



**HAL**  
open science

## Influence de la manipulation sur les habiletés calculatoires au cycle 3

Léa Pascaletti

► **To cite this version:**

Léa Pascaletti. Influence de la manipulation sur les habiletés calculatoires au cycle 3. Education. 2023. dumas-04513271

**HAL Id: dumas-04513271**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-04513271v1>**

Submitted on 20 Mar 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0  
International License

**MASTER MEEF mention 1er degré  
« Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation »**

**Mémoire de 2<sup>ème</sup> année  
Année universitaire 2022 - 2023**

Influence de la manipulation sur les habiletés  
calculatoires au cycle 3

**PASQUALETTI Léa**

Directrice de mémoire : Madame **TUFFERY-ROCHDI** Chantal

Assesseur : Madame **BRIANT** Nathalie

Soutenu le 24 Mai 2023

## Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire de recherche. Tout d'abord, je souhaiterais remercier Madame Tufféry-Rochdi, pour son accompagnement, son expertise ainsi que ses conseils tout au long de cette étude. Je tiens également à remercier Madame Cadène qui m'a accueillie dans sa classe et m'a permis de mettre en oeuvre des situations d'apprentissage, de même que les élèves qui ont accepté de participer à cette étude. Leurs contributions ont été inestimables pour la réussite de ce travail.

## **Résumé :**

Domaine d'étude essentiel, devant être abordé quotidiennement en classe, l'aisance en calcul mental est un prérequis nécessaire et fondamental qui permettra à chaque élève de s'engager plus facilement dans les différentes tâches mathématiques qu'il rencontrera. Cependant, son enseignement est souvent uniformisé et n'est pas toujours central dans la réflexion des enseignants. Ce mémoire de recherche tend donc à démontrer que le recours à la manipulation peut permettre aux élèves de développer leurs habiletés en calcul mental. Cet objectif se traduit par la problématique suivante : « En quoi la manipulation permet-elle de favoriser le développement des habiletés calculatoires chez des élèves de CM2 ? ». Afin de tenter de répondre à cette interrogation, une séquence pédagogique articulant phases de manipulation et échanges en groupes a été menée dans une classe de CM2 durant les périodes 3 et 4. Si les résultats ne permettent pas d'assurer que la manipulation soit un moyen suffisant pour permettre de faire progresser les élèves en calcul mental, elle semble toutefois constituer un levier d'action intéressant. Ces résultats peuvent donc constituer un support de travail afin de repenser les dispositifs pédagogiques utilisés lors de l'enseignement du calcul mental.

---

**Mot clés :** calcul mental - multiplication - manipulation - expérimenter - cycle 3

## **Abstract :**

Mental arithmetic is an essential area of study that must be addressed daily in the classroom. It is a necessary and fundamental prerequisite that will enable each student to engage more easily in the various mathematical tasks that he or she will encounter. However, its teaching is often standardized and is not always central to teachers' thinking. This research paper therefore aims to demonstrate that the use of manipulatives can help students develop their mental calculation skills. This objective is reflected in the following problematic: "How can manipulation help develop calculating skills in fifth grade students? In order to try to answer this question, a pedagogical sequence articulating manipulation phases and group exchanges was carried out in a CM2 class during periods 3 and 4. Although the results do not make it possible to ensure that manipulation is a sufficient means of helping students progress in mental arithmetic, it does seem to constitute an interesting lever for action. These results can therefore be used as a basis for rethinking the pedagogical devices used in the teaching of mental arithmetic.

---

**Key words :** mental calculation - multiplication - manipulation - experiment - cycle 3

## Sommaire

Key words : mental calculation - multiplication - manipulation - experiment - cycle 3.....	3
I. Introduction .....	5
II. Cadrage théorique.....	7
A. États des lieux .....	7
A.1. Les instructions officielles : quelles injonctions sur l'enseignement du calcul mental ?.....	7
A.2. Les apports de la recherche .....	8
B. Cadrage théorique .....	14
C. Élaboration d'un questionnaire.....	16
C.1 Questionnements sous-jacents.....	16
C.2 Problématique et hypothèse de recherche .....	17
III. Partie expérimentale .....	19
A. Méthodologie utilisée et activités menées .....	19
B. Analyse préalable de l'expérimentation .....	24
C. Analyse à posteriori.....	31
C.1 Analyse à posteriori des entretiens individuels.....	31
C.2 Analyse à posteriori de la séance 1 .....	35
C.3 Analyse à posteriori de la séance 2 .....	37
C.4 Analyse à posteriori de la séance 3 .....	39
C.5 Analyse à posteriori des seconds entretiens .....	40
IV. Discussion des résultats .....	42
V. Conclusion .....	44
VI. Références bibliographiques.....	46
VII. Annexes .....	48

## I. Introduction

Rendant compte des résultats obtenus par les élèves à l'évaluation TIMSS 2019, la note d'information n°20.46, publiée par le ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports en décembre 2020 alerte sur les performances en mathématiques et en sciences des élèves de CM1. Comparés à ceux de 2015, les résultats ne semblent pas avoir évolués et la France conserve un faible score en dessous de la moyenne européenne. Le domaine « Nombre » de cette étude, regroupe des exercices portant sur les thèmes suivants : « nombres entiers » et « fractions et décimaux ». Nous retrouvons par exemple, des problèmes en plusieurs étapes ainsi qu'algébriques. Ces exercices peuvent prendre la forme de questions à choix multiple ou de questions ouvertes et mettent en jeu des compétences cognitives variées telles que « calculer » ; « extraire » ; « représenter/modéliser »... Nous constatons que le score obtenu pour ce domaine est le score le moins élevé avec plus de 40 points d'écart avec la moyenne européenne et une nette différence de résultats entre les filles et les garçons : plus de 13 points de différence. De telles données doivent nous questionner, le nombre étant la matière permettant de traiter et de comprendre l'ensemble des autres domaines du programme en mathématiques. Il paraît par exemple difficile de raisonner sur des problèmes en ayant une faible connaissance et image du nombre.

Le calcul mental apparaît donc comme un domaine d'étude essentiel pour plusieurs raisons. Tout d'abord, car il convoque différents aspects du nombre, qu'il implique une bonne compréhension des propriétés des nombres et des opérations. Mais également, et surtout, car il fait l'objet de préconisations d'enseignement fortes. En effet, le bulletin officiel spécial numéro 3 d'avril 2018 stipule qu'à l'école élémentaire « le calcul mental doit faire l'objet d'une pratique quotidienne moyenne d'au moins 15 minutes. ». L'enseignement du calcul aux cycles 2 et 3 fait l'objet d'un document d'accompagnement spécifique proposé par Éduscol. Ce dernier donne à nouveau l'importance de cet enseignement en précisant que la place du calcul mental et en ligne doit être « plus importante que celle accordée au calcul posé ». De plus, ce document précise les objectifs de cet enseignement avec notamment : « construire puis travailler la compréhension de la notion de nombre et des propriétés de notre numération décimale de position », « découvrir et utiliser les propriétés des opérations » ou « développer des habiletés calculatoires ». De telles données montrent bien l'importance de l'enseignement du calcul mental mais elle pose également question d'un point de vue de la réalisation de cet enseignement et nous interroge sur les modalités de mise en oeuvre d'un tel enseignement au quotidien : comment, d'un point de vue enseignant, gérer cette injonction, quels choix didactiques effectuer... Cette interrogation a été confortée durant mes différentes expériences de stages. Lors de ces derniers, j'ai pu observer plusieurs méthodes de travail (fichiers individuels, séance collective sur ardoise, défi mathématiques individuel...) incitant les élèves à utiliser diverses procédures et organisations mentales. Chacune de ces organisations possède ses avantages et ses inconvénients. Lors des séances menées collectivement, suivant une méthode de type Lamartinière, j'ai pu observer que beaucoup d'élèves ne parvenaient pas à suivre le rythme de travail imposé ou encore ne parvenaient pas à appliquer les stratégies partagées par

leurs camarades. Ce dernier point peut être expliqué par la difficulté pour un élève de changer une méthode qu'il trouve efficace pour une autre qu'il n'a pas encore expérimentée et qu'il n'a pas véritablement construite. Pour les séances où le fichier de calculs individuel était utilisé, j'ai observé à plusieurs reprises des élèves qui, lors de séance de calcul mental, avaient recours à l'utilisation de l'algorithme calculatoire posé ce qui n'était pas l'objectif de la séance pédagogique.

Mes lectures m'ont permis d'envisager des dispositifs permettant d'éviter cet écueil de penser l'enseignement du calcul mental d'une manière différente. Par exemple, Éric Trouillot, professeur de mathématiques, propose, lui, le recours au calcul mental dit « à l'envers » favorisant la recherche de plusieurs décompositions pour arriver à un nombre cible. Cette pratique menée régulièrement permettrait, selon lui, de développer plus d'aisance en calcul mental par la connaissance des décompositions additives et multiplicatives. Les travaux de François Boule, laissent également entrevoir la possibilité d'aménager cet enseignement en faisant des choix éclairés de matériel et d'outils adaptés au cycle et permettant une réelle progression des apprentissages et la construction de représentations et de repères numériques stables.

Dans le cadre de ce mémoire, j'ai décidé de m'intéresser à l'influence des modalités d'enseignement du calcul mental sur les performances des élèves dans ce domaine. J'ai choisi de me pencher plus particulièrement sur le cycle 3 et au niveau CM2.

Aussi, dans un premier temps, j'effectuerai un état des lieux sur les aspects théoriques. Ce dernier me permettra notamment d'établir une question de recherche et un cadre théorique nécessaire à sa réponse. Ensuite, je présenterai l'expérimentation menée en précisant la méthodologie utilisée puis en analysant sa conception et sa conduite. Je continuerai par une analyse et une interprétation des résultats récoltés. Enfin, je terminerai par une discussion des résultats et conclurai ma recherche.

## II. Cadrage théorique

### A. États des lieux

#### A.1. Les instructions officielles : quelles injonctions sur l'enseignement du calcul mental ?

Intéressons-nous aux programmes du cycle 3 parus en 2020. Les attendus de fin de cycle dans le domaine « Nombres et calculs », précisent qu'un élève en fin de cycle 3 doit pouvoir : « Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux ». De plus, dans ce domaine, une partie est dédiée à l'enseignement du calcul. Intitulée « Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux », elle dresse une liste des connaissances et compétences à acquérir. On retrouve ainsi :

Connaître des procédures élémentaires de calcul, notamment :

- multiplier ou diviser un nombre décimal par 10, par 100, par 1000 ;
- rechercher le complément à l'entier supérieur ;
- multiplier par 5, par 25, par 50, par 0,1, par 0,5.

- Connaître des propriétés de l'addition, de la soustraction et de la multiplication, et notamment :

$$12 + 199 = 199 + 12$$

$$5 \times 21 = 21 \times 5$$

$$27,9 + 1,2 + 0,8 = 27,9 + 2$$

$$3,2 \times 25 \times 4 = 3,2 \times 100$$

$$45 \times 21 = 45 \times 20 + 45$$

$$6 \times 18 = 6 \times 20 - 6 \times 2$$

$$23 \times 7 + 23 \times 3 = 23 \times 10.$$

- Connaître les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9 et 10.
- Utiliser ces propriétés et procédures pour élaborer et mettre en œuvre des stratégies de calcul.
- Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant un ordre de grandeur.
- Dans un calcul en ligne, utiliser des parenthèses pour indiquer ou respecter une chronologie dans les calculs. (6ème)

On constate donc que la plupart des compétences et connaissances à acquérir concernent des apprentissages arithmétiques. Par conséquent, l'ensemble de ces apprentissages ne peut se concevoir seul. Le développement de ces habiletés en calcul se pense nécessairement au regard des autres domaines mathématiques. On pense par exemple à la découverte et l'appropriation des entiers et des décimaux ainsi que des grands nombres entiers. Ces compétences sont donc à acquérir durant tout le cycle 3. Comme nous l'avons précisé précédemment, les enseignants doivent donc concevoir, mettre en œuvre et animer des séquences pédagogiques permettant aux élèves de développer et maîtriser ces compétences et savoirs et ce, en respectant une pratique quotidienne de calcul mental d'au moins 15 minutes. Ce dernier aspect est une contrainte importante car elle



conditionne les types de séances proposées par les enseignants. La note spécifie également qu'il est nécessaire de programmer des séances plus longues afin de s'attarder sur le partage et le développement de stratégies. Cet aspect est également appuyé par le document d'accompagnement « Le calcul en ligne au cycle 2 » paru en mars 2016 sur le site Éduscol. Ce dernier précise notamment que les activités de calculs doivent donner lieu : « le plus fréquemment possible à des temps de mise en commun au cours desquelles les élèves peuvent donner à voir et expliciter oralement leurs démarches, qu'elles soient correctes ou erronées, abouties ou non ».

## **A.2. Les apports de la recherche**

La lecture d'articles de recherche en didactique des mathématiques m'a permis d'alimenter mon projet de mémoire en introduisant de nouveaux axes d'exploration, mais également de mettre en lumière les points de concordance sur le sujet. Aussi, dans cette partie nous commencerons par nous intéresser à une série d'articles que nous tâcherons de présenter et dont nous ferons ressortir les points pertinents dans le cadre de notre étude. Nous utiliserons l'ensemble de ces informations pour définir les termes utiles à notre étude.

Le premier document que nous étudions est un article de recherche en didactique des mathématiques intitulé « Regards sur le calcul mental ». Paru en 1995, il a été écrit par François Boule, enseignant chercheur. Dans cet article, l'auteur effectue une série d'observations auprès d'une centaine d'enfants du CE2 au CM2 afin d'en tirer certaines conséquences pédagogiques. Il leur propose une série de 25 opérations sur un écran d'ordinateur de type « 31-18 ». La même série leur est proposée trois fois de manière aléatoire. Les enfants ne disposent d'aucun support pour obtenir le résultat, ils ne sont pas non plus limités en temps. Lors de la troisième série, les enfants sont amenés à expliciter oralement leur production auprès du chercheur. Grâce aux réponses des élèves enregistrées numériquement et aux prises de notes de ces entretiens, François Boule est parvenu à établir un score de réussite selon les âges ainsi qu'une typologie des erreurs et des démarches. Il a ensuite interprété et analysé l'ensemble de ces données notamment en lien avec les travaux en psychologie de la mémoire. Parmi ces résultats, certains servent tout particulièrement notre étude. Par exemple, il apparaît que les élèves ont recours à deux grandes stratégies pour résoudre l'opération qui leur est proposée : soit ils posent l'opération dans leur tête, il s'agit alors d'un processus machinal ou la singularité des nombres n'intervient pas, soit ils se représentent le calcul de manière plus visuelle comme une distance à parcourir. Cette donnée est intéressante car elle fait écho à l'importance potentielle évoquée plus tôt de la création d'images mentales. Les enfants mobilisant cette stratégie le peuvent car ils ont une connaissance de la frise numérique suffisamment aboutie pour arriver à se la représenter mentalement en son absence. Cela nous incite donc à réfléchir à des dispositifs permettant de développer ou d'affiner cette compétence. Nous affinerons par ailleurs cette piste de réflexion grâce à l'étude des prochains articles. La deuxième donnée de cette étude qui nous intéresse réside dans une source d'erreur évoquée par l'auteur : la perte d'un résultat ou d'une étape lors du calcul. Ce résultat laisse penser que selon le type de

stratégie choisie, il arrive que le poids cognitif soit trop coûteux pour l'élève qui ne parvient plus à garder en mémoire les différentes étapes nécessaires à son calcul. L'auteur explique en partie ce résultat à partir du rôle de la mémoire. Ainsi, il distingue mémoire à long terme et mémoire de travail. La mémoire à long terme fonctionne en réseaux reliés par des « nœuds ». Plus ces nœuds sont complexes et riches, plus les liaisons sollicitées seront nombreuses. Lorsqu'on effectue une opération, la mémoire à court terme va s'activer et prendre en charge toutes les nouvelles informations données par ce calcul. Elle va effectuer des allers-retours, des ponts entre ces informations. Plus la mémoire à long terme sera riche, moins le calcul à effectuer sera coûteux pour la personne et permettra à sa mémoire de travail de prendre en charge moins d'informations. Il faut parvenir à trouver la méthode de travail qui nous permet le plus d'enrichir notre mémoire afin de détenir certains automatismes permettant de nous faire gagner du temps lorsqu'on calcule. En ce sens, il semblerait intéressant de se questionner sur la prise en compte, dans l'enseignement du calcul mental, des différents types de mémoire chez les élèves. Une considération de ces dernières pourrait faciliter la création d'images mentales et ainsi rendre abordables d'autres types de procédures chez les enfants.

Nous pouvons par ailleurs mettre cet article en lien avec un autre article de l'auteur : « Étapes du calcul mental ». Cet article vise à présenter les différentes étapes de la construction des aptitudes en calcul mental du CP jusqu'au CM2. L'auteur y donne des outils et des propositions d'activités à mettre en place en précisant l'intérêt de chacun d'entre eux. Un outil particulièrement intéressant dans le cadre de notre étude est la règle à calculer. Elle se présente sous la forme d'une règle, graduée selon les unités, seuls les multiples de 5 sont inscrits. Avec une seconde règle, graduée de façon similaire, placée en dessous il est possible de « mesurer » la distance entre deux nombres. Cet outil va permettre de lire des résultats et, par sa présentation, va créer des représentations mentales dans la tête de son utilisateur qui, au fil du temps, va pouvoir les conserver et les utiliser même en l'absence du support.

Le deuxième document que nous pouvons évoquer est un article rédigé en 2017 par Éric Trouillot, professeur de mathématiques au collège et créateur d'un jeu numérique nommé « Mathador ». Dans cet article intitulé « Le calcul mental à l'envers pour bien utiliser les zones de notre cerveau », l'auteur présente les avantages de procéder en sens inverse, c'est-à-dire de donner un nombre et de chercher à déterminer toutes les possibilités de l'obtenir. Pour justifier son propos, ce dernier s'appuie sur les travaux de Stanislas Dehaene, neuroscientifique professeur au Collège de France. Il met ainsi en évidence l'existence de deux zones sollicitées lors de calculs mentaux : la zone dite de « numérosité » concernant tous les aspects liés à la perception du nombre, et celle du « gyrus angulaire » chargée de stocker toutes les informations apprises. En procédant à l'envers, les élèves donnent donc, dans un premier temps, toutes les décompositions qu'ils connaissent d'un nombre et déterminent ensuite les autres en effectuant des tâtonnements, des combinaisons entre leurs diverses connaissances. Cette procédure leur permet de développer une meilleure relation aux nombres. Cet exercice, pratiqué de manière fréquente, permet de créer de plus en plus de connexions dans le cerveau qui seront disponibles et mobilisables lors de prochains calculs. La

lecture d'un article supplémentaire de Éric Trouillot intitulé « Plaidoyer pour une pratique de la décomposition des nombres et du calcul mental à l'envers » publié dans le numéro 485 de la revue APMEP, nous permet d'illustrer l'importance d'effectuer régulièrement des pratiques s'affiliant à du calcul mental « à l'envers ». Pour aller plus loin, Éric Trouillot avec une équipe de chercheurs, a créé une version numérique de ce jeu. Un nombre est affiché sur l'écran, les enfants disposent de quelques nombres et des quatre signes opératoires. En les combinant, ils doivent retomber sur le nombre affiché. Certains signes valent plus de points que d'autres afin d'inciter les élèves à utiliser de nouvelles procédures. Une telle activité peut donc être une piste intéressante pour notre étude.

Dans cette perspective de renouvellement de l'enseignement du calcul mental, le visionnage de l'intervention de Christine Chambris et Isabelle Melon au colloque Mathématiques en cycle 3 de l'IREM de Poitiers en Juin 2017 permet d'envisager le « défi calcul » comme un outil permettant de travailler le calcul mental. Ce dispositif ritualisé en classe met les élèves devant une série de 4 à 5 calculs et offre la possibilité aux élèves de choisir une modalité de calcul : calcul mental ou instrumenté. Une fois ce choix effectué, les élèves effectuent le calcul puis, si celui-ci s'avère exact, ils obtiennent un certain nombre de points. Le nombre de points étant plus élevé pour la réalisation d'un calcul mental que celui d'un calcul instrumenté. Le temps de réalisation des élèves est également relevé. La ritualisation de cette activité permet aux élèves de constater leur progrès par l'évolution de nombre de points gagnés mais également par l'évolution du temps d'exécution. Dans le cadre de notre étude, ce dispositif est intéressant car il peut être proposé aux élèves avant et après une séquence de calcul mental incluant des activités de manipulation afin de vérifier si les élèves ont changé de comportement face au calcul mental et ce en étudiant à la fois l'évolution du temps de réalisation et le nombre de points, ainsi que le choix effectué entre calcul mental et instrumenté .

Le troisième document soumis à notre étude est « Calcul mental, calcul rapide », un article rédigé par Denis Butlen et Monique Pézard en 1990. Ces derniers y présentent une expérimentation en deux parties, menée sur une année scolaire avec des classes du CP au CM2. L'objectif de cette expérimentation est de mettre en évidence les conceptions des nombres chez les élèves et d'agir sur ces dernières. Pour cela, les auteurs ont scindé leur expérimentation en deux parties. Pour la première partie de leur étude portant sur les structures additives, les expérimentations ont eu lieu durant une année à raison d'une séance hebdomadaire de 45 minutes durant lesquelles trois types d'activités ont été proposés. On y retrouve le jeu de l'autobus (donner le nombre de passagers dans le bus en fonction de pertes ou de gains de passagers), des exercices afin de compter et décompter de  $n$  en  $n$ , et pour finir des activités d'additions mentales. Parmi les résultats des chercheurs, certains nous intéressent particulièrement, notamment les sources d'erreurs recensées. En effet, nous apprenons que les opérations les mieux réussies sont celles qui ne requièrent pas de passage à la dizaine, et que les séries d'opérations sont également mieux appréhendées lorsque la première est une addition. De même, la grande difficulté des élèves à mémoriser toutes les données est mise en valeur. L'importance de l'enseignant est également mise en lumière dans cette recherche avec la

nécessité d'effectuer fréquemment une institutionnalisation des savoir-faire afin de faire adopter des stratégies à l'ensemble des élèves.

Pour la seconde partie de l'expérimentation, visant à connaître les conceptions des élèves sur les structures multiplicatives, des séances hebdomadaires ont eu lieu dans une classe de CM2 durant six mois. Ces dernières se sont déroulées autour de deux activités de 30 minutes. La première activité consistait en la réalisation de produits de deux facteurs dont la taille variait. Les élèves répondaient à l'écrit sur leur ardoise, s'en suivait ensuite une phase de verbalisation. Toutefois, lorsque le produit comportait deux facteurs à deux chiffres, les élèves répondaient à l'écrit sur une feuille individuelle afin de pouvoir noter les résultats intermédiaires. À l'issue de cette seconde partie d'expérimentation, Denis Butlen et Monique Pézard ont notamment mis à jour deux points importants : nous retrouvons tout d'abord la taille des nombres comme variable didactique importante. Travailler sur des petits nombres entraînerait plus de réussite. Les élèves maîtrisant mieux ces petits nombres, ils ont besoin de moins d'énergie mentale pour les traiter. De ce fait, leur concentration est plutôt portée sur la compréhension du problème. Le second point concerne l'acquisition des décompositions multiplicatives chez les élèves. Ces dernières ne sont que très peu disponibles chez eux en fin d'école primaire. Il s'avère qu'elles n'apparaissent qu'après intervention de l'enseignant les incitant à les utiliser. Sans cela, les élèves tentent plutôt de faire apparaître les calculs sous forme de décompositions additives. Il apparaîtra ainsi intéressant de vérifier si les élèves interrogés durant cette étude ont majoritairement recours à des décompositions additives.

Pour terminer, nous pouvons citer un dernier article paru dans le numéro 469 de la revue APMEP en 2007. Rédigé par Rémi Brissiaud, chercheur français spécialisé dans les questions des compétences arithmétiques, cet article s'appuie sur les récents débats concernant l'enseignement formel de la division dès le cycle 2. À partir de ce questionnaire, l'auteur met en évidence les différentes manières de résoudre des problèmes arithmétiques et leur lien étroit avec les stratégies enseignées dans le cadre scolaire. Ainsi, il apparaît que les problèmes les plus facilement résolus par les élèves sont des problèmes qui s'inscrivent dans un cadre quotidien, pour lesquels les enfants peuvent se représenter la situation en question et celle à atteindre. Ces problèmes sont bien résolus par les enfants même lorsque la compétence utilisée pour les résoudre n'a pas encore été étudiée. Les mêmes types de problèmes présentés dans un cadre plus scolaire et qualifiés de « problèmes d'enseignement » sont moins bien réussis, avec ou sans enseignement mathématique. Cette difficulté viendrait du fait que, lorsque le problème est présenté de manière plus scolaire, les élèves cherchent en premier lieu à trouver une formulation mathématique adéquate parmi celles qu'ils connaissent déjà. Le raisonnement de Rémi Brissiaud apporte beaucoup à notre étude car il met en avant deux points intéressants. Le premier est celui de l'importance des représentations mentales, mathématiques ou non. La capacité des élèves à traduire l'énoncé qui leur est proposé en situation mentale est nécessaire pour qu'ils puissent s'y projeter et avancer dans leur raisonnement. Le second point touche aux progressions dans les apprentissages. Cette étude met en avant, comme le précise Roland Charnay dans son ouvrage « Réussir en maths à l'école c'est possible » publié en 2018, que l'apprentissage trop rapide et précoce des opérations, conduit les enfants, à la lecture d'un

problème, à chercher en premier lieu à trouver une opération avant même de se représenter la situation qu'il décrit. Maîtriser trop tôt les algorithmes opératoires écrits serait donc un frein à la création de représentations mentales.

Si l'ensemble de ces articles nous permettent d'en apprendre plus sur l'enseignement du calcul mental et de ses enjeux, il convient toutefois de s'intéresser plus attentivement à ce que la recherche a mis en exergue quant à la pratique de la manipulation dans les enseignements mathématiques. Ainsi, nous terminerons ici par synthétiser ici quelques articles de recherche nous permettant de considérer une éventuelle approche du calcul mental par les activités manipulatoires.

Le didacticien des mathématiques Thierry Dias s'est intéressé à l'importance de la manipulation dans l'apprentissage des mathématiques. Dans son ouvrage « Manipuler et expérimenter pour apprendre en mathématiques » paru en 2012, il met en évidence l'importance de la manipulation pour aider les élèves à comprendre les concepts mathématiques abstraits. Selon lui, en manipulant des objets concrets les élèves peuvent explorer les relations entre les objets et les concepts mathématiques de manière concrète. Cette exploration leur permet à terme de construire des images mentales des concepts mathématiques. En utilisant des supports manipulables, les élèves peuvent potentiellement découvrir et appréhender des notions de manière plus autonome, sans être directement confrontés à un modélisme plus scientifique. Il s'agit donc d'un aspect qui peut motiver les élèves à entrer dans la tâche. Toutefois, pour cela il est nécessaire que les situations proposées incluant ces activités puissent véritablement permettre un apprentissage. En ce sens, nous pouvons nous appuyer sur la théorie des situations didactiques proposée par Guy Brousseau en 1998. Ce dernier souligne que pour qu'une situation permette à l'élève d'apprendre elle doit, entre autres, lui donner la possibilité de donner une première réponse, n'étant pas celle attendue mais lui permettant d'en voir les effets, d'en comprendre l'enjeu et ainsi d'ajuster son action. Il est également nécessaire que l'élève puisse valider son action grâce au milieu. Dans son ouvrage, le didacticien ajoute également qu'en amont et en aval de cette situation des phases de dévolution puis d'institutionnalisation sont nécessaires pour permettre à l'élève d'apprendre. Pour Thierry Dias, afin que la manipulation puisse véritablement déboucher sur un apprentissage pérenne et mobilisable par les élèves dans le futur, elle doit être intégrée dans un processus comprenant d'autres phases notamment celle d'institutionnalisation soulignée par Guy Brousseau.

Dans un article publié en ligne sur le site APMEP en 2019, Nicolas Pinel, inspecteur de l'Education nationale et auteur de la méthode heuristique des mathématiques, cite au sujet de la manipulation les travaux du psychologue Jérôme Bruner. En effet, ce dernier rejoint cette conception de la manipulation en déclinant trois modes de représentations de l'expérience vécue par les sujets dans l'ordre qui va suivre. En premier lieu, vient selon lui un mode « énatif » où la manipulation permet d'utiliser ses sens pour appréhender des objets pouvant représenter des concepts plus abstraits. Ce mode permet l'action sur les objets et peut engendrer des résultats

physiques mais il n'assure pas que les sujets manipulant aient construit une véritable représentation de l'action qu'ils sont en train d'effectuer. C'est ainsi qu'à ce mode doit succéder le mode « iconique » qui permet à l'élève de transposer l'action effectuée en image mentale afin de pouvoir la remobiliser dans le futur et ce sans la présence du matériel ayant permis la manipulation. S'il ne s'agit pas encore tout à fait d'aborder la modélisation mathématique de l'action ni même la conscientisation des concepts sous-jacents, il est plutôt question de pouvoir concevoir mentalement l'expérience effectuée pour l'utiliser lors d'une situation différente mais remettant en jeu les mêmes concepts. Ce n'est que lors du dernier mode évoqué par le psychologue comme le mode « symbolique » que la représentation mentale peut se transformer en une représentation abstraite car elle se traduit par des symboles mathématiques. Cette progression à travers les différents modes va permettre aux élèves de créer du lien entre ce qu'ils ont fait et ce qu'ils conçoivent maintenant d'une manière plus universelle. Ce passage peut prendre du temps mais constitue tout l'intérêt de la manipulation qui ne peut se limiter au premier mode. Toutefois, pour passer d'un mode à l'autre, il est essentiel que les élèves verbalisent ce qu'ils sont en train de faire ou ce qu'ils se représentent. Pour en revenir aux propos de Thierry Dias, il s'agit de ce qu'il nomme phase de « formulation ». Il est nécessaire d'exploiter les observations effectuées pendant les phases où le matériel de manipulation est disponible à travers des temps de partage et de verbalisation. Il s'agit lors de ces derniers de permettre aux élèves de prendre conscience de la manière dont ils sont en train d'organiser et d'utiliser leurs représentations. Cela est bénéfique à la fois pour eux-même car cela peut leur permettre de conscientiser puis d'abstraire leurs observations mais également pour les autres élèves qui peuvent trouver dans leur propos l'expression de ce qu'ils avaient mentalisé mais pas totalement saisis.

Pour reprendre les propos de Nicolas Pinel : « Toute l'efficacité de la démarche pédagogique se situe dans l'équilibre entre les différentes étapes et dans les transitions, en particulier dans le passage de l'action sur le matériel à l'action mentale ». Nous voyons ici pointée du doigt l'importance du rôle de l'enseignant. Ce dernier a un rôle essentiel dans le passage de la manipulation à l'abstraction puisque lors des temps de partage oraux, il peut amener les élèves à aller plus loin dans leur réflexion et donc à progresser dans leur abstraction. De même, il doit utiliser toutes ses connaissances sur les processus d'apprentissage de ses élèves afin de savoir quand proposer aux élèves des situations ne permettant plus le recours à du matériel afin de passer à une représentation uniquement mentale. Nous pouvons à ce sujet citer les travaux de Michel Denis, psychologue et chercheur au CNRS. Ce dernier met l'accent sur la possibilité de créer des images mentales référentes ne se focalisant pas nécessairement sur les aspects que l'on cherche à mettre en évidence via la situation. Il y a ainsi un risque lorsque que l'on manipule trop un même type d'objets que ses caractéristiques physiques prennent le pas sur ce qu'ils sont réellement. Cette conception du processus est intéressante dans le cadre de notre étude car elle met en évidence le fait que la manipulation sur des objets tangibles peut permettre de modifier nos représentations

mentales. Des représentations que l'on a vues, à travers notamment l'étude des articles de François Boule, comme étant particulièrement influentes sur les habiletés en calcul mental.

## **B. Cadrage théorique**

À l'aide de ces premières références théoriques, nous tâcherons ici de définir ce que nous considérons comme activité de calcul mental et ce que nous entendons par manipulation.

L'ensemble des articles s'accordent sur une définition quasiment semblable du calcul mental et sur les intérêts d'une telle pratique. Nous considérerons la définition de base du calcul mental à l'aide de celle donnée par François Boule. Elle définit cette pratique comme une activité mentale faisant appel aux connaissances sur la numération, aux propriétés opératoires, mais également nécessitant un travail de mémoire. Cette activité n'est pas le fruit d'un apprentissage décontextualisé mais bien d'un travail en contexte, directement dépendant des nombres en jeu. Nous précisons cette définition grâce aux travaux de Denis Butlen et Monique Pézard en indiquant qu'il s'agit également, grâce à cette activité, de mettre à jour les conceptions que se font les élèves des nombres et les propriétés qu'ils connaissent. Selon Roland Charnay, c'est également le moyen de faire évoluer ces conceptions : le calcul mental permettant en effet de connaître les relations qu'entretiennent les nombres entre eux mais également de découvrir les différentes manières de les décomposer et de les recomposer. Ainsi, les apports des présents textes nous emmènent à la définition suivante du calcul mental : une activité mentale conceptualisée fortement dépendante des choix didactiques fait par l'enseignant. Elle permet de mettre à jour et de construire de nombreuses connaissances relatives aux nombres mais également aux propriétés opératoires. C'est également un exercice mettant en jeu un processus de mémorisation et d'automatisation. Les articles postés sur le site Mathador apportent une dernière précision à cette définition en partageant le calcul mental en deux types : le calcul mental dit « automatisé », c'est-à-dire qui ne nécessite aucune nouvelle réflexion mais implique simplement de donner un résultat déjà mémorisé. Il fait bien entendu l'objet d'un apprentissage en amont. Le second type de calcul est le calcul dit « réfléchi » qui lui va utiliser les résultats déjà enregistrés afin de les mettre au service d'une nouvelle réflexion lorsqu'un nouveau calcul se présente. Il est évident que ces deux types de calculs se nourrissent l'un de l'autre et nous retrouvons encore une fois ici, l'importance du rôle de la mémoire et de la création d'images mentales. Dans le cadre de notre étude, nous nous intéresserons principalement au calcul mental réfléchi.

Nous définirons par ailleurs le terme d'image mentale en reprenant la définition donnée par Michel Denis en 1979 dans son ouvrage « Les images mentales : aspects verbaux et visuels » à savoir : « Il s'agit donc d'images qui, soumises à un certain contrôle de la part du sujet, sont susceptibles d'être intégrées dans le cours d'une activité cognitive consciente. » Notre capacité à créer ces images serait développée dès notre naissance en réponse à des stimulus visuels, auditifs ou physiques, certains individus étant plus sensibles à un type de sollicitation que d'autres. Toutefois, il

ne faut pas que cette représentation mentale vienne prendre le pas sur les propriétés de l'objet représenté. C'est-à-dire qu'il faut veiller à ce que l'aspect émotionnel de la représentation n'empêche pas d'y intégrer de nouveaux concepts théoriques. Ainsi, selon Rémi Brissiaud, il est nécessaire de partir du calcul mental sur des objets qui permettra la création d'images mentales appropriées afin d'accéder plus facilement au calcul mental.

Pour ce qui est de la manipulation, nous la caractériserons dans notre cas comme une action sur le matériel afin d'observer, d'émettre des hypothèses ou de consolider des connaissances. Toutefois, la simple intervention des élèves sur le matériel ne peut se suffire à elle-même. Comme le souligne Thierry Dias dans son ouvrage « Manipuler et expérimenter en mathématiques » paru en 2012, la manipulation ne prend pas réellement l'intégralité de son effet si elle ne fait pas l'objet d'une verbalisation à la fois par les élèves et par l'enseignant. Cela permet de se détacher du contexte et d'établir des connaissances plus universelles, applicables à d'autres situations. On retrouve ici la vision partagée plus tôt par Guy Brousseau. Ce dernier précise que plusieurs situations sont nécessaires avant qu'un savoir soit réellement effectif. En premier lieu, une situation dite « d'action » durant laquelle l'élève peut, dans un milieu donné, construire des connaissances et utiliser celles qu'il possède déjà pour agir. Ce même milieu doit à la fois donner les informations nécessaires pour agir et choisir et à la fois permettra au sujet agissant une rétroaction. Vient ensuite une situation « de formulation » permettant d'utiliser un langage d'évocation pour mettre en mots son action passée. Il s'agit de rendre explicite un modèle d'action parfois non conscientisé par les élèves. Enfin, vient une situation de validation s'appuyant sur des règles ou principes mathématiques pour faire la « preuve » de son argumentation. Cette phase de validation précède une phase d'institutionnalisation permettant de généraliser ce qui a été précédemment discuté.

Ainsi, la manipulation à partir de matériel va permettre une prise de conscience chez les élèves de l'existence de certains faits mathématiques. Cette découverte effective va venir enrichir des conceptions déjà présentes. Cependant, pour qu'il y ait réellement construction d'un savoir, la manipulation ne peut se concevoir sans d'autres étapes nécessaires.

Enfin, nous entendrons par habiletés calculatoires, la compétence des élèves à réaliser une activité de calculs demandant l'acquisition et l'application de techniques spécifiques. Faire preuve d'habiletés calculatoires témoigne donc de la maîtrise de stratégies calculatoires efficaces et efficaces. Il s'agit donc d'un apprentissage possible à partir de supports et de modalités d'enseignements divers.



## C. Élaboration d'un questionnaire

### C.1 Questionnements sous-jacents

L'ensemble de ces observations et les réflexions personnelles liées m'ont permis de faire émerger plusieurs questionnements. Ils peuvent être catégorisés en trois grandes sous-problématiques.

Le premier axe de réflexion que nous pouvons citer concerne la question de l'organisation pédagogique et de la gestion de la remédiation en calcul mental. Comme nous l'avons souligné dans le point précédent, l'organisation des apprentissages est un élément clé influençant l'approche du calcul mental par les élèves. Nous pouvons ainsi nous questionner sur les différents avantages et inconvénients de chaque dispositif. Quels bénéfices possède le calcul écrit, effectué de manière individuelle, qu'il n'aurait pas de manière collective ? Nous pouvons notamment penser au rythme d'exécution des calculs. Ce dernier est adapté à chacun qui peut avancer à la vitesse qui lui convient. Également, nous pouvons évoquer l'ordre de traitement de ces derniers qui peut être choisi par l'élève. Inversement, en quoi les séances de calcul mental partagées et collectives sont-elles enrichissantes ? Ici, nous pouvons évoquer la possibilité de partager ses procédures et d'en entendre de nouvelles. La nécessité de prendre du recul sur sa pratique pour pouvoir la verbaliser constitue un second élément intéressant. De manière plus générale, il s'agit de se questionner sur les possibilités de modifier les façons de travailler le calcul mental. Repenser une telle organisation implique nécessairement de penser à la différenciation. Ainsi, il me paraît également intéressant de s'interroger sur la structuration à donner aux activités de remédiation : la nature des activités proposées, leur durée mais également leur fréquence.

Le deuxième questionnement que nous aborderons traite du rapport entre la pratique du calcul mental et la connaissance des nombres par les élèves. La connaissance de notre système de numération : sa représentation, les propriétés numériques qui en découlent sont des éléments centraux lorsque l'on effectue des calculs mentaux. Les conceptions qu'ont les élèves de cette organisation sont donc déterminantes pour leur réussite. Ainsi, nous pouvons nous intéresser à la manière dont ces conceptions entrent en jeu lors des calculs mentaux, nous questionner sur la place qu'occupe la représentation des nombres et son lien avec cette activité. Les calculs nécessitant des retours à la dizaine mobilisent fortement ces représentations. Une attention particulière pourrait donc être portée aux types d'erreurs face à ces calculs de manière à évaluer les procédures mises en place par les enfants et éventuellement les détournements effectués par les élèves maîtrisant mal les procédés de numération. De même, il est intéressant de s'interroger sur la manière dont se construisent ces représentations et sur les diverses possibilités de les faire évoluer.

Enfin, nous pouvons nous interroger sur un dernier axe qui est celui de la mémorisation et du rôle de la représentation mentale. En effet, lorsque nous effectuons un calcul mental, nous utilisons nos connaissances personnelles, parfois des informations ou des résultats connus sont déjà mémorisés. Lors de calculs nécessitant plusieurs étapes, notre mémoire est mise à contribution et nous sert à mobiliser des résultats intermédiaires, utiles pour parvenir à la solution recherchée. De

plus, faire appel à notre mémoire implique la mise en jeu d'images mentales, de représentations construites permettant d'accéder aux informations qu'elles contiennent. Par exemple, je connais la liste des compléments à 10 car je l'ai mémorisée. Pour cela, je l'ai apprise par une méthode qui me convient et qui m'a permis de construire une représentation mentale de ces compléments. Lorsque je souhaite les re-mobiliser, c'est bien à cette image que je fais appel inconsciemment et qui me permet de résoudre le calcul qui m'est présenté. Il est donc intéressant de se questionner sur le rôle de la mémoire dans cet exercice, sur les facteurs qui la favorisent et les possibilités que nous avons pour la développer. Dans un même temps, cela nous amène à nous interroger sur les mécanismes régissant les représentations mentales. La question des émotions et de l'approche émotionnelle de certains concepts, notamment les nombres, est un axe de réponse qui m'interroge particulièrement. Les émotions peuvent-elles influencer notre manière de considérer le système numérique et ainsi provoquer des blocages lors des calculs ? Sur un plan psychologique, existe-t-il, comme sur les êtres humains, des transferts possibles de l'élève sur les chiffres ?

Les activités de calcul mental sont donc des activités complexes mettant en jeu des mécanismes divers. Des paramètres tant d'ordre pédagogique, didactique que cognitif entrent en jeu. Ainsi, afin de préciser notre étude, l'étude des apports de la manipulation et notamment le matériel de numération semble tout à fait intéressant et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, son aspect matériel est engageant et constitue un attrait pour les enfants. Il donne un aspect ludique à l'étude mathématiques et peut être une source de motivation. Comme pour les méthodes pédagogiques mettant en avant le jeu, le recours au matériel permet une approche personnelle des apprentissages, une rencontre sensorielle avec des concepts théoriques. De plus, la manipulation, en rendant l'enfant acteur, favoriserait la création d'images mentales en mobilisant à la fois la mémoire visuelle mais aussi celle du corps. Elle permettrait alors de créer chez lui un souvenir de son activité de manipulation. En ce sens, les contenus abordés durant l'activité seraient mémorisés et ainsi plus facilement accessibles pour l'enfant dans un autre contexte. Pour terminer, en fonction du choix du matériel utilisé, il permet évidemment aux enfants de mieux comprendre ce qui se joue entre les nombres, leurs propriétés et leur lien. L'utilisation de matériel dépasserait le simple objectif de concrétiser un concept mais permettrait de développer de nouvelles stratégies de réflexion en mathématiques, et en particulier ici pour la numération. La manipulation deviendrait alors une véritable entrée dans la tâche, en se faisant support aux raisonnements. Toutefois, il ne faut pas négliger la possibilité que la manipulation ne puisse constituer qu'un simple habillage de la tâche et qu'elle ne constitue finalement qu'une « béquille » sur le moment pour l'élève, ce dernier ne convoquant pas les faits observés lors de manipulation dans d'autres situations rencontrées.

## **C.2 Problématique et hypothèse de recherche**

Au vu de ces différents axes de réflexions et face aux difficultés rencontrées en classe (recours à l'algorithme opératoire lors de séance de calcul mental, choix de stratégies peu efficaces, oubli des calculs intermédiaires...) nous permettent de formuler la question de recherche suivante : en quoi la manipulation permet-elle de favoriser le développement des habiletés calculatoires chez

des élèves de CM2 ? Nous préciserons par ailleurs notre questionnement en nous intéressant uniquement aux habiletés calculatoires relatives à la réalisation du produit de nombres entiers dont un des deux facteurs est un nombre entier inférieur à 10.

Nous émettons l'hypothèse suivante : la manipulation permet aux enfants d'avoir une meilleure connaissance du système de numération notamment en favorisant la création d'images mentales et en rendant les situations rencontrées plus parlantes. Cette pratique aurait également comme bénéfice de permettre aux élèves de mieux comprendre et intégrer les propriétés opératoires induisant ainsi moins d'erreurs de calcul. Cet atout permettrait d'utiliser au mieux son espace mental et ainsi de progresser en calcul réfléchi.

### III. Partie expérimentale

#### A. Méthodologie utilisée et activités menées

Dans le cadre de notre étude, le dispositif d'expérimentation mis en place doit pouvoir mettre en avant l'impact de la manipulation sur les performances des élèves en calcul mental. Il faudra donc pouvoir mesurer l'évolution de leurs résultats et de leurs conceptions dans ce domaine après une séquence pédagogique de calcul mental impliquant de la manipulation. Il s'agira donc de mener une étude à la fois qualitative et quantitative. Cette dernière sera réalisée dans une classe de CM2 de 27 élèves. Les élèves étaient, l'année précédente, dans des classes différentes.

La première phase du dispositif vise donc à prendre une première connaissance des habiletés calculatoires des élèves. Aussi, il est nécessaire de s'entretenir de manière individuelle avec chaque élève. La première phase sera donc composée de deux étapes. Durant la première étape, une feuille de travail présentant une série de dix multiplications est donnée à l'élève :

$$24 \times 4 \quad | \quad 102 \times 7 \quad | \quad 85 \times 5 \quad | \quad 25 \times 8 \quad | \quad 210 \times 4 \quad | \quad 320 \times 9 \quad | \quad 65 \times 2 \quad | \quad 39 \times 6 \quad | \quad 190 \times 2 \quad | \quad 34 \times 3$$

L'ensemble de ces produits respectent les critères essentiels à notre étude : un des deux facteurs du produit est inférieur à 10, les deux facteurs sont des entiers. L'élève doit alors répondre, par un résultat, de manière manuscrite. Pour parvenir au résultat, l'élève ne dispose d'aucun matériel et doit effectuer le calcul de manière mentale en utilisant les procédures qu'il maîtrise à cet instant du processus. Il a cependant le droit d'écrire les calculs intermédiaires s'il en éprouve le besoin. Il lui est demandé de traiter les produits dans l'ordre induit par la feuille. Si l'élève se trouve trop en difficulté, il indique « qu'il passe ». Aucune contrainte de temps n'est fixée. Toutefois, il est nécessaire de relever le temps mis par chaque élève pour venir à bout de l'intégralité des calculs. Pour cela, un chronomètre sera utilisé. Le chronomètre sera lancé au moment où l'élève est prêt à commencer l'exercice. Dès lors que l'élève a terminé un calcul et passe au suivant, un tour est comptabilisé sur le chronomètre indiquant donc le temps de réponse pour ce calcul. Aussi, lorsque l'élève a terminé l'entièreté des dix calculs, le chronomètre indiquera le temps mis pour les effectuer. Les résultats feront l'objet d'un traitement statistique afin de mettre en évidence les calculs les mieux réussis en fonction des nombres mis en jeu et de la durée de réalisation de ces derniers. Ces données pourront être analysées de plusieurs manières. Tout d'abord, d'un point de vue individuel, il serait intéressant d'identifier le calcul pour lequel chaque élève a eu le temps de réponse le plus élevé. L'analyse pourra être conduite de manière identique avec le calcul le plus rapidement effectué. Les résultats de l'ensemble du groupe classe feront également l'objet d'un traitement statistique afin de mettre en évidence : le pourcentage de réussite pour chaque opération, les opérations vécues comme plus compliquées et plus « faciles », les types d'erreur et leur fréquence d'apparition. Les entretiens seront eux aussi analysés afin de recenser les procédures les plus fréquemment utilisées, mais aussi les erreurs récurrentes lors de leur utilisation.

La deuxième étape visera à prendre connaissance des conceptions et stratégies convoquées par l'élève pour parvenir à effectuer les calculs proposés. Un entretien avec chaque élève sera donc mené, immédiatement après la première étape. Cet entretien a pour objectif d'amener les élèves à verbaliser et expliciter les stratégies de calcul qu'ils ont mobilisées et notamment d'essayer d'explicitier les images mentales convoquées. Il sera également l'occasion pour eux, de pointer du doigt les calculs qui ont été les plus faciles et les plus difficiles à effectuer et de questionner les raisons de ces aisances ou obstacles. Il sera intéressant de vérifier si les opérations jugées comme plus « faciles » ou « difficiles » par les élèves eux-mêmes sont celles avec des temps de réponse significativement plus courts ou plus longs que les autres réponses. Cet échange prendra donc la forme d'un entretien semi-directif. Ce choix est fait car il permet de rebondir sur les propos des élèves afin de leur permettre d'aller plus loin dans leur verbalisation. Les élèves n'ayant pas toujours les termes adéquats pour expliciter leur raisonnement, pouvoir adapter nos questions et nos remarques est un avantage. Nous retrouvons plusieurs questions modélisant la trame de cet entretien :

- 1) Comment t'es-tu senti pendant cet exercice ?
- 2) Quelles ont été pour toi les opérations les plus difficiles ? Pourquoi ?
- 3) Au contraire, quelles ont été pour toi les opérations les plus simples à réaliser ? Pourquoi ?
- 4) Peux-tu m'expliquer comment t'y es-tu pris pour réaliser l'opération :  $190 \times 2$  ?
- 5) Comment cela se traduit-il dans ta tête ? Que te représentes-tu lorsque tu calcules ?  
(Aiguiller les élèves en fonction de leur compréhension de la question : Est-ce que tu « notes » l'opération dans ta tête comment tu l'aurais fait sur une feuille ? Est-ce qu'au fur et à mesure des étapes tu effaces ...)
- 6) Même question mais pour l'opération  $24 \times 4$
- 7) Question identique mais pour l'opération  $39 \times 6$
- 8) Que sais-tu sur la multiplication ? Comment pourrais-tu expliciter à quelqu'un tout ce que tu connais sur la multiplication ?
- 9) Pour finir, que penses-tu des mathématiques ?

La majorité de ces dernières porteront sur l'explicitation des stratégies de calculs en fonction des nombres en jeu et demanderont aux élèves de classer les calculs par rapport à leur difficulté estimée ou ressentie. Les calculs nécessitant de mémoriser des résultats intermédiaires ou présentant des retours à l'unité feront l'objet de questions spécifiques si les élèves ne les abordent pas. De plus, l'entretien se clôturera sur deux questions transversales. L'avant dernière question place l'élève dans une position de « savant » et lui demande de s'interroger sur ce qu'il dirait à un autre enfant qui ne possède pas de connaissances sur la multiplication tant d'un point de vue des procédures de calculs que de la définition de ce qui est entendu derrière le terme « multiplication ». Ce questionnement vise à connaître de manière plus précise ce que l'élève sait de la multiplication et ce qu'il juge nécessaire de savoir sur cette dernière. Durant l'intégralité de l'échange, les propos des élèves seront enregistrés dans la perspective d'une future analyse. En effet, les réponses des élèves feront l'objet d'un traitement d'analyse. Celle-ci permettra de mettre en évidence les types de

stratégies les plus souvent utilisées, de les mettre possiblement en relation avec les nombres mis en jeu. Croisée avec l'analyse statistique des résultats de calculs et mise en parallèle avec le temps de réponse des élèves, cette analyse nous permettra particulièrement d'effectuer une possible corrélation entre la stratégie utilisée, le temps nécessaire pour la mettre en œuvre et la justesse de la réponse.

Il est à noter que cette première phase sera vécue par l'ensemble des 27 élèves afin que nous puissions réellement nous rendre compte des différents profils d'élèves. Aussi, l'analyse des résultats écrits et des entretiens nous permettra de constituer des groupes types d'élèves présentant des similitudes dans leur raisonnement. Cette analyse nous servira alors dans l'ajustement possible de la séquence pédagogique à venir et nous permettra également de faire un choix plus éclairé des élèves interrogés lors de la dernière phase de notre expérimentation que nous présenterons plus bas.

Ainsi, à l'issue de cette première phase, nous aurons pu mettre en lumière certains points qui semblent poser problème aux élèves. Ces aspects, anticipés pour certains grâce aux apports de la recherche, nous auront permis de construire la seconde phase de notre expérimentation. Lors de celle-ci, nous proposerons aux élèves une séquence pédagogique visant l'objectif « savoir multiplier un nombre entier simple par un nombre inférieur à 10 ». Cette dernière est composée de 4 séances ayant toutes des objectifs différents. Durant cette séquence, des activités de manipulation, de verbalisation et de réinvestissement seront programmées. Cette étape de l'expérimentation est essentielle car elle va permettre aux élèves de découvrir et de construire de nouvelles stratégies de calcul. Le recours à la manipulation via du matériel et des échanges entre pairs constitue une approche différente de celle dont les élèves ont l'habitude lorsqu'ils appréhendent des séances de calcul mental. Nous allons ainsi décrire chacune d'entre elles en présentant l'objectif qu'elles visent et le déroulement envisagé. Pour chacune des séances, la fiche de préparation se trouve en annexe.

## Séance 1

La première séance a pour objectif pédagogique de « savoir décomposer un nombre en fonction d'un objectif de calcul » (Cf Annexe 1). Elle nous permettra d'inviter les élèves à se questionner sur la manière la plus efficace d'effectuer une multiplication en jouant sur les décompositions d'un ou plusieurs des termes. Il s'agira, par la manipulation, de faire construire les diverses stratégies possibles. Elle dure 45 minutes et nécessite du matériel spécifique. Ce dernier sera composé d'une série de cartes nombres superposables du type des « cartes nombres » utilisées dans la pédagogie Montessori (Cf annexe 14). Cette séance débutera par la répartition des élèves en binôme. Chaque binôme de travail recevra deux opérations construites avec des cartes nombres (Cf Annexe 2) :

- 4 binômes recevront les opérations  $410 \times 9$  et  $35 \times 9$ ,
- 2 binômes recevront  $52 \times 4$  et  $250 \times 4$ ,
- 4 binômes  $22 \times 8$  et  $50 \times 8$
- 3 binômes posséderont les opérations  $85 \times 5$  et  $120 \times 5$ .

En plus des cartes nombres comprises dans les calculs, chaque binôme recevra un lot de cartes nombres « vierges » plastifiées sur lesquelles il ne peut écrire ainsi que des cartes « opérations » (+, -, ×, ÷). À l'aide de ces cartes, les binômes doivent établir une ou plusieurs écritures différentes des deux opérations. Ils ont pour contrainte de ne pouvoir modifier uniquement le terme le plus grand de l'opération.

Nous poursuivrons ensuite avec une seconde étape. Cette dernière suit les mêmes modalités de travail que l'étape 1. Les groupes restent identiques ainsi que les opérations. Toutefois, la contrainte de travail change : les élèves peuvent effectuer des modifications seulement sur le plus petit terme des opérations. Dans la première comme dans la seconde étape, ce n'est pas la présence seule d'un résultat qui est visée mais simplement la décomposition d'une même opération en différentes écritures.

Enfin, pour chaque opération, un groupe vient présenter les différentes décompositions qu'il a trouvées. Ces dernières ont été prises en photo au préalable et sont projetées au tableau. Le reste de la classe vérifie que les réponses proposées sont recevables. Si d'autres binômes qui possédaient la même opération ont produit des écritures différentes de celles proposées, ils peuvent les partager à la classe. Elles sont alors notées en dessous des premières. La présentation de ces différentes propositions permettra aux élèves, de faire émerger les procédures utilisées. Ainsi, à partir de ces dernières, une affiche recensant les diverses procédures sera réalisée. Elle sera écrite par l'enseignante à partir de l'intervention des élèves.

## Séance 2

La séance deux aura pour objectif d'inciter les élèves à remobiliser leurs connaissances sur les décompositions numériques et les mettre au service de la recherche d'un résultat (Cf Annexe 3). D'un point de vue de notre expérimentation, cette séance doit permettre aux élèves d'explicitier leurs stratégies de calcul, de se questionner sur la manière qu'ils ont de se représenter mentalement un calcul et les moyens qu'ils possèdent pour exprimer ce raisonnement à leurs pairs. Cette seconde séance durera également 45 minutes. Ici, pas de matériel spécifique si ce n'est des feuilles blanches et des séries de calculs imprimées que nous distribuerons à chaque élève.

Concernant le déroulement, nous débuterons cette séance par une première phase de tissage en projetant l'opération «  $114 \times 9$  » au tableau. Individuellement, les élèves doivent trouver deux écritures différentes de l'opération. L'affiche créée lors de la séance 1 constitue un appui. La mise en commun permettra ensuite de mettre en évidence les différentes stratégies possibles et de déterminer celle qui dans notre cas est la plus efficace.

Nous poursuivrons ensuite par une seconde phase de travail durant laquelle les élèves seront réunis par groupes de 4 à 5 élèves selon l'effectif de la classe présent. Chaque élève reçoit une série de calculs parmi les six suivantes (Cf Annexe 4) :

Série 1 :  $108 \times 3$  ;  $5 \times 330$  ;  $7 \times 60$  ;  $210 \times 4$

Série 2 :  $106 \times 7$  ;  $206 \times 3$  ;  $260 \times 4$  ;  $40 \times 5$

Série 3 :  $8 \times 44$  ;  $9 \times 70$  ;  $108 \times 3$  ;  $24 \times 6$

Série 4 :  $9 \times 80$  ;  $260 \times 4$  ;  $180 \times 3$  ;  $5 \times 30$

Série 5 :  $4 \times 66$  ;  $105 \times 3$  ;  $5 \times 70$  ;  $6 \times 180$

Série 6 :  $40 \times 5$ . ;  $7 \times 104$  ;  $9 \times 70$  ;  $102 \times 3$

Lors d'une phase individuelle, il doit chercher mentalement le résultat pour chaque opération et le noter. Une fois que cela est fait, les élèves ayant reçu la même liste forment un groupe. Les membres du groupe mettent en commun et discutent des éventuelles différences au niveau du résultat. Une fois cela effectué, chaque groupe reçoit une feuille blanche et choisit une opération de la liste qu'il vient de traiter. Il doit l'inscrire sur la feuille puis, l'ensemble du groupe doit ensuite se mettre d'accord sur la manière la plus efficace de parvenir au résultat. Lorsque leur choix est fait, le groupe matérialise par écrit les étapes de calculs nécessaires pour atteindre le résultat.

Enfin, chaque groupe vient présenter oralement son affiche et expliciter sa démarche. Il est attendu, lors de cette étape, que les justifications des procédures utilisées par les élèves se fassent en faisant référence à l'affiche produite lors de séance précédente. Collectivement, une discussion sera organisée afin de souligner les éventuelles erreurs, de questionner la stratégie utilisée...

### Séance 3

La séance trois constitue l'avant dernière séance de notre séquence. Elle a pour objectif pédagogique de parvenir à un nombre cible par le calcul, de la manière la plus efficace possible (Cf Annexe 5). Le terme efficace étant entendu comme rapide et peu coûteux en traitement mental. Lors de cette séance, nous chercherons à inciter les enfants à analyser un nombre cible afin de mobiliser les stratégies de calculs les plus appropriées. La recherche d'un nombre cible va permettre aux élèves de réellement prendre en compte l'ordre de grandeur d'un nombre et d'élargir leur répertoire numérique. Prévue pour durer 40 minutes, cette séance s'appuiera sur un jeu s'effectuant en binôme. Aussi, après avoir été regroupés en binômes, les joueurs se verront distribuer deux enveloppes. La première contiendra les nombres suivants : 20 ; 12 ; 11 ; 10 ; 14 ; 50 ; 12 ; 10 ; 16 et la seconde : 4 ; 6 ; 8 ; 7 ; 5 ; 3 ; 9 ; 4 ; 6. De la même manière que le jeu Mathador, les élèves disposent d'une grille de jeu ( Cf Annexe 6) pour marquer les points obtenus et le nombre cible à atteindre. Le premier nombre tiré est accolé au second nombre tiré dans l'enveloppe 2. Le nombre obtenu constitue le nombre cible à atteindre. Pour cela, chaque élève dispose de cartes sur lesquelles on trouve des chiffres de 0 à 9 ou les signes opératoires. À partir de celles-ci, les deux participants vont devoir créer une opération permettant d'atteindre le nombre cible. Cette dernière doit comprendre au moins une multiplication. Les élèves possèdent une calculatrice pour vérifier les opérations proposées par chacun des joueurs. Pour remporter la partie, il faut avoir le moins de points possible. Ainsi, un élève remporte un point par carte chiffre ou signe utilisé. L'élève ayant utilisé le moins de cartes possibles remporte donc moins de points et est susceptible de gagner. Les calculs effectués sont notés dans la colonne « calculs ».



Nous terminerons par une mise en commun des procédures utilisées. Aussi, nous nous intéresserons aux élèves parvenus à obtenir le moins de points possibles en leur demandant d'expliquer à leurs camarades. Nous proposerons également, s'ils acceptent, de récupérer la feuille de calcul d'élèves ayant perdu la partie et envisager des pistes d'amélioration.

#### Séance 4

Cette dernière séance servira de rebrassage de tout ce qui a été vu pendant la séquence (Cf Annexe 7). Elle remettra les élèves en situation de calcul avec pour objectif de réaliser la multiplication d'un entier par un entier inférieur à 10. Pour cela, les élèves vont disputer une partie de bataille navale aménagée. Cette idée est inspirée d'une proposition faite par Nicole Bonnet dans son article intitulé « La table de Pythagore », paru dans le bulletin n°422 de Juin 1999 de la revue APMEP. Aussi, les élèves, regroupés par trois, disposeront d'une grille de jeu individuelle, de bateaux représentés par des rectangles de papier (un porte-avion de 5 cases, un cuirassé de 4 cases, trois croiseurs de 3 cases, deux sous-marins de 2 cases, deux canots d'une seule case) de stylos et d'une calculatrice. Deux élèves sont joueurs et un troisième arbitre. Chaque joueur possède deux grilles de 10 × 10 cases (Cf Annexe 8). Une pour placer ses bateaux et à laquelle se référer pour répondre aux questions de l'adversaire et l'autre pour noter les cases touchées chez l'adversaire. Lui seul peut voir ces deux grilles. L'arbitre quant à lui possède une calculatrice. Les élèves disputent donc une partie en suivant les règles du jeu présentées en annexe 8. Le joueur perdant cède sa place à l'arbitre.

Concernant l'ensemble de la séquence, il est nécessaire de noter que l'ensemble de cette séquence est mené sur plusieurs semaines. Il ne faut donc pas négliger les apprentissages effectués en parallèle par les élèves lors d'autres séances mathématiques menées par l'enseignante de la classe. Ces derniers ont également avoir une incidence sur les performances des élèves en calcul mental.

Enfin, la dernière phase de notre expérimentation reprendra les mêmes conditions que la première phase. Toutefois, seuls certains élèves seront choisis dans les différents groupes constitués à l'issue de l'analyse des premiers résultats pour effectuer à nouveau une série de calculs. Cette phase permettra de vérifier s'il y a eu des changements dans les stratégies mobilisées par les élèves potentiellement justifiées par l'évocation d'une activité réalisée pendant la séance pédagogique, une évolution du temps de réponse et du pourcentage de réussite.

#### **B. Analyse préalable de l'expérimentation**

Maintenant que nous avons présenté l'objectif et le déroulement de l'ensemble des séances composant notre séquence pédagogique, nous tâcherons maintenant d'en effectuer l'analyse préalable.

## Séance 1

Les deux premières phases de travail placent les élèves dans un dispositif de travail de groupe. Ces derniers seront constitués de manière hétérogène afin que les procédures des élèves puissent être enrichies à la fois par le matériel utilisé mais aussi par l'interaction avec son binôme de travail. L'argumentation fournie par chacun des élèves est un élément important permettant de progresser dans la tâche tant pour celui qui argumente que pour celui qui reçoit l'information.

Le matériel utilisé, ici les cartes nombres, va induire une activité spécifique de l'élève. En effet, les cartes nombres superposables impliquent un positionnement adéquat des centaines, dizaines et unités. Si c'est la toute première utilisation de ce type de matériel, cela peut leur demander une familiarisation dans la manipulation des cartons. Le rôle de l'enseignant sera donc ici, de vérifier l'usage au niveau du recouvrement des cartes. Il aura également un rôle très important lors de la préparation de la séance en prévoyant un nombre suffisant de cartes signes.

D'un point de vue de l'activité de l'élève, cette tâche va demander à chaque élève de mobiliser ses connaissances au niveau de la numération. La manipulation des cartons facilitera cet aspect. Il peut s'agir plus d'une validation par le biais du déplacement des cartes-nombres qu'une décomposition.

Aussi, la contrainte de décomposer le premier terme amène dans un premier temps les élèves à mobiliser des résultats mémorisés de calcul avec  $400 \times 9$ ;  $10 \times 9$ ;  $30 \times 9$ ;  $5 \times 9$ ;  $50 \times 2$ ,  $2 \times 2$ ;  $200 \times 2$ ;  $50 \times 2$ ;  $20 \times 8$ ;  $2 \times 8$ ;  $50 \times 8$ ;  $80 \times 5$ ;  $5 \times 5$ ;  $100 \times 5$ ;  $20 \times 5$ , .... Toutefois, les résultats issus d'un calcul mental automatisé comme les résultats des tables de multiplication sont nécessaires. Nous notons que le rôle de l'enseignant sera de proposer à des élèves en difficulté de ce point de vue le recours aux tables pour leur permettre de mener à bien l'activité. Si certains résultats seront peut-être directement accessibles, d'autres solliciteront une réflexion de la part des élèves et une « reconstruction » du résultat. Cette mobilisation du répertoire multiplicatif peut être aisée pour certains mais plus complexe pour d'autres élèves. Elle les amène par ailleurs à gérer les  $\times 10$ ,  $\times 100$  à travers les calculs du type  $400 \times 9$ , 4 centaines  $\times 9$  c'est 36 centaines. Elle peut les amener aussi à avoir recours à une propriété de la multiplication qui est la commutativité :  $9 \times 10$  ou  $10 \times 9$  ;  $2 \times 8$  ou  $8 \times 2$  éventuellement.

Concernant la modification du plus petit terme, d'autres stratégies vont faire leur apparition. Elles vont nécessiter de travailler sur les décompositions - recompositions possibles des entiers inférieurs à 10 :

- Si l'on prend un entier  $a$ ,  $a \times 9$  peut être traité comme  $a \times 10 - a$ . Cette stratégie favorise la décomposition de 9 comme 10-1 et nécessite de mobiliser la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction. Par exemple, on trouve que  $35 \times 9 = 35 \times 10 - 35 = 35 \times (10 - 1)$ .

- Le produit d'un entier par 8, permettra de mettre en avant la nécessité d'avoir de la flexibilité au niveau des stratégies à mettre en œuvre. Par exemple, pour  $50 \times 8$  il peut être intéressant d'utiliser  $50 \times 4 + 50 \times 4$ . On pourra alors possiblement retrouver les écritures suivantes :

$$50 \times 8 = 50 \times 4 \times 2$$

$$50 \times 8 = 50 \times (4 + 4)$$

Ces deux écritures mettent en jeu des propriétés différentes de la multiplication : l'associativité et la distributivité par rapport à l'addition. On obtient alors :

$$50 \times 8 = 50 \times 4 \times 2 = 50 \times 2 \times 4 = 100 \times 4 = 400$$

$$50 \times 8 = 50 \times (4 + 4) = 50 \times 4 + 50 \times 4 = 200 + 200 = 400.$$

La distributivité est sollicitée pour la deuxième écriture. Par ailleurs, par le biais des cartons, certaines stratégies sont ici empêchées comme :

$$22 \times 8 \text{ c'est } 11 \times 2 \times 8 = 11 \times 8 \times 2 = 88 \times 2 = 160 + 16 = 176.$$

Aussi, pour les calculs nécessitant de multiplier par 6 ou 7, les mêmes types de procédures sont attendues : une décomposition du facteur différent de 6 ou 7 ou, dans un premier temps une multiplication par 5 avant d'ajouter une ou deux fois le nombre multiplié. Par exemple,  $24 \times 6$  peut rapidement être résolu en effectuant :

$$24 \times 10 = 240 \text{ puis } 240/2 = 120 \text{ et enfin } 120 + 24 = 144$$

$$20 \times 6 + 4 \times 6$$

$$24 \times 6 = (20 + 4) \times 6 = 120 + 24 = 144.$$

Encore,  $7 \times 104$  peut être obtenu en décomposant 104 en  $100 + 4$  ou en effectuant  $10 \times 104 - 3 \times 104$ .

- Les calculs impliquant un produit par 5 peuvent être obtenus en multipliant le second facteur par 10 puis en divisant par 2 le résultat obtenu.
- Concernant les calculs impliquant un produit par 4, il est possible de doubler deux fois le nombre à multiplier par 4. L'utilisation de cartes nombres constitue ici un frein à la réalisation d'une addition répétée.

Nous pouvons donc souligner que l'utilisation de cartes nombres constitue une contrainte. En effet, celles-ci amènent les élèves à explorer des stratégies qu'ils n'auraient pas mises en œuvre ou dont ils n'imaginaient pas l'existence.

D'un point de vue de l'organisation, la dernière phase doit faire l'objet d'une vigilance particulière. Comme le souligne le document d'accompagnement « Le calcul en ligne au cycle 2 » publié par Éduscol, il est nécessaire que les élèves bénéficient de temps de travail durant lesquels les élèves « écrivent ou présentent eux-mêmes la trace de leurs raisonnements ». Aussi, la phase de partage des décompositions est la phase importante de notre séance. Toutefois, elle demande une

bonne organisation de la part de l'enseignant. Ce dernier doit pouvoir récupérer l'ensemble des écritures proposées et les projeter. La prise en photos des calculs sous leur forme décomposée peut monopoliser l'enseignant au détriment de l'accompagnement ou l'étayage de binômes. Cependant, la projection des calculs à l'écran est un moment crucial qui, par la mise en parallèle des deux étapes (décomposition du premier ou du deuxième terme) permettra, aux élèves de structurer leur réflexion, les amener à questionner la stratégie la plus efficace. Elle les amènera également à observer la diversité des calculs menés et le fait qu'ils sont plus familiers et plus à l'aise avec certains calculs que d'autres : d'un point de vue individuel, les connaissances au niveau des résultats mémorisés peuvent varier. Un calcul peut paraître plus évident pour un élève que pour un autre. De plus, la présentation des écritures par les élèves nécessite des compétences langagières. Les élèves peuvent éprouver des difficultés à nommer certains éléments. Cela leur demandera par ailleurs d'argumenter les choix opérés. De la part des autres élèves, ce moment sera possiblement l'occasion de découvrir de nouvelles stratégies. Aussi, la mise en avant des observations, des points positifs et négatifs comporte un risque au niveau de la gestion du temps. Les élèves peuvent décrire leurs stratégies et procédures mises en œuvre. Cette description est complexe à mener verbalement et peut engendrer une durée importante.

Enfin, la réalisation de l'affiche est une étape importante car elle permettra aux élèves de synthétiser l'ensemble des procédures mises à jour durant la séance. Si les élèves participent à sa construction au cours de la séance, ils auront à nouveau ici pour rôle d'indiquer les informations importantes à noter. L'enseignante doit alors réguler ces propositions et orienter les élèves dans leurs réflexions.

## Séance 2

Cette séance débute par la réalisation du calcul «  $114 \times 9 = ?$  » par l'ensemble de la classe. Cette étape est collective et rapide. Chacun des élèves cherche le résultat mentalement, en individuel. Cette phase doit permettre de réactiver des stratégies de calculs relatives à la réalisation d'un produit comprenant un facteur 9. Cette entrée en matière permettra de créer du lien avec la séance précédente et de replacer les élèves dans une position d'apprentissage. L'étape 1 a pour but de re-mobiliser les différentes stratégies observées lors de la séance précédente. Les élèves peuvent faire appel « dans leur imagination » aux cartons nombres utilisés en séance 1. Ils pourront ainsi se dire que :  $114 \times 9 = 100 \times 9 + 10 \times 9 + 4 \times 9 = 900 + 90 + 36 = 990 + 36 = 1026$ . Ils agiront alors sur le premier terme du produit en le décomposant :  $100 + 10 + 4$  puis en utilisant de manière intuitive la distributivité. On s'attend aussi à ce que d'autres élèves utilisent  $114 \times (10-1)$ , c'est-à-dire  $114 \times 10 - 114 = 1140 - 114 = 1040 - 14 = 1026$ . Ces élèves utiliseront alors la décomposition du deuxième terme du produit. Le recours aux décompositions fait appel à la connaissance des premiers nombres inférieurs à 10 et à leur décomposition : 9 c'est 4 + 5, mais aussi 6 + 3 ou 10-1 ... L'utilisation du répertoire additif et soustractif ne devrait poser aucun problème à des élèves de ce niveau.

Cette séance est pensée autour d'une première phase de travail individuel. Chaque élève reçoit une des 6 séries de calculs. Il a pour consigne de rechercher le résultat seul et de manière mentale. Cette première recherche permet de favoriser l'implication de tous les élèves dans la tâche. Nous donnerons une limite de 5 minutes pour effectuer ce travail. Les calculs étant ensuite discutés, il n'est pas nécessaire que nous passions trop de temps sur cette étape au détriment de la suivante.

Aussi, une fois ces cinq minutes passées, les élèves ayant reçu la même liste forment un groupe. Ces groupes tendent à être des groupes homogènes. En effet, certaines séries étant plus aisément réalisables que d'autres, la création de groupes homogènes nous permet d'attribuer au groupe une série plus adaptée à son niveau. Par ailleurs, à la différence du calcul d'entrée dans la séance, dans les séries de calcul, les nombres choisis comportent un chiffre 0 soit pour les unités soit pour les dizaines. On a par exemple : 108, 330, 210, 260, 206, 60, 106, 40, 70, 80, 180, 30, 105, 104, 102 seuls  $8 \times 44$ ,  $24 \times 6$ ,  $4 \times 66$  ne comprennent pas de chiffre 0 au sein de leur écriture chiffrée. La présence d'un 0 a un double enjeu. Parfois, il facilite le calcul des élèves car ces derniers savent qu'un nombre multiplié par 0 donne 0. En revanche, parfois il peut compliquer le raisonnement. Il arrive que certains élèves, voyant qu'il y a un zéro dans le calcul, le considèrent comme « à part » et le rajoute au résultat trouvé. Par ailleurs, il est à noter que la présentation des calculs diffère au niveau de l'ordre des termes. Parfois, le plus grand terme est présenté en premier terme, parfois il est second. Il s'agit de mettre à profit la propriété de la commutativité de la multiplication en insistant bien sur le fait que les termes peuvent être échangés sans que le résultat lui ne soit changé.

Par la suite, les membres du groupe vont donc échanger sur les résultats trouvés, il faudra néanmoins que le dialogue soit efficient lors des échanges pour que chaque élève sache bien quel calcul fait l'objet des discussions au sein de chaque série. L'organisation des échanges au sein du groupe est une source de questionnement et, en fonction des comportements observés dans la classe, pourra être clarifiée et codifiée notamment au moyen d'attribution de rôles dans le groupe. De même, la réalisation d'une affiche par groupe nécessitera de se mettre d'accord au sein du groupe tout d'abord sur le choix du calcul. Plusieurs possibilités ici, les élèves peuvent s'orienter vers le calcul mettant en jeu les nombres les plus grands ou au contraire vers les calculs dont les résultats intermédiaires sont les plus évidents pour eux. De plus, il est possible que les élèves ne choisissent pas les calculs mettant en jeu la table de 9, considérée par un grand nombre d'entre eux comme la plus difficile. L'imposer à certains groupes pourrait être envisagé et reste à déterminer. Aussi, le choix du calcul au sein du groupe et la manière de le résoudre peut être source d'échanges conflictuels au sein du groupe car les élèves n'ont pas la même familiarité avec certains faits numériques.  $9 \times 80$  peut apparaître plus rapide pour certains en effectuant  $80 \times 10 - 80$  alors qu'au sein du même groupe, certains penseront qu'il est plus facile de faire  $9 \times 80 = 9 \times 8 \times 10$  ( en prenant appui sur une bonne connaissance des tables et sur la multiplication par 10 ) soit  $72 \times 10 = 720$ . La matérialisation des étapes du calcul est donc une source d'interrogation. Certains auront peut-être tendance, parce qu'ils disposent de certains faits numériques, à moins détailler.

Durant l'ensemble de cette séance, le rôle de l'enseignant sera multiple. Lors des phases de travail en groupes, il veillera à la possibilité et la qualité des échanges au sein du groupe. La motivation des élèves au sein du groupe est primordiale. Un élève qui se met en retrait risque de ne pas bénéficier des apports du groupe. L'enseignant doit donc être attentif et encourager de manière collective et individuelle. De plus, il sera nécessaire de s'assurer d'une réelle écoute bienveillante de la part des élèves dans le cas où le calcul présenté sera erroné. L'enseignant devra en amont rappeler certaines règles quant au respect dans le cadre des échanges. Il peut également prévoir le détail d'un deuxième calcul ou la réalisation d'une deuxième série de calculs pour un groupe qui serait plus rapide que les autres. Il peut également se laisser la possibilité d'intervenir au cas où les élèves d'un groupe ne parviendraient pas à se mettre d'accord sur le calcul à détailler, ou sur la manière de résoudre ce calcul.

L'enseignant devra également organiser le retour des groupes lors de la dernière phase de travail. Cette étape risque d'être longue. Les échanges peuvent être compliqués. Un élément à anticiper pour l'enseignant est également la possibilité d'élèves passifs lors de cette dernière phase, qui n'objecteront pas. Les observations menées lors du passage dans les différents groupes pourront permettre de réaliser des relances si nécessaire. Il doit également effectuer une synthèse de la séance. Cette dernière sera très importante car elle permettra d'ancrer l'existence de plusieurs possibilités pour résoudre un calcul.

### Séance 3

Dans cette séance, c'est le recours au jeu du type Mathador qui est retenu. L'objectif est de pratiquer ce que Éric Trouillot nomme le calcul mental «à l'envers » afin de s'interroger sur les multiples possibilités de parvenir à un nombre cible en utilisant le moins de cartes nombres ou opérations possibles. Ce jeu s'effectue à trois. Les trios seront constitués de manière homogène afin d'éviter un trop grand décalage entre les élèves et que l'un d'entre eux ne se démotive voyant qu'il est nettement devancé.

Les élèves vont devoir donc comprendre la manière d'obtenir un nombre cible par le double tirage au sort. L'enseignant devra s'assurer de cet aspect pour être sûr que les élèves s'appuient sur l'écriture du nombre cible. Un support emplacement des cartes peut permettre d'éviter cet écueil. Un passage fréquent de l'enseignant dans les groupes lui permettra également de s'assurer que les élèves suivent bien les règles du jeu. Les élèves vont procéder au tirage au sort et déterminer le nombre cible. Ils inscrivent le nombre dans la colonne prévue à cet effet, puis se lancent dans un temps de recherche afin d'établir un calcul leur permettant d'atteindre le nombre cible. Les élèves évoluent en binômes. Ils entrent en action en même temps. Un décalage peut néanmoins intervenir entre les deux membres du binôme. Aussi, il importera à l'enseignant d'encourager les élèves qui seraient possiblement en difficulté ou qui verraient une grande différence de score entre eux et leur

adversaire apparaître. Le troisième joueur peut également encourager les joueurs. L'enseignant devra également prêter attention à ce qu'il ne soit pas trop critique avec l'un d'entre eux.

Quant aux procédures attendues durant la phase de jeu, les élèves vont peut-être procéder par essais-erreurs pour s'approcher du nombre cible. Ils vont manipuler les cartes nombres pour rechercher l'expression la plus efficace, c'est-à-dire celle présentant le moins de caractères. La manipulation des cartes est un soutien à la mémoire de travail, il permet de conserver sous les yeux les calculs engagés. Les joueurs doivent également penser à comptabiliser le nombre de points obtenus en comptant le nombre de caractères utilisés. Le répertoire additif est donc à nouveau sollicité. Pour les élèves avec plus de difficultés, il est possible de leur laisser utiliser leur cahier de brouillon ou leur ardoise pour noter les résultats intermédiaires. Le troisième joueur a également un rôle important. Les calculs étant longs, la vérification qu'il effectue à l'aide de la calculatrice est importante car elle pourra éliminer les erreurs de calcul potentielles. De plus, il lui appartient de vérifier le décompte des points en validant ou non le calcul proposé.

Si cette séance repose en grande partie sur la phase de jeu, il est essentiel de la terminer par une mise en commun orale afin de mettre en évidence les stratégies ou les méthodes qui permettent de remporter la partie. Deux solutions sont alors envisageables et dépendront du déroulement des parties : il sera possible soit de s'appuyer sur des élèves ayant remporté la partie en mettant en avant ce qu'ils ont utilisé pour réussir ou alors de s'appuyer sur les calculs d'élèves ayant perdu la partie afin de proposer des pistes d'améliorations. Dans les deux cas, il faudra prêter attention à la confiance et la motivation de chacun.

#### Séance 4

La séance 4, qui est la séance finale, s'appuie elle aussi sur le jeu. Aussi, d'un point de vue de l'activité de l'enseignant, nous retrouverons les mêmes points de vigilance : le respect et la compréhension des règles du jeu, la motivation de l'ensemble des participants. En revanche, le matériel n'est ici que prétexte à la réalisation de produits. Il s'agit d'un habillage de la tâche afin de rendre cette dernière plus ludique. Toutefois, la grille de jeu a été pensée de manière à ce que les calculs à effectuer permettent aux élèves de remettre en jeu des stratégies découvertes au cours de la séquence. On retrouve donc des entiers inférieurs à 10 comme 9 ou 5 impliquant des stratégies particulières mais aussi d'autres facteurs présentant dans leur écriture des 0 comme chiffre des unités, des dizaines ou des centaines. L'avantage de cette grille et de ce jeu est que pour gagner, les élèves ne peuvent choisir les calculs à effectuer mais sont dépendants des placements effectués par leur adversaire. Ainsi, lors du placement de ses bateaux, le joueur doit prêter attention non seulement à ne pas les mettre trop près les uns des autres mais aussi aux calculs qui seront à effectuer par son adversaire pour le toucher. Estimer la « difficulté » du calcul en fonction des nombres en jeu est donc ici une compétence supplémentaire qui peut aider les élèves à remporter la partie. Si de tels comportements peuvent être observés de la part des deux joueurs, il ne faut pas

oublier que lors de ce jeu un arbitre gère la partie. Comme lors de la séance précédente, ce dernier doit vérifier que les calculs sont corrects et s'assurer du respect des règles par ses camarades.

## **C. Analyse à postériori**

Exceptée la séance numéro 4, l'ensemble des séances et des entretiens ont pu être menés. Comme prévu, les premières séries d'entretiens ont concerné l'ensemble des élèves du groupe classe tandis que les derniers entretiens n'ont eu lieu qu'avec un nombre réduit d'élèves : 5 au total. La dernière séance de la séquence n'a pas pu être menée en raison du calendrier scolaire et des voyages et sorties effectués par la classe. Il s'agira donc ici d'analyser, après leur mise en place, les entretiens puis les séances 1, 2 et 3.

### **C.1 Analyse à posteriori des entretiens individuels**

Comme il avait été convenu, ces derniers ont concerné l'ensemble des 27 élèves, pris individuellement. Ces derniers ont tous accepté de participer. De manière générale, il a été observé que les élèves avaient une appréhension certaine face à l'exercice proposé. Si l'objectif de ce dispositif avait été expliqué en classe, certains élèves avaient encore des questions à poser afin de mieux cerner les enjeux de ce passage. Par conséquent, avant de commencer, j'ai pris le temps de répondre à leurs questions, de les rassurer sur l'anonymat de leur réponse et sur l'absence de note, inquiétude qui est revenue fréquemment. Si cette étape était nécessaire, elle a induit une durée conséquente des entretiens. De plus, la nécessité de rassurer les élèves face à l'activité mathématique peut traduire la présence d'une pression chez les élèves lorsqu'il se trouve face à une tâche.

Si l'on se penche désormais sur la réalisation même des opérations, on remarque que les élèves sont peu enclins à passer un calcul : seuls 14% des élèves ont demandé à laisser de côté un calcul au cours de la réalisation. Ils semblent préférer chercher longtemps plutôt que passer.

Au niveau de la durée d'exécution, on constate un temps moyen de réalisation de 3 min 32 secondes soit environ 21 secondes par opération. Une étendue de 6 minutes et 10 secondes avec la réalisation la plus rapide durant 1 min et 4 secondes contre la plus longue de 7 minutes et 10 secondes. Si cet écart montre l'hétérogénéité des élèves, le temps moyen par opération laisse entrevoir une base solide chez les élèves.

Au niveau des résultats, la moyenne est de 8 réponses correctes sur 10 (Cf Annexe 9). Les opérations  $24 \times 4$  et  $210 \times 4$  apparaissent comme celles les mieux réussies avec un pourcentage de réussite de 93 %. Les opérations  $320 \times 9$  et  $39 \times 6$  ont, quant à elles, été les moins bien réussies avec un taux de 60% de réussite. De même, les élèves ont estimé à 51% l'opération  $320 \times 9$  comme étant la plus difficile et à l'inverse, l'opération  $24 \times 4$  comme étant la plus facile à réaliser à leurs yeux avec plus de 48% d'élèves la désignant comme la plus facile (Cf Annexe 10) Nous constatons donc qu'une des deux opérations considérées comme plus difficiles est en effet une des moins réussies, tout comme une des deux opérations perçues comme plus facilement réalisable possède un



taux de réussite des plus élevés. Les élèves semblent donc percevoir, lorsqu'ils effectuent le calcul, une différence entre le calcul qu'ils traitent et les autres. Lors des entretiens, la raison de cette différence a été justifiée par les élèves de deux manières. Une partie des élèves a évoqué la taille d'un des facteurs : lorsqu'à première vue, un des deux facteurs s'écrit avec trois chiffres, il apparaît pour les élèves plus compliqués à traiter que ceux ne possédant que deux chiffres. La seconde raison, évoquée par 59% des élèves (Cf Annexe 11), concerne les résultats des tables de multiplication convoqués pour effectuer le calcul ( tables de 2 et de 4 plus connues et mobilisables que la table de 9). Les élèves déclarent en premier lieu que la raison de leur échec est la méconnaissance des tables de multiplication. Bien que cela n'ait pas été clairement énoncé par les élèves, nous pouvons tout à fait penser que, lorsqu'ils se retrouvent face à un résultat manquant qui aurait dû être mémorisé, les élèves tentent de le retrouver par le calcul. Cette démarche est coûteuse en énergie puisqu'elle demande une forte mobilisation de la mémoire de travail comme le souligne François Boule dans son article « Regards sur le calcul mental » évoquant que selon le type de stratégie mobilisée, l'élève ne parvient plus à garder en mémoire les différentes étapes nécessaires à son calcul et ce en raison d'un déficit de la mémoire à long terme. Elle devient alors trop lourde pour une majorité des élèves qui ne parviennent plus, lorsqu'il trouve le résultat recherché, à se replacer dans la stratégie de calcul et à utiliser le résultat qu'ils viennent de retrouver.

Pour ce qui est de l'explicitation des modes de raisonnement et des procédures employées par les élèves, ces derniers ont eu des difficultés à donner avec précision leur mode d'organisation. Ils ont majoritairement eu recours à des exemples pour expliquer leur raisonnement. La généralisation est donc pour la plupart des élèves encore compliquée. Toutefois, tous ont essayé de verbaliser leur raisonnement. Ce qu'il ressort de l'analyse des justifications est que la plupart des élèves disent avoir procédé de la même manière quels que soient les nombres en jeu : 85% au total. Si presque tous n'adaptent donc pas leur manière de procéder aux nombres en jeu, nous constatons cependant une diversité de procédures utilisées. Ainsi, on peut regrouper les justifications des élèves sur leur stratégies de calculs en trois catégories que nous détaillerons ci-dessous. Nous profiterons dans chaque groupe, pour parler plus amplement des comportements observés chez les élèves qui ont repassé les entretiens à la fin de la séquence.

- La première catégorie regroupe les élèves utilisant l'algorithme opératoire pour la multiplication. Cette stratégie ne concerne que 3 élèves sur les 27. Même si ce chiffre est peu élevé, il est intéressant de le mettre en lien avec l'article de Rémi Brissiaud évoqué plus tôt. Ce dernier indiquant que les élèves avaient tendance à utiliser des procédures déjà vues en classe et automatisées plutôt que de mobiliser des stratégies vraiment spécifiques au contexte. Cette démarche entraîne ici des erreurs de calculs. En effet, si l'on prend le cas d'une élève, mettant en œuvre cette procédure, que nous appellerons E1. Si son temps de réalisation n'est pas supérieure à la moyenne de la classe (3 min 19 sec contre 3 min 32s), il apparaît en revanche que la moitié des calculs effectués ne correspondent pas aux résultats attendus. Ce résultat peut s'expliquer par la surcharge cognitive entraînée par une telle représentation mentale. Comme l'évoquait François

Boule dans son article « Regards sur le calcul mental » (1995), qui avait remarqué d'une partie des élèves avaient recours à ce type de stratégie, il s'agit d'une procédure qui nécessite une trop forte mise en mémoire de travail ne permettant plus de gérer l'ensemble des résultats intermédiaires. L'élève dit utiliser l'algorithme posé dans sa tête ce qui la conduit à mémoriser beaucoup de résultats intermédiaires. De ce fait, il arrive qu'elle oublie des retenues entraînant des erreurs dans son calcul. Il sera donc intéressant de vérifier si les séances proposées et la manipulation lui permettent de changer de stratégie.

- La seconde catégorie regroupe les 18 élèves ayant recours à une décomposition exclusivement additive du plus grand facteur puis utilisant la distributivité pour parvenir au résultat. Cette décomposition est effectuée par les élèves de manière inconsciente. Ils distribuent le petit facteur sur chaque chiffre des unités, chiffre des dizaines et chiffre des centaines sans véritablement considérer le groupe. Nous constatons donc ce que Denis Butlen et Monique Pezard avaient observé et retranscrit dans leur article « Calcul mental, calcul rapide » : les élèves, avant intervention de l'enseignant, ont recours plutôt à des décompositions additives. On retrouve cette conception dans la verbalisation des élèves. Ainsi, 9 élèves ont recours à des abus de langage lors de la verbalisation de leur calcul à voix haute (Cf Annexe 11). Par exemple, en disant «  $8 \times 2$  » pour l'opération  $25 \times 8$  alors qu'ils effectuent en réalité  $20 \times 8$ . De plus, elle induit parfois des confusions dans les résultats trouvés puisqu'il est essentiel de se rappeler ou de garder à l'esprit qu'on manipule en réalité des dizaines ou des centaines. Les élèves se trompent donc parfois de rang lorsqu'ils ajoutent les résultats intermédiaires. Pour cette seconde catégorie, nous nous intéresserons ici à deux élèves que nous nommerons E5 et E2, procédant de cette manière pour l'ensemble des calculs. Nous notons que E5 effectue seulement 2 erreurs de calcul mais possède un temps de réalisation plus élevé que la moyenne générale. On constate en effet que pour le calcul  $320 \times 9$ , elle effectue  $9 \times 2$  pour  $9 \times 20$  mais oublie qu'elle manipulait en réalité des dizaines, puis des centaines lorsqu'elle effectue  $3 \times 9$  pour  $300 \times 9$ . Elle procède de « droite à gauche » sans réellement conscientiser le fait qu'elle travaille sur différents groupements. Cette dernière identifie ses erreurs et déclare avoir eu des difficultés à mémoriser les résultats intermédiaires trouvés sans pouvoir les écrire. Elle précise également que les tables de multiplication à convoquer en fonction des nombres en jeu rendent plus difficile la mise en œuvre de sa procédure. E2 éprouve les mêmes difficultés de mémorisation. S'il se concentre sur la recherche de résultats intermédiaires, il ne parvient plus ensuite à reprendre son calcul là où il en était. Cela se traduit par exemple par l'oubli de dizaines (Cf Annexe 12 pour les calculs  $85 \times 5$ ,  $39 \times 6$  ou  $34 \times 3$ ) Cette difficulté semble plus importante pour lui car on constate un taux de réussite de 30% contre 80% pour E5. On constate également qu'à quatre reprises, il ne parvient pas à appliquer sa stratégie ou à les mettre en lien avec les résultats mémorisés précédemment et par conséquent il inscrit les résultats trouvés les uns à côté des autres sans les ajouter (Cf Annexe 12 pour les calculs  $25 \times 8$ ,  $320 \times 9$ ,  $65 \times 2$  et  $190 \times 2$ ). Cette différence peut, en partie, être expliquée par le fait qu'il éprouve plus de peur et d'appréhension face à la tâche. Pour l'un comme pour l'autre, nous pouvons penser, que les séances intégrant de la manipulation leur permettront de

plus facilement visualiser les opérations et les décompositions et donc de mieux gérer leur espace mental et de soulager la mémoire de travail.

- La dernière catégorie que nous pouvons effectuer concerne les élèves utilisant une décomposition tantôt additive tantôt en produits de facteurs sur lesquels ils effectuent ensuite une distribution à partir du plus petit facteur. Les élèves utilisant ces deux décompositions témoignent d'une connaissance plus fine des nombres en jeu. Seuls trois élèves, sur les 10 calculs effectués, ont proposé de telles décompositions. Toutefois, ici également, la principale difficulté citée par les élèves est la capacité à mémoriser les résultats intermédiaires. Cette mémorisation se superpose en effet à la mémorisation de la décomposition choisie ce qui entraîne une sollicitation importante de la mémoire de travail. À l'image de ce groupe, nous pouvons observer plus en détails les résultats et interprétations d'une élève que nous appellerons E3. Nous retrouvons chez elle les mêmes difficultés que pour les élèves du second groupe avec un abus de langage considérant uniquement les chiffres des unités, dizaines et centaines. Elle parvient en revanche mieux à gérer sa mémoire de travail puisqu'elle se souvient qu'elle manie en réalité des multiples de dix et n'oublie pas les rangs concernés lorsqu'elle additionne les résultats. De cette façon, elle obtient un pourcentage de réussite de 80% et un temps en dessous de la moyenne de la classe. Il est cependant intéressant de constater qu'elle évoque la difficulté pour elle de convoquer certains résultats des tables de multiplication qui la freinent. C'est d'ailleurs à cause de résultats de tables mal maîtrisées qu'elle obtient deux résultats erronés (Cf Annexe 12). Les séances proposées pourraient lui permettre de développer des stratégies portant sur la décomposition du petit facteur afin qu'elle puisse encore plus jongler entre les procédures en fonction des nombres convoqués.

Nous effectuerons ici un dernier point portant sur la quatrième élève faisant l'objet d'un second entretien. Cette dernière ne se rapproche véritablement d'aucun groupe. En effet, si l'on observe les résultats proposés par l'élève (Cf Annexe 12), on constate trois types de résultats. En premier lieu, on remarque qu'elle est parvenue à trouver un seul résultat correct pour le calcul  $210 \times 4$ . Si l'élève n'a pas réussi à expliquer la façon dont elle a obtenu le résultat, nous pouvons essayer d'interpréter ce résultat par le fait que chaque chiffre composant le nombre 210, une fois multiplié par 4 ne donne aucun nombre à deux chiffres. De cette façon, il a été possible pour l'élève de multiplier chaque chiffre par 4 en commençant par 0 et de noter simplement les résultats trouver de droite à gauche. Pour le calcul  $85 \times 5$ , l'élève parvient à expliquer qu'elle a commencé à raisonner à partir de  $5 \times 11$  donnant 55, résultat à partir duquel elle a ajouté 5 jusqu'à obtenir 85. Pour cela, elle a dû ajouter 6 fois de plus le nombre 5.  $5 \cdot 11 + 6 = 17$ , raison pour laquelle a inscrit le résultat 17. Il semblerait donc ici qu'elle ait trouvé le résultat de  $85/5$  et non de  $85 \times 5$ . Pour les deux autres résultats, il semblerait que l'élève tente d'utiliser la distributivité toutefois elle ne semble pas en percevoir le sens puisque, par exemple, pour l'opération  $65 \times 2$ , elle inscrit 125 soit les nombres 12 et 5 accolés. Le nombre 12 semble venir de  $2 \times 6$  tandis que le nombre 5 n'a pas été pris en compte.

## C.2 Analyse à posteriori de la séance 1

Cette première séance s'est déroulée le 14 février en classe entière. La durée de la séance a été respectée. Les élèves ont donc été répartis en 12 groupes de 2 élèves et un groupe de 3. Chaque groupe a reçu deux opérations :  $410 \times 9$  et  $35 \times 9$  ou  $22 \times 8$  et  $50 \times 8$  ou  $85 \times 5$  et  $120 \times 5$ . Le choix a été de fait de ne finalement pas proposer les opérations  $52 \times 4$  et  $250 \times 4$ . Sur l'ensemble de la séance, les élèves ont proposé des décompositions diverses et recevables à l'aide des cartons. Il n'y a pas eu de difficulté quant à l'appropriation des cartes et de ce qu'elles représentent. Un exemple a été effectué au tableau avant de commencer le travail en groupe ce qui a permis aux élèves de visualiser ce qu'il était possible de faire ou non.

La première étape de la séance concerne la décomposition du grand facteur. La consigne donnée a été la suivante : « Proposez une autre écriture du calcul en ne modifiant que le plus grand nombre ». Les élèves ont proposé une écriture en seulement quelques minutes, certains en ont même donné plusieurs. Lors de la mise en commun des écritures, les élèves sont venus inscrire ou ont dicté leurs propositions. Ces dernières ont été inscrites dans les colonnes de gauche des tableaux proposés. Les décompositions proposées sont correctes exceptées deux qui ne le sont pas :  $22 \times 3 + 11 + 5$  qui n'est pas égal à 85 et  $30 \times 2 + 2$  qui est différent de 120. Il apparaît que ces décompositions sont longues. Cette longueur a donc pu perdre les élèves et amener des erreurs. D'un point de vue du matériel utilisé, il est possible que les élèves aient essayé d'utiliser le maximum de cartes les amenant à une décomposition trop longue et erronée.

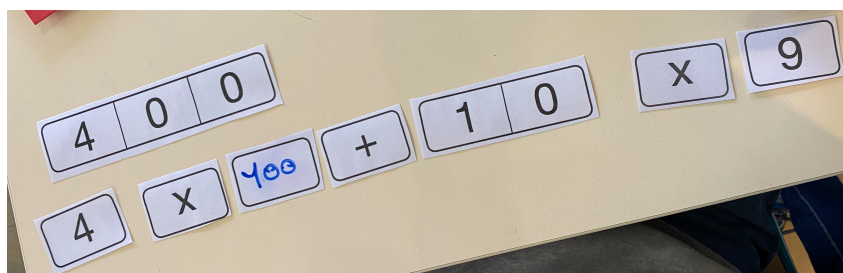
85 x 5	$(80+2+2+1) \times 5$ $(80+5) \times 5$ $(80+3+1+5) \times 5$ $85 \times 10$ $850 \div 2$	120 x 5	$(100+20) \times 5$ $5 \times 6 \times 20$ $(30 \times 2 + 2) \times 5$ $120 \times (3+2)$
410 x 9	$(405+5) \times 9$ $(4 \times 100 + 10) \times 9$ $410 \times$ $(5+4)$ <del><math>410 \times 9</math></del> $410 \times 10 - 410$ $410 \times (10-1)$	35 x 9	$(30+5) \times (4+5) \times 35$ $9$ $35 \times (3 \times 3)$ $35 \times (10-1)$ $(6 \times 5 + 5) \times 9$ $35 \times 10 - 35$
22 x 8	$(100-78) \times 8$ $22 + 0 \times 8$ $2 + (22 \times 6)$ $22 \times (10+8)$ $22 \times (0+4)$ $22 \times (10-2)$	50 x 8	$(2 \times 25) \times 8$ $(5 \times 10) \times 8$ $50 \times (8+5)$ $50 \times (4+4)$

Modification du plus grand facteur (colonne de gauche)  
et du plus petit (colonne de droite).

De plus, il apparaît que certains élèves ont effectué une décomposition faisant apparaître les centaines, les dizaines et les unités. Par exemple, on a obtenu  $85 = 80 + 5$  ou  $120 = 100 + 20$ . Il

semble que ces décompositions soient facilement induites par les cartes dont les dizaines et les unités peuvent être détachées. Cependant, ce n'est pas uniquement cette décomposition qui est apparue aux élèves. On note ainsi que certains élèves ont décomposé le nombre en produit de facteurs :  $50 = 25 \times 2$ ,  $120 = 6 \times 20$  ... avec parfois l'ajout d'unités supplémentaires. Nous constatons par ailleurs qu'il s'agit de résultats mémorisés par les élèves comme les résultats de tables de multiplication par exemple. Nous pouvons voir pour  $35 \times 9$  qu'un groupe a effectué la décomposition de 35 en  $6 \times 5 + 5$  nous voyons ici clairement la référence aux tables de multiplication et la familiarité du nombre. Il est donc possible que dans un premier temps les élèves aient décomposé 35 en  $30 \times 5$  et que 30 leur soit ensuite apparu comme  $6 \times 5$ . Cette forme est intéressante lorsqu'elle est mise en relation avec les propos tenus par les élèves lors des entretiens, ces derniers évoquant à 59% les tables de multiplications comme influant sur leur procédure de calcul.

L'objectif de cette première phase était ici double, il s'agissait de montrer que le nombre peut être décomposé de différentes façons et que c'était l'intégralité de cette décomposition qui était multipliée par le petit facteur. On approche ici la notion de distributivité induite par la présence de parenthèses. Sans que cette dernière n'ait été réellement abordée, on constate que les élèves ont perçu la nécessité de multiplier l'intégralité de la décomposition puisque, lors de la mise en commun, ils ont inséré ou demandé à insérer des parenthèses dans leur calcul. Toutefois, ces dernières n'ont pas été symbolisées avec le matériel à leur disposition. Aucun élève n'a utilisé une carte vide pour y faire figurer une parenthèse. On remarque cependant que les parenthèses se sont traduites par des espaces laissés entre le nombre décomposé plus le second facteur. Nous pouvons le voir sur l'illustration ci-dessous, où l'on constate un espace important laissé entre la carte « 10 » et la carte « x » pour la réalisation du calcul  $410 \times 9$ .



La deuxième étape s'est déroulée de la même manière que la première. Les élèves ont débuté par la recherche d'une écriture mettant en jeu un changement du facteur le plus petit avant que l'on mette en commun leurs propositions. Nous remarquons ici que les décompositions sont exclusivement additives à l'exception de deux groupes. L'un a proposé l'écriture  $2 + (22 \times 6)$  pour l'opération  $22 \times 8$ . Il semble que ce dernier ait voulu décomposer 8 en  $6 + 2$ . Toutefois, la transcription en langage mathématique n'a pas fonctionné puisqu'il manque un terme. L'autre groupe a, quant à lui, proposé une décomposition de 9 en facteurs premiers pour le calcul  $35 \times 9$  ( $35 \times 3 \times 3$ ). On note également pour  $85 \times 5$ , la présence d'une stratégie de calcul avec le processus en deux étapes  $\times 10$  puis  $/2$ . Cela révèle une projection des élèves dans un processus de calcul puisqu'il s'agit d'une stratégie souvent présentée lors des séances de calcul mental.

La dernière étape de cette séance a permis de passer en revue les différentes propositions des élèves et d'invalider celles qui n'étaient pas recevables. Lors de cette phase, les élèves ont été sollicités afin de déterminer parmi les écritures proposées quelles étaient celles qu'ils utiliseraient pour calculer. Ils ont su dire quelles décompositions ils utiliseraient pour calculer mais n'ont pas toujours su convoquer de réels arguments pour justifier ce choix. La phase de mise en commun a donc été plus difficile car manquant de dynamisme et d'intervention des élèves qui ne parvenaient pas à étayer leur prise de parole. Nous pouvons maintenant remarquer que les décompositions effectuées par les élèves sont variées et traduisent différentes visions du calcul par les élèves. Lorsqu'il s'agit de décomposer les grands termes, nous retrouvons plutôt une décomposition additive en unités, dizaines, centaines. À l'inverse, pour les facteurs les moins élevés, nous constatons des décompositions additives et en produits de facteurs. Nous retrouvons ici l'importance des tables de multiplication évoquées par les élèves lors des entretiens individuels.

La synthèse écrite de la séance a permis d'institutionnaliser les deux décompositions en reprenant un exemple (Cf Annexe 15). Cette dernière visait une prise de conscience chez les élèves qu'il est nécessaire de choisir une stratégie en fonction des nombres en jeu. L'affiche a été discutée mais pas co-construite en raison de la densité et de la durée de la séance. La représentation en arborescence a été choisie afin de mettre en évidence que pour un même calcul, il existe différents « chemins » possibles. À l'issue de cette séance, nous pouvons penser que cela a été conscientisé mais il est nécessaire que cela soit automatisé à travers un entraînement régulier.

### **C.3 Analyse à posteriori de la séance 2**

La seconde séance a eu lieu le 20 mars soit 5 semaines après la première séance. Ce choix de date s'est fait en fonction du calendrier scolaire. Toutefois, il aurait été préférable de rapprocher ces deux échéances afin qu'il soit plus simple pour les élèves de faire du lien entre les différentes séances.

Cette séance s'est finalement déroulée en demi-groupes pour permettre à l'enseignante de la classe de continuer sa progression annuelle. Deux groupes de 13 élèves se sont donc succédé (un élève absent ce jour-là). Nous avons procédé comme prévu pour le déroulement de la séance : les élèves ont eu un ensemble d'opérations à effectuer en 5 minutes.

Une fois que cela a été fait, les élèves ayant reçu les mêmes séries se sont réunis par groupe de 3 élèves avec pour objectif de se mettre d'accord sur le résultat conservé pour chaque calcul. Cette phase a été relativement courte. J'ai remarqué que beaucoup d'élèves ont obtenu les mêmes résultats. Toutefois, dans certains groupes, lorsque les points de vue divergeaient, peu d'élèves arrivaient à justifier leur choix face aux camarades en désaccord avec eux. L'objectif poursuivi lors de cette phase n'a donc pas été pleinement atteint puisque une partie des élèves n'est pas parvenue à justifier et à expliciter la manière dont elle a trouvé le résultat. Nous constatons donc ici qu'une

nouvelle fois, comme lors des entretiens, il est difficile pour les enfants de conscientiser leurs méthodes de calcul.

La réalisation d'affiches en groupe constituait la seconde phase. Les élèves étaient donc réunis dans des groupes de trois ou quatre : deux groupes devaient expliciter la manière dont ils ont procédé pour trouver le résultat de l'opération  $9 \times 80$ , deux pour le calcul  $24 \times 6$ , deux pour le calcul  $106 \times 7$  et deux pour le calcul  $5 \times 330$ . L'ensemble des groupes a produit une affiche, excepté un groupe qui n'est pas parvenu à finaliser l'affiche par manque de coopération. Nous pouvons relever que 4 groupes ont produit une affiche relevant plus de la description que de l'explicitation de la stratégie (Cf Annexe 16). Cela se traduit par le choix de présenter leurs propos sous la forme d'un texte dans lequel on retrouve des connecteurs logiques : d'abord, puis qui semblent indiquer une unique manière de procéder. Le reste des groupes s'est appuyé sur une explicitation plus fine permettant un meilleur accès à la genèse de leur résultat. Il apparaît alors le mot « technique », « décomposer » chez un groupe (Cf Annexe 16). Chez un autre, le lexique adapté n'est pas mobilisé bien que la stratégie proposée mobilise en réalité la décomposition du nombre 80 en  $8 \times 10$ . Le second groupe travaillant sur le même calcul envisage deux possibilités en fonction de la « difficulté de l'opération » par rapport aux nombres en jeu. Lorsque les nombres leur semblent peu familiers, la procédure associée est semblable à du calcul en ligne mettant en jeu la décomposition additive et la distributivité. La stratégie est adaptée en fonction de la familiarité, de la connaissance des nombres. Il est à noter ici que, sur les deux groupes possédant l'opération  $9 \times 80$ , aucun n'a effectué de décomposition sur le terme 9 mais on utilise des décompositions faisant apparaître des résultats de tables de multiplication. Un troisième groupe, devant détailler le calcul de  $330 \times 5$ , a également décomposé le plus grand des termes et a proposé deux procédures différentes. Toutefois, toutes deux s'appuient sur la décomposition du nombre 330 (Cf Annexe 17). Globalement, on remarque une absence de référence aux observations effectuées lors de la première séance. Les élèves ont eu du mal à justifier leur raisonnement. Face aux productions des élèves, nous n'identifions pas de remobilisation des termes présents sur l'affiche effectuée lors de la dernière séance. Les élèves n'ont pas explicité s'ils agissaient du traitement du plus grand ou du plus petit des termes. Nous pouvons ainsi nous demander si l'affiche écrite n'a pas été un frein à l'explicitation orale. Les élèves considérant que l'essentiel est écrit, ils n'ont peut-être pas vu d'intérêt à généraliser leur propos. Ainsi, il aurait pu être intéressant de leur demander de s'appuyer sur leur affiche pour expliciter leur procédure sur un autre calcul de la série. L'essentiel des stratégies portent donc sur la décomposition du grand terme quel que soit le facteur. Il serait intéressant de se questionner sur ce choix de procédure (rappel de quelque chose de rassurant : connaissance du système de numération au cycle 2 ou possibilité de cette manière de mobiliser les tables ...).

La dernière phase de la séance était celle de présentation des affiches produites au reste de la classe. Si la réalisation les a intéressés, il a été plus difficile pour les élèves de s'intéresser aux procédures partagées par leurs camarades. Si Denis Butlen et Monique Pezard dans « Calcul mental, calcul rapide » rappelaient l'importance d'effectuer régulièrement une institutionnalisation et un partage des stratégies au sein du groupe, nous voyons ici que cette étape ne fait pas toujours l'objet d'un fort investissement chez les élèves. En effet, il semblerait que les élèves possèdent des

stratégies de calcul qui leur sont propres. Même s'ils parviennent à voir que les stratégies proposées par leurs pairs sont recevables, il est parfois difficile pour eux de concevoir que celles-ci puissent être plus intéressantes. Cela est d'autant plus compliqué qu'il n'y pas mise en œuvre directe et immédiate de la procédure partagée.

#### **C.4 Analyse à posteriori de la séance 3**

Cette troisième séance a eu lieu le 27 mars. Elle s'est finalement déroulée en demi-groupe dans une annexe de la salle de classe comme lors de la séance précédente. La durée initialement prévue a été respectée. Cependant, une modification a été effectuée par rapport à la séance initialement prévue. Le nombre cible n'était pas construit par addition de deux nombres mais par un tirage au sort parmi un ensemble de nombre déjà choisis et placés dans une enveloppe. On retrouve les nombres suivants :

60 | 87 | 91 | 99 | 100 | 108 | 110 | 112 | 120 | 132 | 135 | 176 | 200 | 204 | 224 | 256 | 280

Les élèves ont été très investis et se sont sentis concernés. L'ensemble des participants a rempli la grille de jeu. Toutefois, au niveau de l'appropriation des règles du jeu, on peut constater quelques difficultés pour certains élèves à différencier nombre et chiffre. Au départ de la partie, certains élèves ont en effet inscrit un nombre entier sur une même carte. De même, les élèves ne se sont pas toujours affrontés. En effet, certains binômes ont en réalité joué ensemble. Pour eux, le défi venait simplement du fait d'utiliser le moins de cartes possible que ce soit pour soi ou pour gagner contre quelqu'un. De plus, excepté un seul élève, ils n'ont pas eu souvent recours à la calculatrice bien que celles-ci soient à leur disposition. Ce comportement a ainsi induit une vérification par la discussion et par le calcul à nouveau. Toutefois, il est intéressant de noter que, malgré ce faible taux d'utilisation de la calculatrice, seuls 10 élèves ont effectué une erreur sur les 26 élèves participants soit 38% des élèves (Cf Annexe 18). Sur ces derniers, uniquement 2 élèves ont effectué plus d'une erreur. Cela signifie que les vérifications effectuées mentalement par les élèves s'avèrent effectives.

Au niveau de l'activité des élèves, ils ont essayé de surpasser leurs idées premières et ont essayé par tâtonnements de trouver les écritures les plus courtes. En ce sens, c'est encourageant car il semble que, comme le préconisait Éric Trouillot, le calcul mental à l'envers soit réellement un outil qui développe les habiletés en calcul. Outre l'activité mentale, le fait même de procéder par tâtonnement et de se rendre compte par soi-même qu'il existe d'autres manières de procéder est une expérience sensible, un réel acte mettant en jeu à la fois le corps et l'esprit qui engage pleinement les élèves. Nous pouvons ici voir le parallèle avec les conditions nécessaires mises en lumière par Guy Brousseau afin qu'une situation soit réellement vecteur d'apprentissage. En effet, nous voyons ici que la situation proposée a permis à l'ensemble des élèves de proposer une réponse. Toutefois, cette dernière n'était souvent pas la plus satisfaisante puisqu'elle impliquait un trop grand nombre de cartes. La présence du matériel a alors permis aux élèves de modifier immédiatement leurs



propositions et de transformer une écriture défailante en y ajoutant une ou plusieurs cartes permettant de faire évoluer les nombres choisis.

Si l'on s'intéresse aux productions réalisées, on remarque que la totalité des élèves a recours à des décompositions en produits de facteurs. En revanche, seuls 44% des élèves utilisent à la fois des décompositions additives et des décompositions en produits de facteurs. De plus, il est intéressant de voir que les produits les plus fréquemment utilisés sont le 2 à 74% et les facteurs 4 et 10 à 37% chacun. Nous ne tiendrons pas compte du recours au facteur 1. La consigne aurait dû interdire son recours. Il est cependant intéressant de constater que les élèves n'y ont pas eu outrageusement recours, il semble être utilisé en cas de difficulté à trouver une autre décomposition effective.



Illustration d'élèves en action

### C.5 Analyse à posteriori des seconds entretiens

Les entretiens individuels se sont déroulés selon les mêmes modalités que la première fois. Ces derniers ont concerné cinq élèves et ont porté sur les mêmes calculs que lors du premier passage. Le choix de ces élèves a été fait en fonction des procédures employées précédemment et de leur taux de réussite, du pourcentage de présence lors des séances.

Nous constatons en premier lieu qu'ils se sont tous engagés dans la tâche. Cet engagement se traduit par un pourcentage de réussite moyen de 72% (Cf Annexe 21). Les cinq élèves utilisent la décomposition additive du grand facteur puis la distribution. On constate cependant, qu'aucun d'entre eux n'utilise le terme « décomposer » ou « décomposition ». Ainsi, lorsqu'il s'agit d'expliquer comment ils ont procédé, les élèves utilisent un exemple : « j'ai fait aussi  $7 \times 100$  ça fait 700 et  $7 \times 2$  ça fait 14, donc 714 » ou encore «  $2 \times 5$  ça fait 10,  $2 \times 6$  ça fait,  $2 \times 60$  plutôt ça fait 120 et 120 plus 10 ça fait 130 ». Deux élèves sur cinq n'effectuent aucune erreur. Une élève effectue une seule erreur : elle donne  $320 \times 9 = 2800$  et oublie 8 dizaines. Toutefois, nous notons le cas particulier d'une élève en difficulté pour laquelle le problème semble plus important au vu du pourcentage de réussite. En revanche, il y a un changement dans sa vision de la multiplication. Si l'élève ne parvient pas à verbaliser sa procédure, elle semble commencer par distribuer en multipliant le chiffre des unités par le plus petit facteur. Il semblerait qu'ensuite elle ne parvienne pas à continuer d'utiliser cette procédure pour le chiffre des dizaines puis des centaines ou qu'elle

choisisse certains chiffres qu'elle multiplie ou non (Cf Annexe 19). Elle recopie donc les résultats trouvés puis s'il y a des chiffres qui ne sont pas multipliés, ils sont recopiés à côté des premiers résultats écrits. Excepté ce cas particulier, on constate que les élèves ont un pourcentage de réussite proche avec un écart-type de 30. Le calcul le moins bien réussi demeure «  $320 \times 9$  » avec seulement 40% de réussite. En réalité, deux élèves ont décidé de passer et de ne pas réaliser ce calcul. Seule une élève a essayé de trouver le résultat. Ces deux élèves ont également décidé de ne pas s'appesantir sur le calcul  $39 \times 6$ . Si ces derniers n'ont pas su expliciter la raison de ce choix, il serait intéressant de les questionner à nouveau pour déterminer si cela vient des nombres en jeu ou de la technique choisie.

D'un point de vue affectif, j'ai pu constaté que les élèves ont cherché à comparer leur performance avec celle effectuée la première fois : « C'est plus facile », « Mieux », « Moins stressée » (Cf Annexe 20). Ces phrases font bien état d'une comparaison avec quelque chose. Par ailleurs, ces témoignages laissent penser que les élèves sont conscients de leurs progrès. Ils se trouvent moins dans l'appréhension de la tâche, ils semblent plus détendus face à cette dernière.

#### IV. Discussion des résultats

Afin de pouvoir esquisser une réponse à notre problématique, il s'agira dans cette partie de mettre en regard les performances et résultats réalisés par les cinq élèves avec ceux du premier passage.

Tout d'abord, on constate que le nombre d'erreurs a fortement diminué. Si la moyenne lors du premier passage était de 5 erreurs, elle a désormais diminué de 40% pour avoisiner les 3 erreurs. Mis à part une élève, tous les participants ont vu leur moyenne d'erreurs diminuer. On constate également que le temps moyen de réalisation s'est abaissé pour 3 minutes 27 secondes contre 3 minutes 58 secondes pour le premier passage. De même, comme le montre le graphique ci-dessous, la quasi totalité des élèves ont vu leur temps de réalisation diminué significativement :

	Temps lors du premier passage	Temps lors du second passage	Différence		Nombre d'erreurs (1)	Nombre d'erreurs (2)
E5	4min13s	3 min 20s	- 53s	E5	2	0
E4	4min55s	6min20s	+ 1min25s	E4	9	10
E3	1min42s	1min11s	- 31s	E3	2	0
E2	5min45s	3min24s	- 2min21s	E2	7	0 (3 passées)
E1	3min19s	3min02s	- 17s	E1	5	1
Temps moyen	3min58s	3min27s	-31s			

Ce premier constat montre une évolution des résultats proposés. Si ce dernier est encourageant, il est difficile de véritablement déterminer l'origine exclusive de cette progression (uniquement à partir de celui-ci). Il est donc impératif de les mettre en lien avec les propos rapportés par les élèves lors des entretiens pour déterminer les possibles raisons de tels changements.

Lors des entretiens individuels, il est apparu un premier constat : l'ensemble des élèves s'appuient sur la décomposition du plus grand des facteurs pour réaliser les calculs. Cette procédure était déjà présente lors du premier passage pour trois élèves uniquement. Il s'avère donc que deux élèves ont totalement ou en partie changer de procédure pour celle-ci. Ainsi, E1 a changé sa technique. Elle a abandonné l'utilisation de l'algorithme posé pour utiliser une décomposition additive du grand terme et utiliser la distributivité. Elle indique avoir changé de technique et que cela lui a permis de mieux gérer les calculs intermédiaires : « C'est plus facile parce qu'on avait réappris les multiplications comme ça. Avant j'avais rajouté des 0 parce que je faisais des multiplications posées dans ma tête. ». Il est possible, qu'en plus du changement de procédure, d'autres facteurs entrent en jeu pouvant expliquer sa progression toutefois, il semblerait que les différences séances lui aient quelque peu permis de remettre en questions ces procédures. Elle n'a en revanche pas précisé si ce changement avait eu lieu grâce aux activités manipulatoires ou aux

temps d'échanges entre pairs qui ont pu être effectués. E4 ne l'explique pas mais comme nous l'avons indiqué précédemment, elle semble avoir saisi le principe de la distributivité, puisqu'elle est capable de verbaliser certaines de ces actions mais pas le sens comme en témoigne le nombre de résultats erronés. Pour les trois autres élèves qui ont utilisé la même stratégie que précédemment, la diminution de leur temps de réalisation semble donc venir d'une meilleure utilisation de leur mémoire et ainsi d'une meilleure gestion des résultats intermédiaires.

Pour E3 et E5, il est difficile de savoir ce qui leur a véritablement permis de progresser car elles n'ont évoqué aucune différence notable. Elles ne font aucune référence aux activités réalisées lors de la séquence. Il semble donc encore difficile pour elles de prendre du recul sur ce qu'elles font réellement lorsqu'elles calculent. Il apparaît que le retour sur la méthode effectuée oralement avec chaque enfant leur permet ici de se rendre compte, de conscientiser ce qu'ils étaient en train de faire. On voit notamment avec les propos de E3 que, malgré l'ensemble des activités réalisées, elle n'avait pas véritablement pris conscience qu'elle effectuait en tout point la même méthode : « non en fait je fais pareil à chaque fois » (Cf Annexe 20). La verbalisation a permis cette conscientisation. Nous retrouvons ici la nécessité d'instaurer des situations de formulation. Toutefois, il semblerait que ce ne soient pas les situations d'échanges entre pairs qui aient permis de prendre du recul sur les procédures utilisées mais cette prise de parole individuelle et plus personnelle.

Si l'on s'intéresse aux propos et à la performance de E2, on remarque que celui-ci évoque à une reprise le fait que « tout se mélange » dans sa tête mais n'évoque pas d'oubli des résultats intermédiaires. Ainsi, on peut penser que la manipulation l'a aidé à travailler sa mémoire puisqu'il parvient désormais à aller au bout de sa procédure et à obtenir un résultat satisfaisant. Toutefois, il semblerait que les séances suivies ne lui aient pas permis de modifier l'organisation des ces images mentales. Cependant, nous pouvons noter que les activités effectuées lui ont permis de prendre confiance en lui et en ses capacités. Il paraît plus à l'aise avec l'activité mathématique ou en tous cas, fait preuve de moins de passivité : « moi, j'aime bien les choses comme ça où on réfléchit avec du temps, ça me booste un peu. » (Cf Annexe 20). De même, nous pouvons penser que les activités de manipulation des nombres au travers des étiquettes lui ont permis de se familiariser avec les chiffres dans une dynamique de calcul car ce dernier indique : « J'avais l'impression que j'avais plus le feeling, je pourrais dire. » ( Cf Annexe 20).

D'une manière plus globale, il semblerait que l'ensemble des séances effectuées aient permis aux élèves de s'entraîner puisqu'ils parviennent désormais à réduire à la fois leur temps et leur nombre d'erreurs. Il semblerait également qu'elles aient permis de mieux gérer l'utilisation de la distributivité pour calculer. Cependant, en s'appuyant sur les propos des élèves, il n'est pas certain que cela leur ait permis d'abstraire et de théoriser ce concept puisqu'ils ne font référence qu'aux exemples de calculs proposés pour justifier leur raisonnement. On constate également qu'il n'y a pas véritablement de changement dans le choix des procédures et aucune adaptation en fonction des nombres puisque 100% des élèves interrogés ici disent avoir recours à une procédure unique pour l'ensemble des calculs. Cela peut notamment permettre d'expliquer que le calcul  $320 \times 9$  demeure le plus échoué : 20% de réussite la première fois contre 40% la seconde fois.

## V. Conclusion

Cette étude n'a pas permis de mettre en évidence un impact total de la manipulation sur les habiletés en calcul mental des élèves. Si ces derniers ont amélioré leurs résultats, l'échantillon de sujets ayant repassé les entretiens individuels n'est pas suffisamment important pour pouvoir avancer que les activités de manipulation ont induit une modification significative chez les élèves. Il est évident que de nombreux facteurs peuvent influencer sur ces résultats. On pourrait ainsi citer l'espacement laissé entre les séances ne permettant pas vraiment de créer une continuité pédagogique propice aux apprentissages, l'ensemble des activités vécues par les élèves ont donc pu provoquer certains changements dans les procédures. Toutefois, la mise en place des activités a permis certaines observations.

Tout d'abord, d'un point de vue enseignant, les activités mettant en place de la manipulation ont grandement suscité l'intérêt et l'adhésion des élèves. Aucun élève n'a semblé passif et tous ont essayé de proposer quelque chose. Ce premier aspect est intéressant puisqu'il questionne sur l'attrait que constitue la manipulation, aspect que nous avons envisagé avant la mise en place des séances. Ensuite, il est évident que ces activités ont permis aux élèves de s'entraîner à calculer et donc d'enrichir leur construction mentale des nombres et des opérations. De plus, il a été remarqué que les temps d'explicitation de la procédure utilisée aient aidé les élèves à conscientiser leur propre action. Ce temps de partage, explicitation à un tiers semble avoir permis aux élèves de se rendre compte des actions mentales qu'ils effectuaient inconsciemment et de ce que cela pouvait signifier. Il semblerait donc que la séquence a permis de travailler plus sur le « comment » que sur le résultat. Ces observations nous invitent donc à réfléchir sur deux points : le premier est que les élèves semblent ne pas assez travailler sur leur méthodes de travail. Il serait donc intéressant de les entraîner à conscientiser leur cheminement, de les aider à développer des compétences métacognitives. Le second point est constitué par une réflexion sur les méthodes d'enseignement du calcul mental. Nous avons ici pu voir qu'au cours des phases de partage des stratégies des élèves, très peu parvenaient à s'intéresser à ce qui était dit mais qu'à l'inverse, lors des passages individuels les élèves avaient à coeur de proposer leur méthode et l'expression de cette dernière leur permettaient réellement une conscientisation. Ainsi, il serait intéressant d'alterner entre des phases de visualisation réelles, avec de la manipulation ou du jeu, pour permettre aux élèves de mettre des images sur ce qu'ils font de manière inconsciente, des phases de moments de partage des stratégies, essentiels à la fois pour les élèves partageant leur procédures afin qu'ils verbalisent véritablement leur action mais également pour ceux qui écoutent afin qu'ils s'emparent de nouvelles stratégies. Il faut cependant trouver une organisation qui permettent à ceux qui écoutent de s'impliquer et d'en voir clairement l'application afin de se l'approprier.

Enfin, d'un point de vue de la recherche, plusieurs pistes de réflexion ont émergé. La question de l'apprentissage des tables de multiplication et les modalités de leur enseignement est apparue comme source d'interrogation. En effet, on a pu constater que lors des premiers entretiens la question a été posée aux élèves de ce qu'ils pourraient dire à un camarade pour lui expliquer tout ce qu'il sait sur la multiplication, ces derniers ont alors majoritairement évoqué les tables de multiplication et presque la totalité n'a évoqué que cet élément. Seuls quelques élèves ont parlé du sens de la multiplication en abordant la notion de groupements, de paquets. Il semblerait donc que les résultats mémorisés des tables de multiplication abordés dès le cycle 2 par les élèves sembleraient finalement prendre une place importante dans leur vision de la multiplication, peut-être même plus que le sens. Cet aspect reste donc à travailler mais pourrait constituer une piste d'action permettant d'expliquer certaines des procédures employées par les élèves.

La seconde piste d'action mise en lumière est celle évoquée par Éric Trouillot dans son article « Plaidoyer pour une pratique de la décomposition des nombres et du calcul à l'envers ». Ce dernier faisant l'hypothèse que certaines difficultés en calcul pourraient venir d'une activité trop importante de comptage et peu de pratique de dénombrement au cycle 1. Cette hypothèse renforce l'idée selon laquelle notre vision des nombres serait influencée par les expériences et les « visions » que nous avons de celui-ci. Plus nous connaissons de représentations d'un nombre, plus nous pouvons faire appel à lui dans des contextes divers et donc être plus efficace en calcul mental. Nous pouvons faire l'hypothèse que cette observation est valable pour les décompositions de dizaines puis de centaines au cycle 2. Il serait alors intéressant dans le cadre de notre étude de questionner les enseignants de cycle 1 et 2 de l'école afin d'en apprendre plus sur les méthodes et situations proposées aux élèves.

## VI. Références bibliographiques

Anselmo, B., Charnay, R., Combier, G., Dessus, M-P., Madier, D. (2017). *Cap Maths - livre du maître*. Hatier.

Boule, F. (1995).  $31-18 = ?$  Regards sur le calcul mental. *Revue Grand N*, 58, pp. 39-52.

Boule, F. (1997). Étapes du calcul mental. *Revue Grand N*, 62, pp. 15-33.

Brissiaud, R. (2007). Calcul mental, symbolisme arithmétique et résolution de problèmes. *APMEP*, 469, pp. 213-224.

Butlen, D., Pezard, M. (1990). Calcul mental, calcul rapide. *Revue Grand N*, 47, pp. 35-59.

Charnay, R. (2018). , *Réussir en maths à l'école c'est possible* (pp.99-105). Hatier.

De Kocker, N., Grewis, A., Maurin, C., & Wozniak, F. (2010). Les enjeux d'un enseignement du calcul mental à l'école. *Copirelem*.

Dias, T. (2009). *Expérimenter, manipuler pour apprendre en mathématiques*. Académie de Lyon. [https://villeurbanne1.circo.ac-lyon.fr/spip/IMG/pdf/experimenter\\_manipuler.pdf](https://villeurbanne1.circo.ac-lyon.fr/spip/IMG/pdf/experimenter_manipuler.pdf)

Douady, R. (s.d). *Mathématiques (didactiques des)*. Encyclopædia Universalis. <http://www.universalis-edu.com/encyclopedie/mathematiques-didactique-des/>

Eustache, F. (s.d). *Mémoire de travail et mémoire à long terme*. Encyclopædia Universalis. <https://www.universalis.fr/encyclopedie/memoire/3-memoire-de-travail-et-memoire-a-long-terme/>

France. Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports. (2018). Bulletin officiel spécial n°3. Enseignement du calcul : un enjeu majeur pour la maîtrise des principaux éléments de mathématiques à l'école primaire. <https://www.education.gouv.fr/bo/18/Special3/MENE1809042N.htm#:~:text=Il%20s'agit%20d'en,de%20proc%C3%A9dures%20de%20calcul%20efficaces.>

France. Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports. (2020). Programmes du cycle 3. *Éduscol*. <https://eduscol.education.fr/87/j-enseigne-au-cycle-3>

France. Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports. (2016). Le calcul en ligne au cycle 2. *Éduscol*. <https://eduscol.education.fr/document/15403/download>

Modeste, S. (2019). *Théorie des situations didactiques. Une théorie pour l'action*. Université de Montpellier. <https://diu-eil.gricad-pages.univ-grenoble-alpes.fr/didactique/DIU-Strasbourg-didactique-partie3.pdf>

Pinel, N. (2019). *La manipulation dans l'enseignement des mathématiques*. APMEP. <https://afdm.apmep.fr/rubriques/opinions/la-manipulation-dans-lenseignement-des-mathematiques/>

Roditi, E. (2009). Le calcul mental entre sens et technique. *Revue française de pédagogie*, 166. pp.131-133.

Trouillot, E. (2009). Plaidoyer pour une pratique de la décomposition des nombres et du calcul à l'envers. *APMEP*, 485. pp. 717-724.



## VII. Annexes

### Table des matières

Annexe 1 : fiche de préparation séance 1.....	49
Annexe 2 : opérations manipulées.....	50
Annexe 3 : fiche de préparation séance 2.....	51
Annexe 4 : séries de calculs proposées puis discutées .....	52
Annexe 5 : fiche de préparation séance 3.....	53
Annexe 6 : fiche de jeu.....	54
Annexe 7 : fiche de préparation séance 4.....	55
Annexe 8 : feuille de jeu .....	56
Annexe 9 : réponses des élèves aux premiers entretiens .....	57
Annexe 10 : évaluation des calculs par les élèves .....	58
Annexe 11 : grille d'analyse des entretiens .....	59
Annexe 12 : feuilles de calculs remplies lors du premier passage .....	61
Annexe 13 : pourcentage de réussite et évaluation de la difficulté des calculs lors du premier passage pour les 5 élèves analysés.....	64
Annexe 14 : cartes nombres utilisées.....	65
Annexe 15 : trace écrite - séance 1 .....	66
Annexe 16 : affiches produites en séance 2 .....	67
Annexe 17 : affiches produites en séance 2 .....	68
Annexe 18 : catégorisation des calculs proposés par les élèves .....	69
Annexe 19 : feuilles de calculs remplies lors du second passage.....	71
Annexe 20 : verbatims des seconds entretiens .....	74
Annexe 21 : pourcentage de réussite et évaluation de la difficulté des calculs lors du second passage pour les 5 élèves analysés.....	78

## Annexe 1 : fiche de préparation séance 1

CM2

---

# Séance 1

---

Période 3	Mathématiques : Nombres et calculs	45 minutes
<b>Objectif de la séance :</b> Décomposer un nombre en fonction d'un objectif de calcul		
<b>Matériel :</b> cartes nombres superposables, cartes vierges		
<b>Compétences et connaissances travaillées :</b> -> Calculer avec des nombres entiers -> Connaître les unités de la numération décimale pour les nombres entiers (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et les relations qui les lient. -> S'engager dans une démarche, observer, manipuler, expérimenter en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées. -> Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notions adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation. -> Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange -> Connaître des propriétés de l'addition, de la soustraction et de la multiplication		

<b>Durée</b>	<b>Déroulement</b>
10 minutes	<p><b>Phase 1 - Modification du premier terme</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Répartition des élèves en groupe de 2 : chaque élève travaille avec l'élève en face de lui.</li> <li>- Présentation de l'activité : « Vous allez recevoir une feuille avec deux calculs notés. Vous posséderez également ces calculs mais constitués à partir de cartes que vous pouvez superposer ou décaler. Pour le moment, nous n'allons pas essayer de trouver le résultat de ces opérations, nous allons essayer de trouver différentes manières d'écrire chacun de ces calculs. Pour cela, vous allez pouvoir utiliser les cartes qui forment le calcul mais également d'autres cartes. Vous aurez des cartes avec des signes opératoires et d'autres « vides » sur lesquelles vous pourrez écrire ce qui vous convient pour terminer votre écriture. »</li> </ul> <p><u>Consigne :</u> À l'aide des calculs constitués de cartes et des autres cartes à votre disposition, essayez de trouver d'autres écritures du calcul. Attention, pour l'instant vous n'avez le droit de modifier que le terme le plus petit.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Effectuer un exemple collectivement.</li> <li>- Distribution des calculs à chacun des binômes et début de l'activité. L'enseignante se déplace entre les groupes pour s'assurer de la bonne mise au travail de chacun des élèves. Durant l'activité, elle prendra également les productions des élèves en photo.</li> </ul>
10 minutes	<p><b>Phase 2 - Modification du second terme</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Rassemblement de tous les élèves et passation de la consigne supplémentaire : « Nous allons maintenant essayer de trouver de nouvelles écritures pour chacun des calculs en modifiant uniquement le terme le plus grand de l'opération. »</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Effectuer un nouvel exemple collectivement et préciser aux élèves qu'ils doivent conserver les écritures trouvées précédemment.</li> <li>- Début de l'activité. L'enseignante se déplace entre les groupes afin de vérifier qu'aucun matériel n'est manquant et s'assure de la compréhension de la consigne par l'ensemble des élèves.</li> </ul>

20 minutes	<p><b>Phase 3 - Mise en commun</b></p> <p>-Pour chaque opération, un groupe vient présenter les différentes décompositions qu'il a trouvé. Ces dernières sont projetées au tableau. Le reste de la classe suit le raisonnement proposé et vérifie que la proposition est recevable. Les élèves qui possédaient les mêmes calculs peuvent également donner leurs décompositions si ces dernières sont différentes de celles proposées.</p> <p>On effectuera de même avec le reste des calculs.</p> <p>-On effectuera enfin une synthèse de la séance via la réalisation d'une affiche reprenant les différentes manières de traiter un calcul. Cette affiche sera complétée manuscritement par l'enseignante à partir des interventions des élèves.</p>
------------	--

### Annexe 2 : opérations manipulées

4 groupes avec les opérations suivantes	2 groupes avec les opérations suivantes	4 groupes avec les opérations suivantes	3 groupes avec les opérations suivantes
410 x 9	52 x 4	22 x 8	85 x 5
35 x 9	250 x 4	50 x 8	120 x 5

## Annexe 3 : fiche de préparation séance 2

CM2

---

# Séance 2

---

Période 3	Mathématiques : Nombres et calculs	40 minutes
-----------	------------------------------------	------------

**Objectif de la séance :** Utiliser des stratégies de calcul adaptées pour parvenir à un résultat

**Matériel :** feuilles blanches, 6 séries de calculs imprimées en plusieurs exemplaires

**Compétences et connaissances travaillées :**

- > Calculer avec des nombres entiers
- > Connaître les unités de la numération décimale pour les nombres entiers (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et les relations qui les lient.
- > Connaître des propriétés de l'addition, de la soustraction et de la multiplication.
- > S'engager dans une démarche, observer, manipuler, expérimenter en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées.
- > Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notions adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation.
- > Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.

<b>Durée</b>	<b>Déroulement</b>
5 minutes	<p><b>Phase 1 - Réactivation</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Projection de l'opération « <math>114 \times 9</math> »</li> <li>- Les élèves cherchent mentalement le résultat et l'inscrivent sur leur ardoise.</li> <li>- Explication par les élèves des stratégies utilisées pour parvenir au résultat. On comparera les stratégies utilisées en faisant un rappel, si elle n'apparaît pas, sur celle mise à jour la séance dernière.</li> </ul>
5 minutes	<p><b>Phase 2 - Recherche individuelle</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Distribution d'une série de 4 calculs à chaque élève. Chacun d'entre eux doit chercher le résultat de ces derniers et les inscrire sur leur cahier de brouillon.</li> </ul> <p>Consigne : « Vous disposez de 5 minutes pour effectuer l'ensemble des calculs mentalement et noter les résultats sur votre cahier de brouillon ».</p>
15 minutes	<p><b>Phase 3 - Mise en commun par groupe</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Répartition des élèves en groupes. Les élèves ayant reçu la même série de calculs sont rassemblés par groupe de 4 à 5 élèves.</li> </ul> <p>Consigne : « Mettez en commun les résultats que vous avez trouvés et discutez-en afin de vous mettre d'accord sur le résultat de chacune d'entre elles ».</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Les groupes ayant terminé continuent à travailler avec la consigne suivante : « Choisissez une opération parmi les quatre et inscrivez sur la feuille blanche les étapes qui vous ont permis de trouver le résultat ». On distribuera à chaque groupe une seule feuille blanche et leur préciseront qu'une seule affiche et à produire par groupe. On précisera également aux élèves qu'ils devront venir présenter les procédures utilisées pour effectuer leur calcul et que lors de cette dernière ils devront faire référence aux procédures présentées sur l'affiche produite la séance précédente et qui est installée dans la classe.</li> </ul>

10 minutes	<p><b>Phase 4 - Mise en commun collective</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Chaque groupe vient présenter son travail et justifier sa proposition. Le reste de la classe vérifie que la proposition est recevable.</li> <li>- Réalisation d'une synthèse par plusieurs élèves sur ce qu'ils ont retenu de la séance.</li> </ul>
------------	--



**Annexe 4 : séries de calculs proposées puis discutées**

Série 1	Série 2	Série 3	Série 4	Série 5	Série 6
108 x 3	106 x 7	8 x 44	9 x 80	4 x 66	40 x 5
5 x 330	206 x 3	9 x 70	260 x 4	105 x 3	7 x 104
7 x 60	260 x 4	108 x 3	180 x 3	5 x 70	9 x 70
210 x 4	40 x 5	24 x 6	5 x 30	6 x 180	102 x 3

## Annexe 5 : fiche de préparation séance 3

CM2

### Séance 3

Période 3	Mathématiques : Nombres et calculs	30 minutes
<p><b>Objectif de la séance :</b> Parvenir à un nombre cible par le calcul, de la manière la plus efficace</p>		
<p><b>Matériel :</b> feuilles de jeu pour chaque élève, enveloppe 1 et 2 pour chaque binôme, calculatrice, cartes nombres et signes superposables</p>		
<p><b>Compétences et connaissances travaillées :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-&gt; Calculer avec des nombres entiers.</li> <li>-&gt; Connaître les unités de la numération décimale pour les nombres entiers (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et les relations qui les lient.</li> <li>-&gt; Connaître des propriétés de l'addition, de la soustraction et de la multiplication.</li> <li>-&gt; Utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat.</li> <li>-&gt; Comprendre, respecter et faire respecter règles.</li> </ul>		
 <b>Durée</b>	 <b>Déroulement</b>	
5 minutes	<p><b>Phase 1 - Introduction de l'activité</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- La feuille de jeu que vont posséder les élèves pendant la partie est projetée au tableau.</li> <li>- Explication des règles du jeu : « Vous allez jouer par deux à un jeu. Pour jouer, vous avez besoin de deux enveloppes numérotées 1 et 2 et d'une feuille de jeu chacun. L'un d'entre vous va tirer une étiquette dans l'enveloppe numérotée « 1 » et poser celle-ci sur la table. Puis, le deuxième joueur va tirer une seconde étiquette dans l'enveloppe numérotée « 2 » et poser également l'étiquette sur la table. Vous allez devez ensuite accoler les deux nombres tirés et inscrire le nombre obtenu dans la première ligne de la colonne « nombre cible ». Une fois que c'est fait, vous devez vous aider des cartes nombres et des cartes vierges pour écrire un calcul permettant d'obtenir le nombre cible. Vous devez essayer d'utiliser le moins de cartes possibles».</li> <li>=&gt; l'enseignante remplit la feuille de calcul à mesure qu'elle explique les consignes</li> <li>- Suite de l'explication des règles du jeu : « Une fois que votre calcul est produit avec les cartes, vous l'écrivez dans la ligne 1 de la colonne « Calculs ». Ensuite, vous comptez le nombre de cartes que vous avez utilisé pour produire ce calcul. Lorsque vous avez tous les deux fini, vous montrez votre calcul à votre camarade. À l'aide de la calculatrice, vous vérifiez que le calcul permet bien d'obtenir le nombre cible. Si le calcul est correct, vous remportez autant de points que de cartes utilisées.»</li> <li>- On précisera aux élèves que l'on va jouer à ce jeu pendant au moins 10 minutes et que le gagnant sera celui qui aura, à la fin de la partie, le moins de points possible.</li> <li>-On demandera à un élève de reformuler les règles du jeu</li> <li>- On laissera un temps de question de la part des élèves afin que ceux-ci intègrent bien la consigne.</li> </ul>	
10- 15 minutes	<p><b>Phase 2 - Lancement d'une partie</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Distribution du matériel nécessaire</li> <li>- <u>Consigne</u> : disputez une partie avec l'élève qui se trouve en face de vous.</li> <li>- Les groupes les plus rapides pourront disputer une seconde partie.</li> <li>- L'enseignante se déplace entre les groupes pour encourager les élèves et s'assurer du respect des règles du jeu.</li> </ul>	

10 minutes	<p><b>Phase 3 - Synthèse collective</b></p> <p>- Synthèse sur les stratégies qui permettent de remporter la partie : on s'appuiera sur les productions des élèves via leur feuille de résultats pour proposer des pistes d'améliorations.</p>
------------	---

### Annexe 6 : fiche de jeu

JOUEUR 1				
	Nombre cible	Calculs	Nombre de cartes utilisées	Nombre de points
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
			TOTAL	

## Annexe 7 : fiche de préparation séance 4

CM2

### Séance 4



Période 3	Mathématiques : Nombres et calculs	30 minutes
-----------	------------------------------------	------------

**Objectif de la séance :** Réaliser la multiplication d'un entier par un entier inférieur à 10

**Matériel :** grilles de jeu pour chaque élève, bateaux découpés, stylos et calculatrices

**Compétences et connaissances travaillées :**

- > Calculer avec des nombres entiers.
- > Connaître les unités de la numération décimale pour les nombres entiers (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et les relations qui les lient.
- > Connaître des propriétés de l'addition, de la soustraction et de la multiplication.
- > Utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat.
- > Comprendre, respecter et faire respecter règles.

 <b>Durée</b>	 <b>Déroulement</b>
5 minutes	<p><b>Phase 1 - Introduction de l'activité</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- La grille de jeu ainsi que l'ensemble des bateaux sont projetés au tableau.</li> <li>- Préciser aux élèves qu'ils vont jouer à un jeu par groupe de 3, que deux joueurs vont s'affronter et que le troisième aura le rôle d'arbitre. À la fin de la partie, l'arbitre prendra la place du perdant.</li> <li>- Explication des règles du jeu : « Chaque joueur va disposer de deux grilles de jeu comme celle qui est projetée au tableau ainsi que de bateaux. Sur la grille la plus grande, il doit placer les bateaux qu'il possède. Le but du jeu est de « toucher » et « couler » l'ensemble des bateaux de l'adversaire. Pour cela, il faut trouver les cases de la grille adverse sur lesquelles sont placés les bateaux. Ainsi, le joueur qui commence la partie donne à voix haute le nom d'une case en annonçant la le calcul concerné. Par exemple, « <math>7 \times 45 = 315</math> ». L'arbitre vérifie sur la calculatrice si le calcul est exact. Si c'est le cas, le joueur adverse annonce « touché » si son navire est touché ou « raté » s'il n'y avait pas de bateau sur cette case. Lorsque toutes les cases d'un bateau sont touchées, le joueur doit annoncer « touché coulé ». Le joueur qui a annoncé le calcul note ce que lui a dit l'adversaire sur la deuxième grille dont il dispose : il effectue une croix sur la case correspondante si c'est raté ou un rond rouge si c'est touché. Si le produit est inexact, le tour du joueur est fini et c'est à son adversaire. Lorsqu'un joueur touche un bateau il peut rejouer. »</li> <li>- Les règles du jeu étant longues, on effectuera une reformulation des règles et un exemple de début de partie. Ces dernières resteront affichées durant toute la partie pour que les élèves puissent s'y référer.</li> </ul>
10- 15 minutes	<p><b>Phase 2 - Lancement d'une partie</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Distribution du matériel nécessaire</li> <li>- <u>Consigne</u> : Disputez une partie avec l'élève qui se trouve en face de vous.</li> <li>- Les groupes les plus rapides pourront disputer une seconde partie.</li> <li>- L'enseignante se déplace entre les groupes pour encourager les élèves et s'assurer du respect des règles du jeu.</li> </ul>



Annexe 8 : feuille de jeu

X	56	146	16	300	44	610	30	220	28
6									
8									
2									
5									
7									
3									
9									
4									
2									

### Annexe 9 : réponses des élèves aux premiers entretiens

	24x 4	102 x 7	85 x 5	25 x 8	210 x 4	320 x 9	65 x 2	39 x 6	190 x 2	34 x 3	% de réussite
AL											100 %
AM											100 %
AN											100 %
AR		X	X	X		X		X		X	40 %
AU		X				X		X	X		60 %
E5	X					X					80 %
D			X								90 %
E							X				90 %
GN											100 %
GA								X			90 %
HC				X							90 %
HJ					X	X		X	X		60 %
J						X					90 %
E4	X	X	X	X		X	X	X	X	X	10 %
LC			X			X	X	X			60 %
Lo									X		90 %
LO								X			90 %
LP						X				X	80 %
E3		X		X							80 %
MA				X		X		X			70 %
NA				X				X			80 %
E2			X	X		X	X	X	X	X	30 %
PA											100 %
RO											100 %
SH		X									90 %
VI											100 %
E1		X			X	X	X	X			50 %
Réponses incorrectes	<b>2</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>2</b>	<b>11</b>	<b>5</b>	<b>11</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	
Pourcentage de réussite	<b>92,59 %</b>	<b>77,77 %</b>	<b>81,48 %</b>	<b>74 %</b>	<b>92,59 %</b>	<b>59,26 %</b>	<b>81,48 %</b>	<b>59,26 %</b>	<b>81,48 %</b>	<b>85,18 %</b>	

### Annexe 10 : évaluation des calculs par les élèves

	24 x 4	102 x 7	85 x 5	25 x 8	210 x 4	320 x 9	65 x 2	39 x 6	190 x 2	34 x 3
AL				D						
AM	F	F			F		F			
AN	F	F			F	D	F	D	F	D
AR	D		D				D			
AU			D	F	D				D	F
E5	F					D			D	
D		F		F		F	D		D	
E	F	F			F	D	F	D	F	F
GN	D			D						
GA	F	F				D		D		
HC		D				D	D		D	
HJ			F			D	F	D	F	
J	F		D		F	D			F	
E4			F							
LC	F			D		D		D	F	F
Lo					F				F	
LO	F		D		F	D	F			
LP	F		F	F		D		D	F	D
E3	D		D	F	F	F	D			D
MA	F	F	F	F	F		F	D	F	F
NA	F				F	D	F	D		F
E2	F	F	F	D	F	D	D		F	
PA	F	F	F							
RO	F		F			D	F	D	F	
SH	D	F	F		D	D	D	F	D	D
VI	D		D			F	F	D	F	F
E1	D			D	F	F	D		D	D
F	13	9	8	5	11	4	9	1	11	6
D	6	1	6	5	2	14	7	10	6	5

## Annexe 11 : grille d'analyse des entretiens

	Durée de réalisation	Utilise la distributivité en décomposant le grand facteur		Utilise la distributivité en décomposant le petit facteur	Utilise l'algorithme posé en colonne	Utilise ses mains ou son corps pour se repérer	Erreur de calcul	Perte de résultats intermédiaires	Évoque les tables de multiplication	Abus de langage	Pourcentage de réussite
		Décompo canonique	Autres								
AL	2min48s	OUI	OUI (190=19x10)						OUI		100 %
AM	3min14s	OUI									100 %
AN	1min09s	OUI						OUI		OUI	100 %
AR	2min33s	OUI				OUI	OUI	OUI	OUI		40 %
AU	4min16s	OUI		OUI (5=2x2+1)			OUI		OUI		60 %
E5	4min13s	OUI					OUI		OUI	OUI	80 %
D	2min12s				OUI	OUI	OUI		OUI		90 %
E	5min29s				OUI		OUI	OUI			90 %
GN	1min50s	OUI	OUI (39=40-1)	OUI		Parle					100 %
GA	2min30s	OUI					OUI		OUI		90 %
HC	6min29	OUI		OUI (9=10-1)			OUI			OUI	90 %
HJ	3min35	OUI + commutativité					OUI (oublie 0 unité)		OUI		60 %
J	7min10	OUI					OUI (oublie 0 unité)				90 %
E4	4min55	OUI mais éronnée					OUI	OUI	OUI		10 %
LC	5min25	OUI					OUI		OUI	OUI	60 %

	Durée de réalisation	Utilise la distributivité en décomposant le grand facteur		Utilise la distributivité en décomposant le petit facteur	Utilise l'algorithme posé en colonne	Utilise ses mains ou son corps pour se repérer	Erreur de calcul due à la décomposition	Perte de résultats intermédiaires	Évoque les tables de multiplication	Abus de langage	Pourcentage de réussite
		Décomposition canonique	Autres								
Lo	2min22s		OUI (190=19x10)				OUI				90 %
LO	2min48s	OUI					OUI	OUI			90 %
LP	6min42s	Utilise des additions itérées					OUI		OUI		80 %
E3	1min42s	OUI					OUI		OUI	OUI	80 %
MA	2min26s	OUI						OUI	OUI		70 %
NA	2min33s	OUI					OUI		OUI	OUI	80 %
E2	5min45s	OUI					OUI	OUI	OUI		30 %
PA	1min04s	OUI								OUI	100 %
RO	2min58s	OUI							OUI	OUI	100 %
SH	3min06s	OUI	OUI (5 = 10/2)	OUI (7=10-3)			OUI	OUI			90 %
VI	2min42s	OUI				OUI	OUI		OUI		100 %
E1	3min19s				OUI		OUI		OUI	OUI	50 %

Annexe 12 : feuilles de calculs remplies lors du premier passage

E1

$24 \times 4 = 96$
$102 \times 7 = 114$
$85 \times 5 = 425$
$25 \times 8 = 200$
$210 \times 4 = 8004$
$320 \times 9 = 2700$
$65 \times 2 = 120$
$39 \times 6 = 184$
$190 \times 2 = 380$
$34 \times 3 = 102$

E2

$24 \times 4 = 24 \ 54 \ 898$
$102 \times 7 = 774$
$85 \times 5 = 65$ 450
$25 \times 8 = 7640$
$210 \times 4 = 840$
$320 \times 9 = 28180$
$65 \times 2 = 81 \ 210$ <small>2x60    120    10                    10    130</small>
$39 \times 6 = 184$
$190 \times 2 = 308$ 200 180 ↻
$34 \times 3 = 92$


## E3

$24 \times 4 = 96$	o
$102 \times 7 = 714$	
$85 \times 5 = 425$	o
$25 \times 8 = 200$	+
$210 \times 4 = 840$	+
$320 \times 9 = 2880$	+
$65 \times 2 = 130$	o
$39 \times 6 = 234$	
$190 \times 2 = 380$	
$34 \times 3 = 102$	o

## E4

$24 \times 4 =$	
$102 \times 7 =$	
$85 \times 5 = 425$	+
$25 \times 8 =$	
$210 \times 4 = 840$	
$320 \times 9 =$	
$65 \times 2 = 130$	
$39 \times 6 =$	
$190 \times 2 =$	
$34 \times 3 = 102$	

## E5

+

$$24 \times 4 = 56$$

$$102 \times 7 = 714$$

$$85 \times 5 = 425$$

$$25 \times 8 = 200$$

$$210 \times 4 = 840$$

•

$$320 \times 9 = 188$$

$$65 \times 2 = 130$$

$$39 \times 6 = 234$$

•

$$190 \times 2 = 380$$

$$34 \times 3 = 102$$

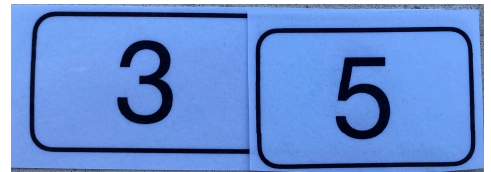
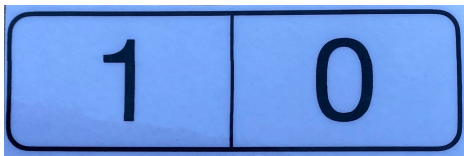


**Annexe 13 : pourcentage de réussite et évaluation de la difficulté des calculs lors du premier passage pour les 5 élèves analysés**

	Temps de réalisation	24x 4	102 x 7	85 x 5	25 x 8	210 x 4	320 x 9	65 x 2	39 x 6	190 x 2	34 x 3	Pourcentage de réussite
E5	4min13s	X					X					80 %
E4	4min55s	X	X	X	X		X	X	X	X	X	10 %
E3	1min42s		X		X							80 %
E2	5min45s			X	X		X	X	X	X	X	30 %
E1	3min19s		X			X	X	X	X			50 %
Réponses incorrectes		<b>2</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	
Pourcentage de réussite		<b>60 %</b>	<b>40 %</b>	<b>60 %</b>	<b>40 %</b>	<b>80 %</b>	<b>20 %</b>	<b>40 %</b>	<b>40 %</b>	<b>60 %</b>	<b>60 %</b>	

	24x 4	102 x 7	85 x 5	25 x 8	210 x 4	320 x 9	65 x 2	39 x 6	190 x 2	34 x 3
E5	F					D			D	
E4			F							
E3	D		D	F	F	F	D			D
E2	F	F	F							
E1	D			D	F	F	D		D	D
F	2	1	2	1	2	2	0	0	0	0
D	2	0	1	1	0	1	2	0	2	2

Annexe 14 : cartes nombres utilisées



Annexe 15 : trace écrite - séance 1

Pour multiplier un nombre par un autre nombre  $< 10$  je peux :

↙ m'intéresser au plus petit des deux

↓  
je le décompose.

Par exemple :

pour multiplier par 5 : je  $\times 10$   
puis je  $\div 2$

pour multiplier par 4 : je  $\times 2$   
puis encore  $\times 2$   
car  $4 = 2 \times 2$

pour multiplier par 9 : je  $\times 10$   
puis j'enlève  $1 \times$   
le plus grand nombre  
(nombre que je multiplie)

→ m'intéresser au plus grand des deux

↓  
je le décompose

Par exemple :  $104 \times 6$   
 $104 = 100 + 4$

↓  
je multiplie  
ensuite chaque  
nombre par 6

Par exemple :  $100 \times 6 =$   
 $4 \times 6 =$


↓  
j'ajoute les 2  
résultats


Annexe 16 : affiches produites en séance 2

Comment faire pour trouver une multiplication sans la table ?

$24 \times 6$

- 1 On fait d'abord  $20 \times 6 = 120$
- 2 Après on fait  $4 \times 6 = 24$
- 3 Après on additionne  $120 + 24 = 144$





Comment calculé de tête la multiplication  $24 \times 6$

Pour trouver (de tête) la multiplication  $24 \times 6$ , on a d'abord multiplié  $24 \times 3$  qui est égal à 72. Après nous avons multiplié  $72 \times 2$  qui est égal à 144 (le résultat).

Voilà notre stratégie !!

$24 \times 6 =$

D'abord nous avons fait  $7 \times 100 = 700$  puis nous avons fait  $7 \times 6 = 42$  et  $700 + 42 = 742$ .

$7 \times 106 = 742$

Voilà comment nous avons trouvé ce résultat.

$3 \times 206 = 618$

D'abord nous avons fait  $3 \times 200 = 600$  puis nous avons fait  $3 \times 6 = 18$  et  $600 + 18 = 618$

$260 \times 4 = 1040$

D'abord nous avons fait  $4 \times 200 = 800$  puis nous avons fait  $4 \times 60 = 240$  et  $800 + 240 = 1040$

$40 \times 5 = 200$

Ensuite nous avons fait  $4 \times 50 = 200$

$106 \times 7 = 742$


$(6 \times 7 = 42) + (100 \times 7 = 700) \dots = 742$

$(2 \times 106) \times 2 + (106 \times 1)$

200 x 3

$(6 \times 3 = 18) + (200 \times 3) = 618$

$(206 \times 1) \times 3 = 618$



Annexe 17 : affiches produites en séance 2

# Comment faire une multiplication

$\times$     $\times$     $+$     $\div$     $-$     $+$

Pour faire une multiplication de tête il faut :  $+$     $-$     $\times$

ex:  $9 \times 80$

$9 \times 80 : (9 \times 8 = 72) + (72 \times 10) = 720$

Le 10 caractérise le 0 de  $9 \times 80$

Si jamais il ya 2 nombres

ex:  $260 \times 4$  On commence par multiplier par la droite et écrire par la droite. Le résultat est  $1040$

## Comment faire la multiplication: $9 \times 80$ ?

Pour faire  $9 \times 80$   
On fait  $9 \times 8 = 72$   
 $72 \times 10 = 720$  car  $80 = 8 \times 10$

$3 + 5$

## Technique

Technique de décomposition:

Ex:  $144 \times 8 = 8 \times 100 + 8 \times 40 + 8 \times 4 = 800 + 320 + 32 = 1152$

$144 = (1 \times 100) + (4 \times 10) + 4$

Pour décomposer, il faut faire  $\times$  plus les autres calculs.

$5 \times 330$	$5 \times 300 = 1500$
$5 \times 30 = 150$	
	$1500 + 150 = 1650$

# MAGNIFIQUE

c'est aller    pour simplifier    comment calculer

1)  $5 \times 330 = 5 \times 300 + 5 \times 30$   
 2) résultat    résultat    résultat

$5 \times 33 = 165$      $165 \times 20 = 3300$

addition    Rigole    mathématiques    Trop    Réponse    5000

## Annexe 18 : catégorisation des calculs proposés par les élèves

	Nombre de calculs	Erreur	décompositions X	décompositions +	Décompositions mixtes	x1	x2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	x9	x10	x11	X16	Nombre de facteurs utilisés
AL	9	0	8/9	1			6			1							1	3
AM	9	9	9/9															
AN	9	0	9/9				2	1	4	2			1	1				6
AR	5	1	5/5			2	1		2									3
AU	9	0	4/9		5	5									8			2
E5	9	1 (2X80 = 180)	7/9		2		9											1
D	9	0	7/9		2	1	5			1					2			4
E	9	0	2/9		7										9			1
GN	9	0	9/9			1	2		1				4	1				5
GA	9	0	9/9			3	2	1				1			2			5
HC	6	0	5/6		1	1	3	1								1		3
HJ	6	0	5/6		1		2			1					3			3
J	9	1 (78 x2 = 176)	9/9				7								2			2
E4																		



Annexe 19 : feuilles de calculs remplies lors du second passage

E1

$24 \times 4 = 96$
$102 \times 7 = 714$
$85 \times 5 = 425$
$25 \times 8 = 200$
$210 \times 4 = 840$
$320 \times 9 = 2800$
$65 \times 2 = 130$
$39 \times 6 = 234$
$190 \times 2 = 380$
$34 \times 3 = 102$

E2

$24 \times 4 = 96$
$102 \times 7 = 714$
$85 \times 5 =$
$25 \times 8 = 200$
$210 \times 4 = 840$
$320 \times 9 =$
$65 \times 2 = 130$
$39 \times 6 =$
$190 \times 2 = 380$
$34 \times 3 = 102$



## E3

$$24 \times 4 = 96$$

$$102 \times 7 = 714$$

$$85 \times 5 = 425$$

$$25 \times 8 = 200$$

$$210 \times 4 = 840$$

$$320 \times 9 = 2880$$

$$65 \times 2 = 130$$

$$39 \times 6 = 234$$

$$190 \times 2 = 380$$

$$34 \times 3 = 102$$

## E4

$$24 \times 4 = 86$$

$$102 \times 7 = 1074$$

$$85 \times 5 = 105$$

$$25 \times 8 =$$

$$210 \times 4 = 870$$

$$320 \times 9 =$$

$$65 \times 2 = 22$$

$$39 \times 6 =$$

$$190 \times 2 = 278$$

$$34 \times 3 = 22$$

## E5

$$24 \times 4 = 96$$

$$102 \times 7 = 714$$

$$85 \times 5 = 425$$

$$25 \times 8 = 200$$

$$210 \times 4 = 840$$

$$320 \times 9 = 2880$$

$$180 \quad 2700$$

$$65 \times 2 = 130$$

$$10$$

$$39 \times 6 = 234$$

$$54 \quad 180 \quad 3$$

$$190 \times 2 = 380$$

$$34 \times 3 = 102$$

## Annexe 20 : verbatims des seconds entretiens

E1

---

M - Comment tu t'es sentie par rapport à la première fois?

E1 - C'est plus facile parce qu'on avait réappris les multiplications comme ça. Du coup, en fait j'avais rajouté des 0 au lieu d'avoir fait... parce que je fais par exemple  $2 \times 5$  ça fait 10.  $2 \times 6$  ça fait,  $2 \times 60$  plutôt ça fait 120 et 120 plus 10 ça fait 130. Avant j'avais rajouté des 0 parce que je faisais des multiplications posées dans ma tête.

M - Alors que maintenant comment fais-tu?

E1 - Du coup, je fais comme ça.

M - Tu distribues?

E1 - Oui!

M - Parce que vous l'avez vu, qu'est-ce qui fait que tu as changé?

E1 - On l'a fait en classe, je crois. On l'a réappris. C'est plus facile.

M - Est-ce que tu fais pareil pour tous les calculs?

E1 - Oui.

M - D'accord. Donc  $25 \times 8$ , tu as fait  $8 \times 5$  et après  $8 \times 20$ . C'est ça?

E1 - Oui.

E2

---

M - Est-ce que tu peux me dire les calculs que tu as trouvés les plus faciles et les plus difficiles.

E2 - Euh... Le plus difficile. Euh.... La plus facile, c'est celle là. Et la plus difficile, c'est ... (montre du doigt).

M - D'accord. Par rapport à la première fois, comment tu t'es sentie?

E2 - Mieux.

M - Pourquoi? Parce que tu connaissais ce..

E2 - Non mais je ne sais pas, je ne me rappelais même plus que c'était ces calculs. J'avais l'impression que j'avais plus le feeling, je pourrais dire.

M - De facilité, ça venait plus tout seul. D'accord. Est-ce que tu pourrais m'expliquer rapidement comment tu as procédé? Est-ce que tu as procédé différemment pour tous les calculs? Comment tu as fait?

E2 - Pareil! En fait je faisais  $4 \times 2$  ça fait 8, du coup 80 parce que je mets un 0 par exemple.

M - Pourquoi tu dis que tu mets un 0?

E2 - Parce que c'est une dizaine. Je mets  $4 \times 4$  ça fait 16.  $8 + 16$  ça fait 96.

Par exemple pour celle là, j'ai fait aussi  $7 \times 100$  ça fait 700 et  $7 \times 2$  ça fait 14, donc 714.

M - Et pareil pour tout.

E2 - Oui.

M - Et pourquoi ça n'a pas fonctionné pour ceux que tu as passés ?

E2 - Euh, en fait. En fait, je trouve... Des fois, en fait mon cerveau j'arrive pas à ... En fait, je sais que c'est ce nombre mais j'arrive pas à l'écrire. Enfin, pas à l'écrire, à ...

M - A t'en souvenir?

E2 - Non, en fait c'est pas ça. C'est que je vais l'écrire, je ne l'écris pas et du coup tout se mélange et tout, j'arrive pas trop et ça en fait vu que c'était en fait un peu les plus avec des 8, des 6, 9, c'était pas super facile à retenir. Du coup, voilà.

M - Donc si je te suis, par exemple pour faire  $320 \times 9$ , tu avais commencé par faire  $9 \times 300$ . ça, ça allait. Après, il a fallu faire  $9 \times 20$ .

E2 - Oui, en fait, ça j'ai réussi! Après, j'ai ...

M - Tu as oublié le premier résultat?

E2 - Oui, c'est ça. En fait je m'emmêlais un peu les pinceaux.

M - D'accord. Après, tu as fait pareil pour tous les calculs?

Tout ce que tu as fait est juste. Tu en as fait moins. La dernière fois, tu les avais toutes faites.

E2 - Oui mais en fait, j'avais mis beaucoup plus de temps et j'avais fait que des fautes!

M - Alors, tu n'avais pas fait que « des fautes ». Là, tu as trois erreurs on va dire (3 calculs non réalisés), la dernière fois, tu avais fait 7 erreurs..

E2 - Oui.

M - Tu as fait plus de deux fois mieux, c'est pas mal, non?

E2 - Ouais !

M - Est ce que tu as quelque chose à dire?

E2 - Je suis content.

M - Est-ce que tu penses que ça t'a aidé ce qu'on a fait?

E2 - ça m'a aidé ce qu'on a fait aussi. Et moi, j'aime bien les choses comme ça où on réfléchit avec du temps, ça me booste un peu.

M - C'est comme un challenge?

E2 - Alors que quand on fait en classe et qu'on nous met du temps mais on voit pas trop et tout, en fait je suis beaucoup moins enthousiaste.

E3

---

M - Comment tu t'es sentie ?

E3 - ça va .

M - On va regarder les résultats. C'est bon.

Au niveau de la méthode, est ce que tu as changé par rapport à la première fois, ou pas?

Comment tu t'y prends ?

E3 - En fait, je fais  $20 \times 4$  ça fait 80 et après du coup  $4 \times 4$  ça fait 16 et après je fais +.

M - D'accord. Pour le reste?

E3 - Après, par exemple, quand c'est comme ça, je fais la même méthode.

M - Même méthode pour tout?

E3 - Non mais en fait c'est que pour les cent, non en fait je fais pareil à chaque fois.

M - Tu avais l'air de penser que non. Quand c'est un nombre à trois chiffres tu ne commences pas par le même?

E3 - Euh, de quoi?

M - Je ne sais pas. Là tu m'as dit j'ai commencé par 4 x 4.

E3 - Des fois, quand je n'y arrive pas, je fais une autre technique.

M - C'est quoi une autre technique ?

E3 - Par exemple, je fais 2 x 7 ça fait 14 du coup je mets le 4. Je fais x 0 ça fait 0 du coup 0. Du coup + 1 et je fais 1 x 7, 7.

M - D'accord. Donc ça c'est la seconde méthode quand tu n'y arrives pas. Sinon la même méthode pour les autres calculs.

E4 = E4

---

M - Comment tu as fait pour faire les trois premières ?

E4 - Je ne sais pas.

M - C'est à dire. Tu ne saurais pas m'expliquer comment tu as trouvé le résultat?

E4 - Non.

M - Non, pas du tout? Tu les as écrits comme ça parce que ça te semblait être ça? Tu as essayé quelque chose et ça a donné ça?

E4 - J'ai fait 2 x 4.

M - Oui, ça t'a donné 8.

E4 - Oui, et 4 x 4.

M - Et ça t'a donné combien?

E4 - 16.

M - Donc tu as marqué 6. Et qu'est ce que tu as fait du 1 de 16?

E4 - Et ben, je l'ai enlevé à la dizaine.

M - Et 102 x 7, comment tu as fait?

E4 - Euh?

M - Tu as fait 7x 2, je crois?

E4 - Oui.

M - Ensuite, tu as fait 7 x 0?

E4 - Oui. Ensuite 7 x 1.

M - ça t'a donné combien?

E4 - Mille cent quatorze, mille quatorze.

M - Et le dernier, comment tu as fait?

E4 - 5 x 8 et 5 x 5 .

M - 5 x 5 ?

E4 - 25

M - Et ensuite tu as fait quoi?

E4 - 8 x 5 = 40. Celui -là je peux le faire, et celui-là aussi et celui là aussi.

M - Alors vas-y, marque si tu as des résultats.

E5 = E5

---

M - Comment tu t'es sentie par rapport à la première fois?

E5 - Moins stressée, ça va .

M - Est-ce que tu as procédé comme la dernière fois?

E5 - Oui.

M - En fait ta technique n'a pas changé?

E5 - Non

M - Pour aucun calcul ?

E5 - Non

M - Bon d'accord, tu n'as aucune erreur. Tu as été plus rapide.

**Annexe 21 : pourcentage de réussite et évaluation de la difficulté des calculs lors du second passage pour les 5 élèves analysés**

	Temps de réalisation	24x 4	102 x 7	85 x 5	25 x 8	210 x 4	320 x 9	65 x 2	39 x 6	190 x 2	34 x 3	Pourcentage de réussite
E5	3 min 20s											100 %
E4	6min20s	X (86)	X (1014)	X (105)	Passée	X (810)	Passée	X (22)	Passée	X (218)	X (22)	0 %
E3	1min11s											100 %
E2	3min24s			Passée			Passée		Passée			70 %
E1	3min02s						X (2800)					90 %
Réponses incorrectes		<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	
Pourcentage de réussite		<b>80 %</b>	<b>80 %</b>	<b>60 %</b>	<b>80 %</b>	<b>80 %</b>	<b>40 %</b>	<b>80 %</b>	<b>60 %</b>	<b>80 %</b>	<b>80 %</b>	

	24x 4	102 x 7	85 x 5	25 x 8	210 x 4	320 x 9	65 x 2	39 x 6	190 x 2	34 x 3
E5	F				F	D	D	D		
E4			F		F		F			
E3	F				F	D				
E2		F				D				
E1	D			D	F	F				D
F	2	1	1	0	4	1	1	0	0	0
D	1	0	0	1	0	3	1	1	0	1