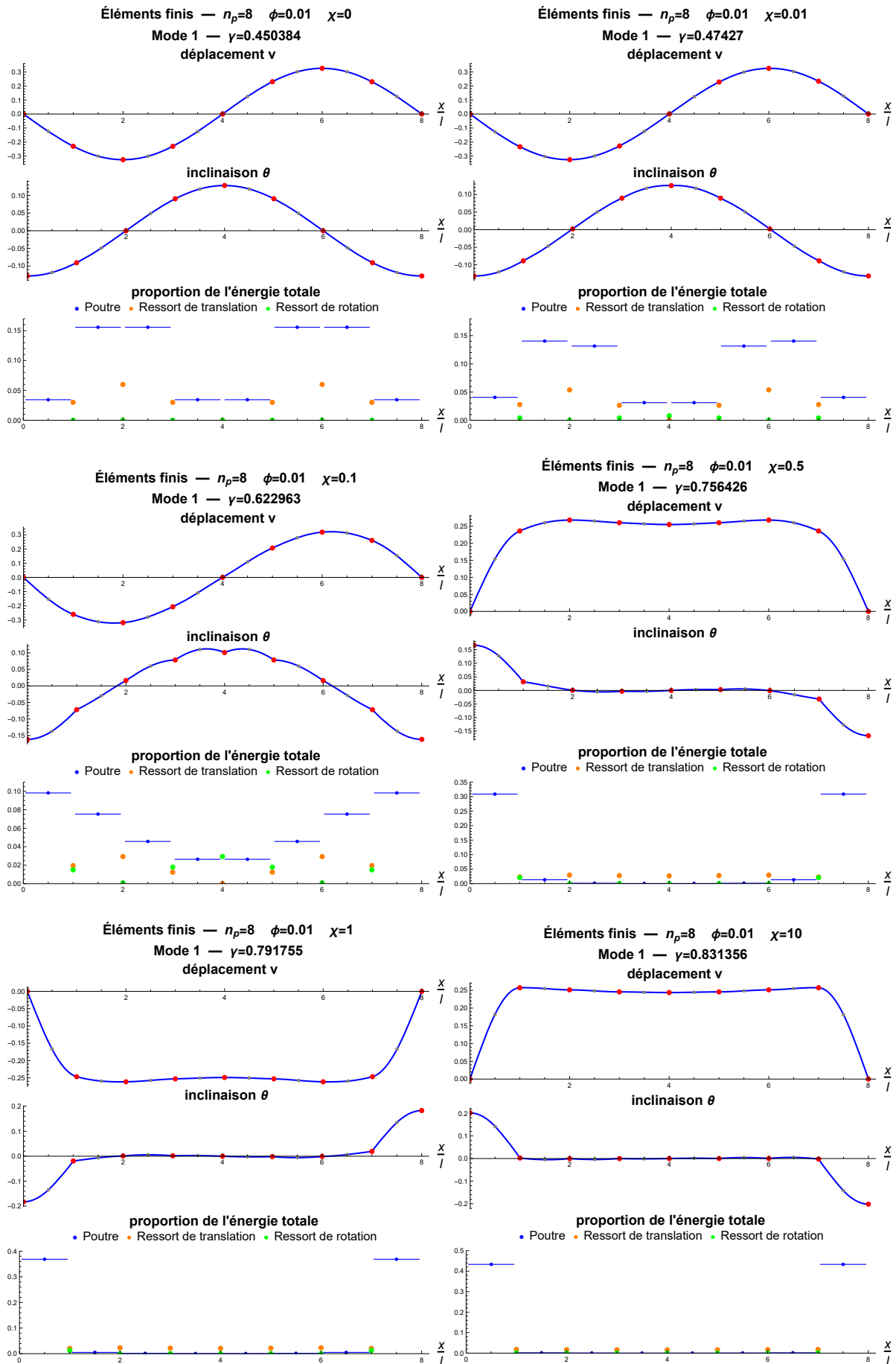
C.1 Aucun ressort



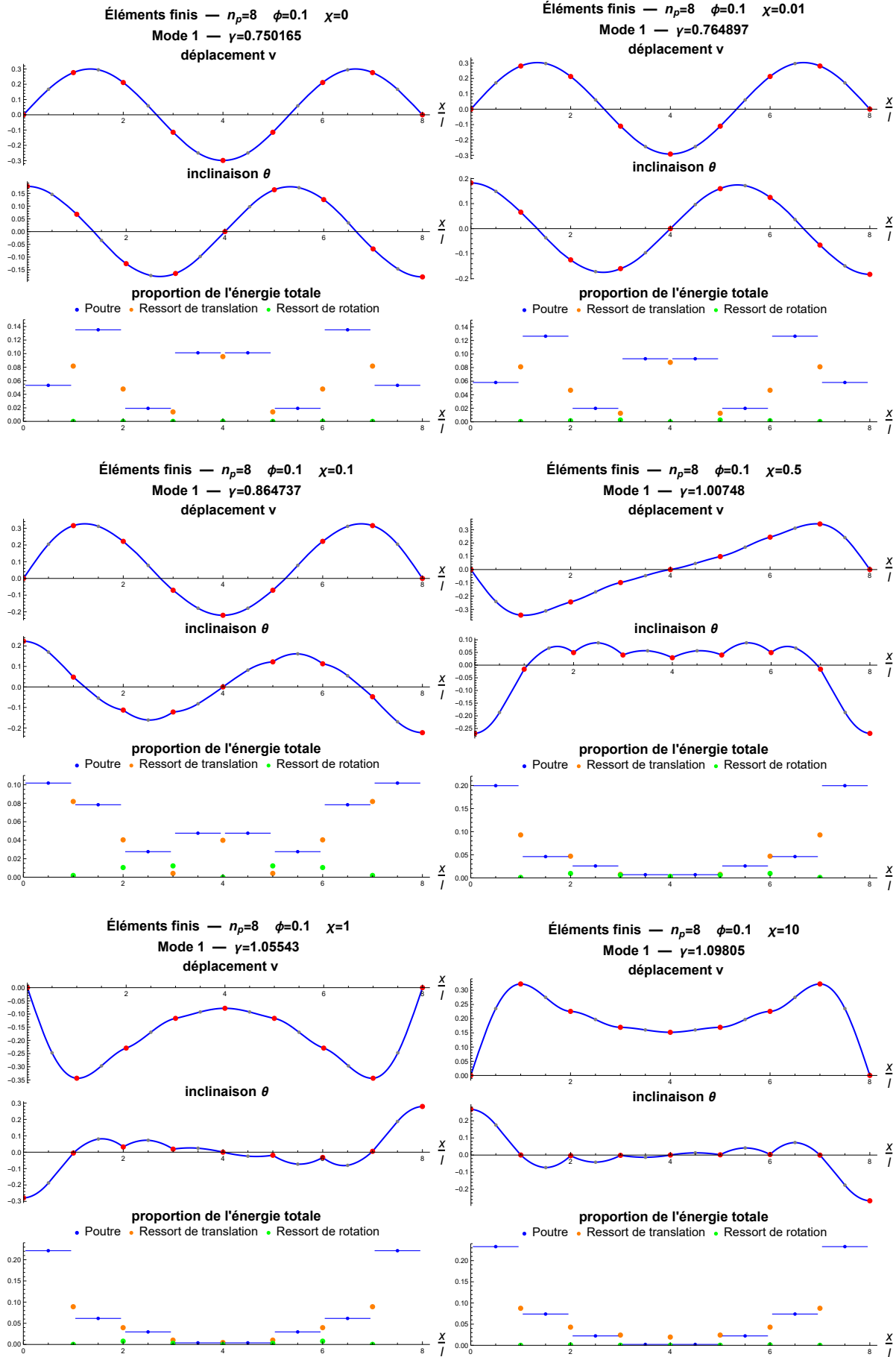
C.2 Pas de ressort de translation



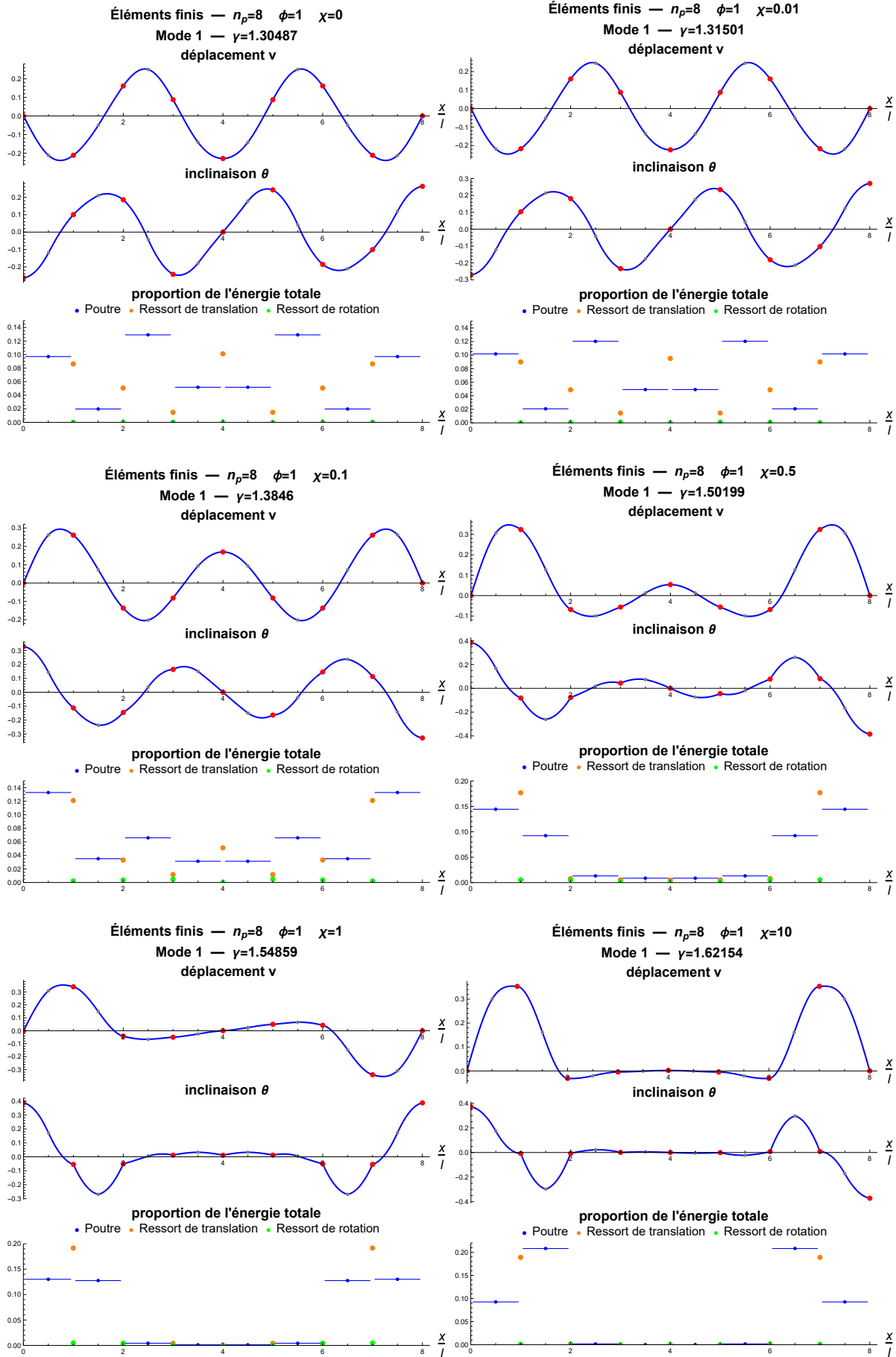
C.3 Ressorts de translation très souples



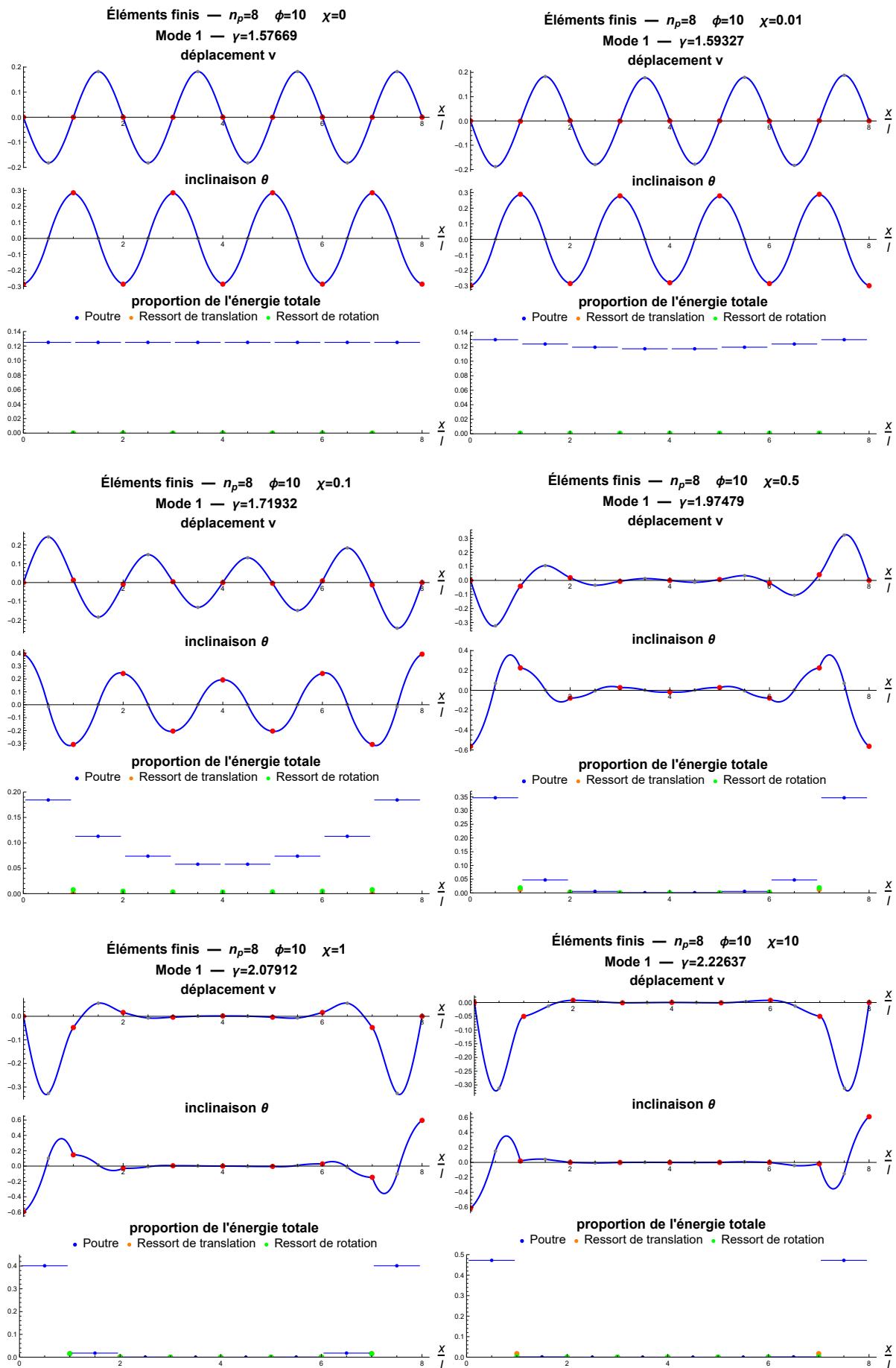
C.4 Ressorts de translation souples



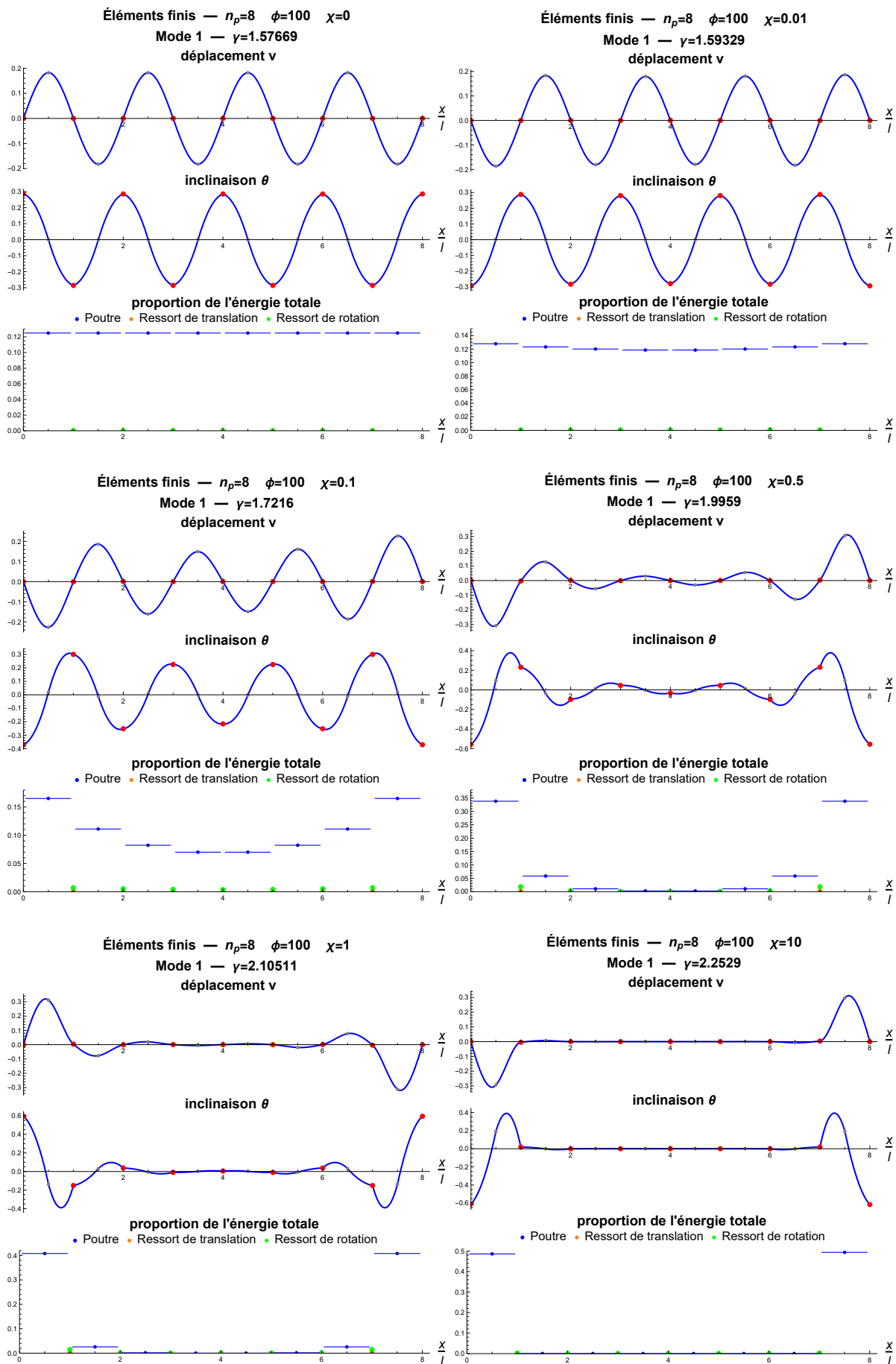
C.5 Ressorts de translation de raideur moyenne



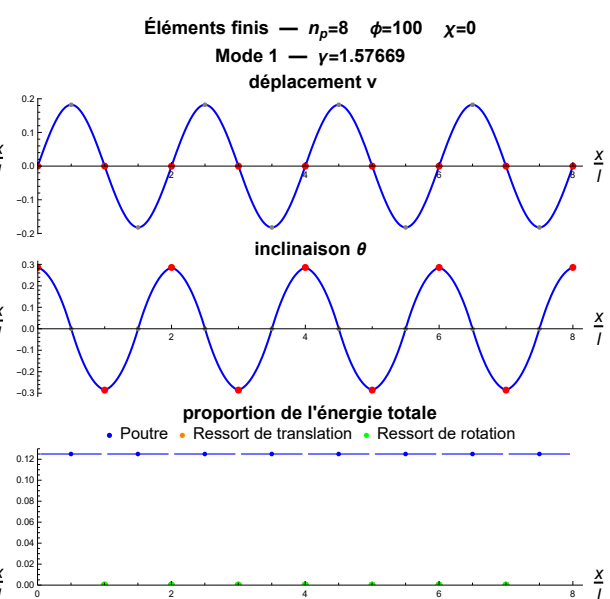
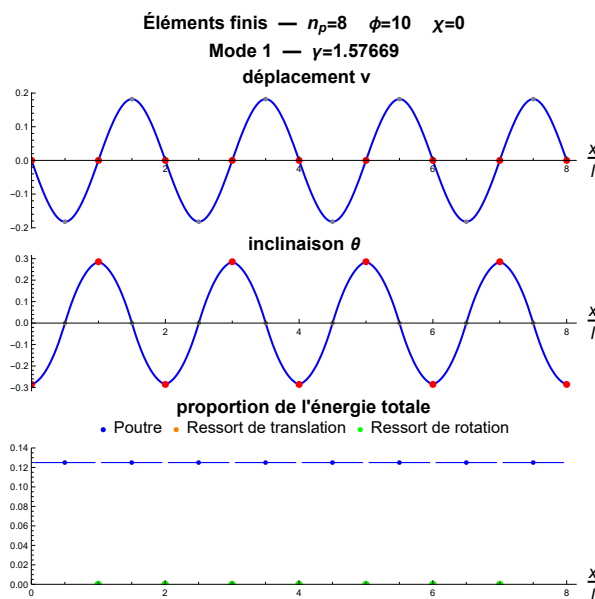
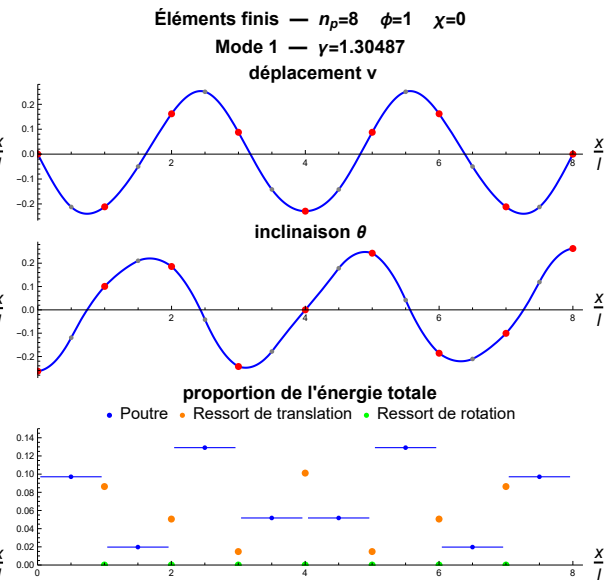
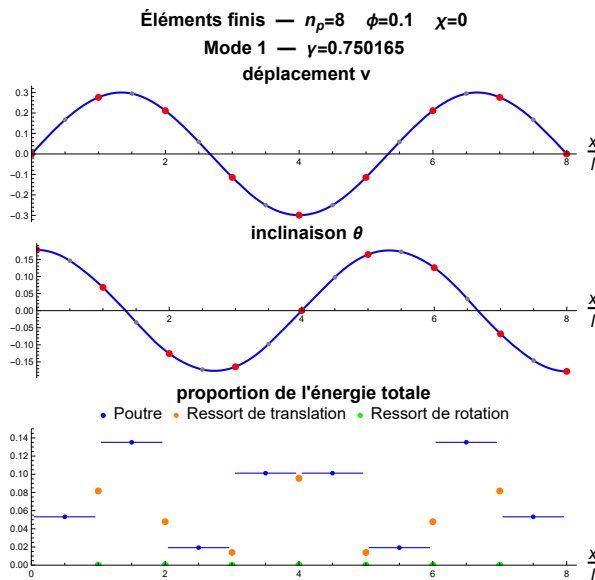
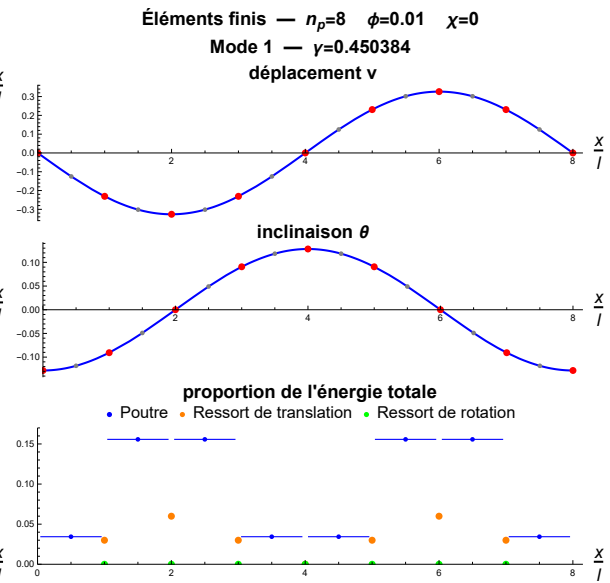
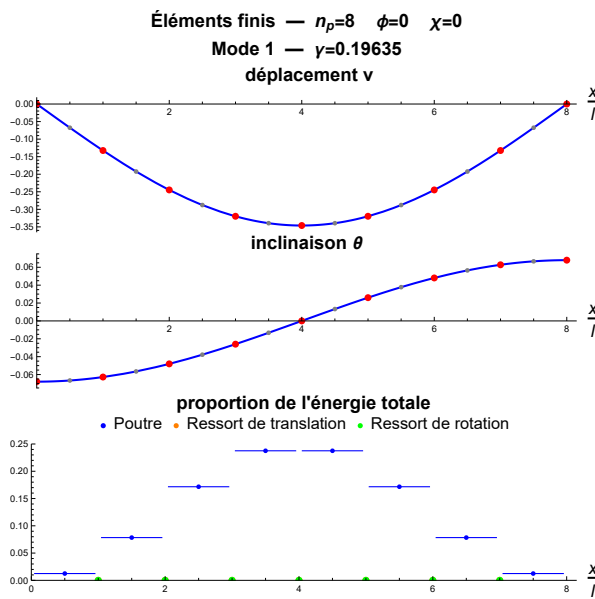
C.6 Ressorts de translation raides



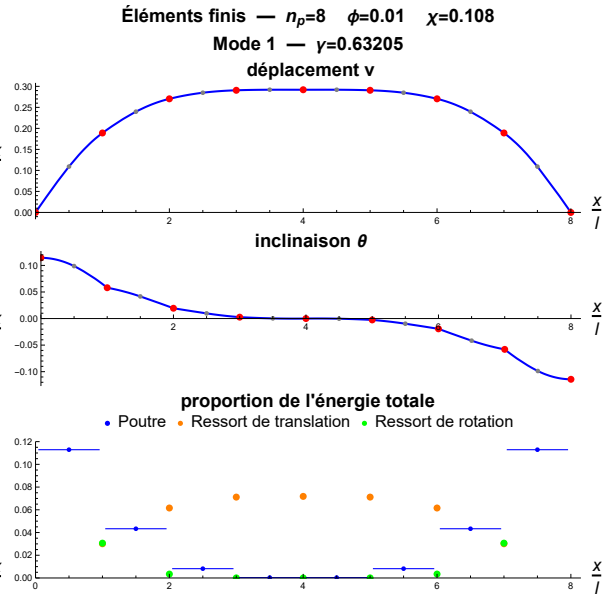
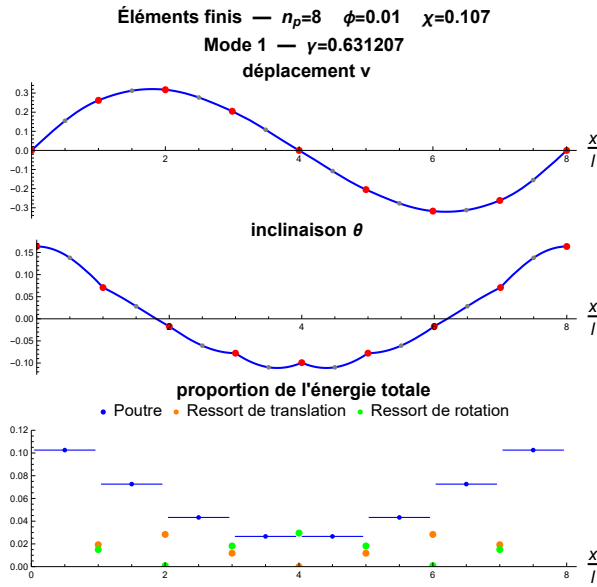
C.7 Ressorts de translation très raides



C.8 Ressorts de rotation absents



C.9 Un cas de transition



Annexe D

Solutions à périodicité exacte

L'objectif de cette étude étant la compréhension des mécanismes de flambement d'une structure périodique, elle implique nécessairement le caractère borné du milieu et donc des conditions aux limites d'extrémités.

Cependant, il est utile, pour la compréhension des modes de flambement que l'on voit émerger dans les différentes méthodes de résolution du problème, de rechercher les solutions à périodicité exacte.

Ce chapitre aborde cette recherche pour différentes tailles du volume élémentaire représentatif, c'est-à-dire pour différentes longueurs de périodicité spatiale : à une poutre élémentaire (une cellule), à deux cellules, à un nombre m de cellules quelconque.

Dans un deuxième temps, l'étude est reprise en utilisant le formalisme des ondes de Bloch.

L'étude est faite en l'absence de ressorts longitudinaux.

D.1 Périodicité à une cellule

D.1.1 Charges critiques et modes de flambement

On recherche la charge critique et la déformée en imposant une périodicité parfaite, à savoir $v_n = v_0$ et $\theta_n = \theta_0$ pour tout n . Les équations 2.37 et 2.39 deviennent

$$\phi v_0 = 0 \quad \text{et} \quad (f_2(\gamma) + \chi) \ell \theta_0 = 0 \quad (\text{D.1})$$

Pour $\phi = 0$, on peut avoir v_0 quelconque, mais la seule valeur qui serait compatible avec des conditions aux limites où la poutre macroscopique serait empêchée de se déplacer transversalement au moins en un point serait $v_0 = 0$. Pour ϕ quelconque, ceci impose $v_0 = 0$ (ce qui est compatible avec des conditions aux limites macroscopiques de double rotule par exemple).

On peut en revanche avoir $\theta_0 \neq 0$ et donc une solution non triviale si γ est telle que $f_2(\gamma) = -\chi$.

L'équation $f_2(\gamma) = -\chi$ n'a pas de solution analytique connue. Il faut donc une résolution numérique, qui fournit plusieurs valeurs de γ donnant plusieurs modes correspondants. On voit que ceux-ci sont indépendants de la raideur adimensionnelle ϕ des ressorts de translation transversale, vu que les nœuds ne se déplacent pas transversalement.

La valeur de γ pour le premier de ces modes parfaitement périodiques est proche de π et s'en éloigne si χ augmente. Pour χ très faible, on obtient $\gamma = \pi$, ce qui correspond à une charge critique $N = \frac{4EI\pi^2}{\ell^2}$, qui est la charge critique de flambement d'Euler d'une poutre élémentaire encastree à ses deux extrémités (ce qui correspond effectivement à la contrainte de parfaite périodicité sur chaque cellule).

D.1.2 Déformées

La déformée d'une poutre avec $v^E = v^B = 0$ et $\theta^E = \theta^B = \theta_0$ s'écrit alors

$$v(s) = \frac{3 f_2(\gamma) \ell \theta_0}{2 \gamma^2} \left(\cos \left(\frac{2 \gamma s}{\ell} \right) - \cot \gamma \sin \left(\frac{2 \gamma s}{\ell} \right) + \frac{2 s}{\ell} - 1 \right) \quad (\text{D.2})$$

ou encore, pour des valeurs de γ telles que $f_2(\gamma) = -\chi$,

$$v(s) = \frac{3 \chi \ell \theta_0}{2 \gamma^2} \left[1 - \frac{2 s}{\ell} - \frac{1}{\sin \gamma} \sin \left(\gamma \left(1 - \frac{2 s}{\ell} \right) \right) \right] \quad (\text{D.3})$$

La figure D.1 montre les allures des trois premiers modes, en déplacement et rotation, tracées sur la longueur de trois poutres, pour une valeur $\chi = 1$. Plus χ est élevé, plus les ressorts de rotation aux nœuds sont raides relativement aux poutres élémentaires, plus le point singulier observable sur $\theta(s)$ est marqué.

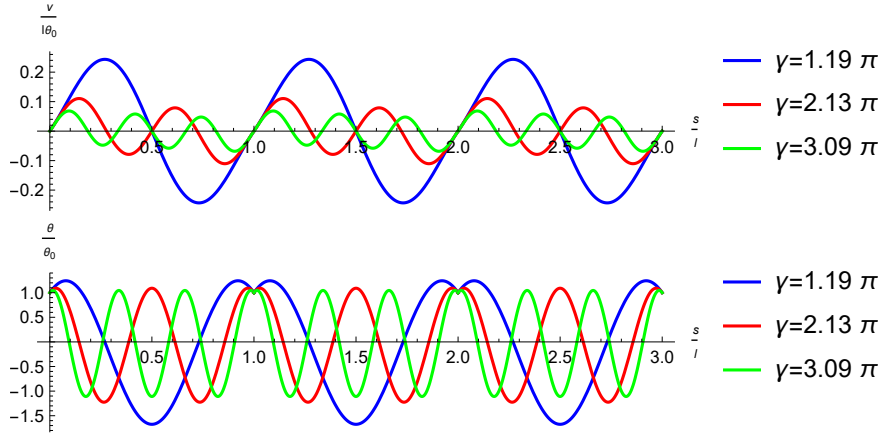


FIGURE D.1 – Modes exactement périodiques : allure des déformées en déplacement (au-dessus) et en rotation (en dessous) pour les trois premières solutions de $f_2(\gamma) = -\chi$, avec $\chi = 1$.

D.2 Périodicité à deux cellules

D.2.1 Équation générale

On impose $v_n = v_{n-2}$ et $\theta_n = \theta_{n-2}$ pour tout n (et donc en particulier $v_{n+1} = v_{n-1}$...).

Les équations d'équilibre 2.37 et 2.39 donnent ainsi un système pouvant se mettre sous la forme $\underline{\underline{A}}_2 \underline{\underline{U}}_{n,2} = \underline{\underline{0}}$, avec

$$\underline{\underline{A}}_2 = \begin{bmatrix} 2f_1(\gamma) + \phi & -2f_1(\gamma) & 0 & 0 \\ -2f_1(\gamma) & 2f_1(\gamma) + \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}f_4(\gamma) - f_2(\gamma) - \chi & -\frac{1}{3}f_4(\gamma) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}f_4(\gamma) & \frac{1}{3}f_4(\gamma) - f_2(\gamma) - \chi \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{U}}_{n,2} = \begin{bmatrix} v_n \\ v_{n-1} \\ \ell \theta_n \\ \ell \theta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

Ce système n'admet de solution non-triviale qu'à la condition que $\det(\underline{\underline{A}}_2) = 0$, soit

$$\phi(4f_1(\gamma) + \phi)(f_2(\gamma) + \chi) \left(f_2(\gamma) - \frac{2}{3}f_4(\gamma) + \chi \right) = 0 \quad (\text{D.5})$$

Ceci redonne les deux conditions $\phi = 0$ ou $f_2(\gamma) + \chi = 0$ obtenues pour les modes périodiques à une cellule. Et ceci fournit également deux autres conditions.

D.2.2 Modes antipériodiques en déplacement

La condition $4f_1(\gamma) + \phi = 0$ impose $\theta_n = 0$ et $v_n = -v_{n-1}$ pour tout n (avec toujours $v_n = v_{n-2}$) : ce sont des modes antipériodiques en déplacement, où les angles aux nœuds sont nuls et où deux nœuds consécutifs se déplacent transversalement en opposition de phase. On a alors pour une poutre élémentaire donnée

$$v(s) = v^B + \frac{6v^B}{2\gamma^2} \left[f_2(\gamma) \left(\cos\left(\frac{2\gamma s}{\ell}\right) - 1 \right) + \frac{\phi}{4} \left(\frac{1}{\gamma} \sin\left(\frac{2\gamma s}{\ell}\right) + 2\frac{s}{\ell} \right) \right] \quad (\text{D.6})$$

La figure D.2 montre les allures des trois premiers modes, en déplacement et rotation, tracées sur la longueur de trois poutres, pour une valeur $\phi = 1$. Plus ϕ est élevé, plus les ressorts de compression transversale aux nœuds sont raides relativement aux poutres élémentaires, plus la dissymétrie des tracés au sein de chaque poutre est visible (elle ne l'est presque pas avec $\phi = 1$).

D.2.3 Modes antipériodiques en rotation

La dernière condition $f_2(\gamma) - \frac{2}{3}f_4(\gamma) + \chi = 0$ impose $v_n = 0$ et $\theta_n = -\theta_{n-1}$ pour tout n (et toujours $\theta_n = \theta_{n-2}$) : ce sont des modes antipériodiques en rotation, où deux nœuds consécutifs ne sont pas déplacés

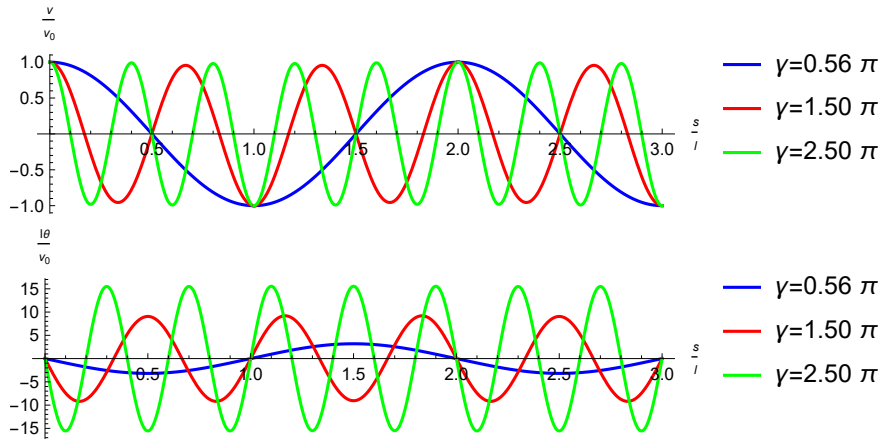


FIGURE D.2 – Modes exactement périodiques sur deux cellules : allure des déformées en déplacement (au-dessus) et en rotation (en dessous) pour les trois premières solutions de $4f_1(\gamma) = -\phi$, avec $\phi = 1$.

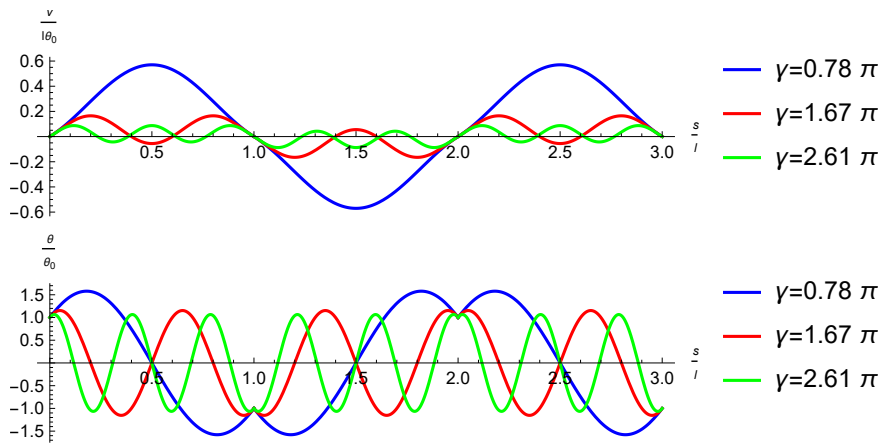


FIGURE D.3 – Modes exactement périodiques sur deux cellules : allure des déformées en déplacement (au-dessus) et en rotation (en dessous) pour les trois premières solutions de $f_2(\gamma) - \frac{2}{3}f_4(\gamma) + \chi = 0$, avec $\chi = 1$.

transversalement et tournent en opposition de phase. On a alors pour une poutre élémentaire donnée

$$v(s) = \frac{\ell \theta^B}{\gamma^2} \left[-\frac{3\chi}{2} \left(\cos\left(\frac{2\gamma s}{\ell}\right) - 1 \right) + \frac{\gamma}{2} \sin\left(\frac{2\gamma s}{\ell}\right) \right] \quad (\text{D.7})$$

La figure D.3 montre les allures des trois premiers modes, en déplacement et rotation, tracées sur la longueur de trois poutres, pour une valeur $\chi = 1$. On constate la même chose sur l'influence de χ que pour le mode périodique sur une cellule.

D.2.4 Bilan

Cette étude des modes exactement périodiques sur deux cellules élémentaires montre que le mode de flambement présentant une périodicité à deux cellules et survenant pour la valeur de γ la plus petite, donc pour la charge critique la plus faible, est le mode antipériodique en déplacement, où un nœud se déplace transversalement en opposition de phase avec ses voisins. Notons que ceci est incompatible avec des situations où les nœuds extrêmes de la poutre macroscopique seraient empêchés en déplacement transversal (appuis rotulés par exemple).

Le plus petit γ est voisin de $\frac{\pi}{2}$ si ϕ est petit, ce qui correspond à une charge critique $N = \frac{EI\pi^2}{\ell^2}$: c'est la charge critique d'Euler pour le premier mode de flambement d'une poutre élémentaire bi-rotulée.

La figure D.4 montre, pour différentes valeurs de χ ou ϕ (en échelle logarithmique), comment évoluent les trois critères vus, donnant les modes strictement périodique sur une cellule ou sur deux cellules. L'aspect discontinu des courbes pour les grandes valeurs de l'abscisse est dû à la difficulté de Mathematica à faire la résolution numérique des équations donnant γ . L'ordonnée est la charge critique réduite \bar{N} , c'est-à-dire la charge

critique \bar{N} calculée à partir des valeurs minimales de γ vérifiant les critères énoncés, ramenée à la charge critique de flambement d'Euler d'une poutre élémentaire bi-rotulée.

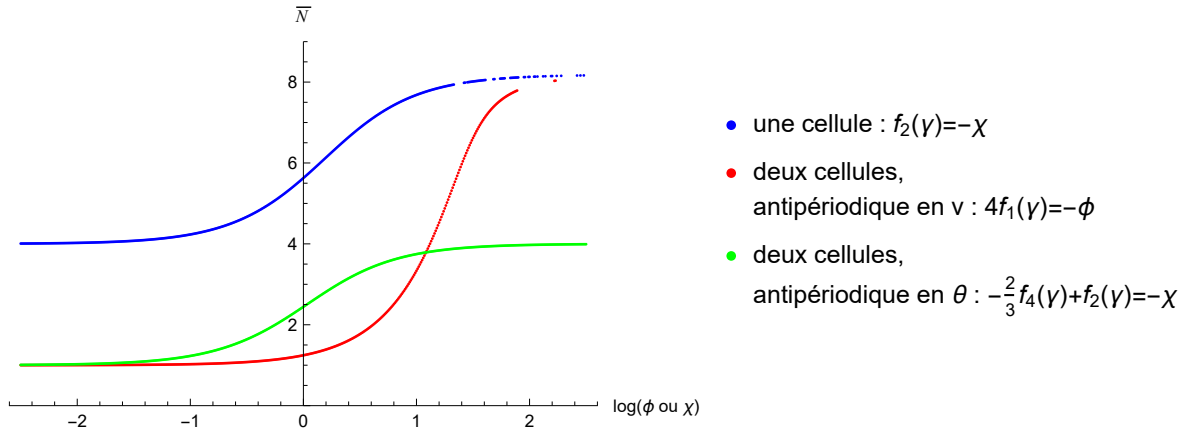


FIGURE D.4 – Modes exactement périodiques sur deux cellules : charges critiques réduites en fonction des raideurs pour les différents modes.

On constate évidemment ce que l'on a déjà vu pour les faibles valeurs des raideurs des ressorts : la périodicité imposée sur une seule cellule correspond à $\bar{N} = 4$ (poutre élémentaire bi-encastrée) et la périodicité imposée sur deux cellules correspond à $\bar{N} = 1$ (poutre élémentaire bi-rotulée). On constate également qu'en fonction des valeurs de χ ou ϕ , le mode antipériodique qui survient pour la charge critique la plus faible n'est pas le même. En revanche, le mode périodique à une cellule ne survient jamais en premier vu que pour une même valeur de χ le mode antipériodique en θ survient toujours avant.

D.3 Périodicité à un nombre quelconque de cellules

D.3.1 Processus général

En suivant le même processus que pour deux cellules pour une périodicité imposée à m cellules, c'est-à-dire pour $v_n = v_{n-m}$ et $\theta_n = \theta_{n-m}$ pour tout n , le problème se met sous la forme

$$\underline{\underline{A}}_m \underline{\underline{U}}_{n,m} = \underline{\underline{0}} \quad (\text{D.8})$$

où $\underline{\underline{U}}_{n,m}$ est le vecteur des coordonnées de m cellules consécutives :

$$\underline{\underline{U}}_{n,m} = \begin{bmatrix} v_n \\ \vdots \\ v_{n-m+1} \\ \ell \theta_n \\ \vdots \\ \ell \theta_{n-m+1} \end{bmatrix} \quad (\text{D.9})$$

et $\underline{\underline{A}}_m$ est une matrice $2m \times 2m$ composée en blocs ainsi :

$$\underline{\underline{A}}_m = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_m^v & \underline{\underline{A}}_m^\times \\ \text{T} \underline{\underline{A}}_m^\times & \underline{\underline{A}}_m^\theta \end{bmatrix} \quad (\text{D.10})$$

avec

$$\underline{\underline{A}}_m^v = -f_1(\gamma) \underline{\underline{J}}_m - \phi \underline{\underline{I}}_m \quad \underline{\underline{A}}_m^\theta = \frac{1}{6} f_4(\gamma) \underline{\underline{J}}_m - (f_2(\gamma) + \chi) \underline{\underline{I}}_m \quad \underline{\underline{A}}_m^\times = \frac{1}{2} f_2(\gamma) \underline{\underline{K}}_m \quad (\text{D.11})$$

où \underline{I}_m est la matrice identité $m \times m$ et où on a posé les deux matrices $m \times m$ suivantes :

$$\underline{J}_m = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \underline{K}_m = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

Un processus possible pour connaître les charges critiques et les allures des modes correspondants dans le cas d'une périodicité à m cellules élémentaires consiste à chercher les racines du déterminant de \underline{A}_m , qui donnent des expressions implicites de γ avec ϕ et χ comme paramètres. Les vecteurs des noyaux associés permettent, eux, de connaître les répartitions des déplacements et rotations aux nœuds d'une période spatiale, ce qui permet ensuite de tracer la déformée le long de la poutre macroscopique. Ce procédé paraît toutefois difficile à systématiser.

D.3.2 Exemple à trois cellules

Le vecteur des déplacements aux nœuds est ici

$$\underline{U}_{n,3} = \begin{bmatrix} v_n \\ v_{n-1} \\ v_{n-2} \\ \ell \theta_n \\ \ell \theta_{n-1} \\ \ell \theta_{n-2} \end{bmatrix} \quad (\text{D.13})$$

Le déterminant de \underline{A}_3 s'écrit

$$\det \underline{A}_3 = -\frac{1}{16} \phi (f_2(\gamma) + \chi) (6 f_1(\gamma) (f_4(\gamma) - 2 (f_2(\gamma) + \chi)) - 4 \phi (f_2(\gamma) + \chi) + 2 \phi f_4(\gamma) + 3 f_2(\gamma)^2)^2 \quad (\text{D.14})$$

On reconnaît les deux possibilités de nullité $\phi = 0$ et $f_2(\gamma) + \chi = 0$ qui sont les solutions pour la périodicité exacte à une seule période, et que l'on retrouvera toujours. On voit également apparaître une troisième possibilité de nullité du déterminant :

$$6 f_1(\gamma) (f_4(\gamma) - 2 (f_2(\gamma) + \chi)) - 4 \phi (f_2(\gamma) + \chi) + 2 \phi f_4(\gamma) + 3 f_2(\gamma)^2 = 0 \quad (\text{D.15})$$

qui est une solution double à laquelle sont associés deux vecteurs du noyau :

$$\begin{bmatrix} -g_3(\phi, \chi) \\ 2 g_3(\phi, \chi) \\ -g_3(\phi, \chi) \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} g_3(\phi, \chi) \\ g_3(\phi, \chi) \\ -2 g_3(\phi, \chi) \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.16})$$

où la fonction $g_3(\phi, \chi)$ n'a pas d'expression que l'on peut expliciter ici et est obtenue par résolution de l'équation D.15.

La forme de ces vecteurs permet de retrouver la forme des modes de déformation au sein d'une période : on retrouve en l'occurrence des valeurs proportionnelles aux cosinus de $k \frac{2\pi}{3}$ ($k = 1, 2, 3$) pour les déplacements transversaux v , et aux sinus de $k \frac{2\pi}{3}$ pour les angles.

D.3.3 Nombre m de cellules élevé, raideurs faibles

Plus le nombre de cellules dans la période considérée augmente, plus le nombre de modes devient élevé : par exemple, si $m = 6$, on retrouve les deux modes de la périodicité à une cellule (dont un est impossible), les deux

modes de la périodicité à deux cellules, le mode double de la périodicité à trois cellules, et un mode double supplémentaire.

À chaque fois, il s'agit de savoir, pour les valeurs de ϕ et χ données, lequel donne lieu au flambement en premier, donc lequel a la plus petite valeur de γ . Il est impossible de répondre ici à cette question de manière générale vu les allures des expressions des déterminants.

Cependant, on peut vérifier numériquement que pour tout m , si $\phi = 0$ et $\chi = 0$, la valeur $\gamma = \frac{\pi}{m}$ est une solution de $\det \underline{\underline{A}}_m = 0$. Et vu que pour chaque m , les modes des diviseurs de m sont inclus dans les modes possibles pour m , on infère que la plus petite valeur de γ est $\frac{\pi}{m}$ lorsqu'on recherche un mode à périodicité sur m cellules.

À partir de là, étant donnée une poutre macroscopique d'une longueur donnée, contenant un nombre de poutres élémentaires n_p , il paraît logique d'imaginer que le flambement global se fait, pour la plus petite charge critique possible, lorsque la périodicité est sur $m = 2n_p$ cellules : en effet le flambement global sans ressorts est une arche de sinus sur n_p cellules, donc deux arches sur $2n_p$ cellules. On retrouve ainsi la charge critique de flambement global d'une poutre de longueur $n_p \ell$, car $\gamma = \frac{\pi}{m} = \frac{\pi}{2n_p}$ correspond bien à la charge critique

$$N = \frac{EI\pi^2}{(n_p \ell)^2}.$$

Ce cas particulier n'est pas sans importance pour la suite. On verra que, lors des processus d'homogénéisation périodique, dès lors que les ressorts sont assez souples (en l'occurrence ϕ et χ tous deux un ordre de grandeur en dessous de 1), la détermination de γ à l'ordre dominant se fait, une fois fixé le nombre m de cellules sur lequel on cherche la pseudo-périodicité, en déterminant la plus petite racine de $\det \underline{\underline{A}}_m = 0$, donc donne $\frac{\pi}{m}$ comme valeur de γ à l'ordre dominant.

La suite de la recherche dans le processus de développement asymptotique donne des correcteurs à cette valeur dominante de γ . Or, si m est élevé, la valeur dominante de γ varie peu de m à $m + 1$, éventuellement moins que les correcteurs déterminés aux ordres supérieurs. Voilà pourquoi on ne peut pas *a priori* conclure que pour une longueur de poutre donnée (ou pour n_p donné), dès lors que ϕ et χ sont assez faibles, c'est le mode de flambement global à une arche de sinus qui a la plus faible charge critique. Ceci est cohérent du reste avec ce que l'on a observé dans les résolutions numériques par éléments finis.

D.4 Formalisme de Bloch

Cette section vise à reprendre l'étude faite dans le début de ce chapitre en utilisant le formalisme des ondes de Bloch. Ceci est inspiré par les études dynamiques, notamment [18]. Voilà pourquoi le vocabulaire reprend celui de la propagation des ondes, bien qu'il n'y ait aucun aspect temporel dans l'étude des modes de flambement.

D.4.1 Relation de dispersion

La méthode consiste à définir un paramètre k_γ , dépendant *a priori* de γ , analogue d'un vecteur d'onde, compris entre 0 et $\frac{\pi}{\ell}$, et d'introduire dans l'équation 2.42 une solution de la forme :

$$\underline{\underline{U}}_n = \underline{\underline{U}}_0 e^{i n k_\gamma \ell} \quad (\text{D.17})$$

L'équation 2.42 devient alors

$$\left(\underline{\underline{B}} - i \underline{\underline{C}} \sin k_\gamma \ell + 2 \underline{\underline{D}} (\cos k_\gamma \ell - 1) - \underline{\underline{R}} \right) \underline{\underline{U}}_0 = \underline{\underline{0}} \quad (\text{D.18})$$

soit

$$\begin{bmatrix} 2 f_1(\gamma) (\cos k_\gamma \ell - 1) - \phi & i f_2(\gamma) \sin k_\gamma \ell \\ i f_2(\gamma) \sin k_\gamma \ell & -f_2(\gamma) - \frac{1}{3} f_4(\gamma) (\cos k_\gamma \ell - 1) - \chi \end{bmatrix} \underline{\underline{U}}_0 = \underline{\underline{0}} \quad (\text{D.19})$$

Il n'y a des solutions $\underline{\underline{U}}_0$ non nulles que si le déterminant de la matrice multipliant $\underline{\underline{U}}_0$ est nul, soit

$$(2 f_1(\gamma) (\cos k_\gamma \ell - 1) - \phi) \left(-f_2(\gamma) - \frac{1}{3} f_4(\gamma) (\cos k_\gamma \ell - 1) - \chi \right) - (f_2(\gamma) \sin k_\gamma \ell)^2 = 0 \quad (\text{D.20})$$

Cette dernière équation donne k_γ en fonction de γ et est l'analogie d'une relation de dispersion.

D.4.2 Modes périodiques sur un nombre entier de cellules

Comme précédemment, on recherche particulièrement les modes à périodicité sur un nombre entier m de poutres élémentaires. Cela survient lorsque k_γ est de la forme $\frac{2\pi}{\ell} \frac{q}{m}$, avec q entier, en effet :

$$\underline{U}_{n+m} = \underline{U}_0 e^{i(n+m) \frac{2\pi}{\ell} \frac{q}{m} \ell} = \underline{U}_n e^{i2\pi q} = \underline{U}_n \quad (\text{D.21})$$

Comme on a considéré k_γ entre 0 et $\frac{\pi}{\ell}$, q est compris entre 0 et $\frac{m}{2}$. Les différentes valeurs de q caractérisent les modes possibles pour chaque périodicité recherchée.

Pour un couple (m, q) donné, on obtient la forme de \underline{U}_n , pour n quelconque, à l'aide de l'équation D.19, puis les $m - 1$ nœuds suivants s'obtiennent par

$$\underline{U}_{n+j} = \underline{U}_n e^{ij2\pi \frac{q}{m}} \quad \text{avec} \quad j \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket \quad (\text{D.22})$$

On peut construire une matrice de passage permettant un changement de variable, avec les vecteurs colonnes $[e^{ij2\pi \frac{q}{m}}]$ où j est le numéro de ligne, q le numéro de colonne, avec les parties réelles occupant une colonne et les parties imaginaires, lorsqu'elles existent, une autre colonne. On explicitera ci-après sur des exemples à quoi servent ces matrices dans le contexte d'une étude avec un volume élémentaire représentatif à m cellules.

D.4.3 Modes périodiques sur une cellule

Pour $m = 1$, la seule valeur de q possible est $q = 0$. Alors $k_\gamma = 0$ et la relation de dispersion se résume à

$$\phi(-f_2(\gamma) - \chi) = 0 \quad (\text{D.23})$$

On retrouve les deux possibilités déjà vues $\phi = 0$ et $f_2(\gamma) = -\chi$. La première impose $\theta_0 = 0$, c'est le mode à périodicité sur une cellule avec déplacement constant d'une poutre droite, non intéressant et non compatible avec des conditions aux limites sauf pour $v_0 = 0$. La deuxième possibilité impose $v_0 = 0$, mais θ_0 constant peut être non nul : c'est le mode périodique à une cellule déjà décrit.

D.4.4 Modes périodiques sur deux cellules

Pour $m = 2$, q peut prendre deux valeurs : $q = 0$ et $q = 1$. La solution $q = 0$ décrit le mode périodique sur une cellule vu ci-avant. La solution $q = 1$ donne la relation de dispersion suivante :

$$(-4f_1(\gamma) - \phi) \left(-f_2(\gamma) + \frac{2}{3}f_4(\gamma) - \chi \right) = 0 \quad (\text{D.24})$$

On retrouve les deux possibilités déjà vues :

- $-4f_1(\gamma) - \phi = 0$, pour laquelle l'équation D.19 impose $\theta_n = 0$ pour tout n , et l'équation D.22 donne $v_{n+1} = e^{i\pi} v_n = -v_n$: c'est le mode que l'on a appelé *antipériodique en déplacement*, avec rotations nulles aux nœuds (et donc les ressorts spiraux non sollicités, ce qui explique que χ n'intervienne pas) ;
- $-f_2(\gamma) + \frac{2}{3}f_4(\gamma) - \chi = 0$, pour laquelle $v_n = 0$ pour tout n et $\theta_{n+1} = -\theta_n$: c'est le mode *antipériodique en rotation*, avec déplacements nuls aux nœuds (et donc ϕ n'intervient pas).

En construisant une matrice de passage comme expliqué ci-dessus, on peut écrire (avec \underline{I}_2 la matrice identité 2×2) :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{2n} \\ \underline{U}_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_2 & \underline{I}_2 \\ \underline{I}_2 & -\underline{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Y}_n \\ \underline{Z}_n \end{bmatrix} \quad (\text{D.25})$$

Les vecteurs \underline{Y}_n et \underline{Z}_n sont des vecteurs contenant un déplacement transversal et un angle multiplié par ℓ . L'inversion de cette relation s'écrit

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_n \\ \underline{Z}_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{I}_2 & \underline{I}_2 \\ \underline{I}_2 & -\underline{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{2n} \\ \underline{U}_{2n+1} \end{bmatrix} \quad (\text{D.26})$$

Ceci montre la signification du changement de variable. Si $\underline{Z}_n = \underline{0}$, à la fois \underline{U}_{2n} et \underline{U}_{2n+1} sont égaux à \underline{Y}_n : cela décrit la périodicité à une cellule. Si $\underline{Y}_n = \underline{0}$, on a $\underline{U}_{2n} = \underline{Z}_n$ et $\underline{U}_{2n+1} = -\underline{Z}_n$: cela décrit la périodicité à deux cellules.

Ce changement de variable de $(\underline{U}_{2n}, \underline{U}_{2n+1})$ vers $(\underline{Y}_n, \underline{Z}_n)$ sera utilisé dans la méthode d'homogénéisation périodique, pour obtenir des équations découplées à l'ordre dominant.

D.4.5 Modes périodiques sur trois cellules

Pour $m = 3$, q peut valoir 0 : c'est le mode périodique sur une cellule déjà vu. Et q peut valoir 1, ce qui donne $k_\gamma \ell = \frac{2\pi}{3}$: il s'agit d'un mode périodique sur trois cellules, où γ est donné par

$$(-3f_1(\gamma) - \phi) \left(-f_2(\gamma) - \frac{1}{2}f_4(\gamma) - \chi \right) - \frac{3}{4}f_2(\gamma) = 0 \quad (\text{D.27})$$

Ici, ni le déplacement ni l'inclinaison n'est identiquement nul à tout nœud. Le changement de variable suivant pourra être utilisé (avec $\underline{\mathbf{Q}}_2$ matrice nulle 2×2) :

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}_{3n} \\ \underline{\mathbf{U}}_{3n+1} \\ \underline{\mathbf{U}}_{3n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{I}}_2 & \underline{\mathbf{I}}_2 & \underline{\mathbf{0}}_2 \\ \underline{\mathbf{I}}_2 & -\frac{1}{2}\underline{\mathbf{I}}_2 & \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{\mathbf{I}}_2 \\ \underline{\mathbf{I}}_2 & -\frac{1}{2}\underline{\mathbf{I}}_2 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Y}}_n \\ \underline{\mathbf{S}}_n \\ \underline{\mathbf{T}}_n \end{bmatrix} \quad (\text{D.28})$$

dont l'inversion est

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Y}}_n \\ \underline{\mathbf{S}}_n \\ \underline{\mathbf{T}}_n \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{I}}_2 & \underline{\mathbf{I}}_2 & \underline{\mathbf{I}}_2 \\ 2\underline{\mathbf{I}}_2 & -\underline{\mathbf{I}}_2 & -\underline{\mathbf{I}}_2 \\ \underline{\mathbf{0}}_2 & \sqrt{3}\underline{\mathbf{I}}_2 & -\sqrt{3}\underline{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}_{3n} \\ \underline{\mathbf{U}}_{3n+1} \\ \underline{\mathbf{U}}_{3n+2} \end{bmatrix} \quad (\text{D.29})$$

Ici $\underline{\mathbf{Y}}_n$ décrit comme précédemment la périodicité à une cellule. Les deux autres variables décrivent la périodicité distribuée sur trois cellules.

D.4.6 Modes périodiques sur quatre cellules

Pour $m = 4$, on retrouve $q = 0$ qui représente la périodicité à une cellule, $q = 2$ qui représente la périodicité à deux cellules. La nouveauté est $q = 1$, où $k_\gamma \ell = \frac{\pi}{2}$, avec γ donné par

$$(-2f_1(\gamma) - \phi) \left(-f_2(\gamma) - \frac{1}{3}f_4(\gamma) - \chi \right) - f_2(\gamma)^2 = 0 \quad (\text{D.30})$$

Le changement de variables est réalisé à l'aide de

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}_{4n} \\ \underline{\mathbf{U}}_{4n+1} \\ \underline{\mathbf{U}}_{4n+2} \\ \underline{\mathbf{U}}_{4n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{I}}_2 & \underline{\mathbf{I}}_2 & \underline{\mathbf{0}}_2 & \underline{\mathbf{I}}_2 \\ \underline{\mathbf{I}}_2 & \underline{\mathbf{0}}_2 & \underline{\mathbf{I}}_2 & -\underline{\mathbf{I}}_2 \\ \underline{\mathbf{I}}_2 & -\underline{\mathbf{I}}_2 & \underline{\mathbf{0}}_2 & \underline{\mathbf{I}}_2 \\ \underline{\mathbf{I}}_2 & \underline{\mathbf{0}}_2 & -\underline{\mathbf{I}}_2 & -\underline{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Y}}_n \\ \underline{\mathbf{S}}_n \\ \underline{\mathbf{T}}_n \\ \underline{\mathbf{Z}}_n \end{bmatrix} \quad (\text{D.31})$$

dont l'inversion est

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Y}}_n \\ \underline{\mathbf{S}}_n \\ \underline{\mathbf{T}}_n \\ \underline{\mathbf{Z}}_n \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{I}}_2 & \underline{\mathbf{I}}_2 & \underline{\mathbf{I}}_2 & \underline{\mathbf{I}}_2 \\ 2\underline{\mathbf{I}}_2 & \underline{\mathbf{0}}_2 & -2\underline{\mathbf{I}}_2 & \underline{\mathbf{0}}_2 \\ \underline{\mathbf{0}}_2 & 2\underline{\mathbf{I}}_2 & \underline{\mathbf{0}}_2 & -2\underline{\mathbf{I}}_2 \\ \underline{\mathbf{I}}_2 & -\underline{\mathbf{I}}_2 & \underline{\mathbf{I}}_2 & -\underline{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}_{4n} \\ \underline{\mathbf{U}}_{4n+1} \\ \underline{\mathbf{U}}_{4n+2} \\ \underline{\mathbf{U}}_{4n+3} \end{bmatrix} \quad (\text{D.32})$$

Comme précédemment $\underline{\mathbf{Y}}_n$ décrit la périodicité à une cellule, $\underline{\mathbf{Z}}_n$ la périodicité à deux cellules. Et $\underline{\mathbf{S}}_n$ et $\underline{\mathbf{T}}_n$ décrivent des modes où un nœud sur deux est au repos, les nœuds adjacents étant en antipériodicité.

Annexe E

Mise en œuvre de l'homogénéisation

L'objectif de ce chapitre est de montrer de manière détaillée l'utilisation du processus décrit au chapitre précédent, sur quelques exemples, choisis de manière à faire émerger plusieurs situations typiques.

Ce détail ne sera pas fait pour l'ensemble des cas étudiés. L'ensemble des résultats est présenté dans l'annexe F de manière systématique, dans le chapitre 4 de manière synthétique.

On choisira dans chaque cas des conditions aux limites d'appui rotulé aux deux extrémités de la structure, en $x = 0$ et $x = H$, à savoir qu'à tout ordre :

- le déplacement est empêché, donc $v(0) = v(H) = 0$;
- la rotation est libre ; on admettra ici que ceci s'écrit $\partial_x^2 v(0) = \partial_x^2 v(H) = 0$ (ceci n'est en réalité valable que dans le cas des régimes à flambement global, mais cette question sera discutée par ailleurs).

Tous ces exemples sont sans ressorts longitudinaux. On présente d'abord le processus avec une recherche de pseudo-périodicité à une cellule, sur différents cas. Puis on illustre divers cas de pseudo-périodicité à deux cellules. Enfin, on donne un exemple à trois cellules, sachant que le processus est le même pour quatre cellules ou plus.

E.1 Cas sans aucun ressort

Si $\phi = 0$ et $\chi = 0$, c'est-à-dire $\underline{R} = \underline{0}$, la périodicité de la poutre n'est pas définie vu que les nœuds ne sont reliés à rien. Il faut donc, dans ce cas, vérifier que la méthode conduit au flambement global de la poutre macroscopique, sans aucune dépendance à ℓ .

E.1.1 Initialisation à l'ordre ε^0

L'équilibre à l'ordre ε^0 donne uniquement

$$f_2(\gamma^{(0)}) \theta^{(-1)}(x) = 0 \quad (\text{E.1})$$

E.1.2 Première possibilité : $f_2(\gamma^{(0)}) = 0$

Ceci implique que $\gamma^{(0)} = q\pi$ avec q entier non nul. Alors $f_1(\gamma^{(0)}) \neq 0$ et $f_4(\gamma^{(0)}) = \infty$.

L'ordre ε^1 s'écrit alors

$$\gamma^{(1)} \theta^{(-1)} f_2'(\gamma^{(0)}) = 0 \quad (\text{E.2})$$

E.1.2.1 Sous-cas : $\gamma^{(1)} = 0$

Alors l'ordre ε^2 donne

$$\begin{cases} f_1(\gamma^{(0)}) \partial_x^2 v_0(x) = 0 \\ \gamma^{(2)} f_2'(\gamma^{(0)}) \theta^{(-1)}(x) + \frac{L^2}{6} f_4(\gamma^{(0)}) \partial_x^2 \theta^{(-1)}(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

Comme $f_4(\gamma^{(0)})$ est infini et comme $f_1(\gamma^{(0)})$ est non nul, ceci impose $\partial_x^2 v^{(0)} = 0$ et $\partial_x^2 \theta^{(-1)} = 0$. Pour être compatible avec l'appui bi-rotulé, ceci impose $v^{(0)} = 0$.

Pour $\theta^{(-1)}$, première possibilité : $\theta^{(-1)} = 0$. Alors l'ordre ε^3 donne

$$\begin{cases} f_1(\gamma^{(0)}) \partial_x^2 v_1(x) = 0 \\ \gamma^{(2)} f_2'(\gamma^{(0)}) \theta^{(0)}(x) + \frac{L^2}{6} f_4(\gamma^{(0)}) \partial_x^2 \theta^{(0)}(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

Comme on en a fait la remarque précédemment, on voit qu'il s'écrit de la même manière que l'ordre précédent et qu'il implique de même la nullité des grandeurs cinématiques. Il en va de même à tous les ordres, donc aucun flambement ne survient avec ces valeurs de paramètres.

Deuxième possibilité : $\theta^{(-1)}$ fonction affine de x , non nulle. Alors la deuxième égalité n'est satisfaite que si $\gamma^{(2)} = 0$. En outre, la nullité des moments d'extrémité ne peut être assurée que si $\theta^{(-1)}$ n'est pas seulement affine, mais constante. Il s'agit d'un mode à angle uniforme, avec $\gamma = \pi$.

E.1.2.2 Sous-cas : $\gamma^{(1)} \neq 0$

Alors $\theta^{(-1)} = 0$ et l'ordre ε^2 s'écrit

$$\begin{cases} f_1(\gamma^{(0)}) \partial_x^2 v_0(x) = 0 \\ \gamma^{(1)} f_2'(\gamma^{(0)}) (-\theta^{(0)}(x) + \partial_x v^{(0)}(x)) = 0 \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

Ceci implique que $\partial_x^2 v^{(0)} = 0$, donc $v^{(0)} = 0$, et $\theta^{(0)} = 0$. Les ordres suivants entraînent également la nullité des grandeurs cinématiques à tout ordre.

Conclusion de la première possibilité : seule la cinématique à θ uniforme aux nœuds émerge dans ce cas.

E.1.3 Deuxième possibilité : $f_2(\gamma^{(0)}) \neq 0$

Alors $\theta^{(-1)} = 0$. L'ordre ε^1 s'écrit simplement

$$f_2(\gamma^{(0)}) (-\theta^{(0)}(x) + \partial_x v^{(0)}(x)) = 0 \quad (\text{E.6})$$

Ceci donne $\theta^{(0)} = \partial_x v^{(0)}$ puisque $f_2(\gamma^{(0)}) \neq 0$. L'ordre ε^2 s'écrit alors

$$\begin{cases} (f_1(\gamma^{(0)}) - f_2(\gamma^{(0)})) \partial_x^2 v^{(0)}(x) = 0 \\ f_2(\gamma^{(0)}) (-\theta^{(1)}(x) + \partial_x v^{(1)}(x)) = 0 \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

La deuxième de ces équations donne $\theta^{(1)} = \partial_x v^{(1)}$. La première peut se réécrire $\gamma^{(0)2} \partial_x^2 v^{(0)} = 0$ vu les expressions de f_1 et f_2 .

E.1.3.1 Sous-cas : $\gamma^{(0)} \neq 0$

Alors $\partial_x^2 v^{(0)} = 0$, donc $v^{(0)} = 0$. Les ordres suivants donnent de la même manière la nullité à tout ordre des grandeurs cinématiques.

E.1.3.2 Sous-cas : $\gamma^{(0)} = 0$

L'ordre ε^3 donne une unique équation : $\theta^{(2)} = \partial_x v^{(2)}$.

L'ordre ε^4 s'écrit, lui,

$$\begin{cases} \partial_x^4 v^{(0)}(x) + \frac{4\hat{\gamma}^{(1)2}}{\ell^2} \partial_x^2 v^{(0)}(x) = 0 \\ f_2(\gamma^{(0)}) (-\theta^{(3)}(x) + \partial_x v^{(3)}(x)) = 0 \end{cases} \quad (\text{E.8})$$

La deuxième équation donne $\theta^{(3)} = \partial_x v^{(3)}$ et la première fournit une équation différentielle d'ordre quatre, dont la solution générale s'écrit

$$v^{(0)}(x) = a_1 \sin\left(2\hat{\gamma}^{(1)} \frac{x}{\ell}\right) + a_2 \cos\left(2\hat{\gamma}^{(1)} \frac{x}{\ell}\right) + a_3 \frac{x}{\ell} + a_4 \quad (\text{E.9})$$

Les conditions aux limites de double appui rotulé à l'ordre dominant ($v^{(0)} = 0$ en $x = 0$ et $x = H$ et $\partial_x^2 v^{(0)} = 0$ en $x = 0$ et $x = H$) impliquent $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$ d'une part, et d'autre part $a_1 = 0$, qui est la solution triviale où tout est nul, ou alors

$$\sin\left(2\hat{\gamma}^{(1)} \frac{H}{\ell}\right) = 0 \quad \text{soit} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{q\pi\ell}{2H} \quad (\text{E.10})$$

Si l'on cherche la plus faible valeur de $\hat{\gamma}^{(1)}$, donnant la charge critique de flambement, on est conduit à éliminer la possibilité que q soit négatif, puis choisir $q = 1$ et alors $\hat{\gamma}^{(1)} = \frac{\pi\ell}{2H}$.

E.1.3.3 Ordres suivants

En ε^4 , on obtient pour l'équilibre en translation

$$\partial_x^4 \hat{v}^{(1)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(1)2}}{\ell^2} \partial_x^2 \hat{v}^{(1)} = -\frac{8\hat{\gamma}^{(1)}\hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \partial_x^2 v^{(0)} \quad (\text{E.11})$$

C'est une équation d'oscillateur harmonique forcé à sa pulsation spatiale de résonance, donc le seul moyen pour que $\hat{v}^{(1)}$ reste fini est que $\hat{\gamma}^{(2)} = 0$. On peut vérifier que les ordres supérieurs donnent pour la même raison $\hat{\gamma}^{(i)} = 0$ pour tout $i \geq 2$.

On observe ainsi qu'à tous ces ordres, $v^{(i)}$ vérifie la même équation différentielle que $v^{(0)}$ et que $\theta^{(i)} = \partial_x v^{(i)}$. Ainsi, les formes du déplacement et de l'angle sont les mêmes à tous ordres, ce qui permet une factorisation.

E.1.4 Bilan

On a donc obtenu le déplacement et l'angle aux nœuds, non seulement à l'ordre dominant mais, compte tenu de la factorisation évoquée ci-dessus, à tout ordre, pour le premier mode de flambement ($q = 1$) :

$$v(x) = v_0 \sin \frac{\pi x}{H} \quad \text{et} \quad \theta(x) = \frac{\pi}{H} v_0 \cos \frac{\pi x}{H} \quad (\text{E.12})$$

La charge critique de flambement est

$$N = \frac{4EI}{\ell^2} \hat{\gamma}^{(1)2} = \frac{EI\pi^2}{H^2} \quad (\text{E.13})$$

Ces résultats sont bien ceux de la poutre unique de longueur H en double appui rotulé : c'est bien ce que l'on cherchait à retrouver et que la méthode donne exactement pour peu qu'on la pousse à un ordre infini. On obtient évidemment la déformée dont l'allure est donnée en figure E.1.

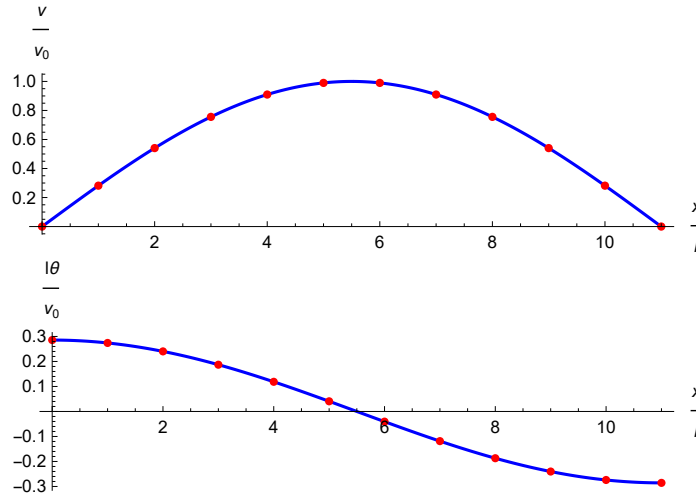


FIGURE E.1 – Allure de la déformée de la poutre macroscopique pour $\chi = 0$, $\phi = 0$ et $\frac{H}{\ell} = 11$; en haut le déplacement transversal v , en bas l'angle θ .

E.2 Cas sans ressort de translation, avec des ressorts de rotation de raideur du même ordre de grandeur que la raideur de flexion de la poutre

Avec $\phi = 0$ et $\tau_c = 0$, on a

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}\underline{\underline{\mathbf{U}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \chi L \theta^{(-1)} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ \chi L \theta^{(0)} \end{bmatrix} + \varepsilon^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \chi L \theta^{(1)} \end{bmatrix} + \varepsilon^3 \begin{bmatrix} 0 \\ \chi L \theta^{(2)} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (\text{E.14})$$

L'ordre ε^0 donne uniquement

$$(\chi + f_2(\gamma^{(0)})) \theta^{(-1)}(x) = 0 \quad (\text{E.15})$$

La solution $f_2(\gamma^{(0)}) = -\chi$ donne, à l'ordre suivant, soit la nullité de $\partial_x^2 \theta^{(-1)}$ et de $v^{(0)}$ (et alors, le problème se présentant de la même manière à tous ordres, on en déduit que ceci conduit uniquement à la solution triviale où tout est nul), soit le mode à θ uniforme.

Pour chercher un mode modulé, on étudie donc $f_2(\gamma^{(0)}) \neq -\chi$ et donc $\theta^{(-1)} = 0$. Dans ces conditions, l'ordre ε^1 conduit à

$$\theta^{(0)}(x) = \frac{f_2(\gamma^{(0)})}{\chi + f_2(\gamma^{(0)})} \partial_x v^{(0)}(x) \quad (\text{E.16})$$

On n'a plus, du fait de la présence des ressorts de rotation, le lien simple $\theta^{(0)} = \partial_x v^{(0)}$.

Ensuite, l'ordre ε^2 donne

$$\begin{cases} \left(f_1(\gamma^{(0)}) - \frac{f_2(\gamma^{(0)})^2}{\chi + f_2(\gamma^{(0)})} \right) \partial_x^2 v^{(0)}(x) = 0 \\ \theta^{(1)}(x) = \frac{f_2(\gamma^{(0)})}{\chi + f_2(\gamma^{(0)})} \partial_x v^{(1)}(x) + \gamma^{(1)} \frac{f_2'(\gamma^{(0)})}{(\chi + f_2(\gamma^{(0)}))^2} \partial_x v^{(0)}(x) \end{cases} \quad (\text{E.17})$$

La première de ces équations pourrait donner $\partial_x^2 v^{(0)} = 0$, mais alors on aurait $v^{(0)} = 0$ et le problème, identique à tout ordre, conduirait à une solution identiquement nulle à tout ordre. On recherche donc les solutions où $v^{(0)} \neq 0$, ce qui implique une équation d'inconnue $\gamma^{(0)}$:

$$f_1(\gamma^{(0)}) - \frac{f_2(\gamma^{(0)})^2}{\chi + f_2(\gamma^{(0)})} = 0 \quad \text{soit} \quad \gamma^{(0)} \tan \gamma^{(0)} = 3\chi \quad (\text{E.18})$$

La valeur de $\gamma^{(0)}$ donnant la charge critique sera la plus petite des solutions de cette équation. La figure E.2 montre la résolution numérique de cette équation.

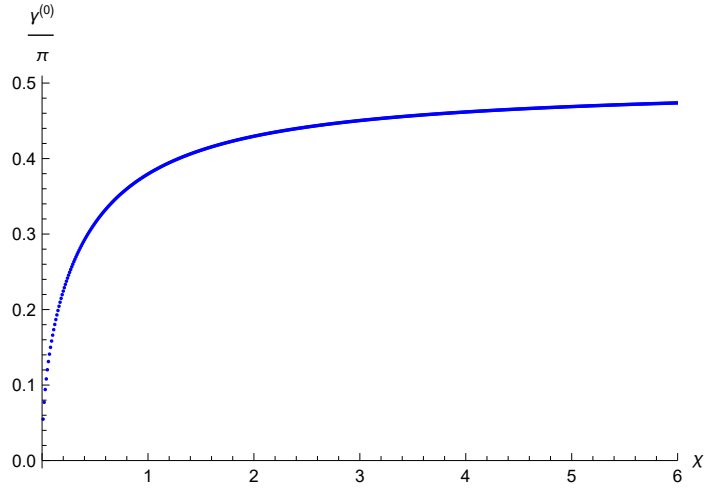


FIGURE E.2 – Plus petite solution de $\gamma^{(0)} \tan \gamma^{(0)} = 3\chi$ en fonction de χ .

Pour les grandes valeurs de χ telles que $\chi = \mathcal{O}(\varepsilon^0)$, on voit ici que $\gamma^{(0)}$ se rapproche de $\frac{\pi}{2}$, qui correspond à la charge critique de flambement d'une poutre élémentaire bi-rotulée.

L'ordre ε^3 amène ensuite, pour l'équilibre en translation :

$$\left(f_1'(\gamma^{(0)}) + f_1(\gamma^{(0)}) f_2'(\gamma^{(0)}) \frac{f_1(\gamma^{(0)}) - 2 f_2(\gamma^{(0)})}{f_2(\gamma^{(0)})^2} \right) \gamma^{(1)} \partial_x^2 v^{(0)} \quad (\text{E.19})$$

Comme précédemment, on cherche autre chose que la possibilité $v^{(0)} = 0$ où tout est nul. On peut montrer graphiquement que la fonction de $\gamma^{(0)}$ apparaissant en facteur ici n'est pas nulle pour les valeurs de $\gamma^{(0)}$ vérifiant E.18. Ceci impose donc $\gamma^{(1)} = 0$.

En reportant ceci dans le système d'équations, on obtient finalement à l'ordre ε^4 une équation différentielle en $v^{(0)}$:

$$\partial_x^4 v^{(0)} + \frac{12 \gamma^{(2)}}{L^2} \frac{\frac{f_2(\gamma^{(0)})^2}{f_1(\gamma^{(0)})} f_1'(\gamma^{(0)}) + (f_1(\gamma^{(0)}) - 2 f_2(\gamma^{(0)})) f_2'(\gamma^{(0)})}{2 f_1(\gamma^{(0)}) f_4(\gamma^{(0)}) - 3 f_2(\gamma^{(0)})^2}} \partial_x^2 v^{(0)} = 0 \quad (\text{E.20})$$

Ceci peut aussi s'écrire

$$\partial_x^4 v^{(0)} + \frac{4 \gamma^{(2)}}{L^2} \left(\tan \gamma^{(0)} + \frac{\sin^2 \gamma^{(0)}}{\gamma^{(0)}} \right) \partial_x^2 v^{(0)} = 0 \quad (\text{E.21})$$

Ceci est de la forme $\partial_x^4 v^{(0)} + \beta^2 \partial_x^2 v^{(0)} = 0$, avec β^2 positif si $\gamma^{(2)}$ positif vu que l'on a par ailleurs $\gamma^{(0)} \tan \gamma^{(0)} = 3\chi > 0$.

En appliquant les conditions aux limites comme dans le cas $\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{0}}$ (à savoir $v^{(0)}(0) = v^{(0)}(H) = 0$ et $\partial_x^2 v^{(0)}(0) = \partial_x^2 v^{(0)}(H) = 0$), on obtient $v^{(0)} = v_0 \sin \beta x$ avec $\beta = \frac{q\pi}{H}$, où l'entier non nul q doit être choisi égal à 1 pour obtenir la plus petite valeur de charge critique de flambement, vu que $\gamma^{(2)}$ est positif. On obtient donc

$$\hat{\gamma}^{(2)} = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\ell}{H} \right)^2 \frac{1}{\tan \gamma^{(0)} + \frac{\sin^2 \gamma^{(0)}}{\gamma^{(0)}}} \quad (\text{E.22})$$

puis la charge critique de flambement

$$N_{\text{cr}} = \frac{4EI}{\ell^2} \left(\gamma^{(0)2} + 2\gamma^{(0)} \hat{\gamma}^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \quad (\text{E.23})$$

$$= \frac{4EI}{\ell^2} \gamma^{(0)2} \left(1 + \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\ell}{H} \right)^2 \frac{1}{\gamma^{(0)} \tan \gamma^{(0)} + \sin^2 \gamma^{(0)}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \quad (\text{E.24})$$

On remarque bien qu'à la limite, pour $\gamma^{(0)} \rightarrow 0$, cette charge critique tend vers $\frac{EI\pi^2}{H^2}$, charge critique de flambement d'une poutre de longueur H en double appui rotulé, et ce même si cette expression n'est censée être valide que pour $\chi = \mathcal{O}(\varepsilon^0)$. Et à l'inverse, plus χ est élevée, plus $\gamma^{(0)}$ se rapproche de $\frac{\pi}{2}$ et donc N se rapproche de $\frac{EI\pi^2}{\ell^2}$, charge critique de flambement d'une poutre de longueur ℓ en double appui rotulé.

On obtient donc ici à l'ordre dominant un déplacement $v^{(0)}(x) = v_0 \sin \frac{\pi x}{H}$ et un angle

$$\theta^{(0)}(x) = \frac{f_2(\gamma^{(0)})}{\chi + f_2(\gamma^{(0)})} \partial_x v^{(0)}(x) = \frac{\gamma^{(0)}}{\tan \gamma^{(0)}} \frac{\pi}{H} v_0 \cos \frac{\pi x}{H} = \frac{\gamma^{(0)2}}{3\chi} \frac{\pi}{H} v_0 \cos \frac{\pi x}{H} \quad (\text{E.25})$$

La figure E.3 montre le tracé de la déformée à l'ordre dominant ainsi obtenue pour $\chi = 1$ et $\frac{H}{\ell} = 24$: courbe du haut, le déplacement transversal ; courbe du bas, l'angle.

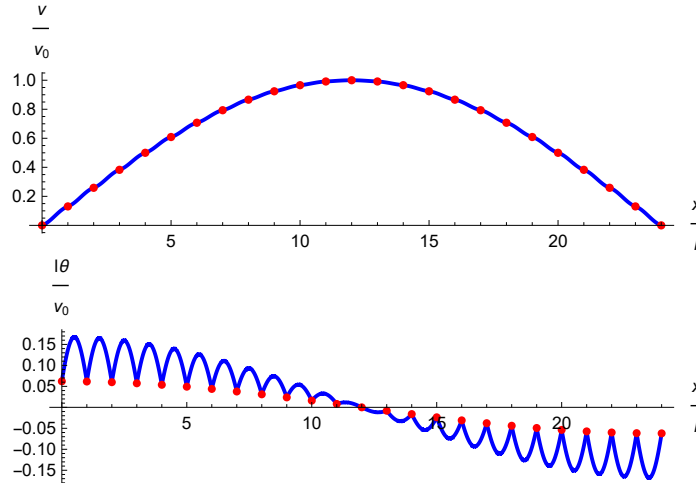


FIGURE E.3 – Allure de la déformée de la poutre macroscopique pour $\chi = 1$ et $\frac{H}{\ell} = 24$; en haut le déplacement transversal v , en bas l'angle θ .

Au début de cette étude on a mis de côté $f_2(\gamma^{(0)}) = -\chi$ qui donnait des champs cinématiques nuls à tous les ordres. On se rappelle que c'était l'équation donnant γ pour la recherche de périodicité exacte à une cellule. Mais on est ici dans le cas où $\phi = 0$, pour lequel la périodicité exacte permettait *a priori* des valeurs de déplacement non nulles en dehors du cas où $f_2(\gamma^{(0)}) = -\chi$; ces solutions non nulles étaient ensuite anéanties par l'imposition des conditions aux limites. Il s'agit donc ici d'un mode de flambement non prévu par l'étude en périodicité exacte. On constate du reste sur la figure E.4 que la valeur de $\gamma^{(0)}$ prévue ici est systématiquement plus faible que la valeur prévue par l'équation donnée pour la périodicité exacte.

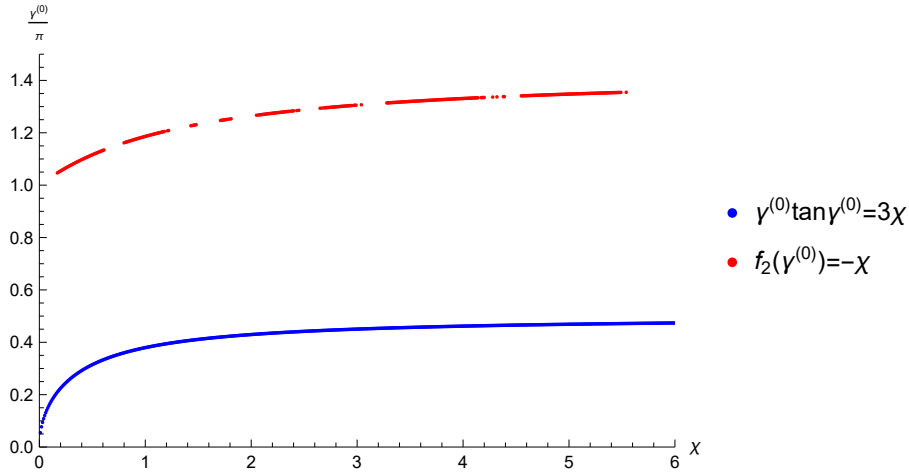


FIGURE E.4 – Valeurs de $\gamma^{(0)}$, plus petites solutions de $\gamma^{(0)} \tan \gamma^{(0)} = 3\chi$ (en bleu) ou de $f_2(\gamma^{(0)}) = -\chi$ (en rouge).

On remarque en outre un problème grâce aux tracés de la figure E.3 : la condition de libre rotation aux limites n'est pas appliquée correctement. On voit bien que les deux poutres élémentaires extrêmes ne sont pas à un extremum de θ en leurs extrémités rotulées. Cela vient du fait que l'on a appliqué la condition de libre rotation en écrivant que θ atteint un extremum relativement à sa variable x , et non à la coordonnée locale microscopique s . Il y a là un défaut de la méthode qui est discuté par ailleurs.

E.3 Cas avec les deux types de ressorts de raideurs du même ordre de grandeur que la raideur de flexion de la poutre

Avec $\tau_\chi = 0$ et $\tau_C = 0$, on a

$$\underline{\mathbf{R}}\underline{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \phi v^{(0)} \\ \chi L \theta^{(-1)} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \phi v^{(1)} \\ \chi L \theta^{(0)} \end{bmatrix} + \varepsilon^2 \begin{bmatrix} \phi v^{(2)} \\ \chi L \theta^{(1)} \end{bmatrix} + \varepsilon^3 \begin{bmatrix} \phi v^{(3)} \\ \chi L \theta^{(2)} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (\text{E.26})$$

L'ordre ε^0 donne

$$\phi v^{(0)}(x) = 0 \quad \text{et} \quad (\chi + f_2(\gamma^{(0)})) \theta^{(-1)} = 0 \quad (\text{E.27})$$

Ceci impose $v^{(0)} = 0$ et, si l'on évite la solution triviale $\theta^{(-1)} = 0$ où tout est nul à tous ordres, impose une valeur de $\gamma^{(0)}$ donnée par $f_2(\gamma^{(0)}) = -\chi$ (qui est, rappelons-le, la solution donnée pour la périodicité simple exacte). On peut voir l'allure de $\gamma^{(0)}(\chi)$ sur la courbe rouge de la figure E.4.

L'ordre ε^2 donne

$$v^{(1)}(x) = L^2 \frac{\chi}{\phi} \partial_x \theta^{(-1)}(x) \quad \text{et} \quad \gamma^{(1)} f_2'(\gamma^{(0)}) \theta^{(-1)}(x) = 0 \quad (\text{E.28})$$

La possibilité $\gamma^{(1)} \neq 0$ entraîne des champs cinématiques nuls à tout ordre. Si l'on met de côté cette possibilité, on retient $\gamma^{(1)} = 0$ et l'ordre ε^2 donne l'équation différentielle en $\theta^{(-1)}$ suivante :

$$\partial_x^2 \theta^{(-1)}(x) + \frac{\gamma^{(2)}}{L^2} \frac{f_2'(\gamma^{(0)})}{\frac{\chi^2}{\phi} + \frac{1}{6} f_4(\gamma^{(0)})} \theta^{(-1)}(x) = 0 \quad (\text{E.29})$$

Ceci peut s'écrire $\partial_x^2 \theta^{(-1)} + \beta^2 \theta^{(-1)} = 0$, avec $\beta^2 = \frac{\gamma^{(2)}}{L^2} \frac{f_2'(\gamma^{(0)})}{\frac{\chi^2}{\phi} + \frac{1}{6} f_4(\gamma^{(0)})}$. Il n'y a apparition d'un mode de

flambement que si $\beta^2 > 0$. Et alors, l'utilisation des conditions aux limites appliquées à $v^{(1)}$ (nullité en $x = 0$ et $x = H$) imposent $\beta = \frac{q\pi}{H}$ avec q entier non nul, et $\theta^{(-1)} = \theta_0 \cos \beta x$.

Or, pour toutes les valeurs de χ restant $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$, $f_2'(\gamma^{(0)})$ est non nulle et reste négative, mais $f_4(\gamma^{(0)})$ est négative et il existe une valeur de ϕ au-dessous de laquelle $\frac{\chi^2}{\phi} + \frac{1}{6} f_4(\gamma^{(0)})$ est positive, ce qui implique que $\gamma^{(2)}$

soit négative pour voir apparaître des modes de flambement. Or,

$$\gamma^{(2)} = \beta^2 L^2 \frac{\frac{\chi^2}{\phi} + \frac{1}{6} f_4(\gamma^{(0)})}{f_2'(\gamma^{(0)})} \quad \text{ou encore} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = q^2 \pi^2 \left(\frac{\ell}{H} \right)^2 \frac{\frac{\chi^2}{\phi} + \frac{1}{6} f_4(\gamma^{(0)})}{f_2'(\gamma^{(0)})} \quad (\text{E.30})$$

Comme la charge de flambement est ici $N = \frac{4EI}{\ell^2} \left(\gamma^{(0)2} + 2\gamma^{(0)} \hat{\gamma}^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right)$, on voit qu'il n'y a pas de possibilité de connaître la charge critique en choisissant la valeur de q qui minimise N , dans le cas où $\gamma^{(2)}$ est négative.

Ceci crée donc une limitation aux valeurs de (ϕ, χ) pour lesquelles ce mode est accessible. Ces valeurs sont représentées par la zone colorée sur la figure E.5.

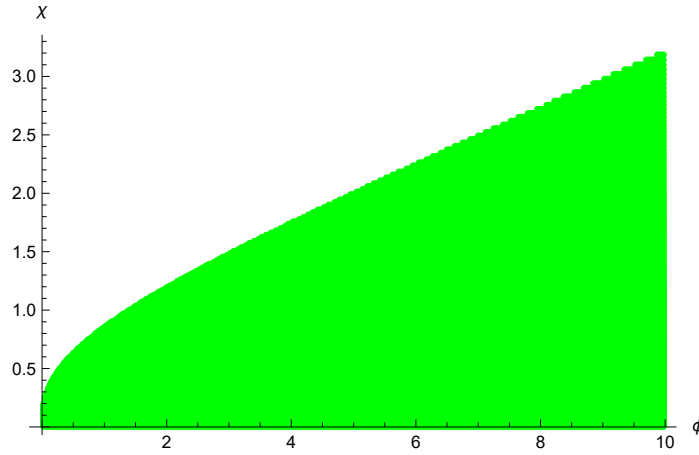


FIGURE E.5 – Zone du plan (ϕ, χ) où $\gamma^{(2)}$ est positive.

Dans ces zones, on peut choisir $q = 1$ pour décrire le mode de flambement. Les équations de la déformée macroscopique sont alors de la forme, pour le déplacement et l'angle à l'ordre dominant :

$$\hat{v}^{(1)} = \pi \frac{\chi}{\phi} \frac{\ell^2}{H} \theta_0 \sin \frac{\pi x}{H} \quad \text{et} \quad \hat{\theta}^{(-1)} = \theta_0 \cos \frac{\pi x}{H} \quad (\text{E.31})$$

Les allures des déformées en déplacement et angle sont données par la figure E.6.

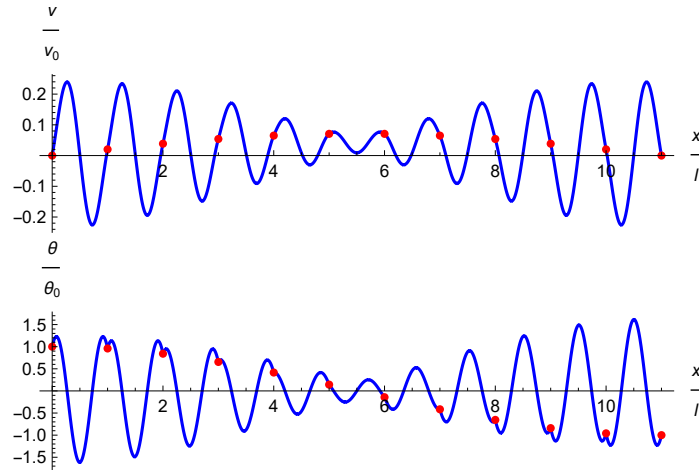


FIGURE E.6 – Déformée de la poutre macroscopique pour $\chi = 1$, $\phi = 4$ et $\frac{H}{\ell} = 11$: en haut le déplacement transversal v , en bas l'angle θ .

E.4 Exemple de cas délicat

On étudie ici le cas où $\tau_\chi = 2$ avec $\chi = 0$, qui illustre certaines difficultés.

À l'ordre dominant on obtient $f_2(\gamma^{(0)}) \hat{\theta}^{(-1)} = 0$. Ceci scinde l'étude en deux cas, $\hat{\theta}^{(-1)} = 0$ et $f_2(\gamma^{(0)}) = 0$.

E.4.1 Premier cas : $f_2(\gamma^{(0)}) \neq 0$

La table E.1 montre les résultats obtenus dans ce cas, de la même manière que décrit précédemment. On le voit, l'expression de $\gamma^{(0)}$ fait intervenir un entier non nul q . La méthode voudrait qu'on choisisse la valeur de q minimisant $\gamma^{(0)}$, c'est-à-dire q infini, de sorte que $\gamma^{(0)}$ est nul. Or, ceci conduit l'équation différentielle régissant $v^{(0)}$ à dégénérer et implique que $v^{(0)}$ est nulle, de même que tous les champs cinématiques aux ordres supérieurs.

C'est un exemple où malgré les apparences la méthode rien d'autre qu'un mode à θ uniforme, pour cette pseudo-périodicité.

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$	$\chi = 0$	$\gamma^{(0)} = \frac{\sqrt{3}\phi}{q\pi\xi}, q \in \mathbb{N}^* \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{\phi}{8\gamma^{(0)2}} \left(\gamma^{(0)} + \frac{3}{\tan \gamma^{(0)}} \right)$
		$\bar{N} = \frac{4\gamma^{(0)2}}{\pi^2} + \frac{\phi}{\pi^2} \left(1 + \frac{3}{\gamma^{(0)} \tan \gamma^{(0)}} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$
		$\partial_x^4 v^{(0)} + \frac{3\phi}{\gamma^{(0)2} \ell^2} \partial_x^2 v^{(0)} = 0 \quad \hat{\theta}^{(-1)} = 0 \quad \theta^{(0)} = \partial_x v^{(0)}$

TABLE E.1 – Résultats pour $\tau_K = 2$ et $\chi = 0$.

E.4.2 Deuxième cas : $f_2(\gamma^{(0)}) = 0$

Si $f_2(\gamma^{(0)}) = 0$ et $\hat{\theta}^{(-1)} \neq 0$, la plus petite valeur de $\gamma^{(0)}$ est π . Le système s'écrit, à l'ordre suivant, simplement $\hat{\gamma}^{(1)} \hat{\theta}^{(-1)} = 0$. On choisit donc $\hat{\gamma}^{(1)} = 0$, ce qui donne à l'ordre suivant le système

$$\begin{cases} -\frac{\pi^2}{3} \ell^2 \partial_x^2 v^{(0)} - \phi v^{(0)} = 0 \\ \frac{\ell}{6} f_4(\pi) \partial_x^2 \hat{\theta}^{(-1)} - \frac{\pi}{3} \hat{\gamma}^{(2)} \hat{\theta}^{(-1)} = 0 \end{cases} \quad (\text{E.32})$$

La première équation donne une équation différentielle sur $v^{(0)}$, mais dont la périodicité spatiale est fixée. Ce cas n'est donc pas compatible avec des conditions aux limites de manière générale. Ceci impose $v^{(0)} = 0$.

De la deuxième équation, sachant que $f_4(\pi)$ est infini, on déduit que $\partial_x^2 \hat{\theta}^{(-1)} = 0$ et $\hat{\gamma}^{(2)} = 0$. Les ordres supérieurs, ensuite, se présentent tous de la même manière et donnent à chaque fois $\hat{\gamma}^{(i)} = 0$, $\partial_x^2 \hat{\theta}^{(i)} = 0$ et $v^{(i)} = 0$.

La prise en compte des conditions aux limites impose finalement qu'en plus d'être affine, θ soit uniforme. On obtient donc ici un mode où les nœuds présentent tous la même inclinaison et ne sont pas déplacés transversalement. Dans ce cas où $\gamma = \pi$ exactement, la déformée d'une poutre élémentaire entre $s = 0$ et $s = \ell$ est simplement de la forme $v(s) = \frac{\ell \theta_0}{2\pi} \sin \frac{2\pi s}{\ell}$, où θ_0 est l'angle constant de la poutre à chaque nœud.

E.5 Pseudo-périodicité à deux cellules

On utilise ici les développements asymptotiques avec pseudo-périodicité sur deux cellules, donnés par les équations 3.23, 3.24 et 3.25. On notera

$$\underline{Y}^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} y^{(i)}(x) \\ L \mu^{(i-1)}(x) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{Z}^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} z^{(i)}(x) \\ L \nu^{(i-1)}(x) \end{bmatrix} \quad (\text{E.33})$$

Pour rappel, \underline{Y} pilote les modes où deux nœuds consécutifs sont en pseudo-phase et \underline{Z} les modes où ils sont en pseudo-opposition de phase. On retrouve les champs cinématiques réels aux nœuds par $\underline{U} = \underline{Y} + \underline{Z}$ aux nœuds pairs, ou par $\underline{U} = \underline{Y} - \underline{Z}$ aux nœuds impairs.

On utilisera comme précédemment des conditions aux limites macroscopiques de double appui rotulé pour fixer les idées. On part aussi du principe qu'il y a un nombre pair de nœuds pour appliquer les conditions aux limites.

E.5.1 Cas $\phi = 0$, $\tau_C = 1$

On se rappelle que ce cas ne donne rien d'autre que le mode à angle uniforme dans le cas de la pseudo-périodicité sur une cellule. En pseudo-périodicité à deux cellules, l'ordre ε^0 s'écrit :

$$\begin{cases} f_2(\gamma^{(0)}) \hat{\mu}^{(-1)}(x) = 0 \\ f_1(\gamma^{(0)}) z^{(0)}(x) = 0 \\ (3 f_2(\gamma^{(0)}) - 2 f_4(\gamma^{(0)})) \hat{\nu}^{(-1)}(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{E.34})$$

La possibilité $f_2(\gamma^{(0)}) = 0$ est celle qui ne donne, en pseudo-périodicité à une cellule, que le mode à angle uniforme. En revanche, dans ce cas à pseudo-périodicité sur deux cellules, une cinématique non nulle est possible si $\gamma^{(0)}$ est tel que $f_1(\gamma^{(0)}) = 0$ ou $3 f_2(\gamma^{(0)}) - 2 f_4(\gamma^{(0)}) = 0$: dans les deux cas les solutions sont $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} + q\pi$ avec $q \in \mathbb{N}$. Choisissons $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2}$, plus petite valeur donnant la charge critique la plus faible.

L'ordre ε^1 s'écrit, compte tenu du fait que $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2}$ et avec $\mu^{(-1)} = 0$,

$$\begin{cases} 2 \mu^{(0)} - 2 \partial_x y^{(0)} + \ell \partial_x \hat{\nu}^{(-1)} = 0 \\ 2 \pi \hat{\gamma}^{(1)} z^{(0)} + \ell^2 \partial_x \hat{\nu}^{(-1)} = 0 \\ -2(\pi \hat{\gamma}^{(1)} - 6 \chi) \hat{\nu}^{(-1)} + \pi^2 \partial_x z^{(0)} = 0 \end{cases} \quad (\text{E.35})$$

La première équation donne $\mu^{(0)}$. Pour les suivantes, il faut envisager trois cas possibles selon les valeurs de $\hat{\gamma}^{(1)}$.

E.5.1.1 Cas $\hat{\gamma}^{(1)} = 0$: mode à z uniforme

Si $\hat{\gamma}^{(1)} = 0$, alors $\hat{\nu}^{(-1)} = 0$ et $\partial_x z^{(0)} = 0$, donc $z^{(0)}$ est indépendant de x , autrement dit deux nœuds successifs ont des déplacements opposés et ne sont pas inclinés. En outre, le problème se présente de la même manière à tous les ordres : $\hat{\gamma}^{(i)} = 0$, tous les angles et y sont nuls.

Ce mode n'apparaîtra pas avec les conditions aux limites bloquant les déplacements transversaux aux nœuds extrêmes.

E.5.1.2 Cas $\hat{\gamma}^{(1)} = \frac{6\chi}{\pi}$: mode à ν uniforme

Si $\hat{\gamma}^{(1)} = \frac{6\chi}{\pi}$, alors $z^{(0)} = 0$ et $\partial_x \hat{\nu}^{(-1)} = 0$, donc $\hat{\nu}^{(-1)}$ est indépendant de x , autrement dit deux nœuds successifs sont inclinés avec des angles opposés et ne sont pas déplacés transversalement. Les ordres successifs donnent effectivement un angle ν uniforme et des déplacements nuls, ainsi que μ , avec γ voisin de $\frac{\pi}{2}$ avec une correction positive :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \frac{6\chi}{\pi} - \frac{72\chi^2}{\pi^3} - \frac{72(-24 + \pi^2)\chi^3}{\pi^5} \quad (\text{E.36})$$

Ce mode est compatible avec des conditions aux limites de déplacements transversaux nuls aux nœuds extrêmes, ainsi qu'avec des conditions aux limites de moment nul.

E.5.1.3 Autres cas : mode couplé modulé

Si $\hat{\gamma}^{(1)} \neq 0$ et $\hat{\gamma}^{(1)} \neq \frac{6\chi}{\pi}$, alors ni $\hat{\nu}^{(-1)}$ ni $z^{(0)}$ ne sont nuls, et les deux vérifient la même équation différentielle d'ordre deux : on a un mode couplé modulé. La table E.2 donne les résultats obtenus.

La figure E.7 montre les allures de la déformée pour le déplacement transversal et l'angle.

E.5.2 Cas $\tau_C = 0$, $\tau_K = 0$

L'ordre ε^0 de l'équilibre s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} \phi y^{(0)}(x) = 0 \\ (\chi + f_2(\gamma^{(0)})) \mu^{(-1)}(x) = 0 \\ (\phi + 4 f_1(\gamma^{(0)})) z^{(0)}(x) = 0 \\ (3(\chi + f_2(\gamma^{(0)})) - 2 f_4(\gamma^{(0)})) \nu^{(-1)}(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{E.37})$$

Ceci donne trois possibilités de détermination de $\gamma^{(0)}$ qui rappellent les conditions obtenues dans l'étude de la périodicité exacte sur deux cellules :

$\phi = 0$	$\chi = \mathcal{O}(\varepsilon)$	$\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{3\chi}{\pi} + \sqrt{\frac{9\chi^2}{\pi^2} + \frac{\pi^2 \xi^2}{4}} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{6\hat{\gamma}^{(1)^2 \chi}{3\pi\chi - \pi^2\gamma^{(1)}}$
		$\bar{N} = 1 + \frac{12\chi}{\pi^2} + \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{9\chi^2}{\pi^2} + \frac{\pi^2 \xi^2}{4}} + \mathcal{O}(\varepsilon)$
		$\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(1)}}{\ell^2} \left(\hat{\gamma}^{(1)} - \frac{6\chi}{\pi} \right) z^{(0)} = 0$ (idem en $\hat{\nu}^{(-1)}$) $y^{(0)} = 0$ $\hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = \frac{\pi^2}{2(\pi\hat{\gamma}^{(1)} - 6\chi)} \partial_x z^{(0)} \quad \partial_x^2 \hat{y}^{(1)} = -\frac{\ell\pi^2}{2H^2} \partial_x z^{(0)}$

TABLE E.2 – Résultats pour le cas $\phi = 0$, $\tau_C = 1$, avec $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2}$: mode antipériodique.

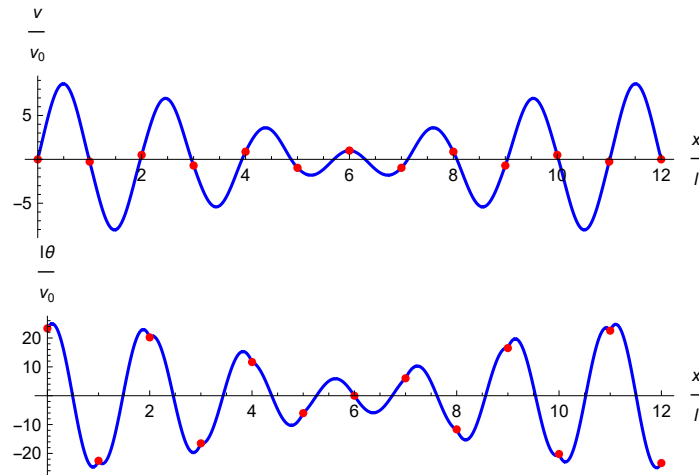


FIGURE E.7 – Allure de la déformée de la poutre macroscopique pour $\tau_C = 1$, $\phi = 0$ et $\frac{H}{\ell} = 12$, avec $\chi = 0,5$, pour le mode antipériodique; en haut le déplacement transversal v , en bas l'angle θ .

- la condition $f_2(\gamma^{(0)}) = -\chi$, qui correspond à la condition de périodicité exacte sur une cellule ;
- la condition $f_1(\gamma^{(0)}) = -\frac{\phi}{4}$, qui correspond à la condition d'antipériodicité exacte sur deux cellules, avec l'angle nul aux nœuds ;
- la condition $-\frac{2}{3}f_4(\gamma^{(0)}) + f_2(\gamma^{(0)}) = -\chi$, qui correspond à la condition d'antipériodicité exacte sur deux cellules, avec le déplacement nul aux nœuds.

L'étude à suivre doit permettre de retrouver cela. On exclut ici la possibilité $\phi = 0$, ce qui implique que $y^{(0)}(x) = 0$: le déplacement aux nœuds des modes périodiques est nécessairement nul à l'ordre ε^0 . Voici les résultats obtenus pour les modes modulés.

E.5.2.1 Cas où $f_2(\gamma^{(0)}) = -\chi$: mode pseudo-périodique à une cellule

La table E.3 donne les résultats obtenus. On retrouve bel et bien les résultats du mode pseudo-périodique à une cellule vu en section E.3 vu la nullité de $\nu^{(-1)}$ et $z^{(0)}$.

$\phi = O(1)$	$\chi = O(1)$	$f_2(\gamma^{(0)}) = -\chi \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{\pi^2 \xi^2}{f_2'(\gamma^{(0)})} \left(\frac{f_2(\gamma^{(0)})^2}{\phi} + \frac{f_4(\gamma^{(0)})}{6} \right)$
		$\bar{N} = \frac{4}{\pi^2} \gamma^{(0)2} + \frac{8 \xi^2 \gamma^{(0)}}{f_2'(\gamma^{(0)})} \left(\frac{f_2(\gamma^{(0)})^2}{\phi} + \frac{f_4(\gamma^{(0)})}{6} \right)$
		$\partial_x^2 \hat{\mu}^{(-1)} + \frac{\hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{f_2'(\gamma^{(0)})}{\frac{1}{\phi} f_2(\gamma^{(0)})^2 + \frac{1}{6} f_4(\gamma^{(0)})} \hat{\mu}^{(-1)} = 0$ $y^{(0)} = 0 \quad z^{(0)} = 0 \quad \hat{z}^{(1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $\hat{y}^{(1)} = \frac{\chi}{\phi} \ell^2 \partial_x \mu^{(-1)} \quad \hat{z}^{(2)} = -\frac{\chi}{2\phi} \ell^3 \partial_x^2 \mu^{(-1)} \quad \hat{\nu}^{(0)} = -\frac{\ell}{2} \partial_x \nu^{(-1)}$

TABLE E.3 – Résultats pour le cas $\tau_K = 0$, $\tau_C = 0$, avec $f_2(\gamma^{(0)}) = -\chi$: mode périodique.

On rappelle qu'il y a dans ce cas une restriction sur les valeurs de ϕ et χ permettant d'écrire $\gamma^{(2)}$ sous cette forme (voir la figure E.5).

La figure E.8 montre l'allure de la déformée, pour le déplacement transversal et l'angle.

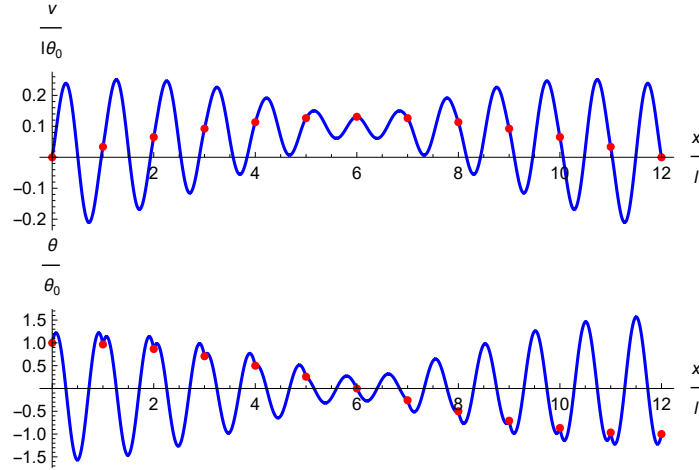


FIGURE E.8 – Allure de la déformée de la poutre macroscopique pour $\tau_C = 0$, $\tau_K = 0$ et $\frac{H}{\ell} = 12$, avec $\chi = 1$ et $\phi = 2$, pour le mode pseudo-périodique sur une cellule ; en haut le déplacement transversal v , en bas l'angle θ .

E.5.2.2 Cas où $f_1(\gamma^{(0)}) = -\frac{\phi}{4}$: mode pseudo-périodique sur deux cellules, antipériodique interne, piloté par le déplacement aux nœuds

La table E.4 donne les résultats obtenus. On obtient les champs cinématiques physiques aux ordres non nuls dominants :

- aux nœuds pairs, $v^{(0)} = z^{(0)}$ et $\theta^{(0)} = \nu^{(0)}$;
- aux nœuds impairs, $v^{(0)} = -z^{(0)}$ et $\theta^{(0)} = -\nu^{(0)}$;

$\phi = \mathcal{O}(1)$	$\chi = \mathcal{O}(1)$	$f_1(\gamma^{(0)}) = -\frac{\phi}{4} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0$
		$\hat{\gamma}^{(2)} = \frac{\pi^2 \xi^2}{4 f_1'(\gamma^{(0)})} \left(f_1(\gamma^{(0)}) + \frac{3 f_2(\gamma^{(0)})^2}{3 f_2(\gamma^{(0)}) - 2 f_4(\gamma^{(0)})} \right) \quad \hat{\gamma}^{(3)} = 0$
		$\bar{N} = \frac{4}{\pi^2} \gamma^{(0)2} + \frac{\xi^2 \gamma^{(0)}}{f_1'(\gamma^{(0)})} \left(f_1(\gamma^{(0)}) + \frac{3 f_2(\gamma^{(0)})^2}{3 f_2(\gamma^{(0)}) - 2 f_4(\gamma^{(0)})} \right)$
		$\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{4 \hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{f_1'(\gamma^{(0)})}{f_1(\gamma^{(0)}) + \frac{3 f_2(\gamma^{(0)})^2}{3 f_2(\gamma^{(0)}) - 2 f_4(\gamma^{(0)})}} z^{(0)} = 0$
		$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(0)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{y}^{(1)} = -\frac{\ell}{2} \partial_x z^{(0)}$
		$\hat{\mu}^{(1)} = \frac{3 \ell f_2(\gamma^{(0)})^2}{2 (\chi + f_2(\gamma^{(0)})) (3 f_2(\gamma^{(0)}) - 2 f_4(\gamma^{(0)}))} \partial_x^2 z^{(0)}$
		$\nu^{(0)} = -\frac{3 f_2(\gamma^{(0)})}{3 f_2(\gamma^{(0)}) - 2 f_4(\gamma^{(0)})} \partial_x z^{(0)}$

TABLE E.4 – Résultats pour le cas $\tau_K = 0$, $\tau_C = 0$, avec $f_1(\gamma^{(0)}) = -\frac{\phi}{4}$: mode antipériodique en déplacement.

Aucune condition ici ne vient restreindre les valeurs de χ et ϕ , vu que $\hat{\gamma}^{(2)}$ est positive quelle que soit la valeur de ϕ permettant d'obtenir $\gamma^{(0)}$.

La figure E.9 montre les allures de la déformée pour le déplacement transversal et l'angle.

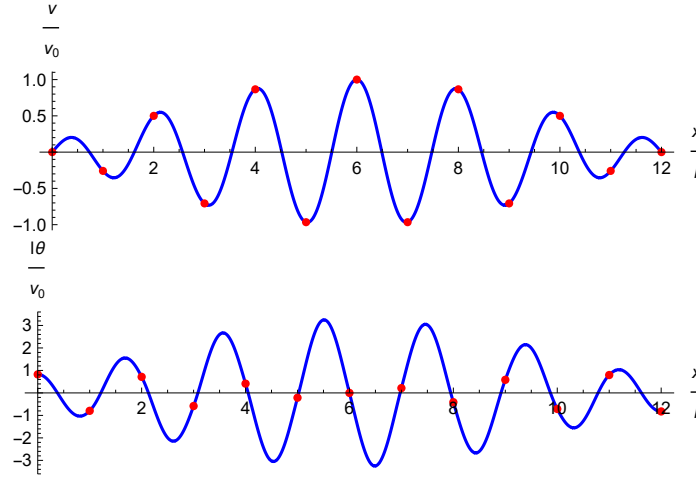


FIGURE E.9 – Allure de la déformée de la poutre macroscopique pour $\tau_C = 0$, $\tau_K = 0$ et $\frac{H}{\ell} = 12$, avec $\chi = 1$ et $\phi = 2$, pour le mode antipériodique en déplacement ; en haut le déplacement transversal v , en bas l'angle θ .

E.5.2.3 Cas où $-\frac{2}{3} f_4(\gamma^{(0)}) + f_2(\gamma^{(0)}) = -\chi$: mode pseudo-périodique sur deux cellules, antipériodique interne, piloté par l'angle aux nœuds

La table E.5 donne les résultats obtenus. On obtient les champs cinématiques physiques aux ordres non nuls dominants :

- aux nœuds pairs, $v^{(1)} = z^{(1)}$ et $\theta^{(-1)} = \nu^{(-1)}$;
- aux nœuds impairs, $v^{(1)} = -z^{(1)}$ et $\theta^{(-1)} = -\nu^{(-1)}$;

La figure E.10 montre les allures de la déformée pour le déplacement transversal et l'angle.

De la même manière que pour le cas périodique à une cellule, il est nécessaire que $\gamma^{(2)}$ soit positif pour que l'on puisse choisir le plus petit mode de flambement. Ceci impose des valeurs interdites pour ϕ et χ , en blanc sur la figure E.11. Il est en outre nécessaire que $\gamma^{(2)}$ reste du même ordre de grandeur que $\gamma^{(0)}$, ou que $\hat{\gamma}^{(2)}$ reste $\mathcal{O}(\varepsilon^2) \gamma^{(0)}$.

$\phi = \mathcal{O}(1)$	$\chi = \mathcal{O}(1)$	$-\frac{2}{3} f_4(\gamma^{(0)}) + f_2(\gamma^{(0)}) = -\chi \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0$
		$\hat{\gamma}^{(2)} = \pi^2 \xi^2 \frac{-6 f_2(\gamma^{(0)})^2 + (\phi + 4 f_1(\gamma^{(0)})) f_4(\gamma^{(0)})}{(-6 f_2'(\gamma^{(0)}) + 4 f_4'(\gamma^{(0)}))(\phi + 4 f_1(\gamma^{(0)}))} \quad \hat{\gamma}^{(3)} = 0$
		$\bar{N} = \frac{4}{\pi^2} \gamma^{(0)2} + 8 \xi^2 \gamma^{(0)} \frac{-6 f_2(\gamma^{(0)})^2 + (\phi + 4 f_1(\gamma^{(0)})) f_4(\gamma^{(0)})}{(-6 f_2'(\gamma^{(0)}) + 4 f_4'(\gamma^{(0)}))(\phi + 4 f_1(\gamma^{(0)}))}$
		$\partial_x^2 \hat{v}^{(-1)} + \frac{\hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{f_2'(\gamma^{(0)}) - \frac{2}{3} f_4'(\gamma^{(0)})}{\frac{f_2(\gamma^{(0)})^2}{\phi + 4 f_1(\gamma^{(0)})} - \frac{1}{6} f_4(\gamma^{(0)})} \hat{v}^{(-1)} = 0$
		$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad z^{(0)} = 0 \quad \hat{g}^{(1)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(0)} = -\frac{\ell}{2} \partial_x \hat{v}^{(-1)}$
		$\hat{z}^{(1)} = \frac{\ell^2 f_2(\gamma^{(0)})^2}{\phi + 4 f_1(\gamma^{(0)})} \partial_x \hat{v}^{(-1)} \quad \hat{g}^{(2)} = -\frac{\ell^3 f_2(\gamma^{(0)})}{2\phi + 8 f_1(\gamma^{(0)})} \partial_x^2 \hat{v}^{(-1)}$

TABLE E.5 – Résultats pour le cas $\tau_{\mathcal{K}} = 0$, $\tau_{\mathcal{C}} = 0$, avec $-\frac{2}{3} f_4(\gamma^{(0)}) + f_2(\gamma^{(0)}) = -\chi$: mode antipériodique en angle.

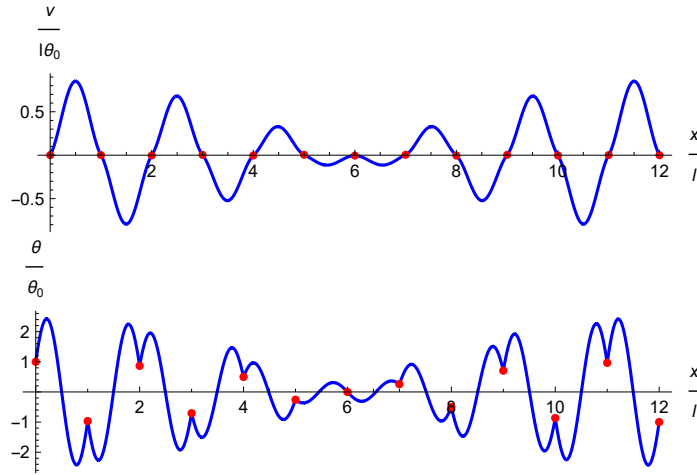


FIGURE E.10 – Allure de la déformée de la poutre macroscopique pour $\tau_{\mathcal{C}} = 0$, $\tau_{\mathcal{K}} = 0$ et $\frac{H}{\ell} = 12$, avec $\chi = 1$ et $\phi = 2$, pour le mode antipériodique en angle ; en haut le déplacement transversal v , en bas l'angle θ .

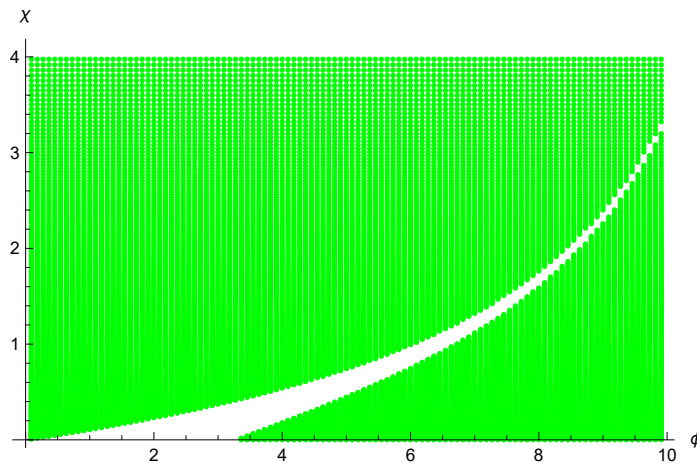


FIGURE E.11 – Zone du plan (ϕ, χ) où $\gamma^{(2)}$ est positive.

E.6 Pseudo-périodicité à trois cellules

On illustre ici la méthode de résolution pour une pseudo-périodicité à trois cellules, dont les équations sont en partie données dans la section 3.5.1. On prendra l'exemple $\phi = 1$, $\chi = 0$.

E.6.1 Initialisation

On notera

$$\underline{Y}^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} y^{(i)}(x) \\ L \mu^{(i-1)}(x) \end{bmatrix} \quad \underline{S}^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} z^{(i)}(x) \\ L \nu^{(i-1)}(x) \end{bmatrix} \quad \underline{T}^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} t^{(i)}(x) \\ L \tau^{(i-1)}(x) \end{bmatrix} \quad (\text{E.38})$$

(On réutilise ici z plutôt que s pour éviter la confusion avec l'abscisse locale.)

À l'ordre dominant, si l'on ne se préoccupe pas du mode pseudo-périodique sur une cellule, on a $\underline{Y}^{(0)} = \underline{0}$, ainsi que le système suivant :

$$\begin{cases} -(\phi + 3 f_1(\gamma^{(0)})) z^{(0)} - \frac{\sqrt{3}}{2} f_2(\gamma^{(0)}) \ell \hat{\tau}^{(-1)} = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} f_2(\gamma^{(0)}) t^{(0)} + \left(-f_2(\gamma^{(0)}) + \frac{1}{2} f_4(\gamma^{(0)}) \right) \ell \hat{\nu}^{(-1)} = 0 \\ -(\phi + 3 f_1(\gamma^{(0)})) t^{(0)} + \frac{\sqrt{3}}{2} f_2(\gamma^{(0)}) \ell \hat{\nu}^{(-1)} = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} f_2(\gamma^{(0)}) z^{(0)} + \left(-f_2(\gamma^{(0)}) + \frac{1}{2} f_4(\gamma^{(0)}) \right) \ell \hat{\tau}^{(-1)} = 0 \end{cases} \quad (\text{E.39})$$

On voit que ces équations sont deux à deux couplées. Pour la suite, on peut *a priori* choisir de conserver le couple de variables cinématiques que l'on veut. On peut par exemple conserver les déplacements $z^{(0)}$ et $t^{(0)}$ et exprimer les angles en fonction des déplacements :

$$\ell \hat{\tau}^{(-1)} = -\delta z^{(0)} \quad \text{et} \quad \ell \hat{\nu}^{(-1)} = \delta t^{(0)} \quad \text{en notant} \quad \delta = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\phi + 3 f_1(\gamma^{(0)})}{f_2(\gamma^{(0)})} \quad (\text{E.40})$$

Alors, il ne reste plus que deux équations de la forme $g(\gamma^{(0)}, \phi) z^{(0)} = 0$, celle en $t^{(0)}$ étant identique.

Pour éviter la cinématique nulle, on est donc conduit à chercher $\gamma^{(0)}$ telle que $g(\gamma^{(0)}, \phi) = 0$, en l'occurrence

$$-3 f_1(\gamma^{(0)}) + \frac{3 f_2(\gamma^{(0)})^2}{4 f_2(\gamma^{(0)}) - 2 f_4(\gamma^{(0)})} = \phi \quad (\text{E.41})$$

Selon les valeurs de ϕ , la plus petite valeur de $\gamma^{(0)}$ donnée par cette équation varie entre $\frac{\pi}{3}$ et $0,614 \pi$.

Le développement à l'ordre ε donne six équations impliquant l'ordre suivant des variables cinématiques, avec $\gamma^{(0)}$ à présent connu (mais sans expression analytique). On peut par exemple remplacer ϕ par la fonction de $\gamma^{(0)}$ écrite ci-dessus, puis remplacer $\nu^{(0)}$ et $\tau^{(0)}$ par leurs expressions données par les équations correspondantes.

E.6.2 Premier cas : mode modulé

Si l'on suppose $\hat{\gamma}^{(1)}$ non nul à ce stade, on peut obtenir l'expression de $t^{(0)}$ en fonction de $\partial_x z^{(0)}$, de la forme :

$$t^{(0)} = \frac{\alpha \ell}{\hat{\gamma}^{(1)}} \partial_x z^{(0)} \quad (\text{E.42})$$

où α a une expression faisant intervenir les fonctions $f_i(\gamma^{(0)})$, donc est une fonction connue de ϕ (mais sans expression analytique). Après remplacement il reste enfin une équation différentielle en $z^{(0)}$ de la forme :

$$\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{\hat{\gamma}^{(1)2}}{\ell^2 \alpha^2} z^{(0)} = 0 \quad (\text{E.43})$$

L'application des conditions aux limites se fait sur $z^{(0)}$ comme précédemment sur $v^{(0)}$ en supposant pour fixer les idées que la poutre macroscopique comporte un nombre de cellules multiple de trois, ce qui fait que l'on a $v^{(0)} = z^{(0)}$ aux deux nœuds extrêmes puisque $y^{(0)} = 0$. Ainsi, $z^{(0)}(0) = 0$ et $z^{(0)}(H) = 0$ conduisent à l'expression $z^{(0)}(x) = v_0 \sin \frac{q \pi x}{H}$ avec la condition de quantification

$$\hat{\gamma}^{(1)} = \pm q \pi \xi \alpha \quad (\text{E.44})$$

On a noté q le numéro du mode ($q \in \mathbb{N}^*$) et $\xi = \frac{\ell}{H}$.

Constatant que selon les valeurs de ϕ , α peut être positive ou négative, on est conduit en appliquant la règle de choix du mode à prendre la valeur absolue de cette expression pour $\gamma^{(1)}$ (ce choix sera discuté). Et on sélectionne alors $q = 1$ pour le mode de flambement à plus petite charge critique.

Connaissant $z^{(0)}(x)$, on connaît les trois autres variables cinématiques à l'ordre dominant :

$$t^{(0)}(x) = \sigma_\alpha v_0 \cos \frac{\pi x}{H} \quad \ell \hat{\nu}^{(-1)}(x) = \sigma_\alpha \delta v_0 \cos \frac{\pi x}{H} \quad \ell \hat{\tau}^{(-1)}(x) = -\delta v_0 \sin \frac{\pi x}{H} \quad (\text{E.45})$$

(On a noté σ_α le signe de α). Ceci permet de connaître à l'ordre dominant les variables cinématiques réelles aux nœuds, en distinguant leur multiplicité (rappelons que $\underline{Y}^{(0)} = \underline{0}$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{3n}^{(0)} = z_{3n}^{(0)} = v_0 \sin(3n\pi\xi) \\ \ell \hat{\theta}_{3n}^{(-1)} = \ell \hat{\nu}_{3n}^{(-1)} = \sigma_\alpha \delta v_0 \cos(3n\pi\xi) \\ v_{3n+1}^{(0)} = -\frac{1}{2} z_{3n+1}^{(0)} + \frac{\sqrt{3}}{2} t_{3n+1}^{(0)} = -\frac{1}{2} v_0 \sin((3n+1)\pi\xi) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_\alpha v_0 \cos((3n+1)\pi\xi) \\ \ell \hat{\theta}_{3n+1}^{(-1)} = -\frac{1}{2} \ell \hat{\nu}_{3n+1}^{(-1)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \ell \hat{\tau}_{3n+1}^{(-1)} = -\frac{1}{2} \sigma_\alpha \delta v_0 \cos((3n+1)\pi\xi) - \frac{\sqrt{3}}{2} \delta v_0 \sin((3n+1)\pi\xi) \\ v_{3n+2}^{(0)} = -\frac{1}{2} z_{3n+2}^{(0)} - \frac{\sqrt{3}}{2} t_{3n+2}^{(0)} = -\frac{1}{2} v_0 \sin((3n+2)\pi\xi) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_\alpha v_0 \cos((3n+2)\pi\xi) \\ \ell \hat{\theta}_{3n+2}^{(-1)} = -\frac{1}{2} \ell \hat{\nu}_{3n+2}^{(-1)} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ell \hat{\tau}_{3n+2}^{(-1)} = -\frac{1}{2} \sigma_\alpha \delta v_0 \cos((3n+2)\pi\xi) + \frac{\sqrt{3}}{2} \delta v_0 \sin((3n+2)\pi\xi) \end{array} \right. \quad (\text{E.46})$$

Ceci permet de tracer les déformées, voir un exemple en figure E.12 (pour lequel $\gamma = 1,34$ à l'ordre ε). Les fonctions sinus et cosinus tracées en pointillés gris permettent de matérialiser la pseudo-périodicité à trois cellules, qui ne saute pas aux yeux sans cela.

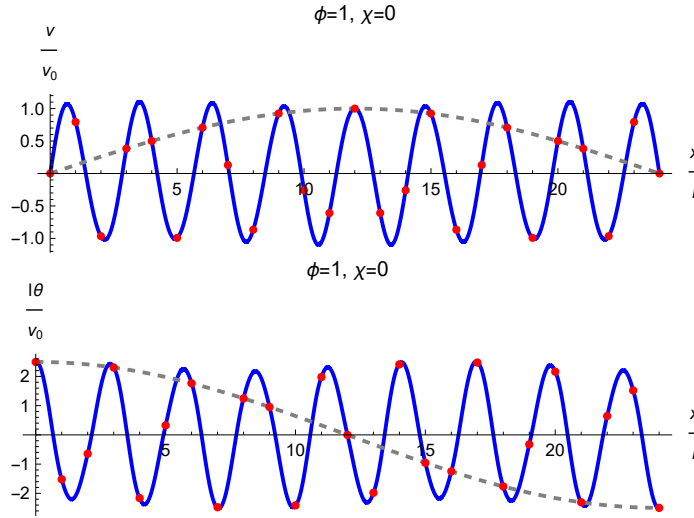


FIGURE E.12 – Déformées en déplacement (en haut) et rotation (en bas) pour $\phi = 1$, $\chi = 0$, $n_p = 24$, avec périodicité à trois cellules, pour le mode double modulé.

E.6.3 Deuxième cas : mode uniforme

En reprenant à l'ordre ε , on peut étudier le cas où $\hat{\gamma}^{(1)} = 0$. En utilisant deux équations pour remplacer par exemple les angles par leurs expressions en fonction des déplacements transversaux, on obtient deux équations de la forme $g(\gamma^{(0)}) \partial_x z^{(0)} = 0$ (de même en $t^{(0)}$), où g s'écrit en fonction de f_i et f'_i et $g(\gamma^{(0)})$ n'est pas nulle. Ceci impose que $t^{(0)}$ et $z^{(0)}$ sont indépendantes de x ; et donc $\hat{\tau}^{(-1)}$ et $\hat{\nu}^{(-1)}$ sont indépendantes de x , donc uniformes sur les nœuds.

Les conditions aux limites empêchant le déplacement transversal, on obtient un mode uniforme, où les deux grandeurs cinématiques t et ν sont uniformes. Le problème se présentant de la même manière à tout ordre, on a $\hat{\gamma}^{(i)} = 0$ pour tout $i > 0$, avec γ exactement égal à $\gamma^{(0)}$, lui-même obtenu par E.41. Le système suivant donne,

en fonction d'un paramètre t_0 , les déplacements aux nœuds ; la figure E.13 montre les déformées, obtenues avec $\gamma = 1,318$.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{3n}^{(0)} = 0 \\ v_{3n+1}^{(0)} = \frac{\sqrt{3}}{2} t_{3n+1}^{(0)} = \frac{\sqrt{3}}{2} t_0 \\ v_{3n+2}^{(0)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} t_{3n+2}^{(0)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} t_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell \hat{\theta}_{3n}^{(-1)} = \ell \hat{\nu}_{3n}^{(-1)} = \delta t_0 \\ \ell \hat{\theta}_{3n+1}^{(-1)} = -\frac{1}{2} \ell \hat{\nu}_{3n+1}^{(-1)} = -\frac{1}{2} \delta t_0 \\ \ell \hat{\theta}_{3n+2}^{(-1)} = -\frac{1}{2} \ell \hat{\nu}_{3n+2}^{(-1)} = -\frac{1}{2} \delta t_0 \end{array} \right. \quad (\text{E.47})$$

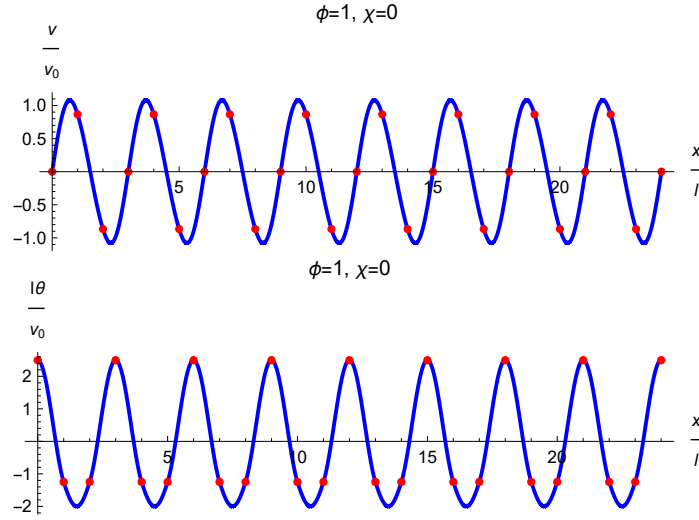


FIGURE E.13 – Déformées en déplacement (en haut) et rotation (en bas) pour $\phi = 1$, $\chi = 0$, $n_p = 24$, avec périodicité à trois cellules, pour le mode constant.

E.6.4 Comparaison avec le calcul aux éléments finis

On montre dans la figure E.14 trois modes obtenus par le calcul aux éléments finis avec les mêmes paramètres, sélectionnés pour présenter une pseudo-périodicité à trois cellules.

Le mode 6 est clairement celui qu'on a obtenu par le calcul homogénéisé et présenté en figure E.12, et avec la bonne valeur de γ . Le mode 4 est obtenu par le calcul homogénéisé et présenté en figure E.13, pour une valeur de γ correcte également.

Quant au mode 2, le calcul homogénéisé semble ne pas le fournir avec les règles suivies. Cependant, si l'on revient à l'équation E.44, après laquelle on a choisi $\hat{\gamma}^{(1)} = \pi \xi |\alpha|$ avec l'argument habituel de minimisation de la charge critique, et si l'on déroge à cette règle pour choisir $\hat{\gamma}^{(1)} = -\pi \xi |\alpha|$, on obtient $\gamma = 1,299$ à l'ordre ε et les déformées de la figure E.15.

On le voit, l'accord avec le mode 2 des éléments finis est désormais bon.

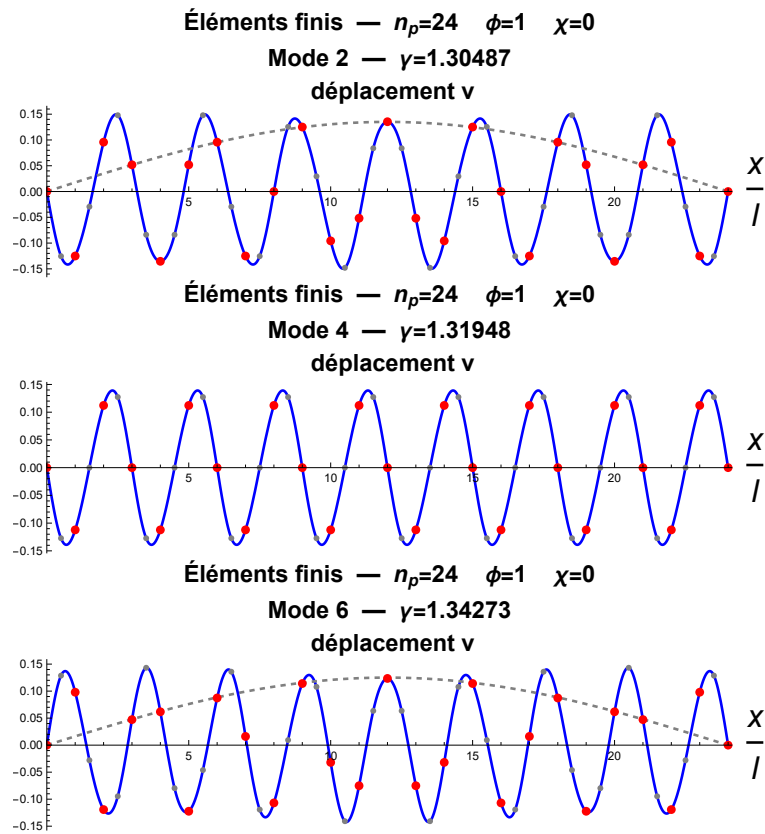


FIGURE E.14 – Trois modes présentant une pseudo-périodicité sur trois cellules obtenus par éléments finis (avec $\phi = 1$, $\chi = 0$, $n_p = 24$).

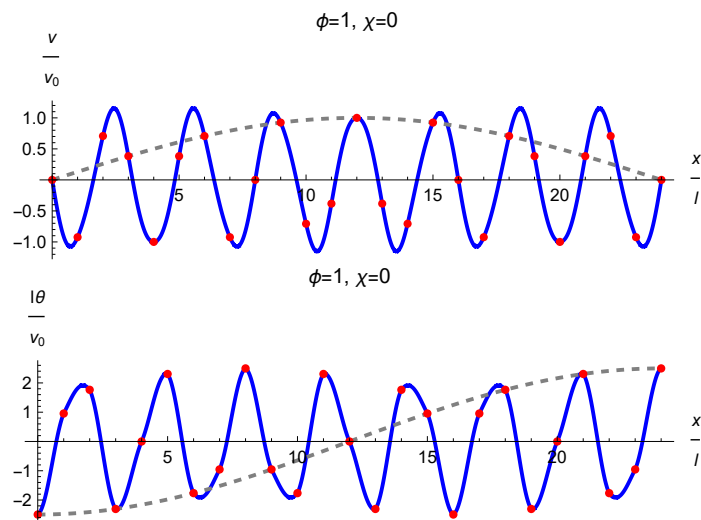


FIGURE E.15 – Déformées en déplacement (en haut) et rotation (en bas) pour $\phi = 1$, $\chi = 0$, $n_p = 24$, avec périodicité à trois cellules, pour le mode double modulé, avec $\hat{\gamma}^{(1)} = -\pi \xi |\alpha|$.

Annexe F

Résultats analytiques

Cette annexe donne les résultats analytiques des calculs homogénéisés pour les cas traités : expressions des variables cinématiques aux ordres les plus élevés, expressions des différents ordres de la charge critique γ , pour les différents cas de pseudo-périodicité calculés. Les informations manquantes n'ont pas été calculées ; les cas n'aboutissant qu'à la cinématique nulle sont mentionnés.

F.1 Notations

Pour rappel, ℓ est la longueur d'une poutre élémentaire, $H = n_p \ell$ est la longueur de la poutre macroscopique, $\xi = \frac{\ell}{H} = \frac{1}{n_p}$ est leur quotient, q est le numéro du mode de quantification, appartenant *a priori* à \mathbb{N}^* .

Pour alléger les expressions, on écrira f_1, f_2, f_4 tout court au lieu de $f_1(\gamma^{(0)}), f_2(\gamma^{(0)}), f_4(\gamma^{(0)})$, et de même pour les dérivées.

F.2 Résultats

$\phi = 0$	$\chi = 0$
Pseudo-périodicité à une cellule	
$\hat{\theta}^{(-1)} = 0 \quad \theta^{(0)} = \partial_x v^{(0)} \quad \partial_x^4 v^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(1)2}}{\ell^2} \partial_x^2 v^{(0)} = 0$ $\gamma^{(0)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{q\pi\xi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = 0$	
Mode avec θ uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \pi$	
Pseudo-périodicité à deux cellules, mode double	
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = \frac{\pi}{2\hat{\gamma}^{(1)}} \partial_x z^{(0)} \quad \text{ou} \quad z^{(0)} = -\frac{\ell}{2\pi\hat{\gamma}^{(1)}} \partial_x (\ell \hat{\nu}^{(-1)})$ $\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(1)2}}{\ell^2} z^{(0)} = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_x^2 (\ell \hat{\nu}^{(-1)}) + \frac{4\hat{\gamma}^{(1)2}}{\ell^2} \ell \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{q\pi\xi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = 0$	

$\phi = 0 \quad \chi = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$
Pseudo-périodicité à une cellule
$\hat{\theta}^{(-1)} = 0 \quad \theta^{(0)} = \partial_x v^{(0)} \quad \partial_x^4 v^{(0)} + \frac{4(\hat{\gamma}^{(1)2} - 3\chi)}{\ell^2} \partial_x^2 v^{(0)} = 0$ $\gamma^{(0)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{1}{2} \sqrt{q^2 \pi^2 \xi^2 + 12\chi} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = 0$ <p style="text-align: center;">Mode avec θ uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \pi + \frac{3\chi}{\pi} - \frac{18\chi^2}{\pi^3} + o(\chi^2)$</p>
Pseudo-périodicité à deux cellules, mode double
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = \frac{\pi}{2\hat{\gamma}^{(1)}} \partial_x z^{(0)} \quad \text{ou} \quad z^{(0)} = -\frac{\ell}{2\pi\hat{\gamma}^{(1)}} \partial_x(\ell\hat{\nu}^{(-1)})$ $\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(1)2}}{\ell^2} z^{(0)} = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_x^2(\ell\hat{\nu}^{(-1)}) + \frac{4\hat{\gamma}^{(1)2}}{\ell^2} \ell\hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{q\pi\xi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{3\chi}{\pi}$ <p style="text-align: center;">Mode avec ν uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \frac{\pi}{2} + \frac{6\chi}{\pi} - \frac{72\chi^2}{\pi^3} + o(\chi^2)$</p>

$\phi = 0 \quad \chi = \mathcal{O}(\varepsilon)$
Pseudo-périodicité à une cellule
<p style="text-align: center;">Mode avec θ uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \pi + \frac{3\chi}{\pi} - \frac{18\chi^2}{\pi^3} + o(\chi^2)$</p>
Pseudo-périodicité à deux cellules, mode double
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = \frac{\pi^2}{2(\pi\hat{\gamma}^{(1)} - 6\chi)} \partial_x z^{(0)} \quad \text{ou} \quad z^{(0)} = -\frac{\ell}{2\pi\hat{\gamma}^{(1)}} \partial_x(\ell\hat{\nu}^{(-1)})$ $\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(1)}}{\ell^2} \left(\hat{\gamma}^{(1)} - \frac{6\chi}{\pi} \right) z^{(0)} = 0 \quad \text{idem en } \ell\hat{\nu}^{(-1)}$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{3\chi}{\pi} + \sqrt{\frac{q^2 \pi^2 \xi^2}{4} + \frac{9\chi^2}{\pi^2}} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{6\hat{\gamma}^{(1)2}\chi}{3\pi\chi - \pi^2\hat{\gamma}^{(1)}}$ <p style="text-align: center;">Mode avec ν uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \frac{\pi}{2} + \frac{6\chi}{\pi} - \frac{72\chi^2}{\pi^3} + o(\chi^2)$</p>

$\phi = 0$ $\chi = \mathcal{O}(1)$
Pseudo-périodicité à une cellule
$\hat{\theta}^{(-1)} = 0 \quad \theta^{(0)} = \frac{f_2}{\chi + f_2} \partial_x v^{(0)}$ $\partial_x^4 v^{(0)} + \frac{12 \hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{f_2^2 f_1' + f_1 (f_1 - 2 f_2) f_2'}{f_1 (-3 f_2^2 + 2 f_1 f_4)} \partial_x^2 v^{(0)} = 0$ $\gamma^{(0)} \tan \gamma^{(0)} = 3 \chi \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{q^2 \pi^2 \xi^2}{12} \frac{f_1 (-3 f_2^2 + 2 f_1 f_4)}{f_2^2 f_1' + f_1 (f_1 - 2 f_2) f_2'}$ <p>Mode avec θ uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \pi + \frac{3 \chi}{\pi} - \frac{18 \chi^2}{\pi^3} + o(\chi^2)$</p>
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $\partial_x^2 z^{(0)} - \frac{24 \hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{\chi}{\pi} z^{(0)} = 0$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = -\frac{q^2 \pi^3 \xi^2}{24 \chi} \text{ décroissante ???}$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad z^{(0)} = 0$ $\partial_x^2 (\ell \hat{\nu}^{(-1)}) + \frac{4 \hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{f_1 (3 f_2' - 2 f_4')}{3 f_2^2 - 2 f_1 f_4} (\ell \hat{\nu}^{(-1)}) = 0$ $f_2(\gamma^{(0)}) - \frac{2}{3} f_4(\gamma^{(0)}) = -\chi \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = q^2 \pi^2 \xi^2 \frac{3 f_2^2 - 2 f_1 f_4}{4 f_1 (3 f_2' - 2 f_4')}$

$\phi = 0$ $\chi = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$
Pseudo-périodicité à une cellule
$\hat{\theta}^{(-1)} = 0 \quad \theta^{(0)} = 0 \quad \hat{\theta}^{(1)} = \frac{f_2}{\chi} \partial_x v^{(0)}$ $\partial_x^4 v^{(0)} + \frac{12 \pi - \pi^3 + 648 \hat{\gamma}^{(3)} \chi^3}{27 \ell^2 \pi \chi^2} \partial_x^2 v^{(0)} = 0$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = -\frac{\pi}{6 \chi} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{\pi}{18 \chi^2} \quad \hat{\gamma}^{(3)} = \frac{\pi (\pi^2 - 12)}{648 \chi^3} + \frac{q^2 \pi^3 \xi^2}{24 \chi}$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = 0 \quad \mu^{(0)} = 0 \quad \nu^{(0)} = 0$ $\partial_x^2 z^{(0)} - \frac{24 \hat{\gamma}^{(3)}}{\ell^2} \frac{\chi}{\pi} z^{(0)} = 0$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \text{???} \quad \hat{\gamma}^{(3)} = -\frac{q^2 \pi^3 \xi^2}{24 \chi} \text{ décroissante ???}$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
N'apparaît pas

$\phi = 0 \quad \chi = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$	
Pseudo-périodicité à une cellule	
$\hat{\theta}^{(-1)} = 0 \quad \theta^{(0)} = 0 \quad \hat{\theta}^{(1)} = 0 \quad \hat{\theta}^{(2)} = \frac{f_2}{\chi} \partial_x v^{(0)}$	
$\partial_x^4 v^{(0)} + \frac{4(18\hat{\gamma}^{(4)}\chi^2 - \pi)}{3\ell^2\pi\chi} \partial_x^2 v^{(0)} = 0$	
$\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = -\frac{\pi}{6\chi} \quad \hat{\gamma}^{(3)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(4)} = \frac{\pi}{18\chi^2} + \frac{q^2\pi^3\xi^2}{24\chi}$	
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement	
Cas non traité	
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle	
Cas non traité	

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad \chi = 0$	
Pseudo-périodicité à une cellule	
$\hat{\theta}^{(-1)} = 0 \quad \theta^{(0)} = \partial_x v^{(0)} \quad \partial_x^4 v^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(1)2}}{\ell^2} \partial_x^2 v^{(0)} + \frac{12\phi}{\ell^4} v^{(0)} = 0$	
$\gamma^{(0)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{q\pi\xi}{2} \sqrt{1 + \frac{12\phi}{q^4\pi^4\xi^4}} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(3)} = 0$	
Mode avec θ uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \pi$	
Pseudo-périodicité à deux cellules, mode double	
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = \frac{\pi}{2\hat{\gamma}^{(1)}} \partial_x z^{(0)} \quad \text{ou} \quad z^{(0)} = -\frac{\ell}{2\pi\hat{\gamma}^{(1)}} \partial_x(\ell\hat{\nu}^{(-1)})$	
$\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(1)2}}{\ell^2} z^{(0)} = 0 \quad \text{idem en } \ell\hat{\nu}^{(-1)}$	
$\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{q\pi\xi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = 0$	

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad \chi = \mathcal{O}(\varepsilon^4)$	
Pseudo-périodicité à une cellule	
$\hat{\theta}^{(-1)} = 0 \quad \theta^{(0)} = \partial_x v^{(0)} \quad \partial_x^4 v^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(1)2}}{\ell^2} \partial_x^2 v^{(0)} + \frac{12\phi}{\ell^4} v^{(0)} = 0$	
$\gamma^{(0)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{q\pi\xi}{2} \sqrt{1 + \frac{12\phi}{q^4\pi^4\xi^4}} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(3)} = \frac{3\chi}{2\hat{\gamma}^{(1)}}$	
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement	
Cas non traité	
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle	
Cas non traité	

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^4)$ $\chi = \mathcal{O}(\varepsilon^3)$
Pseudo-périodicité à une cellule
$\hat{\theta}^{(-1)} = 0 \quad \theta^{(0)} = \partial_x v^{(0)} \quad \partial_x^4 v^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(1)2}}{\ell^2} \partial_x^2 v^{(0)} + \frac{12\phi}{\ell^4} v^{(0)} = 0$ $\gamma^{(0)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{q\pi\xi}{2} \sqrt{1 + \frac{12\phi}{q^4\pi^4\xi^4}} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{3\chi}{2\hat{\gamma}^{(1)}}$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
Cas non traité
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
Cas non traité

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^4)$ $\chi = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$
Pseudo-périodicité à une cellule
$\hat{\theta}^{(-1)} = 0 \quad \theta^{(0)} = \partial_x v^{(0)} \quad \partial_x^4 v^{(0)} + \frac{4(\hat{\gamma}^{(1)2} - 3\chi)}{\ell^2} \partial_x^2 v^{(0)} + \frac{12\phi}{\ell^4} v^{(0)} = 0$ $\gamma^{(0)} = 0$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
Cas non traité
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
Cas non traité

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^4)$ $\chi = \mathcal{O}(\varepsilon)$
Pseudo-périodicité à une cellule
Cinématique nulle à tous ordres
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
Cas non traité
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
Cas non traité

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^4)$ $\chi = \mathcal{O}(1)$
Pseudo-périodicité à une cellule
$\hat{\theta}^{(-1)} = 0 \quad \theta^{(0)} = \frac{f_2}{\chi + f_2} \partial_x v^{(0)}$ $f_1(-3f_2^2 + 2f_1f_4) \partial_x^4 v^{(0)} + \frac{12\hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} (f_2^2 f_1' + f_1(f_1 - 2f_2)f_2') \partial_x^2 v^{(0)} + \frac{12\phi f_2^2}{\ell^4} v^{(0)} = 0$ $\gamma^{(0)} \tan \gamma^{(0)} = 3\chi$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
Cas non traité
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
Cas non traité

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad \chi = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$
Pseudo-périodicité à une cellule
$\hat{\theta}^{(-1)} = 0 \quad \theta^{(0)} = 0 \quad \theta^{(1)} = \frac{f_2}{\chi} \partial_x v^{(0)}$ $\partial_x^2 v^{(0)} + \frac{432 \phi \chi^2}{\ell^2 \pi^3 (18 \hat{\gamma}^{(2)} \chi^2 - \pi)} v^{(0)} = 0$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = -\frac{\pi}{6\chi} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{\pi}{18\chi^2} + \frac{24\phi}{\pi^5 q^2 \xi^2}$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
Cas non traité
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
Cas non traité

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad \chi = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$
Pseudo-périodicité à une cellule
$\hat{\theta}^{(-1)} = 0 \quad \theta^{(0)} = 0 \quad \hat{\theta}^{(1)} = 0 \quad \theta^{(2)} = \frac{f_2}{\chi} \partial_x v^{(0)}$ $\partial_x^2 v^{(0)} + \frac{144 \phi \chi}{\ell^2 \pi^3 (6 \hat{\gamma}^{(2)} \chi + \pi)} v^{(0)} = 0$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = -\frac{\pi}{6\chi} + \frac{24\phi}{\pi^5 q^2 \xi^2} \quad \hat{\gamma}^{(3)} = 0$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
Cas non traité
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
Cas non traité

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad \chi = 0$
Pseudo-périodicité à une cellule
Mode avec θ uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \pi$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
Cas non traité
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
Cas non traité

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad \chi = \mathcal{O}(\varepsilon^4)$
Pseudo-périodicité à une cellule
Cinématique nulle à tous ordres
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
Cas non traité
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
Cas non traité

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad \chi = \mathcal{O}(\varepsilon^3)$
Pseudo-périodicité à une cellule
Cinématique nulle à tous ordres
Pseudo-périodicité à deux cellules, mode double
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = \frac{\pi}{2\hat{\gamma}^{(1)}} \partial_x z^{(0)} \quad \text{ou} \quad z^{(0)} = -\frac{\ell}{2\pi\hat{\gamma}^{(1)}} \partial_x(\ell\hat{\nu}^{(-1)})$ $\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(1)^2}{\ell^2} z^{(0)} = 0 \quad \text{idem en } \ell\hat{\nu}^{(-1)}$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{q\pi\xi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = 0$

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad \chi = \mathcal{O}(1)$
Pseudo-périodicité à une cellule
$\hat{\theta}^{(-1)} = 0 \quad \theta^{(0)} = \frac{f_2}{\chi + f_2} \partial_x v^{(0)}$ $\partial_x^2 v^{(0)} + \frac{\phi}{\ell^2 \hat{\gamma}^{(1)^2} \frac{f_2^2}{f_2^2 f_1' + f_1^2 f_2' - 2f_1 f_2 f_2'}} v^{(0)} = 0$ $\gamma^{(0)} \tan \gamma^{(0)} = 3\chi$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $\partial_x^2 z^{(0)} - \frac{24\hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{\chi}{\pi} z^{(0)} = 0$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = -\frac{q^2 \pi^3 \xi^2}{24\chi} \text{ décroissante ???}$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad z^{(0)} = 0$ $\partial_x^2(\ell\hat{\nu}^{(-1)}) + \frac{4\hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{f_1(3f_2' - 2f_4')}{3f_2^2 - 2f_1 f_4}(\ell\hat{\nu}^{(-1)}) = 0$ $f_2(\gamma^{(0)}) - \frac{2}{3} f_4(\gamma^{(0)}) = -\chi \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = q^2 \pi^2 \xi^2 \frac{3f_2^2 - 2f_1 f_4}{4f_1(3f_2' - 2f_4')}$

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \chi = 0$
Pseudo-périodicité à une cellule
Mode avec θ uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \pi$
Pseudo-périodicité à deux cellules, mode double
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = \frac{\pi}{2\hat{\gamma}^{(1)}} \partial_x z^{(0)} \quad \text{ou} \quad z^{(0)} = -\frac{\ell}{2\pi\hat{\gamma}^{(1)}} \partial_x(\ell\hat{\nu}^{(-1)})$ $\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(1)^2}{\ell^2} z^{(0)} = 0 \quad \text{idem en } \ell\hat{\nu}^{(-1)}$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{q\pi\xi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{3\phi}{\pi^3}$ <p style="text-align: center;">Mode avec ν uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \frac{\pi}{2}$</p>

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \chi = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$
Pseudo-périodicité à une cellule
Cinématique nulle à tous ordres
Pseudo-périodicité à deux cellules, mode double
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = \frac{\pi}{2\hat{\gamma}^{(1)}} \partial_x z^{(0)} \quad \text{ou} \quad z^{(0)} = -\frac{\ell}{2\pi\hat{\gamma}^{(1)}} \partial_x(\ell\hat{\nu}^{(-1)})$ $\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(1)^2}{\ell^2}}{z^{(0)}} = 0 \quad \text{idem en } \ell\hat{\nu}^{(-1)}$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{q\pi\xi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{3(\phi + \pi^2\chi)}{\pi^3}$
Mode avec ν uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \frac{\pi}{2} + \frac{6\chi}{\pi} - \frac{72\chi^2}{\pi^3} + o(\chi^2)$

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \chi = \mathcal{O}(\varepsilon)$
Pseudo-périodicité à une cellule
Cas non traité
Pseudo-périodicité à deux cellules, mode double
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = \frac{\pi^2}{2(\pi\hat{\gamma}^{(1)} - 6\chi)} \partial_x z^{(0)} \quad \text{ou} \quad z^{(0)} = -\frac{\ell}{2\pi\hat{\gamma}^{(1)}} \partial_x(\ell\hat{\nu}^{(-1)})$ $\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(1)}}{\ell^2} \left(\hat{\gamma}^{(1)} - \frac{6\chi}{\pi} \right) z^{(0)} = 0 \quad \text{idem en } \ell\hat{\nu}^{(-1)}$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{3\chi}{\pi} + \sqrt{\frac{q^2\pi^2\xi^2}{4} + \frac{9\chi^2}{\pi^2}} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = -\frac{3(2\pi^2\hat{\gamma}^{(1)^2}\chi - \pi\hat{\gamma}^{(1)}\phi + 6\phi\chi)}{\pi^3(\pi\hat{\gamma}^{(1)} - 3\chi)}$
Mode avec ν uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \frac{\pi}{2} + \frac{6\chi}{\pi} - \frac{72\chi^2}{\pi^3} + o(\chi^2)$

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \chi = \mathcal{O}(1)$
Pseudo-périodicité à une cellule
Mode avec θ uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = f_2^{[-1]}(-\chi)$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $\partial_x^2 z^{(0)} - \frac{24(\pi^3\hat{\gamma}^{(2)} - 6\phi)\chi}{\ell^2\pi^4} z^{(0)} = 0$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = -\frac{q^2\pi^3\xi^2}{24\chi} + \frac{6\phi}{\pi^3} \text{ décroissante ???}$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad z^{(0)} = 0$ $\partial_x^2(\ell\hat{\nu}^{(-1)}) + \frac{4\hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{f_1(3f_2' - 2f_4')}{3f_2^2 - 2f_1f_4}(\ell\hat{\nu}^{(-1)}) = 0$ $f_2(\gamma^{(0)}) - \frac{2}{3}f_4(\gamma^{(0)}) = -\chi \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = q^2\pi^2\xi^2 \frac{3f_2^2 - 2f_1f_4}{4f_1(3f_2' - 2f_4')}$

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \chi = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$
Pseudo-périodicité à une cellule
Cas non traité
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $\partial_x^2 z^{(0)} - \frac{24(\pi^3 \hat{\gamma}^{(2)} - 6\phi)\chi}{\ell^2 \pi^4} z^{(0)} = 0$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = -\frac{q^2 \pi^3 \xi^2}{24\chi} + \frac{6\phi}{\pi^3} \text{ décroissante ???}$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
N'apparaît pas

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \chi = 0$
Pseudo-périodicité à une cellule
Mode avec θ uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \pi$
Pseudo-périodicité à deux cellules, mode double
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = \frac{\pi}{2\hat{\gamma}^{(1)}} \partial_x z^{(0)} \quad \text{ou} \quad z^{(0)} = -\frac{\ell \pi^2}{2(\pi^3 \hat{\gamma}^{(1)} - 6\phi)} \partial_x(\ell \hat{\nu}^{(-1)})$ $\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(1)}}{\ell^2} \left(\hat{\gamma}^{(1)} - \frac{6\phi}{\pi^3} \right) z^{(0)} = 0 \quad \text{idem en } \ell \hat{\nu}^{(-1)}$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{3\phi}{\pi^3} + \sqrt{\frac{q^2 \pi^2 \xi^2}{4} + \frac{9\phi^2}{\pi^6}} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{9\hat{\gamma}^{(1)}\phi(\phi - 2\pi\hat{\gamma}^{(1)})}{\pi^5 \hat{\gamma}^{(1)} - 3\pi^2 \phi}$
Mode avec ν uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \frac{\pi}{2}$

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \chi = \mathcal{O}(\varepsilon)$
Pseudo-périodicité à une cellule
Cinématique nulle à tous ordres
Pseudo-périodicité à deux cellules, mode double
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0$ $\hat{\nu}^{(-1)} = \frac{\pi^2}{2(\pi\hat{\gamma}^{(1)} - 6\chi)} \partial_x z^{(0)} \quad \text{ou} \quad z^{(0)} = -\frac{\ell \pi^2}{2(\pi^3 \hat{\gamma}^{(1)} - 6\phi)} \partial_x(\ell \hat{\nu}^{(-1)})$ $\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{4}{\ell^2} \left(\hat{\gamma}^{(1)} - \frac{6\chi}{\pi} \right) \left(\hat{\gamma}^{(1)} - \frac{6\phi}{\pi^3} \right) z^{(0)} = 0 \quad \text{idem en } \ell \hat{\nu}^{(-1)}$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{3\chi}{\pi} + \frac{3\phi}{\pi^3} + \sqrt{\frac{q^2 \pi^2 \xi^2}{4} + 9 \left(\frac{\phi}{\pi^3} - \frac{\chi}{\pi} \right)}$ $\hat{\gamma}^{(2)} = \frac{9\pi\hat{\gamma}^{(1)}\phi(\phi - 2\pi\hat{\gamma}^{(1)}) - 6\chi(\pi^4\hat{\gamma}^{(1)2} - 24\pi\hat{\gamma}^{(1)}\phi + 9\phi^2)}{\pi^6\hat{\gamma}^{(1)} - 3\pi^3\phi - 3\pi^5\chi}$
Mode avec ν uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \frac{\pi}{2} + \frac{6\chi}{\pi} - \frac{72\chi^2}{\pi^3} + o(\chi^2)$

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \chi = \mathcal{O}(1)$
Pseudo-périodicité à une cellule
Mode avec θ uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = f_2^{[-1]}(-\chi)$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $\partial_x^2 z^{(0)} - \frac{24(\pi^7 \hat{\gamma}^{(2)} + 216\phi^2 - 18\pi^2 \phi^2)\chi}{\ell^2 \pi^8} z^{(0)} = 0$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{6\phi}{\pi^3} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = -\frac{q^2 \pi^3 \xi^2}{24\chi} + \frac{18\phi^2(\pi^2 - 12)}{\pi^7} \text{ décroissante ???}$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad z^{(0)} = 0$ $\partial_x^2(\ell \hat{\nu}^{(-1)}) + \frac{4\hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{f_1(3f_2' - 2f_4')}{3f_2^2 - 2f_1 f_4} (\ell \hat{\nu}^{(-1)}) = 0$ $f_2(\gamma^{(0)}) - \frac{2}{3} f_4(\gamma^{(0)}) = -\chi \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = q^2 \pi^2 \xi^2 \frac{3f_2^2 - 2f_1 f_4}{4f_1(3f_2' - 2f_4')}$

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \chi = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$
Pseudo-périodicité à une cellule
Cinématique nulle à tous ordres
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
Cas non traité
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
Cas non traité

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \chi = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$
Pseudo-périodicité à une cellule
Cinématique nulle à tous ordres
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
Cas non traité
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
Cas non traité

$\phi = O(1) \quad \chi = 0$
Pseudo-périodicité à une cellule
Mode avec θ uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \pi$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{f_1'(-3f_2 + 2f_4)}{3f_2(f_1 + f_2) - 2f_1f_4} z^{(0)} = 0$ $4f_1(\gamma^{(0)}) = -\phi \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{q^2 \pi^2 \xi^2}{4} \frac{3f_1f_2 + 3f_2^2 - 2f_1f_4}{f_1'(3f_2 - 2f_4)}$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad z^{(0)} = 0$ $\partial_x^2(\ell \hat{\nu}^{(-1)}) - \frac{24\hat{\gamma}^{(2)}\phi}{\ell^2 \pi(\pi^2 - 3\phi)} (\ell \hat{\nu}^{(-1)}) = 0$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = -q^2 \pi^3 \xi^2 \frac{\pi^2 - 3\phi}{24\phi} \text{ décroissante ??}$

$\phi = O(1) \quad \chi = O(\varepsilon^2)$
Pseudo-périodicité à une cellule
Mode avec θ uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \pi + \frac{3\chi}{\pi} - \frac{18\chi^2}{\pi^3} + o(\chi^3)$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{f_1'(3f_2 - 2f_4)}{3f_1f_2 + 3f_2^2 - 2f_1f_4} z^{(0)} = 0$ $4f_1(\gamma^{(0)}) = -\phi \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{q^2 \pi^2 \xi^2}{4} \frac{3f_1f_2 + 3f_2^2 - 2f_1f_4}{f_1'(3f_2 - 2f_4)} \text{ restriction}$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
$y^{(0)} = 0 \quad z^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0$ $\partial_x^2(\ell \hat{\nu}^{(-1)}) + \frac{24\phi(\pi\hat{\gamma}^{(2)} - 6\chi)}{\ell^2 \pi^2(3\phi - \pi^2)} \ell \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{6\chi}{\pi} + q^2 \pi^3 \xi^2 \frac{3\phi - \pi^2}{24\phi} \text{ restriction}$

$\phi = O(1) \quad \chi = O(\varepsilon)$
Pseudo-périodicité à une cellule
Mode avec θ uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \pi + \frac{3\chi}{\pi} - \frac{18\chi^2}{\pi^3} + o(\chi^3)$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{f_1'(3f_2 - 2f_4)}{3f_1f_2 + 3f_2^2 - 2f_1f_4} z^{(0)} = 0$ $4f_1(\gamma^{(0)}) = -\phi \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{q^2 \pi^2 \xi^2}{4} \frac{3f_1f_2 + 3f_2^2 - 2f_1f_4}{f_1'(3f_2 - 2f_4)} \text{ restriction}$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
$y^{(0)} = 0 \quad z^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0$ $\partial_x^2(\ell \hat{\nu}^{(-1)}) + \frac{24\phi(\pi^3 \hat{\gamma}^{(2)} + 72\chi^2)}{\ell^2 \pi^4 (3\phi - \pi^2)} \ell \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = \frac{6\chi}{\pi} \quad \hat{\gamma}^{(2)} = -\frac{72\chi^2}{\pi^3 +} + q^2 \pi^3 \xi^2 \frac{3\phi - \pi^2}{24\phi} \text{ restriction}$

$\phi = O(1) \quad \chi = O(1)$
Pseudo-périodicité à une cellule
$v^{(0)} = 0 \quad v^{(1)} = -\ell \frac{f_2}{\phi} \partial_x(\ell \hat{\theta}^{(-1)})$ $\partial_x^2(\ell \hat{\theta}^{(-1)}) + \frac{6\hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{f_2' \phi}{6f_2^2 + \phi f_4} \ell \hat{\theta}^{(-1)} = 0$ $f_2(\gamma^{(0)}) = -\chi \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = q^2 \pi^2 \xi^2 \frac{6f_2^2 + \phi f_4}{6\phi f_2'} \quad \hat{\gamma}^{(3)} = 0$
Mode avec θ uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = f_2^{[-1]}(-\chi)$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{f_1'(3\chi + 3f_2 - 2f_4)}{3\phi f_1 3f_1f_2 + 3f_2^2 - 2f_1f_4} z^{(0)} = 0$ $4f_1(\gamma^{(0)}) = -\phi \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{q^2 \pi^2 \xi^2}{4} \frac{3\chi f_1 3f_1f_2 + 3f_2^2 - 2f_1f_4}{f_1'(3\chi 3f_2 - 2f_4)} \text{ restriction}$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
$y^{(0)} = 0 \quad z^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0$ $\partial_x^2(\ell \hat{\nu}^{(-1)}) + \frac{2\hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{(\phi + 4f_1)(3f_2' - 2f_4')}{6f_2^2 - f_4(\phi + 4f_1)} \ell \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $-f_2(\gamma^{(0)}) + \frac{2}{3} f_4(\gamma^{(0)}) = \chi \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = q^2 \pi^2 \xi^2 \frac{6f_2^2 - f_4(\phi + 4f_1)}{2(\phi + 4f_1)(3f_2' - 2f_4')} \text{ restriction}$

$\phi = O(1) \quad \chi = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$
Pseudo-périodicité à une cellule
Cinématique nulle à tous ordres
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{f_1'}{f_1} z^{(0)} = 0$ $4f_1(\gamma^{(0)}) = -\phi \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{q^2 \pi^2 \xi^2}{4} \frac{f_1}{f_1'} \quad \hat{\gamma}^{(3)} = \frac{q^2 \pi^2 \xi^2}{4} \frac{f_2^2}{\chi f_1'}$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
Cinématique nulle à tous ordres

$\phi = O(1) \quad \chi = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$
Pseudo-périodicité à une cellule
Cinématique nulle à tous ordres
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
$y^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0 \quad \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $\partial_x^2 z^{(0)} + \frac{4\hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{f_1'}{f_1} z^{(0)} = 0$ $4f_1(\gamma^{(0)}) = -\phi \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{q^2 \pi^2 \xi^2}{4} \frac{f_1}{f_1'} \quad \hat{\gamma}^{(3)} = 0$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
Cinématique nulle à tous ordres

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}) \quad \chi = 0$
Pseudo-périodicité à une cellule
Mode avec θ uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \pi$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
Cinématique nulle à tous ordres
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
$y^{(0)} = 0 \quad z^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0$ $\partial_x^2 (\ell \hat{\nu}^{(-1)}) + \frac{8\hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2 \pi} \ell \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{q^2 \pi^3 \xi^2}{8} \quad \hat{\gamma}^{(3)} = -\frac{q^2 \pi^5 \xi^2}{24 \phi}$

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}) \quad \chi = \mathcal{O}(1)$
Pseudo-périodicité à une cellule
$v^{(0)} = 0 \quad \hat{v}^{(1)} = 0 \quad v^{(2)} = -\ell \frac{f_2}{\phi} \partial_x(\ell \hat{\theta}^{(-1)})$ $\partial_x^2(\ell \hat{\theta}^{(-1)}) + \frac{6 \hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{f_2'}{f_4} \ell \hat{\theta}^{(-1)} = 0$ $f_2(\gamma^{(0)}) = -\chi \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = q^2 \pi^2 \xi^2 \frac{f_4}{6 f_2'} \quad \hat{\gamma}^{(3)} = q^2 \pi^2 \xi^2 \frac{f_2'^2}{\phi f_2'}$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
Cinématique nulle à tous ordres
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
$y^{(0)} = 0 \quad z^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0$ $\partial_x^2(\ell \hat{\nu}^{(-1)}) - \frac{2 \hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{3 f_2' - 2 f_4'}{f_4} \ell \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $-f_2(\gamma^{(0)}) + \frac{2}{3} f_4(\gamma^{(0)}) = \chi \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0$ $\hat{\gamma}^{(2)} = -q^2 \pi^2 \xi^2 \frac{f_4}{2(3 f_2' - 2 f_4')} \quad \hat{\gamma}^{(3)} = q^2 \pi^2 \xi^2 \frac{3 f_2'^2}{\phi(3 f_2' - 2 f_4')}$

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}) \quad \chi = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$
Pseudo-périodicité à une cellule
Cinématique nulle à tous ordres
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
Cinématique nulle à tous ordres
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
Cinématique nulle à tous ordres

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2}) \quad \chi = 0$
Pseudo-périodicité à une cellule
Mode avec θ uniforme et v nulle aux nœuds : $\gamma = \pi$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement
Cinématique nulle à tous ordres
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle
$y^{(0)} = 0 \quad z^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0$ $\partial_x^2(\ell \hat{\nu}^{(-1)}) + \frac{8 \hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2 \pi} \ell \hat{\nu}^{(-1)} = 0$ $\gamma^{(0)} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = \frac{q^2 \pi^3 \xi^2}{8} \quad \hat{\gamma}^{(3)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(4)} = -\frac{q^2 \pi^5 \xi^2}{24 \phi} + q^4 \pi^5 \xi^4 \frac{20 - 3 \pi^2}{384}$

$\phi = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2}) \quad \chi = \mathcal{O}(1)$	
Pseudo-périodicité à une cellule	
$v^{(0)} = 0$	$\hat{v}^{(1)} = 0 \quad \hat{v}^{(2)} = 0 \quad v^{(3)} = -\ell \frac{f_2}{\phi} \partial_x(\ell \hat{\theta}^{(-1)})$
$\partial_x^2(\ell \hat{\theta}^{(-1)}) + \frac{6 \hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{f_2'}{f_4} \ell \hat{\theta}^{(-1)} = 0$	
$f_2(\gamma^{(0)}) = -\chi$	$\hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = q^2 \pi^2 \xi^2 \frac{f_4}{6 f_2'} \quad \hat{\gamma}^{(3)} = 0$
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en déplacement	
Cinématique nulle à tous ordres	
Pseudo-périodicité à deux cellules, antipériodique en angle	
$y^{(0)} = 0$	$z^{(0)} = 0 \quad \hat{\mu}^{(-1)} = 0$
$\partial_x^2(\ell \hat{\nu}^{(-1)}) - \frac{2 \hat{\gamma}^{(2)}}{\ell^2} \frac{3 f_2' - 2 f_4'}{f_4} \ell \hat{\nu}^{(-1)} = 0$	
$-f_2(\gamma^{(0)}) + \frac{2}{3} f_4(\gamma^{(0)}) = \chi$	$\hat{\gamma}^{(1)} = 0 \quad \hat{\gamma}^{(2)} = -q^2 \pi^2 \xi^2 \frac{f_4}{2(3 f_2' - 2 f_4')} \quad \hat{\gamma}^{(3)} = 0$

Bibliographie

- [1] Raphael Linus LEVIEN : From Spiral to Spline : Optimal Techniques in Interactive Curve Design. Thèse de doctorat, EECS Department, University of California, Berkeley, Dec 2009.
- [2] Stephen P. TIMOSHENKO et James M. GERE : Theory of elastic stability. Courier Corporation, 2009.
- [3] Robert Millard JONES : Buckling of bars, plates, and shells. Bull Ridge Corporation, 2006.
- [4] Samir EMAM et Walter LACARBONARA : A review on buckling and postbuckling of thin elastic beams. European Journal of Mechanics - A/Solids, 92:104449, 2022.
- [5] A. I. EL-SHEIKH et R. E. MCCONNEL : Experimental study of behavior of composite space trusses. Journal of Structural Engineering, 119(3):747–766, 1993.
- [6] Joanna JANKOWSKA-SANDBERG et Jarosław KOŁODZIEJ : Experimental study of steel truss lateral-torsional buckling. Engineering Structures, 46:165–172, 2013.
- [7] S. LEE, François BARTHELAT, John W. HUTCHINSON et Horacio Dante ESPINOSA : Dynamic failure of metallic pyramidal truss core materials—experiments and modeling. International Journal of Plasticity, 22(11):2118–2145, 2006.
- [8] Christopher D. HILL, George E. BLANDFORD et Shien T. WANG : Post-buckling analysis of steel space trusses. Journal of Structural Engineering, 115(4):900–919, 1989.
- [9] Heng HU, Salim BELOUETTAR, Michel POTIER-FERRY et Ahmed MAKRADI : A novel finite element for global and local buckling analysis of sandwich beams. Composite Structures, 90(3):270–278, 2009.
- [10] Gabriel MOREAU et Denis CAILLERIE : Continuum modeling of lattice structures in large displacement applications to buckling analysis. Computers & Structures, 68:181–189, 1998.
- [11] Van Dong DO et Philippe LE GROGNEC : Buckling analysis of a reinforced sandwich column using the Bloch wave theory. Thin-Walled Structures, 115:323 – 335, juin 2017.
- [12] Mikhail N. KIRSANOV : Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. Magazine of Civil Engineering, 64(4):52–58, 2016.
- [13] Hualin FAN, Fengnian JIN et Daining FANG : Uniaxial local buckling strength of periodic lattice composites. Materials & design, 30(10):4136–4145, 2009.
- [14] Edward SAIBEL : Buckling of continuous beams on elastic supports. Journal of the Franklin Institute, 253(6):563–566, 1952.
- [15] Pierre-Marie GÉRY et Jean-Armand CALGARO : Les Matrices-Transfert dans le calcul des structures. Eyrolles, 1973.
- [16] Steven E. FORMAN et John W. HUTCHINSON : Buckling of reticulated shell structures. International Journal of Solids and Structures, 6(7):909–932, 1970.
- [17] Bertrand BURGARDT et Patrice CARTRAUD : Continuum modeling of beamlike lattice trusses using averaging methods. Computers & structures, 73(1-5):267–279, 1999.
- [18] Antoine RALLU, Stéphane HANS et Claude BOUTIN : Asymptotic analysis of high-frequency modulation in periodic systems. Analytical study of discrete and continuous structures. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 117:123–156, 2018. ISBN : 0022-5096 Publisher : Elsevier.
- [19] Antoine RALLU et Claude BOUTIN : Comportement dynamique macroscopique de poutres périodiquement suspendues. non publié, 2023.

- [20] Rémi CORNAGGIA et Bojan B. GUZINA : Second-order homogenization of boundary and transmission conditions for one-dimensional waves in periodic media. International Journal of Solids and Structures, 188:88–102, 2020. ISBN : 0020-7683 Publisher : Elsevier.
- [21] Michel CAZENAVE : Méthode des éléments finis-2e éd. : Approche pratique en mécanique des structures. Dunod, 2013.
- [22] Annie RAOULT, Denis CAILLERIE et Ayman MOURAD : Elastic lattices : equilibrium, invariant laws and homogenization. Annali dell'Universita di Ferrara, 54(2):297–318, 2008.