



**HAL**  
open science

## Les premiers signes mathématiques à l'école primaire

Marie Brun, Suzon Martorell

► **To cite this version:**

Marie Brun, Suzon Martorell. Les premiers signes mathématiques à l'école primaire. Education. 2023. dumas-04550179

**HAL Id: dumas-04550179**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-04550179>**

Submitted on 17 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License



**MASTER MEEF mention 1er degré  
« Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation »  
Mémoire de 2<sup>ème</sup> année  
Année universitaire 2022 - 2023**

## **LES PREMIERS SIGNES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE PRIMAIRE**

**Marie Brun et Suzon Martorell**

Directrice du mémoire : Céline CONSTANTIN - HELIOT  
Assesseur : France ARBOIX - CALLAS

Soutenu le 16 mai 2023

## **Remerciements**

Nous tenons à remercier notre directrice de mémoire Céline Constantin pour sa disponibilité, ses précieux conseils et ses relectures formatrices tout au long de ces deux dernières années pour l'élaboration de notre projet de recherche.

Ensuite, nous avons une pensée particulière pour les élèves de la classe de CE1 pour leur implication sans faille et dont les données nous ont permis de réaliser notre partie expérimentale.

De plus, nous remercions notre famille et nos amis pour leur soutien, pour les relectures de ce mémoire.

# **Sommaire**

Remerciements.....	2
Sommaire .....	3
Résumé.....	5
Table des figures .....	6
Table des annexes .....	7
Introduction.....	8
1 Problématique et éléments de cadrage théorique.....	9
1.1 Conceptions des élèves.....	10
1.1.1 “=” vu comme un opérateur.....	10
1.1.2 Une mauvaise conception du signe “=” .....	11
1.2 Origines possibles.....	13
1.2.1 Savoirs notionnels, sémio-linguistiques et praxiques .....	13
1.2.2 Les savoirs notionnels sont prégnants.....	14
1.2.3 Règle, sens et signification.....	15
1.2.4 Les différentes représentations.....	17
1.2.5 Les différents types de problèmes.....	18
2 Etude exploratoire des programmes et des manuels.....	22
2.1 Etude des programmes .....	22
2.1.1 Analyse du programme du cycle 1.....	22
2.1.2 Analyse du programme du cycle 2.....	23
2.2 Analyse des ressources pédagogiques.....	24
2.2.1 Les structures additives.....	25
2.2.1.1 Maths au CE1, Accès.....	25
2.2.1.2 Cap Maths CP, Hatier .....	25
2.2.2 Les types de problèmes .....	26
2.2.2.1 Maths au CE1, Accès.....	27
2.2.2.2 Cap Maths CP, Hatier .....	28
3 Question de recherche et hypothèses .....	30
4 Méthodologie et expérimentations envisagées .....	31
4.1 Mise en place d’une expérimentation dans une classe .....	31
4.1.1 Pré-test .....	31
4.1.1.1 Description.....	31
4.1.1.2 Analyse à priori.....	32
4.1.1.3 Analyse à postériori et résultats.....	36

4.1.1.3.1	Première partie du pré-test.....	36
4.1.1.3.2	Analyse .....	37
4.1.1.3.2.1	Le signe “=” vu comme un opérateur .....	37
4.1.1.3.2.2	Conception unique de l'égalité : structure du type $a+b=c$ .....	38
4.1.1.3.2.3	Somme de tous les termes.....	39
4.1.1.3.2.4	Mobilisation de réelles connaissances .....	40
4.1.1.3.2.5	Données inexploitablees .....	40
4.1.1.3.3	Conclusion.....	41
4.1.1.3.4	Deuxième partie du pré-test.....	41
4.1.2	Séance .....	42
4.1.2.1	Description.....	42
4.1.2.2	Analyse à priori.....	43
4.1.2.3	Analyse à postériori et résultats .....	45
4.1.3	Post-test.....	46
4.1.3.1	Description.....	46
4.1.3.2	Analyse à postériori et résultats .....	47
5	Conclusion de notre expérimentation .....	53
	Bibliographie.....	55
	Annexes.....	57

## **Résumé**

A partir de l'observation d'ouvrages pédagogiques ainsi que d'une séance mise en place dans une classe de CE1, ce projet de recherche met en exergue la manière dont les élèves perçoivent et manipulent le concept d'égalité. Ce mémoire permet de comprendre plus particulièrement en quoi le concept d'égalité est source de difficultés et pourquoi une conciliation entre différents types de savoirs se révèle nécessaire dans sa construction.

Mots-clés : Egalité, signe égal, Cycle 2, numération.

Abstract: The following thesis deals with the pupils' understanding of equality; furthermore, the difficulties, interpretation and didactic challenges of the pupils associated with the concept of equality.

Keywords: Equality, equals sign.

## Table des figures

Figure 1 : La transformation (quantifiée) d'une mesure initiale en une mesure finale, La théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990, p 152) .....	18
Figure 2 : La composition de deux mesures en une troisième, La théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990, p 152) .....	19
Figure 3 : La relation (quantifiée) de comparaison entre deux mesures, La théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990, p152) .....	20
Figure 4 : La composition de deux transformations, La théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990, 152).....	21
Figure 5 : Diagramme circulaire de l'élément recherché et des structures additives qui en découlent, Maths au CE1, Accès.....	27
Figure 6 : Diagramme circulaire des types de structures additives qui découlent de la chronologie de l'énoncé, Maths au CE1, Accès.....	28
Figure 7 : Diagramme circulaire de l'élément recherché et structures additives mobilisées au travers des problèmes du manuel Cap Maths CP, Hatier.....	29
Figure 8 : Diagramme circulaire des types de structures additives qui découlent de la chronologie de l'énoncé, Cap Maths CP, Hatier.....	29
Figure 9 : Production de Paul pour l'égalité $4+3=7+2$ .....	37
Figure 10 : Production de Lou pour l'égalité $4+3=7+2$ .....	37
Figure 11 : Production de Romane pour l'égalité $4+5=8+1$ .....	38
Figure 12 : Production de Lucas pour l'égalité $4+5=8+1$ .....	38
Figure 13 : Production de Paul pour l'égalité $7=5+2$ .....	38
Figure 14 : Production de Théa pour les égalités $4+5=8+1$ et $4+3+2=4+5$ .....	39
Figure 15 : Production de Joana pour l'égalité $4+5=8+1$ .....	40
Figure 16 : Production de Joana pour l'égalité $4+3+2=4+5$ .....	40
Figure 17 : Production de Léa pour l'égalité $4+3=7+2$ .....	40
Figure 18 : Production de Théo pour l'égalité $4+5=...+2$ .....	42
Figure 19 : Production de Léa pour l'égalité $4+5=...+2$ .....	42
Figure 20 : Production de Théo pour l'égalité $3=1+...$ .....	42
Figure 21 : Production d'un groupe avec une structure unique de l'égalité en "a+b=c" .....	45
Figure 22 : Production d'un groupe avec deux secrétaires différents .....	46
Figure 23 : Leçon sur l'égalité .....	47
Figure 24 : Pré-test de Dorian .....	48
Figure 25 : Post-test de Dorian.....	48
Figure 26 : Pré-test de Lola .....	49
Figure 27 : Post-test de Lola .....	49
Figure 28 : Pré-test d'Adrien .....	49
Figure 29 : Post-test d'Adrien.....	50
Figure 30 : Diagramme en barre comparatif des résultats du pré-test et du post-test.....	50
Figure 31 : Diagramme en barre comparatif des types d'erreurs du pré-test et du post-test.....	51

## **Table des annexes**

Annexe 1 : Structures additives présentes dans le manuel Maths au CE1, Accès.....	57
Annexe 2 : Structures additives présentes dans le manuel Cap Maths CP, Hatier. ....	58
Annexe 3 : Exercices auxquelles renvoient les structures additives du type $a=b+c$ , dans le manuel Cap Maths CP, Hatier. ....	59
Annexe 4 : Types de problèmes présents dans le manuel Maths au CE1, Accès. ....	60
Annexe 5 : Exemple d'un problème de transformation d'état. ....	61
Annexe 6 : Exemple d'un problème de composition d'état. ....	62
Annexe 7 : Exemple d'un problème de comparaison d'état. ....	63
Annexe 8 : Types de problèmes présents dans le manuel Cap Maths CP, Hatier. ....	64
Annexe 9 : Première partie du pré-test.....	65
Annexe 10 : Deuxième partie du pré-test.....	66
Annexe 11 : Graphique des résultats de la deuxième partie du pré-test. ....	67
Annexe 12 : Graphique des types d'erreurs repérées dans la deuxième partie pré-test.....	68
Annexe 13 : Fiche de préparation de la séance. ....	69
Annexe 14 : Jeu de cartes.....	70
Annexe 15 : Post-test. ....	71
Annexe 16 : Analyse à priori du post-test.....	72

## Introduction

C'est pendant notre dernière année de licence pluridisciplinaire, lorsque nous avons été initiées à la didactique des mathématiques, que nous avons commencé à nous poser des questions sur la manière d'enseigner cette discipline à l'école primaire. Notre interrogation principale a vu le jour lors d'une correction d'exercice. La formatrice a employé deux synonymes pour désigner une même action : l'addition. Le mot "plus" et le mot "et" signifiant que l'on ajoute une quantité à une autre. C'est à ce moment-là que nous lui avons demandé dans quel cas utiliser l'un plutôt que l'autre et aussi si cela entraînait une conséquence en fonction de l'âge de l'enfant. C'est alors que nous avons pensé à nous interroger sur l'apprentissage des premiers *symboles* mathématiques à l'école.

En début de première année de master, une de nous était en stage dans une classe de CE1. Les élèves travaillaient en autonomie sur leur cahier de mathématiques, ils avançaient chacun à leur rythme pendant que l'enseignante passait dans les rangs afin de venir en aide si besoin. La professeure avait distribué en amont du matériel différent en guise de différenciation ou remédiation qu'elle avait adapté en fonction de ses élèves. Une petite fille travaillait sur un exercice de technique opératoire où elle devait résoudre des calculs en ligne en regardant si le signe de l'opération était un "+" ou un "-" et ainsi adopter la procédure adéquate. Elle avait comme outil une suite numérique. Elle a levé la main en demandant : "si c'est ça [en pointant du doigt le signe "-"], je dois aller comme ça [sur la suite numérique, en allant avec son doigt vers le haut à partir du premier nombre écrit dans le calcul] ou comme ça [en allant avec son doigt vers le bas toujours en partant de ce même nombre]. C'est alors ce qui nous a fait dire que la notion d'addition et de soustraction n'étaient pas réellement encore assimilées pour certains élèves. Pourquoi les premiers *symboles* mathématiques (+, -, =) peuvent être une source de difficulté pour l'assimilation des élèves ?

À la suite de nos premières lectures, nous nous sommes rapidement rendu compte que même à notre niveau d'études, nos conceptions erronées sur le signe "=" ont encore un impact sur nos apprentissages. C'est notamment le cas lorsque nous devons résoudre des équations : il est difficile de prendre en considération une égalité, c'est-à-dire de s'imaginer que les deux expressions représentent la même quantité, sachant que de part et d'autre du signe égal il y a des termes (nombres, signes, lettres) de différentes natures. Cette difficulté nous conforte dans l'idée que l'introduction du signe "=" soulève une complexité.

Afin de traiter la question des premiers signes mathématiques à l'école primaire, nous nous placerons à la fois du point de vue des élèves où nous rendrons compte des difficultés dont ces signes sont porteurs. Par la suite, nous nous questionnerons sur les origines possibles de ces difficultés en nous basant en particulier du point de vue des professeurs et aussi sur la discipline elle-même.

# 1 Problématique et éléments de cadrage théorique

Premièrement, nous souhaitons apporter des précisions sur les termes “signe” et “symbole” afin d’en dégager le sens exact et d’éviter toute confusion d’emploi. C’est notamment dans le CNRTL, que nous avons prélevé les définitions des termes. Le mot “signe” a évolué au cours du temps : au Xe siècle, *signa* signifiait « chose remarquable, significative », puis « marque distinctive » au XIIIe siècle. En 1564, selon Rabelais le signe était « ce qui ser[vait] à représenter une chose (par exemple, un mot pour une idée). C’est cette dernière définition qui va nous intéresser puisqu’elle se transpose de la même manière dans le champ mathématique. En effet, un signe mathématique comme “=” sert à représenter l’idée, le concept d’égalité. Dans le domaine mathématique, le signe est défini comme le “symbole des opérations arithmétiques (*signe plus, moins...*)”. En termes de sémiotique, le signe est défini comme “objet matériel, perceptible, valant pour une chose autre que lui-même qu’il évoque ou représente à titre de substitut (*signe conventionnel*)”. Ce que l’on remarque c’est que le signe a toujours été un objet concret visuel pouvant être perçu par les sens, notamment la vue. De plus, le terme “symbole”, dans le domaine mathématique est un “signe représentant, par convention, une chose [...]”. Cela sous-entend que le symbole est l’objet abstrait dont le signe est la représentation. C’est bel et bien dans ce sens-là que nous pouvons les mettre en relation. Par ailleurs, il nous semble nécessaire de citer le travail de Saussure dès lors que nous nous interrogeons autour de ces termes. Ce linguiste qualifie le signifiant et son signifié comme indissociables. Le signe “=” est l’aspect matériel, autrement dit le signifiant de son signifié, qui est l’aspect conceptuel : la notion d’égalité. Même si les élèves peuvent percevoir ce signe écrit, donc visuel, la notion à laquelle il renvoie reste quant à elle abstraite. C’est à partir de ces recherches que l’on parlera du “=” comme étant un signe, symbolisant le concept d’égalité.

Ce concept d’égalité est une relation d’équivalence. Pour qu’une relation soit une relation d’équivalence, elle doit être définie par trois axiomes.  $\mathcal{R}$  est une relation d’équivalence si et seulement si elle vérifie ces trois axiomes :

- Axiome réflexif : pour tout nombre  $a$  :  $a \mathcal{R} a$
- Axiome symétrique : pour tout nombre  $a$  et  $b$  : si  $a \mathcal{R} b$  alors  $b \mathcal{R} a$
- Axiome transitif : pour tout nombre  $a$ ,  $b$  et  $c$  : si  $a \mathcal{R} b$  et  $b \mathcal{R} c$ , alors  $a \mathcal{R} c$

Vérifions à présent que l'égalité est bien une relation d'équivalence.

- Axiome réflexif : soit  $a$  un nombre quelconque, il est vrai de dire que  $a=a$ .
- Axiome symétrique : soit  $a$  et  $b$  deux nombres quelconques, il est encore vrai de dire que si  $a = b$ , alors  $b=a$ .
- Axiome transitif : soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  des nombres quelconques, si  $a=b$  et  $b=c$  alors il est vrai de dire que  $a=c$ .

Ainsi, les trois axiomes qui définissent le concept de la relation d'équivalence sont vérifiés pour l'égalité. L'égalité est donc une relation d'équivalence.

Nous pouvons exemplifier ces axiomes avec des nombres :

- Axiome réflexif : il n'existe pas de nombre qui ne soit pas égal à lui-même. En effet, prenons le nombre 5, et bien  $5=5$ .
- Axiome symétrique : affirmer que  $3+2=5$  implique  $5=3+2$ .
- Axiome transitif : prenons  $a=4+1$  ;  $b=5$  et  $c=3+2$ . Alors :  $4+1=5$  et  $5=3+2$  donc  $4+1=3+2$ .

## **1.1 Conceptions des élèves**

### **1.1.1 “=” vu comme un opérateur**

Pour commencer, il est à noter la complexité des signes opératoires que nous utilisons. Leur emploi n'est pas fait de manière anodine, mais respecte bien des conventions d'utilisation. D'après l'article de Theis (2005), on remarque un frein dans l'apprentissage du signe “=” dès le moment où ce dernier est introduit aux élèves. Il n'est en effet pas montré sous ses différents aspects, mais toujours d'une seule manière : pour montrer le résultat d'une opération. Dès leur plus jeune âge, les élèves voient cette structure linéaire “ $3+7=10$ ” où il y a d'abord un nombre auquel on ajoute (ou soustrait) un autre nombre, suivi du signe égal ainsi que du résultat de l'opération. Cette manière visuelle de représenter la somme de deux nombres entraîne une conception telle que, d'un côté, on a “ $3+7$ ” puis d'un autre, “ $=10$ ”, comme s'il n'y avait pas de lien entre “ $3+7$ ” et “ $10$ ”, que “ $10$ ” se lisait indépendamment du “ $3+7$ ”.

Dans le cadre de sa recherche, Theis s'appuie sur des travaux effectués avec des élèves luxembourgeois de première année de primaire (équivalent au CP). Premièrement, il réalise un recueil de conceptions afin de découvrir la représentation que les élèves ont de ce signe. C'est particulièrement auprès d'un petit garçon, qualifié d' "élève fort" par son enseignante, que Theis va mener sa situation d'apprentissage. Voici son observation : cet élève se retrouve, tout comme ses camarades, en difficulté face à la construction du signe "=" signifiant un indicateur de relation. Lors du recueil de conceptions effectué auprès de Mathieu, on découvre que l'enfant mobilise des connaissances sur la structure  $a+b=c$  et est capable de vérifier sur ses doigts que  $5+4=9$ . Il mobilise également des connaissances sur le signe "=", en effet, quand on lui demande ce que le signe "=" écrit signifie, il répond "C'est la même chose. (...) C'est la même chose ici ( $5 + 4$ ) et ici ( $9$ ).". En revanche, lorsqu'on lui propose ce même type d'égalité mais sous une autre forme : " $7=3+4$ ", il la considère comme incorrecte : "C'est à l'envers. Ce n'est pas bien fait.". De même, pour la structure " $6+2=...+3$ ", il la résout sans tenir compte du "+3". Ainsi, il a des connaissances sur le concept d'addition pour une structure précise ( $a+b=c$ ) mais qu'il n'étend pas aux autres. De fait, Theis décide de mener une séquence d'apprentissage pour tenter de "modifier la conception initiale des élèves". Son intervention a pour objectif d'enseigner "une conception du signe = comme indicateur d'une relation". Theis a constaté une progression de la conception de Mathieu au fil des séances puis une évolution vers ses représentations initiales lors d'un post-test dix jours après la séquence. Au début de son apprentissage, Mathieu rencontre des difficultés résistantes, il "est réticent à modifier sa conception initiale de ce signe." L'auteur fait l'hypothèse que l'apprentissage du signe "=" serait de manière générale un obstacle dès lors qu'il ne fait pas l'objet d'une découverte guidée par un enseignant. En effet, certains enfants auraient déjà une conception de ce signe avant d'arriver à l'école. Ils sont notamment confrontés à l'utilisation de ce signe dans les livres pour enfants achetés par les parents.

### **1.1.2 Une mauvaise conception du signe "="**

L'ancrage du signe "=" perçu comme un opérateur conduit les élèves vers une conception erronée. Falkner, Levi et Carpenter (1999) mènent une étude auprès d'élèves (du CP à la sixième) afin de rendre compte de leur compréhension sur l'égalité et le signe « = ». Pour cela ils demandent aux élèves de résoudre cette première égalité à trou :  $8 + 4 = \dots + 5$  dont l'objectif est "d'explorer ce que les enfants comprennent de l'égalité ainsi que du signe égal". Ils se rendent compte que la plupart des élèves répondent "12", en additionnant " $8+4$ " et en faisant abstraction du "+5", ou "17", en additionnant les trois termes apparents : " $8+4+5$ " et en faisant abstraction de la position du signe "=".

Avant de donner l'exercice aux élèves, les professeurs trouvaient celui-ci futile, sans importance. La

grande majorité des élèves ne considère que la partie gauche du signe "=", sans prendre en compte le "+5" dans la partie de droite. En effet, souvent le signe "=" apparaît à la suite d'une écriture du type "...+ ..." et un nombre seulement vient après. Les autres élèves ont considéré chacun des nombres de l'égalité comme quantités à ajouter pour trouver le résultat ( $8 + 4 + 5$ ) sans se soucier de la place des termes utilisés. D'autre part, certains élèves disent que l'expression " $7 = 3 + 4$ " est à l'envers ("It's backward") ou pas dans le bon sens ("But it's the wrong way"). Le signe égal est une convention, il a été choisi par les mathématiciens pour représenter la notion d'égalité mais généralement, les élèves de l'école élémentaire ne le perçoivent pas comme exprimant une relation d'équivalence.

L'article de Falkner, Levi et Carpenter (1999) nous a permis de mettre en lumière le constat suivant : cet obstacle découle d'une mauvaise conception du signe "=". En effet, les élèves considèrent le signe égal comme un indicateur de résultat.

Pour approfondir nos recherches, il était important pour nous de se renseigner sur les conséquences que cet obstacle entraîne. C'est alors dans l'article de Behr, Erlwanger et Nichols (1976), que l'on retrouve cette idée du signe « = » considéré comme un opérateur quand une formulation de la forme suivante "...=... +..." est proposée aux élèves, deux cas de figures se présentent. Dans un premier cas, l'élève dit que l'opération est "à l'envers" et insiste pour la modifier en : ... + ... = ... . Ou bien, l'élève veut changer la place des signes dans l'opération de façon à se retrouver avec la formulation dite "habituelle". On comprend bien, grâce aux différentes expérimentations menées, que finalement la représentation des élèves concernant le signe "=" n'évolue pas vraiment avec le temps. En effet, même avec des élèves de sixième, qui n'ont pas de difficulté avec la notion d'égalité, on se rend compte qu'ils ne font pas de distinction entre le concept d'égalité et celui de similitude. Nous voulions concentrer notre étude sur des classes de grande section et de cycle 2, mais cet article nous a fait prendre conscience que les difficultés concernant les signes mathématiques ne s'arrêtent pas au cycle 2 mais vont bien au-delà. Ceci nous questionne donc d'une part sur la conception des élèves de cycle 3 voire de cycle 4 sur le signe "=" : on pense souvent qu'ils ont acquis correctement cette notion mais est-ce vraiment le cas ? Et d'autre part, nous pourrions alors nous demander comment faire en sorte que les élèves n'aient pas cette conception erronée sur l'égalité ou, du moins, qu'il la fasse évoluer le plus rapidement.

## 1.2 Origines possibles

### 1.2.1 Savoirs notionnels, sémio-linguistiques et praxiques

En mobilisant les outils de l'analyse épistémographique développés par Drouhard (2011), nous souhaitons développer les trois composantes qui nous semblent essentielles pour discuter des origines possibles des erreurs qui émergent chez les élèves. Drouhard considère trois dimensions "synchroniques", dans lesquelles se déploient les connaissances et savoirs relatifs aux écritures symboliques "algébriques" dans le sens où elles se complètent, pour parvenir à une certaine maîtrise des mathématiques : une dimension sémio-linguistique, une dimension praxique et une dimension théorique. L'auteur définit un ensemble de huit connaissances s'inscrivant dans ces trois dimensions. Centrons-nous d'abord sur la dimension sémio-linguistiques, Drouhard explique que :

Les connaissances sémio-linguistiques sont celles des registres sémiotiques (Duval, 1995) qui permettent de représenter (et de traiter) les faits et les objets mathématiques. Par exemple, c'est ce qui permet de savoir que " $2x^n$ " et " $2n$ " sont deux écritures équivalentes, non " $2x^3$ " et " $23$ ". Ces connaissances sont indispensables pour lire, écrire représenter, schématiser, interpréter, communiquer... des documents scientifiques, entre autres parce que, comme le rappelle Raymond Duval, il n'y a pas de noésis sans sémosis. (2011)

Les objets mathématiques sont abstraits dans la mesure où ils renvoient à une idée. C'est grâce à l'utilisation des mots, signes et toutes autres représentations non linguistiques que nous pouvons rendre ces objets concrets. Prenons l'exemple de la notion d'égalité, celle-ci peut être représentée par le mot "égal", "fait", également par le signe "=" en lui-même.

Ensuite, Drouhard décrit la dimension praxique comme l'ensemble des éléments qui peuvent être nécessaires à la résolution du calcul. En d'autres termes, c'est l'action, la pratique permettant d'atteindre un objectif en mobilisant des outils mathématiques comme "les algorithmes [d'addition] posée, les stratégies [d'addition] pensée, l'usage des calculettes, des bouliers, des doigts, des règles à calcul, etc."

Enfin, dans la dimension théorique, ce qui nous intéresse sont notamment les connaissances notionnelles :

Les connaissances notionnelles sont celles des propriétés d'ordre théorique des objets mathématiques : par exemple, que la multiplication est commutative. Les connaissances notionnelles sont indépendantes du registre de représentation sémiotique utilisé (français chinois, langage formel...), et leur énoncé, factuel, est dépourvu de quelque indication de finalité que ce soit. (Drouhard, 2011)

En effet, si nous prenons l'exemple de l'addition, celle-ci a des propriétés qui lui sont propres : par exemple elle est commutative ( $a+b = b+a$ ) et associative ( $(a+b) +c = a+(b+c)$ ). De fait, il est important de maîtriser ces propriétés pour éviter aux élèves d'avoir des conceptions erronées. Si l'élève ne sait pas que l'addition est commutative, alors il ne pourra pas affirmer que  $a+b=b+a$ . Les

connaissances sémio-linguistiques et notionnelles sont aussi importantes l'une que l'autre dans la maîtrise des savoirs mathématiques. Ce sont principalement celles sur lesquelles nous allons nous appuyer dans notre écrit.

### **1.2.2 Les savoirs notionnels sont prégnants**

Dans son article, Margolinas (2019) discute de l'apprentissage des mathématiques qui, dès le CP, prend en compte non seulement le sens notionnel, mais aussi le sens sémio-linguistique. Néanmoins, il s'avère que les professeurs portent leur attention davantage sur l'aspect notionnel en délaissant la manière dont une réponse va être transmise à l'écrit, à savoir la dimension sémio-linguistique. Il est à noter que dix ans auparavant, Margolinas et Laparra (2009) avaient déjà observé que l'entrée dans l'écrit mathématique en CP ne faisait pas l'objet d'un réel apprentissage, qu'elle semblait finalement "aller de soi", contrairement à l'entrée dans l'écrit en français qui prend énormément de temps. Elle poursuit alors son étude en observant une activité de dénombrement : "addition de trois nombres et introduction du nombre zéro" menée dans une classe de CP.

L'activité se déroule par groupe de quatre enfants, deux des joueurs doivent jeter le dé, un élève distribue la quantité de jetons nécessaires correspondant aux nombres obtenus par les dés. Quant au quatrième, il est chargé d'écrire de manière symbolique, à l'aide de chiffres et de signes, l'écriture du calcul en ligne effectué au cours des lancers de dés, ou bien écrire les résultats dans un tableau. En observant les élèves et l'enseignante, Margolinas découvre que les élèves ne maîtrisent pas l'écriture en ligne d'un calcul et qu'ils n'en perçoivent pas le sens, bien qu'ils sachent trouver le résultat du lancer de dés. Elle s'aperçoit que pour la professeure l'objectif premier était celui de trouver le bon nombre, en revanche la deuxième tâche qu'elle demande aux élèves, qui est d'utiliser l'écrit pour rendre compte d'un résultat, est très différente de la première dominée par l'oralité. Les élèves ne font finalement pas le lien entre l'oral et l'écrit, d'autant plus que la professeure propose différentes formes d'écrit : calcul en ligne et calcul en colonne (tableau). De plus, dans ses interventions, l'enseignante "impose" une norme d'écriture qu'elle ne prend pas le soin d'expliquer : "On met un = pour montrer combien on a trouvé en tout", selon nous, cette remarque engendre une posture normative des élèves par rapport à l'écrit, ils comprennent alors qu'il ne faut "surtout pas jouer avec l'écriture mathématiques". De ce fait, les élèves trouveront difficile "[d']écrire autrement que ce qu'[ils ont] appris". Par exemple, Huseyin écrit " $2+2=2=6$ " certainement parce qu'il n'a appris que l'écriture d'une addition de deux nombres du type " $...+...=...$ ". Ces élèves investissent des connaissances dans la dimension sémio-linguistique, même s'ils les étendent de manière erronée, mais

ces connaissances ne sont pas perçues comme telles par l'enseignante.

Par ailleurs, dans l'activité, les élèves manipulent des jetons, toutefois l'enseignante évoque le matériel avec différentes représentations : elle nomme "billes" les jetons des élèves en voulant faire référence aux noisettes ou billes du fichier de mathématiques.

Ce que nous pouvons en conclure, c'est que les professeurs, en général, se focalisent davantage sur les savoirs notionnels, tout en délaissant les savoirs sémio-linguistiques auxquels ils n'apportent que peu d'importance. D'après ce que nous venons d'observer, l'enseignante laisse une grande place à l'aspect théorique, à ce qui va permettre de trouver le résultat de l'opération en ligne, en faisant l'impasse de sa représentation toutefois indispensable pour communiquer de manière universelle, ou du moins conventionnelle, le processus qui a permis d'arriver à ce résultat final.

### **1.2.3 Règle, sens et signification**

Conne (2013, p1), en s'appuyant sur un manuel suisse romand de CP datant des années 1972/1996, constate une première signification donnée à l'exercice de calcul sur les égalités numériques : "le signe égal signifie que les expressions écrites qu'il relie désignent le même nombre" Conne (2013, p1).

C'est en ce sens que ces expressions sont reliées par le même dénoté, c'est-à-dire qu'elles renvoient à un même nombre. Le dénoté est un symbole permettant de renvoyer à une notion, par exemple, dans l'égalité  $3+2=4+1$ , nous avons d'une part "3+2" et d'autre part "4+1", qui renvoie à un même dénoté : "5", c'est en ce sens que nous pouvons écrire le signe "=" entre ces deux représentations. Pour renvoyer au même dénoté, ces expressions peuvent prendre des formes d'écritures différentes, à savoir une simple écriture de nombre, à l'aide de chiffres ou encore une écriture composée à la fois de chiffres et de signes opératoires. Voici un exemple où pour l'expression de gauche il s'agit d'une simple écriture de nombre contrairement à la partie droite qui est une écriture composée de nombres ainsi que d'un signe opératoire :  $9=5+4$ . Le signe "=" est médian, il doit forcément se situer entre deux expressions, sans avoir de positions particulières, dites "finale/initiale". C'est de cette règle que découle le fait qu'une écriture lacunaire, souvent proposée dans les manuels scolaires, peut être définie comme étant "une écriture d'équivalence à compléter pour qu'elle soit conforme à une syntaxe", Conne (2013, p1). Pour compléter ces expressions afin qu'elles soient équivalentes, il suffit de calculer par comptage ou en mobilisant les outils mathématiques, Drouhard (2011).

Puis, une seconde signification de cet exercice sur les égalités numériques sont les notions de “composition/décomposition”. Dans le cas de la composition, le signe “=” serait en position finale dans l’égalité, précédé d’une lacune :  $2+3 = \dots$ . Pour la décomposition, il serait en position initiale suivi de deux lacunes :  $5=\dots+\dots$ , ou bien d’une seule :  $5=2+\dots$ . Les enseignants doivent amener les élèves à interpréter et utiliser diverses écritures afin de compléter des écritures incomplètes pour les rendre conformes à la signification de l’équivalence. Conne relève toutefois un manque d’explicitation quant aux moyens à mobiliser pour y parvenir.

Par ailleurs, l’auteur évoque les expressions langagières employées pour désigner la signification de ces calculs sur les égalités comme “ça fait” ou encore “c’est fait par” en précisant que l’un ne renvoie pas à l’autre, il s’agit de deux actions différentes, pourtant on fait toujours référence à cette même signification d’équivalence. C’est ainsi que ces expressions dénotent des contextes différents et sont étroitement reliées à l’agir, l’action qui doit être établie pour que la syntaxe de l’équivalence soit conforme. C’est alors que Conne affirme qu’elles “expriment du sens plutôt que des significations”, Conne (2013, p3).

Le lien entre l’oral et l’écrit est important, les conventions de calcul entraînent des conventions langagières. En fonction de l’écriture du nombre, on n’emploie pas les mêmes mots à l’oral pour donner du sens à ce qui est écrit. Voici l’exemple d’une élève issue de la recherche de Conne (2013) qui va permettre d’éclairer ces propos.

Elle a écrit : “ $3+3=4+5=6$ ”, ce qui permet de voir qu’elle a explicité son comptage « trois plus trois, quatre cinq, six » tout en mettant du sens dans son action. Il y a ici une rupture entre le langage oral et la codification, autrement dit la transcription écrite de ses mots (Conne, 2013).

Comme nous avons pu le relever dans l’article de Margolinas (2019), le fait que les enseignants se focalisent davantage sur les savoirs notionnels amène les élèves à se servir des conventions à leur manière. Ainsi, ils ne découvrent pas le réel sens du signe “=”, Theis (2014) précise qu’ils le perçoivent comme un opérateur que l’on pourrait remplacer par une flèche. Conne (2019), dans sa note du 10 mars 2015, pousse sa réflexion en précisant que la manière dont l’espace à compléter dans les expressions à l’écrit est lui-même porteur de différents sens : s’il est représenté par “...” alors il induit une action inachevée mais s’il est représenté par “#” alors il désigne la présence d’un nombre. Quant à l’expression orale “combien”, cela signifie à la fois qu’il y a une action inachevée à compléter et cela par l’utilisation d’un nombre.

## **1.2.4 Les différentes représentations**

A l'école et plus généralement dans notre vie quotidienne, le "nombre" est partout autour de nous, tout peut se compter et à l'inverse chaque chose peut représenter une quantité. Ceci rejoint l'idée qu'à l'école primaire, les enseignants utilisent différentes représentations pour désigner un nombre :

- Registre analogique : constellation : dé, doigts de la main objets représentés sur une image
- Registre verbal : communiquer oralement
- Registre symbolique : à l'aide de chiffres

Le recours à ces différentes représentations d'un nombre et le passage d'un registre à un autre sont essentiels dans la construction du nombre chez les élèves, il s'agit du transcodage.

Dans leur article, Constantin et Coulange (2022) analysent notamment des activités visant à introduire le signe "=" dans quatre classes de CP françaises. Elles constatent alors des amalgames entre représentations sémiotiques et dénoté. Comme nous avons pu le voir précédemment, pour des représentations différentes il existe un dénoté commun. Par exemple, une image avec cinq doigts est différente d'une image avec cinq fleurs, en revanche, les quantités qu'elles représentent sont égales. On remarque alors que le rôle de l'enseignant est primordial. En effet, lors de leurs observations en classe, Constantin et Coulange (2022) constatent que dès le début de la mise en commun d'une activité de tri d'étiquettes, les élèves font correctement appel au dénoté de type nombre de la collection, mais, l'enseignante intervient en demandant aux élèves de préciser, en plus de la quantité, l'objet qui est représenté sur l'image. Ceci mène alors à un malentendu dans le sens où les élèves ne font plus la distinction entre ce qui est réellement demandé (tri des étiquettes selon la quantité) et ce que l'enseignante leur demande "en plus" (l'objet représenté sur l'image). Ainsi, proposer à l'enfant différentes représentations sémio-linguistiques d'un nombre lui permettra, plus tard dans sa scolarité, de le rendre conscient qu'un nombre peut se décomposer tout en représentant toujours le même dénoté. Cet aspect-là est pour nous très important pour la suite de notre écrit puisque, finalement, quand on évoque la notion d'égalité, c'est généralement entre plusieurs représentations qui doivent avoir un même dénoté. De plus, l'article met en lumière une ambivalence dénotationnelle. En effet, selon que l'on considère que le dénoté est le nombre ou le cardinal d'une collection, alors l'interprétation des signes peut être différente. Par exemple, si sur la carte sont représentés quatre doigts, l'enfant peut autant préciser qu'il y a quatre en référant à la quantité présentée, tout comme à l'objet donc le doigt et en informer combien il y en a. Cette ambivalence dénotationnelle peut générer des malentendus ou pour certains élèves être un point d'appui pour l'acquisition du signe "=" en y donnant du sens, y compris un sens qui n'est pas nécessairement attendu par l'enseignante.

## 1.2.5 Les différents types de problèmes

Constantin et Coulange (2022) assistent à une situation de classe qui soulève une interrogation sur la place de l'oral lors des activités notamment en termes de formulations. L'enseignante souhaite décomposer le nombre "7" en "5" et "2" dans le sens où deux sous-collections sont rassemblées afin de créer une collection. Toutefois, dans sa démonstration, elle a plutôt recours au surcomptage, impliquant un problème de transformation d'état. Afin de pouvoir analyser correctement les difficultés des élèves concernant la résolution des problèmes additifs, il est alors important pour nous de reprendre et clarifier les propos de Vergnaud (1994). Ce dernier classe les problèmes additifs selon quatre catégories : les problèmes de transformation d'état, de composition d'état, de comparaison d'état ainsi que de composition de transformation. Pour résoudre tous ces problèmes, l'élève dispose de deux données et doit trouver la dernière en utilisant différentes opérations (addition ou soustraction).

Pour nos exemples, partons du postulat que l'addition est l'opération privilégiée. Dans la colonne de droite des tableaux suivants est écrite la structure additive qui nous paraît émaner de chaque problème. Nous avons séparé cette colonne en deux sous-colonnes différentes : celle de droite correspond à la structure additive prescrite par l'ordre chronologique de l'énoncé du problème, et celle de gauche est celle que nous pensons être la plus utilisée dans les classes. En effet, grâce à nos recherches ainsi qu'à nos observations en classe effectuées lors de nos stages, certains problèmes amènent les élèves à écrire certaines structures. Dans ce cas-là, nous pouvons peut-être émettre l'hypothèse que dans certaines classes, les enseignants imposent ou incitent les élèves à utiliser une structure précise pour chaque type de problème.

- Dans les problèmes de transformation d'état (figure 1), on retrouve toujours un état initial, une transformation et un état final (e-t-e).

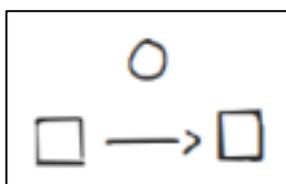


Figure 1 : La transformation (quantifiée) d'une mesure initiale en une mesure finale, *La théorie des champs conceptuels* (Vergnaud, 1990, p 152)

Élément recherché	Exemple de problème	Schématisation du problème	Structure additive émanant du problème	
			D'après nos observations en classe	Selon la chronologie de l'énoncé
Recherche de l'état final	Claire avait 11 billes, elle en a gagné 5 pendant la récréation. Combien en a-t-elle maintenant ?		$11+5=...$	
Recherche de l'état initial	Claire a 16 billes, elle en a gagné 5 pendant la récréation. Combien en avait-elle avant ?		$5+...=16$	$16=5+...$
Recherche de la transformation	Claire avait 11 billes avant la récréation, elle en a maintenant 16. Combien en a-t-elle gagné ?		$11+...=16$	

- Concernant les problèmes de composition d'état (figure 2), il n'y a cette fois-ci pas d'état final ni d'état initial, en revanche il s'agit simplement de deux parties qui forment un tout.

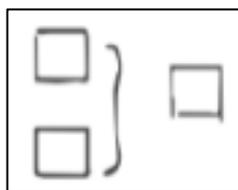


Figure 2 : La composition de deux mesures en une troisième, *La théorie des champs conceptuels* (Vergnaud, 1990, p 152)

Recherche du composé	Laura a 7 billes rouges et 4 billes bleues. Combien de billes a-t-elle au total ?	$\left. \begin{array}{l} 7 \\ 4 \end{array} \right\} ?$	$7+4=...$	
Recherche d'une partie	Laura a 11 billes rouges et bleues. Elle en a 7 rouges. Combien a-t-elle de billes bleues ?	$\left. \begin{array}{l} 7 \\ ? \end{array} \right\} 11$	$7+...=11$	$11=7+...$

- Ensuite, il y a ce que Vergnaud appelle les problèmes de comparaison d'état (figure 3) : nous avons deux états distincts mais pas d'états initial ni final, et on s'intéresse alors ce qui différencie les deux états.

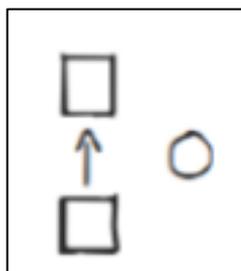


Figure 3 : La relation (quantifiée) de comparaison entre deux mesures, La théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990, p152)

Recherche de l'un des états	Anaïs a 15 billes, elle en a 7 de plus que Marjorie. Combien de billes a Marjorie ?	$\begin{array}{c} 15 \\ \uparrow \\ ? \end{array} \quad 7$	$7+...=15$	$15 =...+7$
Recherche de la comparaison	Anaïs a 15 billes, Marjorie en a 8. Combien Anaïs a-t-elle de billes de plus que Marjorie ?	$\begin{array}{c} 15 \\ \uparrow \\ 8 \end{array} \quad ?$	$8+...=15$	$15=8+...$

- Pour finir, la dernière catégorie est celle des problèmes de composition de transformations (figure 4). Dans ce type de problème, il n'y a pas d'état final ni d'état initial, les données sont donc les suivantes : (au moins) deux transformations successives ainsi que le résultat de ces deux transformations (transformation finale).

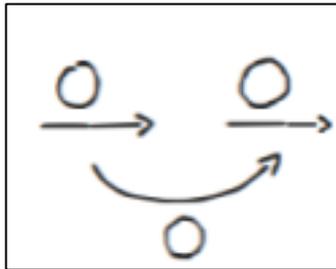


Figure 4 : La composition de deux transformations, *La théorie des champs conceptuels* (Vergnaud, 1990, 152)

Recherche de la transformation composée	Jacquie a gagné 4 billes lors de la première partie et en a perdu 1 lors de la seconde. Combien a-t-elle gagné de billes en tout ?	$\begin{array}{ccc} +4 & & -1 \\ \longrightarrow & & \longrightarrow \\ \hline & & ? \end{array}$	...+1=4	4=1+...
Recherche de l'une des composantes	Jacquie a joué deux parties de billes. Elle en a gagné 4 lors de la première partie et en a gagné 3 en tout. Combien en a-t-elle perdue lors de la seconde partie ?	$\begin{array}{ccc} +4 & & ? \\ \longrightarrow & & \longrightarrow \\ \hline & & 3 \end{array}$	3+...=4	4=3+...

Les différents types de problèmes de Vergnaud nous permettront également, lors de l'analyse de manuels, de relever les types de problèmes dominants.

## **2 Etude exploratoire des programmes et des manuels**

### **2.1 Etude des programmes**

Il nous semble maintenant important de faire une analyse des programmes officiels et notamment observer ce qu'ils préconisent par rapport au signe "=" en lui-même. En effet, les professeurs sont obligés de s'y référer, c'est donc un élément essentiel à analyser. De même, les ressources et les manuels scolaires sont généralement conçus d'après les programmes en vigueur, donc avant même d'analyser les ressources, qui découlent alors des programmes officiels, il faudrait analyser ces derniers. Nous nous focaliserons donc sur les programmes de cycle 1 et de cycle 2 car nous savons que c'est le début des apprentissages premiers en mathématiques, et c'est notamment en cycle 2 que les élèves commencent à utiliser le signe "=". Enfin, nous avons fait le choix d'analyser les programmes en vigueur de 2020 parce que ce sont ceux mis en place dans toutes les classes.

#### **2.1.1 Analyse du programme du cycle 1**

Dans le quatrième domaine d'apprentissage "Acquérir les premiers outils mathématiques", nous lisons dans les objectifs visés et éléments de progressivité que l'enseignant doit amener les élèves à "[construire] la notion du nombre" et plus particulièrement que "Cette construction ne saurait se confondre avec celle de la numération et des opérations qui relèvent des apprentissages de l'école élémentaire."

Dans les attendus de fin d'école maternelle, l'élève doit être capable de "réaliser une collection dont le cardinal est compris entre 1 et 10.". Pour ce faire, il doit "Utiliser le dénombrement pour comparer deux quantités ou pour réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée.". Voici la seule occurrence du mot "égale" que l'on peut trouver dans le programme officiel du cycle 1. L'élève doit être capable de "mobiliser des symboles analogiques, verbaux ou écrits pour communiquer des informations orales et écrites sur une quantité.". Cela nous laisse à penser qu'il en tient du choix de l'enseignant d'introduire les symboles mathématiques comme bon lui semble. Finalement, aucune indication ni préconisation concernant l'égalité n'est renseignée. Nous supposons que la notion d'égalité est généralement abordée oralement "il y en a autant" voire, comme parfois observé lors de nos stages, de manière écrite avec le signe "=" que l'enseignant écrit au tableau.

## **2.1.2 Analyse du programme du cycle 2**

Les mathématiques figurent dans le “Volet 3 : les enseignements”. Nous pouvons lire :

La composante écrite de l'activité mathématique devient essentielle. Ces écrits sont d'abord des écritures et représentations produites en situation par les élèves eux-mêmes qui évoluent progressivement avec l'aide du professeur vers des formes conventionnelles institutionnalisées dans les cahiers par des traces écrites qui ont valeur de référence. Il est tout aussi essentiel qu'une verbalisation reposant sur une syntaxe et un lexique adaptés accompagne le recours à l'écrit et soit favorisée dans les échanges d'arguments entre élèves. L'introduction et l'utilisation des symboles mathématiques sont réalisées au fur et à mesure qu'ils prennent sens dans des situations basées sur des manipulations, en relation avec le vocabulaire utilisé, assurant une entrée progressive dans l'abstraction.

Nous constatons que les écritures mathématiques tendent à évoluer vers des “formes conventionnelles”. Nous supposons que le rôle de l'enseignant va être d'apporter une attention particulière aux écritures mathématiques des élèves de façon à les rendre de plus en plus conventionnelles. Il est indiqué que l'apprentissage des symboles mathématiques se réalise “au fur et à mesure” mais aucune modalité de leur enseignement n'est précisée. Dans la rubrique “Nombres et calculs”, il est écrit que les élèves étudient “différentes désignations orales et/ou écrites : [...] écritures en ligne additives/soustractives [...]”. De plus, il est précisé que “L'étude des quatre opérations (addition [...]) commence dès le début du cycle”. Ainsi, nous présumons que l'introduction du signe “=” devrait être traitée dès l'entrée au CP. “Communiquer” est l'une des six compétences mathématiques au programme. Elle consiste pour les élèves à “Utiliser l'oral et l'écrit, le langage naturel puis quelques représentations et quelques symboles [...]”. Le travail écrit en mathématiques semble indispensable, au même titre que le langage oral.

Un des attendus de fin de cycle de la rubrique Nombres et calculs est : comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer. Les élèves doivent être capable de :

- Comparer, ranger, encadrer, intercaler des nombres entiers, en utilisant les symboles =,  $\neq$ , <, > :
- égalité traduisant l'équivalence de deux désignations du même nombre ;
- ordre ;
- sens des symboles =,  $\neq$ , <, >.”

Dans le programme du cycle 2 nous rencontrons le signe “=” ainsi que le signe “ $\neq$ ” notamment. Toutefois, aucune indication n'est apportée concernant les savoirs sémio-linguistiques associés aux opérations à l'étude.

## **2.2 Analyse des ressources pédagogiques**

Il nous semble également essentiel de nous référer aux manuels et guides pédagogiques, outils dont se servent les enseignants pour élaborer leurs séquences d'apprentissage. Nous nous focaliserons particulièrement sur des manuels et guides du maître récents, conçus par rapport aux programmes en vigueur. D'une part, nous choisissons d'analyser le guide de l'enseignant ainsi que le fichier d'élève utilisés dans la classe de CE1 dans laquelle nous allons mener notre expérimentation. Il s'agit d'ouvrages (guide pédagogique et fichier élève) intitulés *Maths au CE1* des éditions Accès, rédigés principalement par des conseillers pédagogiques et des professeurs des écoles. D'autre part, nous trouvons intéressant d'analyser les ouvrages *Cap maths CP* (guide pédagogique et fichier élève) des éditions Hatier. Ils sont principalement rédigés par des professeurs de mathématiques en IUFM, nous pouvons alors penser que ces professeurs sont renseignés sur les recherches en termes de didactique des mathématiques et qu'ils ont peut-être conscience des difficultés que pose le signe « = » tout au long de la scolarité. Par ailleurs, nous avons choisi des ouvrages pour la classe de CP puisque, comme vu précédemment dans les programmes en vigueur, c'est au cours de cette année que les élèves découvrent l'addition en ligne, donc écrite notamment.

Nous pouvons alors énoncer le postulat qui est que la diversité des types de problèmes additifs permettrait de rencontrer la notion d'égalité sous différentes structures additives. Dans ce cas-là, il est pour nous intéressant de mener ces analyses grâce à deux critères différents. Premièrement, nous avons relevé toutes les égalités en ligne que nous avons trouvées dans les manuels afin de les classer selon le type de structure, soit : une structure du type  $a + b = c$ , du type  $a = b + c$ , ou encore du type  $a + b = c + d$ . Deuxièmement, nous avons étudié les problèmes mathématiques que proposent ces manuels afin d'en déterminer leur type, selon la typologie des problèmes de Vergnaud, et donc pour déterminer à quelle structure additive ces problèmes renvoient, d'après ce que nous en avons conclu précédemment.

## **2.2.1 Les structures additives**

### **2.2.1.1 Maths au CE1, Accès**

En ce qui concerne les structures additives présentes dans le fichier de l'élève (*cf.* annexe n°1),  $\frac{141}{149}$  (94,16%) sont des structures du type  $a + b = c$ ,  $\frac{8}{149}$  (5,4%) sont des structures du type  $a = b + c$  et il n'y a aucune structure du type  $a + b = c + d$ .

Finalement, en utilisant ce fichier, les élèves ne rencontrent que très peu de structures additives variées. Les élèves n'étant pas habitués à en rencontrer, il semble alors normal qu'ils n'acceptent pas les structures du type  $a=b+c$  ou  $a+b=c+d$  lorsqu'on leur en propose.

### **2.2.1.2 Cap Maths CP, Hatier**

Dans le fichier de l'élève *Cap Maths CP* (*cf.* annexe n°2), nous pouvons remarquer que  $\frac{234}{286}$  (81,8%) des structures présentes sont du type  $a+b=c$ ,  $\frac{46}{286}$  (16,1%) du type  $a=b+c$  et  $\frac{6}{286}$  (2,1%) du type  $a+b=c+d$ .

De même que pour le fichier de l'élève des éditions Accès, en utilisant ce fichier, les élèves ne rencontrent que très peu d'égalités variées.

Nous avons alors décidé de classer les structures du type  $a=b+c$  selon l'exercice auquel elles renvoyaient (*cf.* annexe n°3). En effet, nous avons remarqué que ce type de structure n'est pas utilisé pour des exercices "classiques" mais plutôt pour des exercices concernant les doubles et les moitiés ( $\frac{11}{46}$  soit 23,9%) ainsi que pour des exercices de décomposition et de compléments ( $\frac{29}{46}$  soit 63%). Finalement l'utilisation de la structure du type  $a=b+c$  est majoritairement utilisée pour des exercices de décomposition, donc sera peut-être connotée par les élèves comme une structure utilisée exclusivement pour ce type d'exercices.

Comme nous venons de le constater dans les deux fichiers d'élèves, la structure du type  $a+b=c$  est largement plus utilisée que les deux autres. Ce qui est accentué par le fait que la structure du type  $a=b+c$  n'est utilisée majoritairement que pour des exercices de décomposition ou concernant les doubles et les moitiés. Au regard des analyses de ces deux manuels, nous pourrions peut-être énoncer que les élèves ne rencontrant qu'un seul type de structure additive, n'utilisent que celle-ci et ont alors une représentation unique de l'égalité.

## **2.2.2 Les types de problèmes**

Nous avons également relevé les types de problèmes présents dans ces fichiers afin d'analyser à quel type d'égalité ils renvoient. Nous traiterons à quelles égalités renvoient les problèmes selon nos observations en classe d'une part, et si nous écrivons l'égalité selon l'ordre de l'énoncé d'autre part.

Selon nos observations en classes, rappelons que :

- La recherche de l'état final dans les problèmes de transformation d'état renvoie à une structure du type  $a + b = \dots$
- La recherche de l'état initial dans les problèmes de transformation d'état renvoie à une structure du type  $a + \dots = b$
- La recherche de la transformation dans les problèmes de transformation d'état renvoie à une structure du type  $a + \dots = c$
- La recherche du composé dans les problèmes de composition d'état renvoie à une structure du type  $a + b = \dots$
- La recherche d'une partie dans les problèmes de composition d'état renvoie à une structure du type  $a + \dots = c$
- La recherche de l'un des états dans les problèmes de comparaison d'état renvoie à une structure du type  $a + \dots = c$
- La recherche de la comparaison dans les problèmes de comparaison d'état renvoie à une structure du type  $a + \dots = c$
- La recherche de la transformation composée dans les problèmes de composition de transformations renvoie à une structure du type  $\dots + b = c$
- La recherche de l'une des composantes dans les problèmes de composition de transformations renvoie à une structure du type  $a + \dots = c$

Si nous suivons l'ordre de l'énoncé, rappelons que :

- La recherche de l'état final dans les problèmes de transformation d'état renvoie à une structure du type  $a + b = \dots$
- La recherche de l'état initial dans les problèmes de transformation d'état renvoie à une structure du type  $a = b + \dots$
- La recherche de la transformation dans les problèmes de transformation d'état renvoie à une structure du type  $a + \dots = c$
- La recherche du composé dans les problèmes de composition d'état renvoie à une structure

du type  $a + b = \dots$

- La recherche d'une partie dans les problèmes de composition d'état renvoie à une structure du type  $a = b + \dots$
- La recherche de l'un des états dans les problèmes de comparaison d'état renvoie à une structure du type  $a = \dots + c$
- La recherche de la comparaison dans les problèmes de comparaison d'état renvoie à une structure du type  $a = b + \dots$
- La recherche de la transformation composée dans les problèmes de composition de transformations renvoie à une structure du type  $a = b + \dots$
- La recherche de l'une des composantes dans les problèmes de composition de transformations renvoie à une structure du type  $a = b + \dots$

### 2.2.2.1 Maths au CE1, Accès

Nous pouvons remarquer sur le graphique en annexe (cf. annexe n°4) que les problèmes du type composition de transformations ne sont pas présents dans ce fichier, en revanche les trois autres types de problèmes sont présents :  $\frac{32}{73}$  (soit 43,8%) sont des problèmes de transformation d'état (cf. annexe n°5),  $\frac{24}{73}$  (soit 32,9%) sont des problèmes de composition d'état (cf. annexe n°6) et  $\frac{17}{73}$  (soit 23,3%) sont des problèmes de comparaison d'état (cf. annexe n°7). Analysons alors maintenant grâce au graphique ci-dessous, qui met en avant l'élément recherché dans chaque problème, les structures additives qui en émanent.

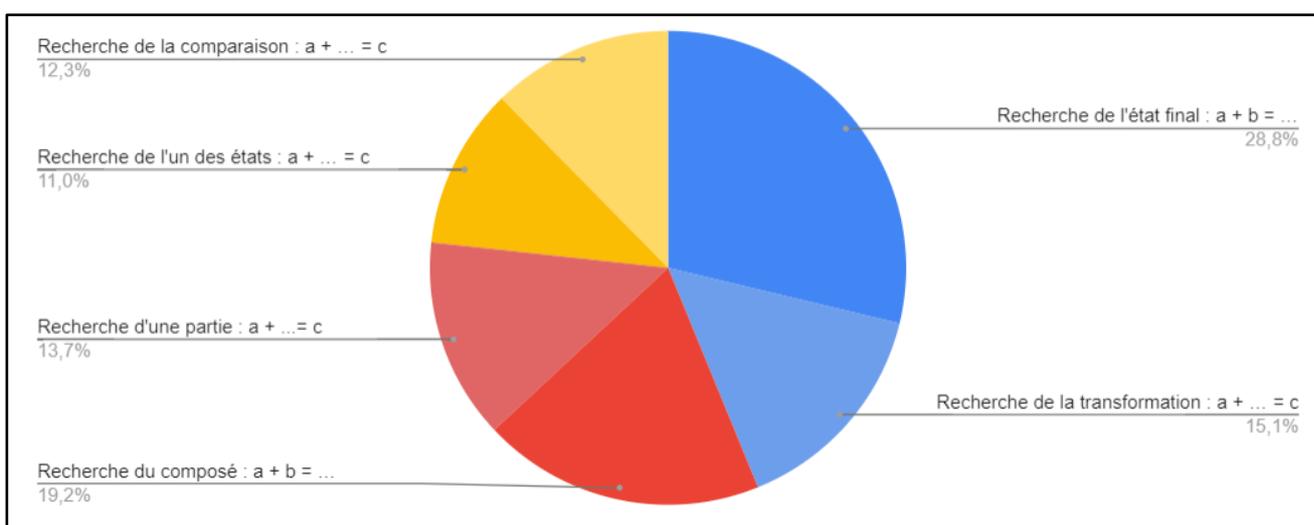


Figure 5 : Diagramme circulaire de l'élément recherché et des structures additives qui en découlent, Maths au CE1, Accès.

Grâce au diagramme ci-dessus, nous constatons qu'aucun type de problème présent dans le fichier n'amène pas les élèves à utiliser une structure additive du type  $a=b+c$ .

Comparons maintenant ce même diagramme si nous invitons les élèves à écrire la structure additive selon l'ordre chronologique du problème.

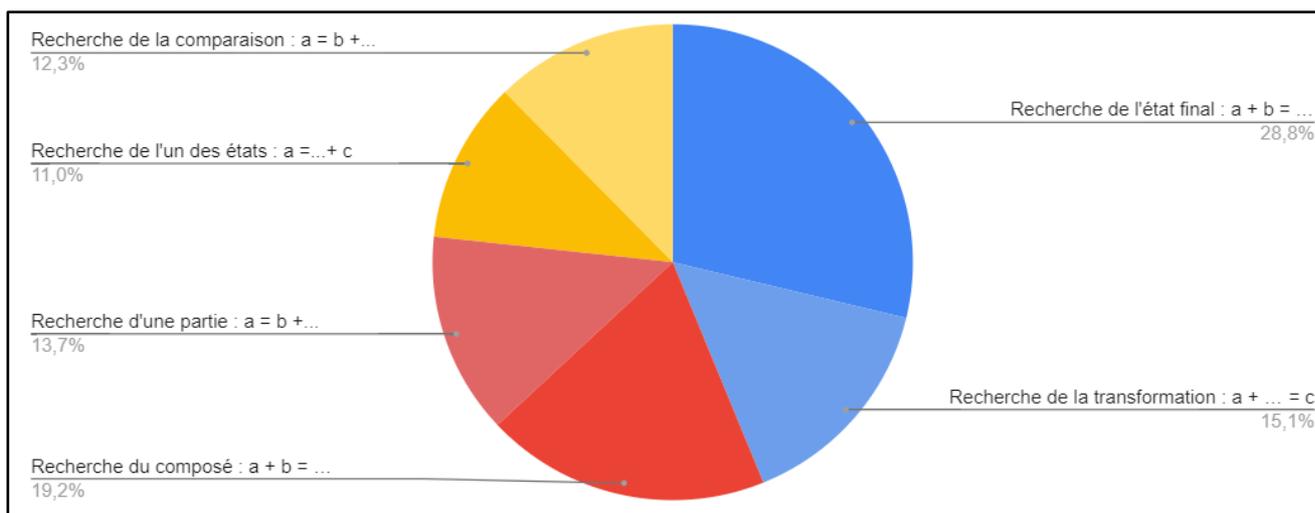


Figure 6 : Diagramme circulaire des types de structures additives qui découlent de la chronologie de l'énoncé, Maths au CE1, Accès.

On remarque alors que  $\frac{27}{73}$  (soit 37%) des problèmes proposés dans ce fichier impliqueraient une structure additive du type  $a=b+c$ .

### 2.2.2.2 Cap Maths CP, Hatier

Tout comme dans le fichier *Maths au CE1, Accès*, les problèmes du type composition de transformations ne sont pas présents dans ce fichier à destination d'élèves de CP (cf. annexe n°8). Nous remarquons en revanche une grande divergence dans la répartition des types de problèmes proposés dans le fichier par rapport à celui étudié au-dessus. Ici, les problèmes de composition d'état constituent de loin la majorité du fichier :  $\frac{91}{114}$  (soit 79,8%). Quelques problèmes de transformation d'état :  $\frac{20}{114}$  (soit 17,5%) sont présents, et enfin une minorité de problèmes de comparaison d'état avec  $\frac{3}{114}$  (soit 2,6%). Grâce au diagramme suivant, nous allons voir quelles sont les différentes structures additives mobilisées au travers des divers problèmes.

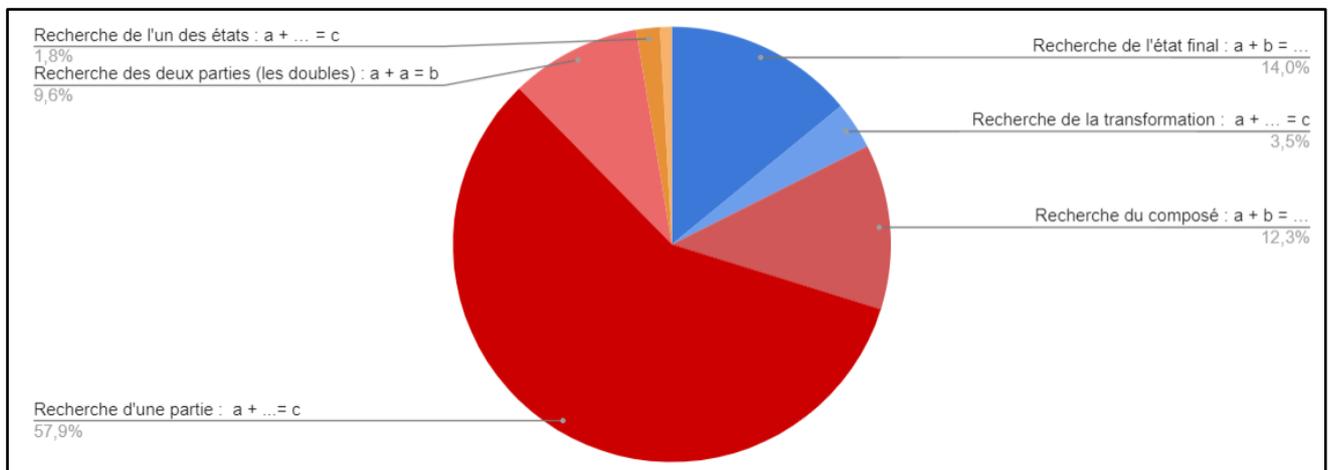


Figure 7 : Diagramme circulaire de l'élément recherché et structures additives mobilisées au travers des problèmes du manuel Cap Maths CP, Hatier.

Grâce au diagramme ci-dessus, nous constatons qu'aucun type de problème présent dans le fichier n'amène les élèves à utiliser une structure additive du type  $a = b + c$ . Comparons maintenant ce même diagramme si nous invitons les élèves à écrire la structure additive selon l'ordre chronologique du problème.

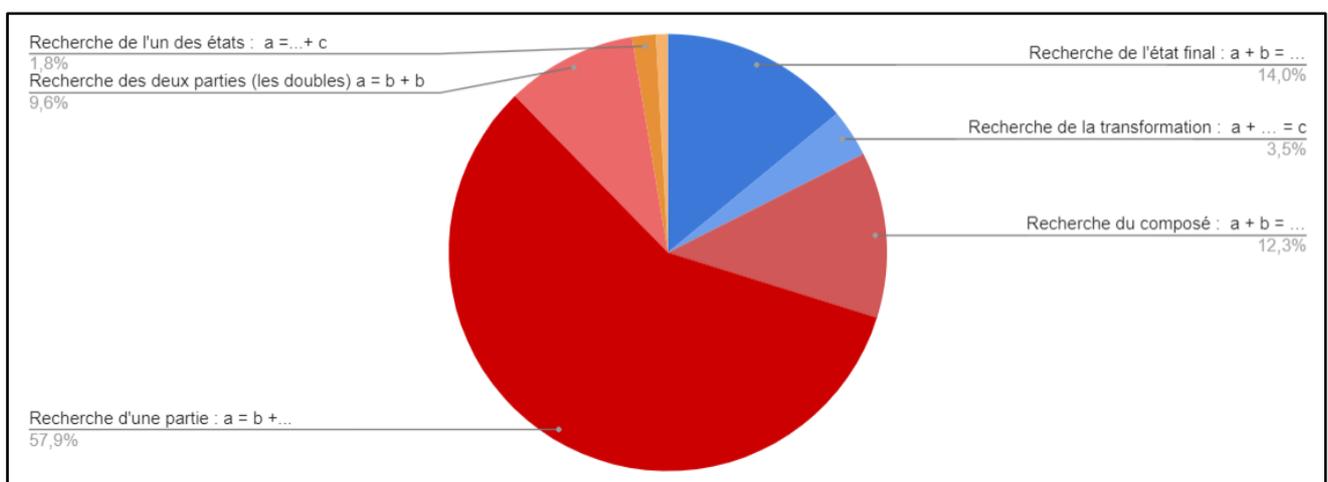


Figure 8 : Diagramme circulaire des types de structures additives qui découlent de la chronologie de l'énoncé, Cap Maths CP, Hatier.

Dans ce cas-là, nous remarquons que  $\frac{79}{114}$  (soit 69,8%) des problèmes amèneraient les élèves à utiliser une structure du type  $a = b + c$ .

En résumé, l'analyse de ces deux fichiers d'élèves, nous amène à conclure que, quel que soit le type de problème proposé, c'est toujours la même structure additive qui serait donc majoritairement utilisée par les élèves, soit la structure du type  $a+b=c$ , si l'enseignant choisit de travailler avec ces manuels-ci. Nous pouvons faire l'hypothèse que ces derniers ne prendront alors peut-être pas

l'habitude de voir et de manipuler d'autres structures additives car ces types de problèmes ne permettent pas de travailler des structures additives du type  $a+b=c+d$ . En revanche, cela pourrait changer si le fichier ou même l'enseignant proposait à ses élèves de suivre la chronologie du problème dans l'écriture de la structure additive ou qu'il propose différentes manières d'écrire le résultat (en termes de structure additive) en laissant la liberté à ses élèves de choisir celle qui leur convient le mieux.

Cette partie exploratoire nous permet, en amont de notre partie expérimentale, de rappeler que ce ne sont pas les ouvrages utilisés en tant que tels par les enseignants qui seraient source de difficultés mais que ces obstacles émaneraient plutôt de phénomènes de transposition didactique (Chevallard, 1985). Plus précisément, pourraient être considérées comme difficultés la manière dont l'enseignant transmet les savoirs à enseigner aux élèves et la façon dont ces derniers reçoivent et s'approprient ces savoirs enseignés.

### **3 Question de recherche et hypothèses**

#### ***Dans quelle mesure l'articulation des savoirs notionnels et sémiolinguistiques est prise en charge au service d'une conception davantage mathématique du signe "=" dans l'enseignement ?***

Hypothèses :

- La rencontre de diverses structures additives dans des temps de manipulation permettrait aux élèves de s'approprier une conception mathématique du signe "=".
- L'utilisation de représentations diverses de nombres permettrait de ne pas donner aux élèves une conception unique de l'égalité.
- La réalisation d'une leçon permettrait d'institutionnaliser le concept d'égalité.

## **4 Méthodologie et expérimentations envisagées**

### **4.1 Mise en place d'une expérimentation dans une classe**

Grâce aux différentes lectures que nous avons présentées ainsi qu'à nos premières observations lors de nos différents stages en classe notamment, ont émergé chez nous quelques idées concernant les expérimentations que nous envisageons de faire afin de poursuivre nos recherches.

Nous avons fait le choix de concevoir puis de mettre en œuvre une séance d'apprentissage, précédée et suivie d'un pré et post-test, dans une classe de CE1 qui comporte 23 élèves. Le cycle 2 est le cycle des apprentissages fondamentaux où les premières bases acquises au cours du cycle 1 sont institutionnalisées. C'est également lors du cycle 2 que les élèves sont amenés à mettre par écrit ce qu'ils avaient autrefois l'habitude d'oraliser. De plus, en CE1, les élèves connaissent déjà quelques tables d'additions, ce qui leur permet d'éviter les erreurs liées aux calculs. En effet, notre objectif n'est pas de les évaluer sur leur capacité à trouver le résultat d'une addition mais d'observer la conception qu'ils ont des différentes écritures additives. Il s'agit d'une école élémentaire de milieu ordinaire, ce qui nous permet de mettre de côté la plupart des difficultés liées au milieu social.

#### **4.1.1 Pré-test**

##### **4.1.1.1 Description**

Notre pré-test est dédié à un recueil de conceptions, il se compose en deux tâches distinctes faisant intervenir des structures additives variées. Le premier exercice (*cf.* annexe n°9) consiste pour l'élève à vérifier si les égalités qui lui sont proposées sont correctes ou non puis de justifier pourquoi sur les lignes présentes sous chaque égalité à cet effet. Il y a au total cinq égalités dont une erronée. Dans le second exercice (*cf.* annexe n°10), l'élève est invité à compléter les sept égalités présentes sur la feuille, il peut tracer une croix sur les pointillés s'il ne sait pas.

### 4.1.1.2 Analyse à priori

Précisons que les nombres que nous avons choisis sont inférieurs ou égaux à 10 afin d'éviter les erreurs liées au calcul. Comme précisé précédemment, notre objectif est bien de rendre compte de la représentation que les élèves ont des différentes écritures additives et plus particulièrement du signe "=". De fait, notre variable didactique dominante est celle de proposer des écritures additives variées, de celles qui sont les plus familières aux élèves à celles qui sont plus éloignées de leur quotidien. C'est grâce à ces variables que nous pourrions mettre en lumière les différentes conceptions que les élèves ont de l'égalité et/ou du signe "=".

Par ailleurs, nous avons fait le choix de répartir notre pré-test en deux parties qui seront effectuées à deux moments différents de la journée, une première partie à réaliser le matin et une deuxième l'après-midi de façon à rendre ces écrits individuels moins conséquents pour les élèves. En effet, les résultats du pré-test pourraient facilement être faussés, suite à une surcharge cognitive où les élèves auraient trop de paramètres à prendre en compte dans la réalisation des tâches ou encore une simple baisse d'attention. Intéressons-nous à présent aux différents résultats d'élèves que nous pouvons d'ores et déjà anticiper. Nous avons regroupé les égalités par type d'égalité afin d'analyser les procédures possibles.

#### Analyse de la première partie du pré-test :

- Égalités du type  $a + b = c$

- Egalité 1 : " $3+2=5$ "

Il s'agit de l'écriture additive la plus courante, celle que les élèves ont l'habitude de rencontrer. Nous supposons donc que la majorité des élèves entoureront "oui" et qu'ils justifieront leur réponse en écrivant de toutes lettres que "trois plus deux font cinq" ou "trois plus deux égale cinq".

- Égalités du type  $a+b=c+d$

Pour ces égalités-là, on peut déjà dire qu'elles ne sont pas souvent rencontrées par les élèves.

- Egalité 2 : " $4+3=7+2$ "

Voici les procédures envisageables par les élèves :

*Procédure 1* (valide) : en calculant de part et d'autre du signe "=", on n'obtient pas la même quantité ( $4+3=7$  ;  $7+2=9$ ). L'égalité est alors incorrecte. L'élève considère alors le signe "=" comme un séparateur où la même quantité doit-être représentée de part et d'autre du signe.

*Procédure 2* (valide) : en décomposant "7" en "4+3", on remarque le "+2" en trop. L'égalité est alors

incorrecte. Ici, l'élève mobilise des savoirs notionnels tels que la décomposition du nombre 7 en 4+3. *Procédure 3* (invalides) : "4+3" font "7", c'est bien "7" qui se trouve juste après le signe "=" (en ne prenant pas en compte le "+2"). L'égalité est correcte. Dans ce cas-là, l'élève mobilise bien le savoir notionnel de l'addition, puisqu'il sait que 4+3 font 7, en revanche il ne mobilise pas de savoir sémiolinguistique concernant le signe "=".

- Égalité 4 : "4+5=8+1" et égalité 5 : "4+3+2=4+5"

Pour les égalités 4 et 5, voici les procédures possibles :

*Procédure 1* (valide) : en calculant de part et d'autre du signe "=", on obtient la même quantité. Les égalités sont alors correctes. L'élève considère alors le signe "=" comme un séparateur où la même quantité doit être représentée de part et d'autre du signe.

*Procédure 2* (invalides) : il y a plus d'un nombre à droite du signe égal, donc les égalités sont fausses. L'élève ici n'a qu'une seule conception de l'égalité avec une structure du type  $a+b=c$ , et n'étend pas cette connaissance aux autres types de structures.

- Égalités du type  $a=b+c$

- Égalité 3 : "7=5+2"

D'après notre étude sur les différentes structures additives présentes dans le fichier élève de cette classe, nous en avons relevé huit occurrences sur un total de cent-quarante-neuf. Il se pourrait que les élèves aient donc déjà rencontré cette écriture. Ainsi, certains pourraient la trouver correcte grâce aux procédures suivantes.

*Procédure 1* (valide) : "sept égale cinq plus deux".

*Procédure 2* (valide) : "cinq plus deux égale sept", en "inversant" le sens de lecture de la structure. L'élève a donc une conception de l'égalité avec une structure du type  $a+b=c$ , et il n'est pas réticent à dire que cette égalité est juste même si pour lui elle est "inversée", ce qui nous montre que les savoirs sémiolinguistiques, en lien avec l'égalité, ne sont que partiellement acquis.

*Procédure 3* (valide) : en calculant de part et d'autre du signe "=", on obtient le même dénoté (7 ;  $5+2=7$ ). L'élève considère alors le signe "=" comme un séparateur où la même quantité doit être représentée de part et d'autre du signe.

Pour autant, une autre partie des élèves pourrait n'être pas d'accord avec cette égalité.

*Procédure 4* (invalides) : le signe "=" n'est pas placé au "bon endroit" ou encore que "l'égalité est écrite à l'envers / pas dans le bon sens". Ici, l'élève considère l'égalité sous la forme  $a+b=c$  et n'étend

pas ses connaissances sur les autres types de structures. Il a donc une conception du signe “=” comme opérateur.

Analyse de la deuxième partie du pré-test :

Nous allons maintenant écrire les réponses des élèves que l’on envisage pour toutes ces égalités.

Pour cet exercice, nous attendons des élèves qu’ils arrivent à compléter facilement les égalités de type  $a+b=c$ , car cette structure est connue et les élèves y sont habitués, ainsi que celle de type  $a=b+c$  puisqu’elle met en jeu des nombres très parlants.

- Egalité n°1 : “ $2+7=...$ ”

*Réponse 1* (correcte) : “9”

*Autre réponse possible* : erreur de calcul.

- Egalité n°5 : “ $3=1+...$ ”

*Réponse 1* (correcte) : “2”

*Réponse 2* (incorrecte) : “4”, si l’élève additionne les termes sans prendre en compte la place des signes “=” et “+”, et considère alors l’égalité sous une seule et unique forme :  $a+b=c$ .

*Autre réponse possible* : erreur de calcul.

- Egalité n°2 : “ $2+...=6$ ”

*Réponse 1* (correcte) : “4”

*Réponse 2* (incorrecte) : “8” si l’élève additionne tous les termes. Ici, l’élève ne prend pas en compte la place des signes et des nombres et considère donc que pour réussir l’exercice il faut additionner les termes proposés et écrire le résultat dans le trou.

*Autre réponse possible* : erreur de calcul.

Nous supposons qu’ils n’arriveront pas tous à compléter les trois égalités les moins habituelles c’est-à-dire du type  $a+b=c+d$ . Il se pourrait qu’ils ne prennent pas en compte l’un des termes, plus précisément ceux situés en toute fin de structure.

- Egalité n°3 : “ $5+...=8+2$ ”

*Réponse 1* (correcte) : “5”.

*Réponse 2* (incorrecte): “15” si l’élève additionne tous les termes.

*Réponse 3* (incorrecte) : “10” si l’élève additionne les termes de droite sans prendre en compte le “5+”. L’élève considère le signe “=” comme annonce de résultat. On peut tout de même dire que comme l’élève ne considère pas l’égalité comme “à l’envers”, il sera alors plus aisé de faire évoluer ses savoirs sémio-linguistiques à propos du signe “=”.

*Réponse 4* (incorrecte) : “3” si l’élève ne prend pas en compte le “+2”. L’élève considère alors le signe “=” comme annonce de résultat, avec seulement un terme à sa droite.

*Autre réponse possible* : erreur de calcul.

- Egalité n°7 : “4+5=...+2”

*Réponse 1* (correcte) : “7”.

*Réponse 2* (incorrecte) : “11” si l’élève additionne tous les termes. Ici également, l’élève ne prend pas en compte la place des signes et des nombres et considère donc que pour réussir l’exercice il faut additionner les termes proposés et écrire le résultat dans le trou.

*Réponse 3* (incorrecte) : “9” si l’élève additionne les termes à gauche du signe “=” sans prendre en compte le “+2”. L’élève considère alors le signe “=” comme annonce de résultat, avec seulement un terme à sa droite.

*Autre réponse possible* : erreur de calcul.

- Egalité n°4 : “4+...=6+...”

Pour cette égalité-ci, une infinité de réponses est possible. Pour que l’égalité soit correcte, il faut que le nombre écrit dans la partie droite soit le nombre écrit dans la partie gauche auquel on soustrait 2. Nous nous attendons alors à beaucoup de croix, ce qui voudrait dire que les élèves ne savent pas quels nombres mettre dans les lacunes.

Réponse partiellement vraie :

“2” et “X” : l’élève met un “2” dans la première lacune car  $4+2=6$ , mais met une croix dans la deuxième lacune car il ne sait pas quoi mettre. Donc l’élève considère le signe “=” comme annonce de résultat, avec seulement un terme à sa droite. Un “0” à la place de la croix rendrait la réponse totalement vraie.

Réponses fausses :

“10” et “X” si l’élève ajoute tous les termes.

“X” et “10” si l’élève ne prend pas en compte la place des signes.

- Egalité n°6 : “ $8=1+...+3$ ”

Enfin, les élèves pourraient rencontrer une difficulté à compléter la sixième égalité de type  $a=b+c+d$  qui comporte un nombre inhabituel de termes du côté droit du signe égal, une écriture qui ne leur est pas familière.

*Réponse 1 (correcte) : “4”.*

*Réponse 2 (incorrecte) : “9”* si l’élève ne prend pas en compte la place des signes ainsi que le “+3”. L’élève n’a alors qu’une seule conception de l’égalité qui est celle du type  $a+b=c$ , avec les signes dans cet ordre-là, et avec ni plus, ni moins de termes.

*Réponse 3 (incorrecte) : “12”* si l’élève additionne tous les termes de l’égalité. Ici également, l’élève ne prend pas en compte la place des signes et des nombres et considère donc que pour réussir l’exercice il faut additionner les termes proposés et écrire le résultat dans le trou.

*Autre réponse possible : erreur de calcul.*

### **4.1.1.3 Analyse à postériori et résultats**

#### **4.1.1.3.1 Première partie du pré-test**

La première partie du pré-test qui a eu lieu le matin à l’arrivée des élèves, juste après les rituels, ne s’est pas déroulée comme prévu. Les élèves ont rencontré une difficulté, celle de mettre par écrit leur pensée. L’enseignante a alors utilisé un dictaphone afin de garder en mémoire les différentes verbalisations des élèves sur les diverses égalités. Cet imprévu aura finalement été une aide précieuse pour notre analyse des conceptions.

Pour analyser les résultats de la première partie du pré-test (*cf.* annexe n°11), nous allons classer les réponses des élèves selon les conceptions qui en découlent (*cf.* annexe 12). Nous ne pouvons pas établir un résultat général puisque toutes les égalités sont différentes, font émerger des conceptions distinctes et donc ces résultats ne seraient pas vraiment représentatifs.

#### 4.1.1.3.2 Analyse

Précisons que la première égalité a été tout à fait réussie, comme nous l'avons évoqué précédemment, celle-ci permettait plutôt aux élèves de leur faire comprendre l'exercice et de les mettre en confiance. Nous avons tout de même repéré que la plupart des élèves répondent qu'ils trouvent le même résultat, donc qu'ils trouvent la même quantité de part et d'autre du signe "=", finalement, ils considèrent ce signe comme un opérateur.

##### 4.1.1.3.2.1 Le signe "=" vu comme un opérateur

Un premier type de réponses nous amène à dire que certains élèves ont une conception du signe "=" comme opérateur. Dans cette catégorie-là, plusieurs justifications ont été relevées.

Nous avons repéré une réponse, comme avec l'exemple de Paul pour la deuxième égalité ( $4+3=7+2$ ), qui énonce que l'égalité n'est pas correcte parce que " $4+3 =$  tout simplement 7", où nous pouvons sous-entendre que le "+2" n'a pas sa place dans l'égalité. Quatre élèves sur les vingt-deux ont une réponse similaire à celle-ci pour cette égalité.

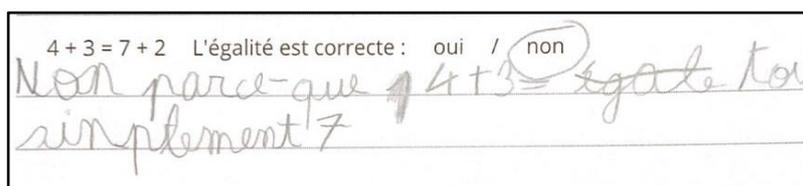


Figure 9 : Production de Paul pour l'égalité  $4+3=7+2$

De même, Lou, pour toutes ses justifications fait ce que nous pouvons appeler des "ponts" sous les nombres, ce qui montre qu'elle effectue les additions de part et d'autre du signe "=" afin de comparer les résultats. Si les résultats sont les mêmes, l'égalité est juste, en revanche s'ils sont différents elle conclut que l'égalité est fausse.

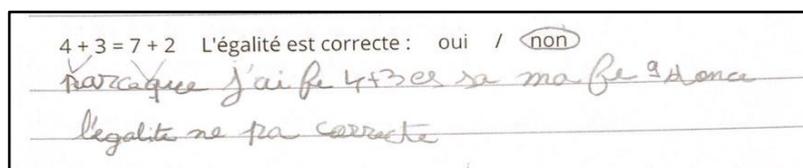


Figure 10 : Production de Lou pour l'égalité  $4+3=7+2$

De la même manière, de nombreux élèves comme Romane, calculent des quantités de part et d'autre du signe "=" et le montrent davantage dans leurs justifications.

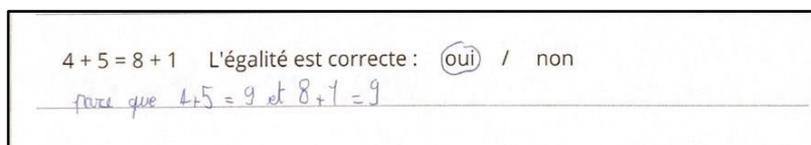


Figure 11 : Production de Romane pour l'égalité  $4+5=8+1$

Également ici, Lucas écrit “j’ai trouvé le même résultat”, ce qui peut laisser sous-entendre le même résultat de part et d’autre du signe “=”.

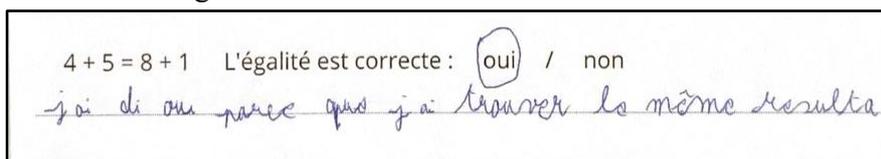


Figure 12 : Production de Lucas pour l'égalité  $4+5=8+1$

#### 4.1.1.3.2 Conception unique de l'égalité : structure du type $a+b=c$

En ce qui concerne la troisième égalité ( $7=5+2$ ), dix-sept élèves sur les vingt-deux répondent que l'égalité est correcte et justifient pour la plupart comme Paul, en écrivant l'égalité dans le sens le plus usuel pour eux. Ceci nous indique alors que la structure du type  $a+b=c$  est réellement ancrée dans les conceptions des élèves.

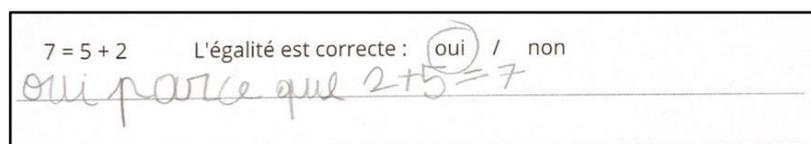


Figure 13 : Production de Paul pour l'égalité  $7=5+2$

Par ailleurs, notamment pour l'égalité n°3 ( $7=5+2$ ), nous avons remarqué que deux élèves répondaient à l'écrit que l'égalité était correcte mais que quand ils devaient justifier à l'oral ils précisait que l'égalité était correcte mais écrite à l'envers. Ceci montre alors que les élèves complétaient la fiche sans réellement être d'accord avec ce qui était écrit. Les réponses écrites seulement n'auraient alors pas permis d'identifier cette nuance-ci.

Par exemple, Thomas a entouré “oui”, donc cet élève pense que cette égalité est correcte. En revanche, voici l'échange qu'il y a eu avec l'enseignante lorsque cette dernière l'interroge sur sa réponse :

P.E : Sept égal cinq plus deux c'est vrai ?

Élève : Oui

P.E : Très bien, pourquoi ?

Élève : Parce que ça (l'élève pointe le 7) je sais que normalement il devrait être là mais c'est qu'en fait

P.E : Attends, redis-moi ? Le sept qui est à gauche (l'élève le pointe du doigt)

Élève : Le sept il doit être là normalement (il montre sur sa feuille) et le égal mais vu que c'est une bonne réponse c'est oui

P.E : Ok

D'autre part, nous avons remarqué un type de réponse qui émergeait pour les égalités n°2 ( $4+3=7+2$ ), n°4 ( $4+5=8+1$ ) et n°5 ( $4+3+2=4+5$ ) où de nombreux élèves considèrent ici aussi l'égalité sous une seule et unique forme : le type  $a+b=c$ , comme le prouve l'échange entre l'enseignante et Léo :

P.E : Et ici ?

Élève : Ici

P.E : Pourquoi c'est faux ?

Élève : Non puisqu'il y a le égal et après ya encore des chiffres et un plus

Ce type de réponse-là se produit  $\frac{4}{22}$  fois pour l'égalité n°2,  $\frac{5}{22}$  fois pour l'égalité n°4 et  $\frac{5}{22}$  fois pour l'égalité n°5.

#### 4.1.1.3.2.3 Somme de tous les termes

Nous avons relevé un dernier type de réponse, notamment de la part d'une élève, Théa, pour les égalités n°4 et n°5, où cette élève additionne tous les termes de l'égalité. Ce que nous trouvons étrange c'est que cet élève aurait pu répondre de la même manière pour l'égalité n°2, ce qui n'est pas le cas, il aurait été donc intéressant d'avoir un échange oral pour nous permettre d'analyser sa réponse. Il est alors difficile pour nous de faire émerger une conception de cette production puisque nous ne savons pas sur quelles notions se base cette élève pour répondre que les égalités ne sont pas correctes.

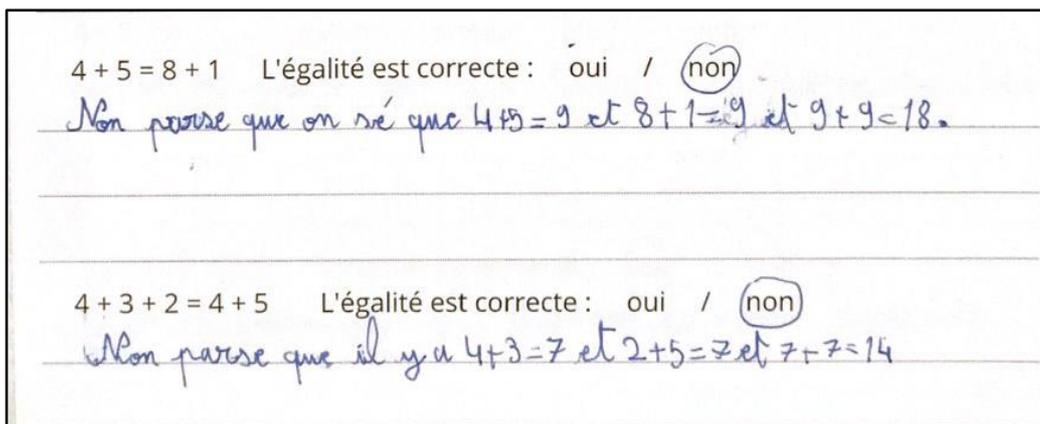


Figure 14 : Production de Théa pour les égalités  $4+5=8+1$  et  $4+3+2=4+5$

#### 4.1.1.3.2.4 Mobilisation de réelles connaissances

Enfin, nous avons relevé les réponses de Joana, une élève qui mobilise de réelles connaissances notionnelles et sémio-linguistiques en ce qui concerne l'égalité, en effet, elle considère le signe "=" comme le signe indicateur d'une relation.

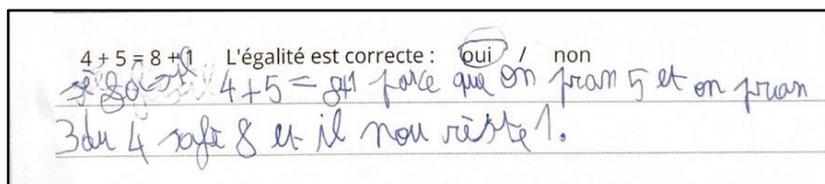


Figure 15 : Production de Joana pour l'égalité  $4+5=8+1$

Effectivement, ici l'élève modifie l'égalité  $4+5$  en  $8+1$  en passant par  $1+3+5$ , elle obtient alors les mêmes quantités de part et d'autre du signe égal sans passer par la somme de part et d'autre du signe "=".

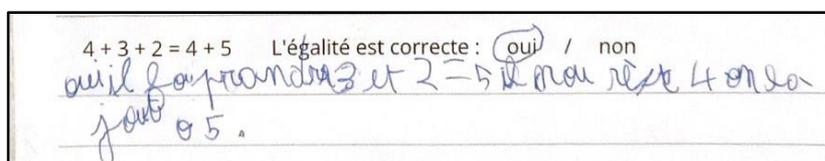


Figure 16 : Production de Joana pour l'égalité  $4+3+2=4+5$

Également, cette élève associe le  $3+2$  de gauche au  $5$  de droite, elle modifie donc l'égalité  $4+3+2=4+5$  en  $4+5=4+5$ , sans passer par la somme ici aussi.

#### 4.1.1.3.2.5 Données inexploitable

Nous devons préciser que certaines justifications des élèves n'étaient pas exploitables, soit parce qu'il n'y avait tout simplement pas de justification écrite, soit parce que la justification n'était pas explicite pour nous, comme celle de Léa :

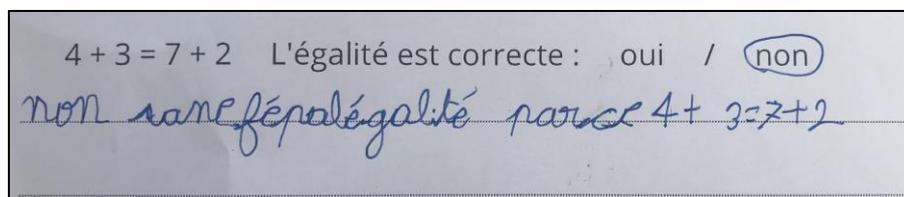


Figure 17 : Production de Léa pour l'égalité  $4+3=7+2$

#### **4.1.1.3.3 Conclusion**

Finalement, la première partie de ce pré-test nous a permis de voir que les élèves ne rencontraient pas vraiment de difficultés liées aux nombres en jeu mais des difficultés spécifiquement liées aux structures additives proposées, surtout lorsqu'ils étaient confrontés à celles qu'ils n'avaient pas l'habitude de rencontrer. De plus, la modalité écrite de cet exercice ne fait pas ressortir toutes les conceptions des élèves dans le sens où quand ils écrivent que l'égalité est correcte, nous ne pouvons pas savoir si c'est qu'ils pensent qu'elle est correcte dans sa totalité (sens, utilisation des signes), donc l'aspect sémio-linguistique, ou seulement au niveau du calcul, c'est-à-dire l'aspect notionnel. Donc, certains élèves affirment que l'égalité est correcte, dans le sens où l'égalité est juste mathématiquement, mais ne sont pas forcément d'accord avec le sens de l'écriture de celle-ci. On pourrait donc en conclure que les savoirs notionnels sur l'addition sont acquis, en revanche, les savoirs sémio-linguistiques concernant le signe "=" ne sont pas entièrement assimilés et ces élèves considèrent alors l'égalité sous une seule de ses formes : celle du type  $a+b=c$ . Il faudrait alors amener les élèves à étendre leurs connaissances qu'ils ont sur cette dernière structure à celles du type  $a=b+c$  et  $a+b=c+d$ .

#### **4.1.1.3.4 Deuxième partie du pré-test**

Grâce à la deuxième partie du pré-test, nous avons obtenu 147 réponses d'élèves, dont 104 sont justes (cf. annexe n°11). Nous allons maintenant analyser les réponses fausses. Nous avons classé les 24 réponses fausses sous quatre catégories qui correspondent à des types d'erreurs et des conceptions différentes (cf. annexe n°12). Ce classement a été réalisé notamment grâce à l'analyse à priori du pré-test. Nous avons alors relevé que la plupart des erreurs sont dues à des erreurs de calcul :  $\frac{15}{24}$  des réponses fausses. Ensuite,  $\frac{5}{24}$  des erreurs résultent d'une conception du signe "=" comme annonce de résultat, c'est donc une conception que nous devons faire évoluer lors de notre séance pour les amener vers une conception du signe "=" comme relation d'équivalence. Voici l'exemple de la production de Théo où cet élève écrit « 9 » dans la lacune, soit la somme de 4 et 5, et ne prend pas en compte le « +2 » qui suit.

$$4 + 5 = \overset{9}{\dots\dots} + 2$$

Figure 18 : Production de Théo pour l'égalité  $4+5=\dots+2$

Par ailleurs, nous avons remarqué que  $\frac{3}{24}$  des réponses sont fausses car les élèves additionnent tous les termes de l'égalité sans prendre en compte ni la place des signes et des termes, ni celle de la quantité recherchée. Les élèves faisant cette erreur-là mobilisent des savoirs notionnels quant à la l'addition mais ne mobilisent pas de savoirs sémio-linguistiques par rapport au signe “=”.

Voici l'exemple de la production de Léa.

$$4 + 5 = \overset{11}{.11\dots} + 2$$

Figure 19 : Production de Léa pour l'égalité  $4+5=\dots+2$

Enfin,  $\frac{1}{24}$  réponse correspond une conception de l'égalité sous l'unique forme du type  $a+b=c$ . L'enjeu ici sera d'étendre cette conception aux égalités du type  $a=b+c$  et  $a+b=c+d$ . Voici l'exemple de la production de Théo.

$$3 = 1 + \overset{A}{.A.}$$

Figure 20 : Production de Théo pour l'égalité  $3=1+\dots$

## 4.1.2 Séance

### 4.1.2.1 Description

La séance d'apprentissage que nous avons intitulé “Les égalités” (cf. annexe n°13) a pour objectifs de mobiliser différentes désignations écrites d'un même nombre et de comprendre la notion d'égalité. Les élèves sont amenés à construire des savoirs sur l'égalité au travers d'un jeu de cartes (cf. annexe n°14).

Tout au long des quatre phases, les élèves développent deux principales compétences mathématiques, la première étant de calculer (mentalement avec des nombres entiers en utilisant des stratégies adaptées aux nombres en jeu), la seconde est de communiquer (un résultat à l'oral comme à l'écrit),

d'après le BO du cycle 2.

En début de séance, l'enseignante donne la consigne aux élèves et effectue une démonstration afin de leur montrer de manière explicite ce qu'ils doivent faire. Une fois les élèves répartis par groupe de trois, le temps de manipulation débute, les élèves jouent au jeu des égalités. Ce jeu se joue par trinôme, deux élèves ont un paquet de cartes faces cachées placées devant eux et doivent les retourner une par une en même temps et vérifier s'il y a égalité entre les dénotés représentés sur les deux cartes ou non. S'il y a égalité, alors le troisième élève doit la garder en mémoire en l'écrivant sur la feuille. Les rôles tournent à chaque égalité trouvée. Le but du jeu est de trouver le plus d'égalités possible. Le jeu se termine lorsque les élèves ont retourné toutes les cartes. Pendant la phase de jeu, l'enseignante circule dans la classe avec une ardoise afin de noter les groupes d'élèves qui ont trouvé les égalités prévues et qu'elle interrogera donc durant la mise en commun. Les élèves interrogés partagent alors au groupe classe leur égalité, l'enseignante illustre leurs propos à l'aide des cartes sous lesquelles elle écrit l'égalité trouvée. La séance se clôture avec une phase de mise en commun suivie d'une phase d'institutionnalisation où l'enseignante et les élèves co-construisent une leçon qui sera par la suite collée dans le cahier de leçons de mathématiques.

#### **4.1.2.2 Analyse à priori**

Pour mener à bien cette séance, nous avons effectué plusieurs choix afin d'amener les élèves vers nos objectifs principaux. Comme énoncé précédemment, pendant le temps de jeu, l'enseignante passe de groupe en groupe et repère différentes réponses, qu'elle note sur une feuille. Cette étape est primordiale puisque nous avons choisi différentes égalités dans le but de les discuter durant la mise en commun. Les paquets de cartes ont donc été organisés dans cet objectif-là. Effectivement, selon nos calculs, la probabilité d'obtenir une égalité entre deux cartes pour des paquets non truqués était de cinq cent-trente-huitième pour obtenir une égalité de dénoté 4 ou 5, et d'un quarante-sixième pour obtenir une égalité de dénoté 8, 10 ou 12. C'est donc après avoir effectué ces calculs que le choix de truquer les paquets de cartes s'est imposé à nous afin que les élèves puissent trouver des égalités durant le temps prévu pour la séance. De plus, nous avons organisé les paquets de cartes des élèves de sorte que nous obtenions des égalités intéressantes, c'est-à-dire qui montrent différentes structures, à mettre en commun au tableau. Voici les égalités choisies :

-  $3+7=10$

Cette égalité est la plus connue des élèves, il nous semblait important de leur montrer pour affirmer que cette égalité, et plus largement ce type d'égalité est correct et que nous pouvons l'utiliser.

-  $8=6+2$

Cette égalité nous permettra de montrer aux élèves qu'il n'y a finalement pas de "sens" dans une égalité et que le signe "=" n'est pas un opérateur.

-  $5+2+5=6+6$  ;  $1+4=3+2$  ;  $4+4=3+1+4$

Ces trois dernières égalités nous permettront de mettre en lumière plusieurs éléments. Le premier est que l'on peut mettre autant de termes que l'on veut de part et d'autre du signe égal, la seule condition est que lorsqu'on ajoute les termes de droite d'une part, et les termes de gauche d'autre part, on obtient le même dénoté des deux côtés du signe "=". Le second est que tous les termes dans une égalité sont importants. En effet, lors du pré-test nous avons remarqué que de nombreux élèves ne prenaient pas en compte les derniers termes de droite lorsqu'il y avait plus d'un nombre à droite du signe égal.

Ensuite, lors de cette mise en commun, l'enseignante interrogera aussi des groupes d'élèves qui obtiendront les mêmes quantités mais représentées de manière différentes. Ceci permettra de renforcer l'idée que l'égalité n'a pas de sens mais aussi qu'un nombre peut s'exprimer de plusieurs façons.

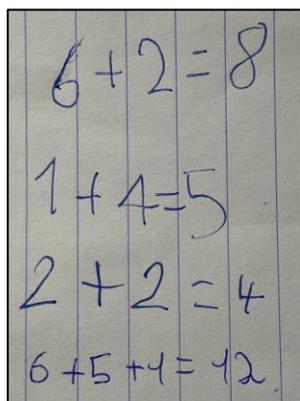
Nous avons également fait le choix d'introduire le signe " $\neq$ " lors de la mise en commun grâce à une éventuelle erreur. Cela nous paraît important de montrer aux élèves qu'il existe un autre signe pour montrer que les deux quantités sont différentes.

En ce qui concerne la phase d'institutionnalisation, nous trouvons important de co-construire la leçon avec les élèves. Effectivement, cette co-construction est préconisée dans les ressources ministérielles mais elle permet aussi de rendre les élèves acteurs de leurs apprentissages et favorise l'appropriation des savoirs. De plus, c'est lors de ce moment de structuration que nous pourrons insister davantage sur les savoirs sémio-linguistiques liés à l'égalité en proposant plusieurs types de structures additives renvoyant à un même dénoté.

### 4.1.2.3 Analyse à postériori et résultats

Malgré la démonstration où l'enseignante a bien insisté sur la conservation de l'ordre et des différentes décompositions additives, sur les dix élèves qui ont été secrétaires au moins une fois dans la partie, seulement quatre ont totalement respecté la consigne.

Voici par exemple ce qu'un groupe d'élève, qui n'a pas respecté la consigne, a écrit :



The image shows a photograph of a piece of lined paper with four handwritten mathematical equations in blue ink. The equations are arranged vertically. The first equation is  $6+2=8$ . The second is  $1+4=5$ . The third is  $2+2=4$ . The fourth is  $6+5+4=12$ . The equations are written on a background of vertical lines.

Figure 21 : Production d'un groupe avec une structure unique de l'égalité en " $a+b=c$ "

Alors qu'ils auraient dû écrire :

$$8=6+2$$

$$1+4=5$$

$$2+2=4+0$$

$$6+5+1=5+4+3$$

Nous constatons d'une part que certains élèves ( $\frac{6}{10}$ ) changent l'ordre de l'égalité de façon à n'avoir qu'un seul terme à droite du signe "=". Et d'autre part qu'ils additionnent tous les termes à droite du signe "=", dans l'objectif encore une fois de n'avoir qu'un seul terme à droite du signe "=".

Finalement, la structure additive du type  $a+b=c$  est largement ancrée dans l'habitude des élèves, ils ont du mal à s'en détacher, même après la démonstration et les régulations de l'enseignante pendant le temps de jeu. Toutefois, des élèves ( $\frac{4}{10}$ ) ont réussi à écrire les égalités comme demandé et ont respecté la consigne. Nous avons également pu remarquer qu'au sein d'un même groupe, en fonction de l'élève "secrétaire", les égalités n'étaient pas relevées de la même façon, en voici un exemple :

$$\begin{array}{l} 3+7=10 \\ 2+6=8 \\ 1+3+9=5 \end{array}$$
$$2+3+5=5+5$$

Figure 22 : Production d'un groupe avec deux secrétaires différents

Un groupe d'élèves n'a pas trouvé d'égalité, bien que la consigne était de ne pas mélanger les paquets de cartes, ils n'ont pas pu s'en empêcher. Comme énoncé précédemment, trouver des égalités à partir d'un paquet de cartes non truqué aurait pris un long temps, et donc aurait été pratiquement impossible dans le temps imparti de la séance.

Lors de la mise en commun, les élèves ont su retrouver parmi leurs égalités, des égalités égales à celles proposées par leurs camarades. Cette mise en commun a été suivie d'une phase d'institutionnalisation et de co-construction d'une leçon, qui sera distribuée aux élèves juste avant le post-test.

### **4.1.3 Post-test**

#### **4.1.3.1 Description**

Notre post-test (cf. annexe n°15) est un exercice du même type que celui proposé en deuxième partie du pré-test. En effet, les types d'égalités sont les mêmes que celles du pré-test, seuls les nombres changent. Cet exercice sera proposé aux élèves après la distribution de la leçon et en tant qu'exercice d'entraînement. Pour nous, les résultats obtenus permettront de constater si la séance proposée a pu faire progresser les élèves ou non. Du fait de la similarité du pré et post-test, l'analyse à priori du post-test se trouve en annexes (cf. annexe n°16).

### 4.1.3.2 Analyse à postériori et résultats

Le post-test a eu lieu une semaine après la mise en œuvre de notre séance. Un premier temps d'échange a eu lieu suite à la découverte de la leçon que les élèves avaient construite avec l'enseignante lors de la phase d'institutionnalisation :

L'égalité	
	$2 + 2 = 4$
	Ici on a bien la même quantité représentée des deux côtés du signe = .
On peut aussi écrire :	$3 + 1 = 2 + 2$
	$4 = 1 + 1 + 1 + 1$
	$4 + 0 = 4$
	Mais si ce n'est pas le cas, on écrit le signe $\neq$ entre deux écritures qui ne représentent pas une même quantité :
	$1+3 \neq 5+1$

Figure 23 : Leçon sur l'égalité

Lors de cette mise en route, les discussions entre le groupe classe et l'enseignante laissent à penser que les élèves maîtrisent l'égalité et qualifient les différentes écritures comme correctes. Voici l'extrait d'un échange entre Lola et l'enseignante de la classe :

PE : tu te souviens, tu as dit que c'était à l'envers  
Elève : *Lit*  
PE : Tu es d'accord alors ?  
Elève : Oui  
PE: Et avant tu te souviens tu avais dit que c'était à l'envers, qu'il aurait fallu écrire tout ça (*en montrant du doigt le 1+1+1+1*) d'un côté (*montre le côté gauche*) le égal et ensuite le 4. Ça a changé maintenant ? Tu es d'accord pour dire que cette égalité est écrite correctement ?  
Elève : En fait j'ai compris qu'on pouvait changer de sens (*fait un geste : croise ses mains*)

Finalement, cet échange nous prouve que notre activité de manipulation a fait évoluer les conceptions des élèves et donc que notre hypothèse qui est que « la rencontre de diverses structures additives dans des temps de manipulation permettrait aux élèves de s'approprier une conception mathématique du signe « = » » est certainement vraie pour certains élèves. De même, notre hypothèse qui est que « la réalisation d'une leçon permettrait d'institutionnaliser le concept d'égalité » s'avère également vraie puisque ce moment plutôt formel a permis à certains élèves de comprendre les aspects sémio-

linguistiques de l'égalité.

Toutefois, nous allons voir que les résultats du post-test ne sont pas en adéquation avec les propos énoncés lors de l'échange. D'une part, les résultats du post-test nous montrent que certains élèves régressent, comme Dorian. En effet, l'élève a complété chaque lacune avec la somme de tous les termes présents dans l'égalité, à l'exception des deux premières égalités du type  $a+b=c$ . Cet élève a, après la séance, une conception unique de l'égalité, où celle-ci s'exprime avec une structure du type  $a+b=c$ , sans prendre en compte la place des termes et des signes.

*Calcul mental*

Complète les égalités. Fais une croix si tu ne sais pas.

$2 + 7 = \dots$	$4 + \dots = 6 + \dots$
$2 + \dots = 6$	$3 = 1 + \dots$
$5 + \dots = 8 + 2$	$8 = 1 + \dots + 3$
	$4 + 5 = \dots + 2$

Figure 24 : Pré-test de Dorian

*Calcul mental*

Complète les égalités. Fais une croix si tu ne sais pas.

$4 + 5 = \dots$	$6 + \dots = 8 + \dots$
$3 + \dots = 7$	$5 = 2 + \dots$
$4 + \dots = 5 + 3$	$7 = 2 + \dots + 4$
	$2 + 8 = \dots + 3$

Figure 25 : Post-test de Dorian

D'autre part, ces résultats montrent également que certains élèves ont progressé, c'est le cas de Lola. Lors du pré-test, cette élève a complété les lacunes avec des croix majoritairement quand il s'agissait d'égalités peu rencontrées. Nous pouvons l'affirmer grâce aux explications enregistrées lors de la première partie du pré-test. En effet, elle énonce qu'elle n'a "jamais fait ce truc" ou encore que pour elle "ça veut rien dire si on, si après on met un sept plus deux, ça veut rien dire". En revanche, lors du post-test, six égalités sur les sept sont justes, seulement une égalité est complétée par le signe « $\neq$ », signe que l'enseignante avait introduit durant la phase d'institutionnalisation.

*Calcul mental*

Complète les égalités. Fais une croix si tu ne sais pas.

$2 + 7 = \overset{9}{\dots}$ $2 + \overset{4}{\dots} = 6$ $5 + \overset{X}{\dots} = 8 + 2$	$4 + \overset{X}{\dots} = 6 + \overset{X}{\dots}$ $3 = 1 + \overset{2}{\dots}$ $8 = 1 + \overset{X}{\dots} + 3$ $4 + 5 = \overset{X}{\dots} + 2$
--	---

*Figure 26 : Pré-test de Lola*

*Calcul mental*

Complète les égalités. Fais une croix si tu ne sais pas.

$4 + 5 = \overset{9}{\dots}$ $3 + \overset{4}{\dots} = 7$ $4 + \overset{4}{\dots} = 5 + 3$	$6 + \overset{8}{\dots} = 8 + \overset{6}{\dots}$ $5 = 2 + \overset{3}{\dots}$ $7 = 2 + \overset{1}{\dots} + 4$ $2 + 8 = \overset{X}{\dots} + 3$
--	---

*Figure 27 : Post-test de Lola*

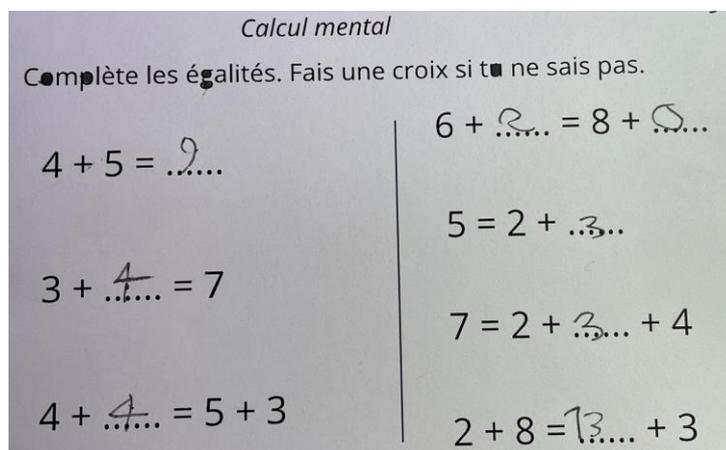
Enfin, les résultats montrent aussi que certains élèves ni ne progressent, ni ne régressent, comme Adrien. Nous observons que l'élève a reproduit les mêmes erreurs faites lors du pré-test, nous nous demandons alors si sa conception de l'égalité a réellement évolué.

*Calcul mental*

Complète les égalités. Fais une croix si tu ne sais pas.

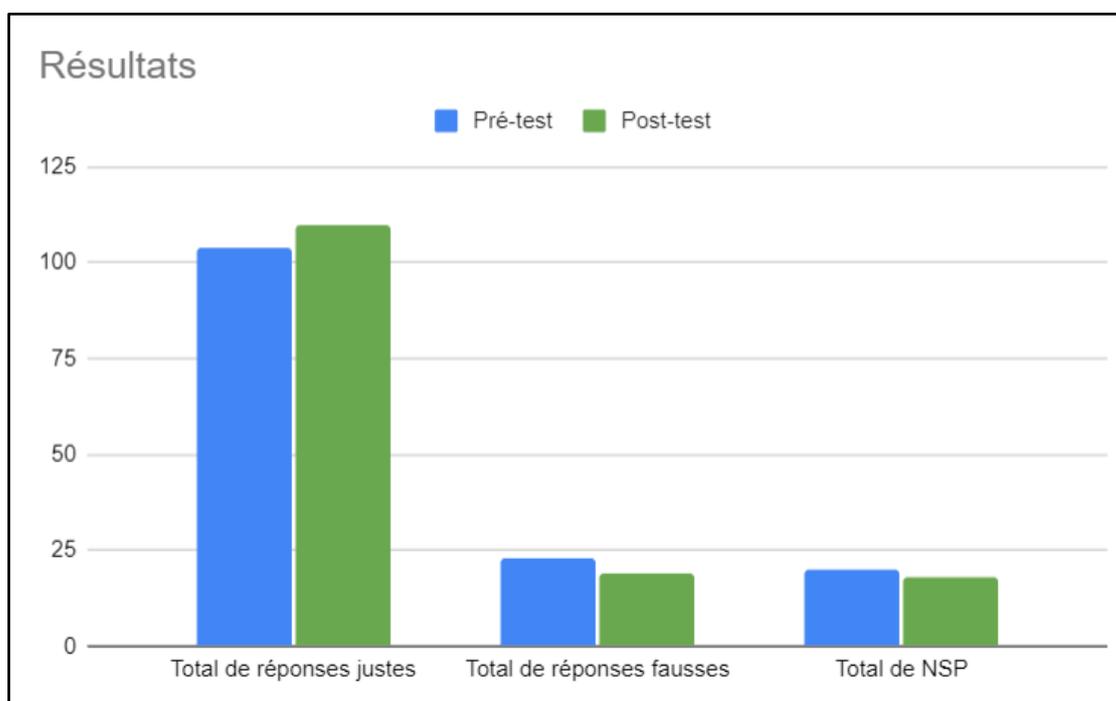
$2 + 7 = \overset{9}{\dots}$ $2 + \overset{4}{\dots} = 6$ $5 + \overset{1}{\dots} = 8 + 2$	$4 + \overset{1}{\dots} = 6 + \overset{1}{\dots}$ $3 = 1 + \overset{2}{\dots}$ $8 = 1 + \overset{7}{\dots} + 3$ $4 + 5 = \overset{7}{\dots} + 2$
--	---

*Figure 28 : Pré-test d'Adrien*



*Figure 29 : Post-test d'Adrien*

Nous allons alors maintenant comparer les réponses des élèves du pré-test avec celles du post-test. Voici, ci-dessous, le diagramme correspondant aux résultats obtenus lors du pré et post-test où sont répertoriés le total des réponses justes, des réponses fausses ainsi que les réponses contenant des croix, où les élèves ne savaient pas quoi répondre (« NSP »).



*Figure 30 : Diagramme en barre comparatif des résultats du pré-test et du post-test*

On remarque alors que la part de réponses justes a augmenté et donc que celle des réponses fausses a baissé. En revanche, la part des réponses où les élèves ont mis une croix n'a que sensiblement diminué par rapport au pré-test.

Pour poursuivre notre recherche, nous pouvons maintenant analyser plus finement les réponses fausses des élèves. Nous avons alors identifié trois types d'erreurs : une première où les élèves

additionnent tous les termes de l'égalité sans prendre en considération la place des signes, une deuxième où ils ne prennent pas en compte le dernier terme de l'égalité et enfin une troisième qui relate d'une erreur de calcul ("autre raison" dans le diagramme). Comparons alors ces erreurs qui ont été faites lors du pré-test et du post-test grâce au diagramme suivant.

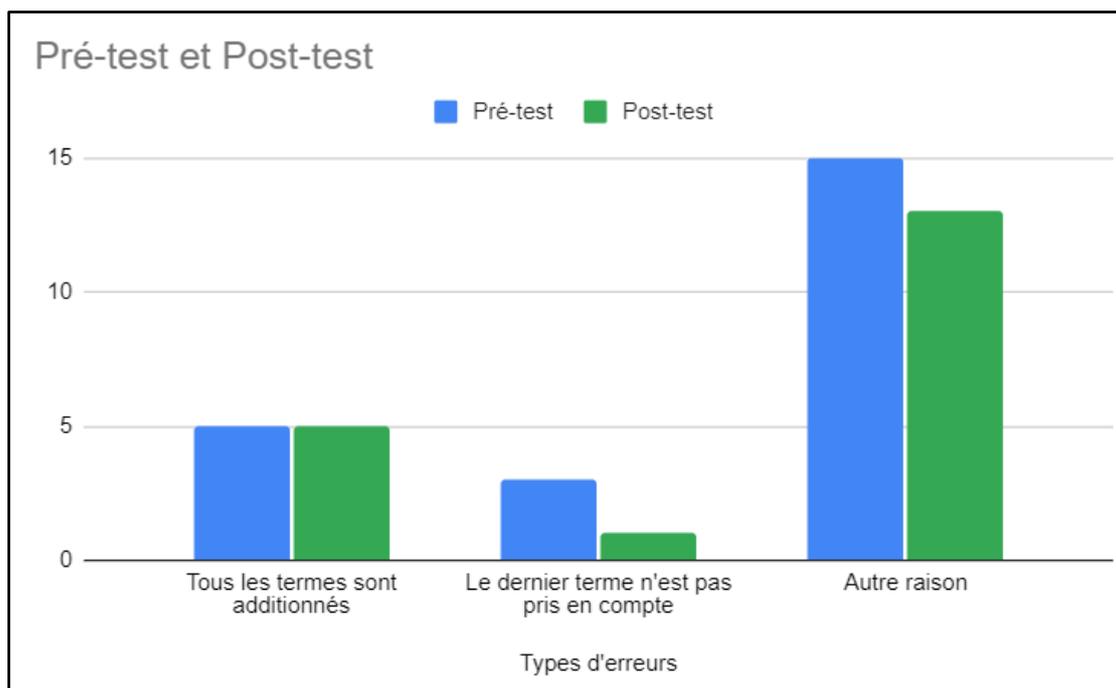


Figure 31 : Diagramme en barre comparatif des types d'erreurs du pré-test et du post-test

Nous remarquons alors qu'il y a eu une évolution quant à la prise en compte du dernier terme, ce type d'erreur a baissé lors du post-test. En revanche, il y a eu autant de réponses où les élèves ont additionné tous les termes de l'égalité sans prendre en compte la place des signes.

En somme, nous remarquons que les conceptions ont évolué de manière plus optimale seulement pour une minorité d'élèves. Précisons qu'une majorité des élèves ayant répondu correctement à la deuxième partie du pré-test ont également répondu juste au post-test.

C'est ainsi que nous pouvons, en partie, valider notre hypothèse selon laquelle « l'utilisation de représentations diverses de nombres permettrait de ne pas donner aux élèves une conception unique de l'égalité » puisqu'au vu des résultats relevés lors du post-test, notamment ceux montrant une diminution de réponses du type "ne sait pas", nous déduisons que les différentes égalités sont à présent connues des élèves. Nous sommes d'avis d'admettre que cette appropriation de diverses écritures d'égalités s'est avérée facilitée grâce à la séance que nous avons menée à l'aide de certains choix des variables didactiques établis au préalable : l'utilisation de représentations diverses de nombres ainsi qu'une consigne précisant d'écrire les égalités trouvées selon le "sens des cartes". Néanmoins, pour valider plus justement cette hypothèse, il nous aurait paru davantage pertinent de proposer aux élèves

un post-test plus complet avec un exercice similaire à celui effectué lors de la première partie du pré-test qui nous aurait permis de collecter et d'analyser des réponses aussi basées sur des interventions orales qui, comme nous en avons fait l'expérience, nous apportent plus de précisions qu'une réponse seulement écrite.

## **5 Conclusion de notre expérimentation**

Finalement, les résultats de notre pré-test sont similaires par rapport à ceux de nos lectures. A savoir que la structure additive du type  $a+b=c$  prédomine dans les conceptions des élèves, d'une part. Et d'autre part, qu'une structure additive autre que cette dernière est souvent considérée comme "fausse" d'un point de vue sémio-linguistique : les élèves affirment alors qu'elles sont écrites "à l'envers". Pour autant, du point de vue notionnel, en termes de résultat, les élèves ne s'y opposent pas, et au contraire, disent être d'accord avec l'opération en elle-même.

Ce phénomène s'expliquerait par le fait qu'il n'y ait pas de séance à proprement dédiée à la construction du signe "=", comme s'il s'agissait d'un prérequis. De plus, il n'y a pas de moment qui permettrait aux élèves de faire évoluer leur conception vers un domaine d'efficacité plus étendu. Par exemple, la structure additive du type  $a+b=c$  est très efficace jusqu'au moment où l'on étudie les équations au cycle 4, et qu'entre en jeu la propriété de commutativité de l'égalité, entre autres.

Les programmes officiels, étant la référence des enseignants, ne préconisent aucune façon de construire la notion d'égalité ni l'utilisation du signe "=". C'est ainsi que les auteurs des différents ouvrages pédagogiques, conçus à destination des professeurs et des élèves, effectuent des choix didactiques quant à la signification de l'égalité.

Néanmoins, bien que les résultats obtenus lors de notre expérimentation relèvent de la réalité du terrain, il ne s'agit que d'un faible échantillon, tant d'élèves que d'ouvrages. Nous ne sommes pas en mesure de généraliser des résultats à plus grande échelle.

Notre intervention auprès des élèves a avant tout permis de clarifier la signification de l'égalité. Nous avons observé dans nos résultats que certains élèves ont progressé tandis que d'autres n'ont pas réellement évolué. Nous pensons qu'il serait plus intéressant et pertinent d'inscrire nos actions sur du long temps. En effet, nous sommes conscientes que le processus d'apprentissage est long et qu'il ne peut pas s'effectuer en une seule séance, mais bien sur une séquence en considérant chaque étape à part entière (structuration, entraînement, transfert).

Par ailleurs, nous avons constaté, lors du pré-test, que les échanges oraux étaient primordiaux dans notre analyse et nos résultats, ils nous ont apporté des informations qui n'étaient pas visibles à l'écrit. Alors, lors de la phase de jeu, nous aurions pu enregistrer les discussions entre les élèves afin d'avoir des résultats plus précis.

Pour répondre aux préconisations des instructions officielles concernant la place des erreurs des élèves, nous aurions pu proposer aux élèves d'auto-corriger leur pré-test suite à la phase

d'institutionnalisation. Cela aurait pu constituer un point d'étape intermédiaire entre la structuration de la notion et la phase d'entraînement, favorisant l'évolution concrète de leur conception.

Pour approfondir et enrichir nos recherches, il serait pertinent de pouvoir mener des expérimentations complémentaires à celles déjà effectuées. En effet, nous avons étudié les différents types de problèmes de Vergnaud, et même avons analysé ces types de problèmes dans des manuels, mais nous ne savons pas ce qu'il en est réellement en classe. Pour découvrir l'effet que cela produit sur les représentations des élèves, il serait judicieux de considérer une classe témoin et une classe test. On proposerait, tout au long de l'année, à la classe test de laisser les élèves résoudre les différents problèmes de la manière qu'ils souhaitent, et peut-être même leur expliciter les différentes façons. Le but est alors de confronter les résultats d'un test final (similaire à celui que nous avons proposé en pré-test de notre expérimentation) entre celui de la classe test et de la classe témoin, qui aura suivi un enseignement ordinaire des problèmes mathématiques.

Alors grâce à nos lectures, nos analyses et notre expérimentation nous sommes maintenant renseignées quant à l'importance des savoirs notionnels et sémio-linguistiques concernant le signe « = » et plus généralement l'égalité. En tant que futures professeures des écoles, nous porterons certainement notre regard sur cette notion lorsque nous réfléchirons aux questions de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

## **Bibliographie**

### **Articles scientifiques :**

- Behr, M., Erlwanger, S. et Nichols, E. (1980). How children view the equals sign, *Mathematics Teaching*, 92
- Chevallard Y. (1985) La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné, La Pensée sauvage, Grenoble, deuxième édition augmentée, 1991.
- Conne, F. (1985). Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétiques. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 5(3), 269–332. <https://revue-rdm.com/1985/calculs-numeriques-et-calculs/>
- Conne, F. (2019). Règle, signification et sens : ma recherche sur les écritures d'égalités numériques. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01974856>
- Constantin, C., & Coulange, L. (2022). Sens et interprétation du signe « = » du point de vue d'élèves de 6-7 ans. *Revue Québécoise De Didactique Des Mathématiques*, 5-42. Consulté à l'adresse <https://rqdm.recherche.usherbrooke.ca/ojs/ojs-3.1.1-4/index.php/rqdm/article/view/53>
- Drouhard, J.-Ph. (2011). L'épistémographie mise au point d'un outil au service de la didactique. Dans Vandebrouck F. (dir). *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. (p. 129-133). IREM de Paris 7 – Université aris Diderot. <http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/AAR12001.pdf>
- Falkner, K., Levi, L. et Carpenter, T. (1999). Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6(4), 232. <https://link.gale.com/apps/doc/A58517319/AONE?u=anon~a9c08504&sid=googleScholar&xid=803b8be0>
- Laparra, M, et Margolinas, C. (2009). Le schéma : un écrit de savoir ? *Pratiques*, 143-144, 51-82. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00722211>
- Margolinas, C. (2019). Ce que peut apporter l'analyse des implicites et des conversions à la compréhension des difficultés des élèves concernant l'écrit mathématique au début de l'école primaire. Dans Maurel, M. (Ed.), *Jean-Phillipe Drouhard. De la linguistique à l'épistémographie* (p.79-91). 978-2-9567301
- Theis, L. (2005). L'Apprentissage Du Signe = : Un Obstacle Cognitif Important. *For the Learning of Mathematics*, 25(3), 7–12. <http://www.jstor.org/stable/40248502>

### **Publications du Ministère de l'Éducation Nationale :**

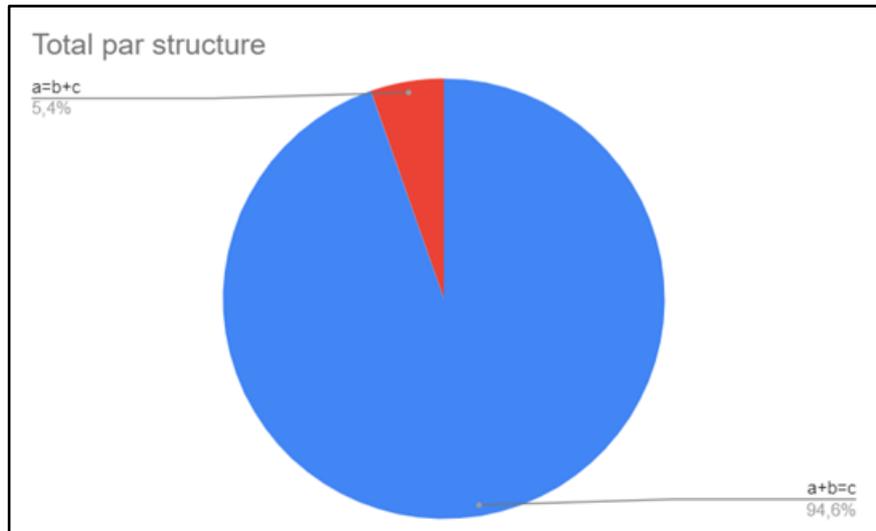
- Ministère de l'Éducation. (2020). Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2). Bulletin officiel de l'Éducation Nationale n°31 du 30 juillet 2020. Volet 3 : les enseignements (cycle 2). Mathématiques.
- Ministère de l'Éducation. (2020). Programmes d'enseignement de l'école maternelle (cycle 1). Bulletin officiel de l'Éducation Nationale n°31 du 30 juillet 2020. Les cinq domaines d'apprentissage : 4 - Acquérir les premiers outils mathématiques.

### **Ouvrages pédagogiques et didactiques :**

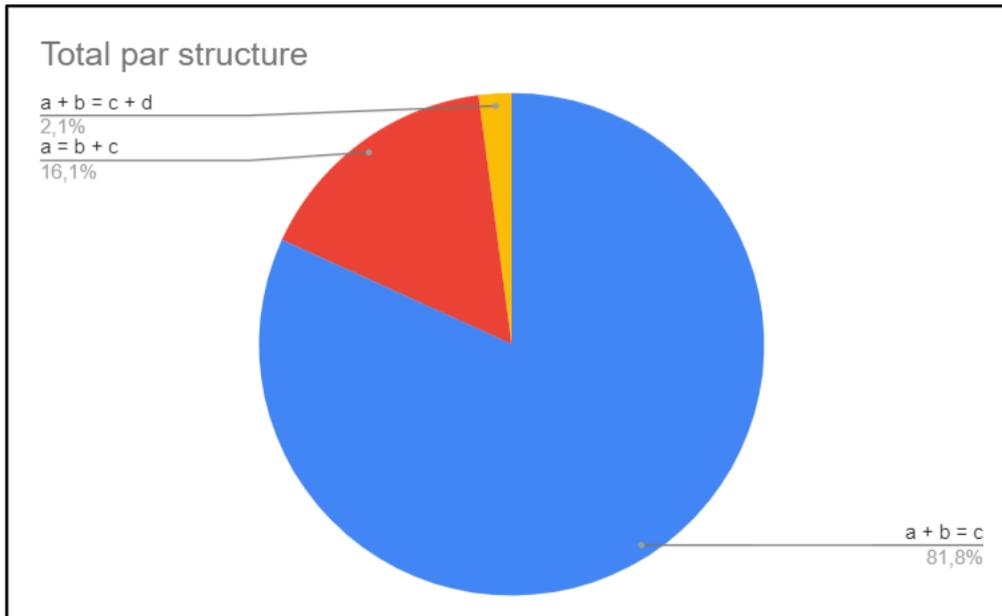
- Charnay, R. (Dir). (2016). *Cap Maths CP*. (Hatier).
- Duprey, S., Mauffrey, F., Duprey, G., Godé, V., & Mauffrey, I. (2019). *Maths au CE1* (Accès).

## Annexes

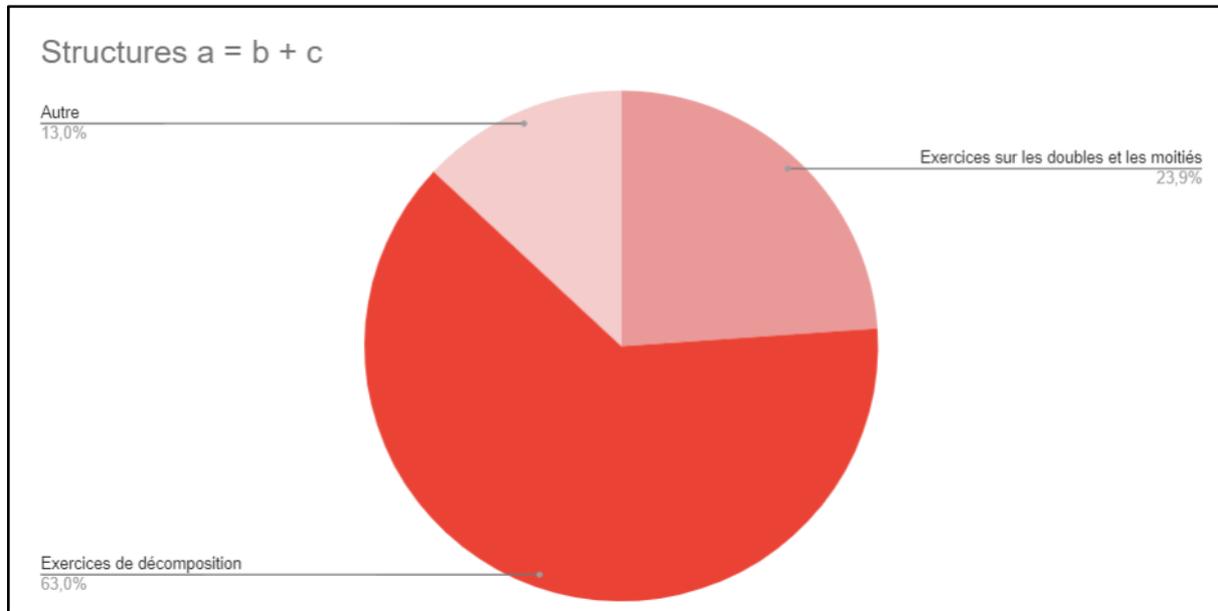
Annexe 1 : Structures additives présentes dans le manuel *Maths au CE1, Accès*.



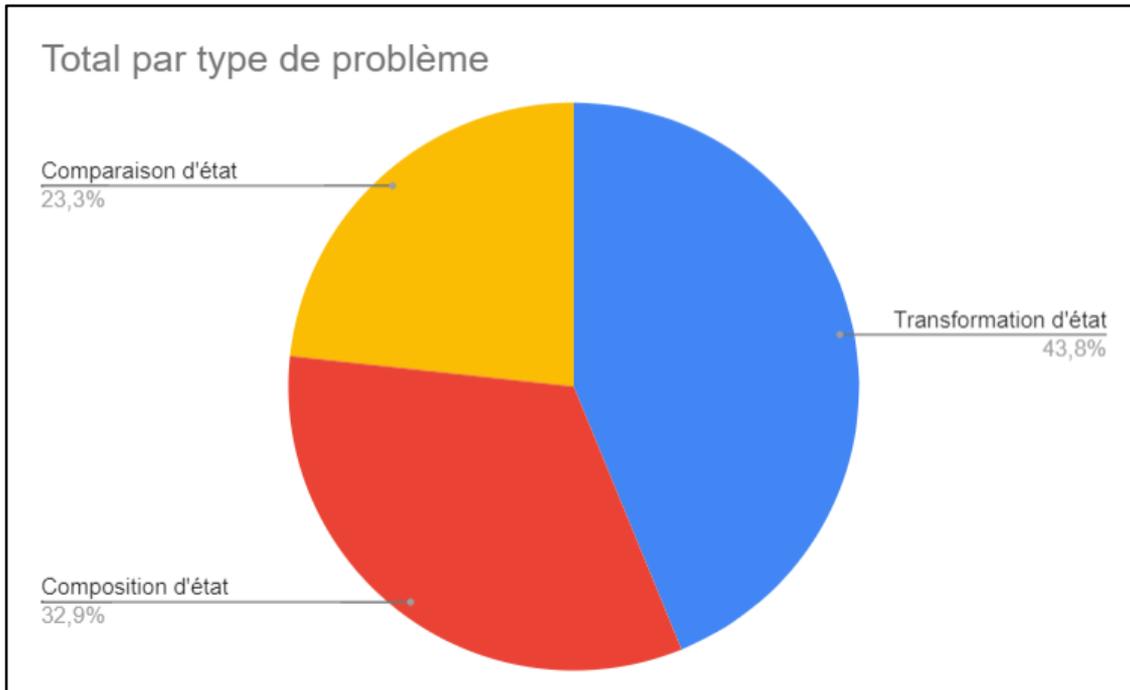
Annexe 2 : Structures additives présentes dans le manuel Cap Maths CP, Hatier.



Annexe 3 : Exercices auxquelles renvoient les structures additives du type  $a=b+c$ , dans le manuel *Cap Maths CP*, Hatier.



Annexe 4 : Types de problèmes présents dans le manuel *Maths au CE1*, Accès.



Annexe 5 : Exemple d'un problème de transformation d'état.

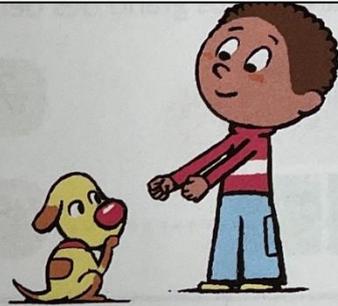
Complète la carte que Gribouille doit utiliser pour faire passer le pion de la case 12 à la case 7. Barre celle qui n'est pas utile.

The image shows a worksheet for a state transformation problem. On the left is a cartoon dog icon. In the center are two cards: 'Avancer de' with a right arrow and 'Reculer de' with a left arrow. On the right is a number line with a green piece between 7 and 12, and a green pin on 12.

Annexe 6 : Exemple d'un problème de composition d'état.

Arthur a mis 3 biscuits dans sa main droite,  
et 6 autres biscuits dans sa main gauche.  
Il les donne tous à Gribouille.

Combien de biscuits va recevoir Gribouille?



Gribouille va recevoir ..... biscuits.

Annexe 7 : Exemple d'un problème de comparaison d'état.



Arthur et Zoé ont pris tous les biscuits qui étaient dans cette boîte.  
Zoé en a pris 2 de plus qu'Arthur.

Combien Arthur a-t-il pris de biscuits ?

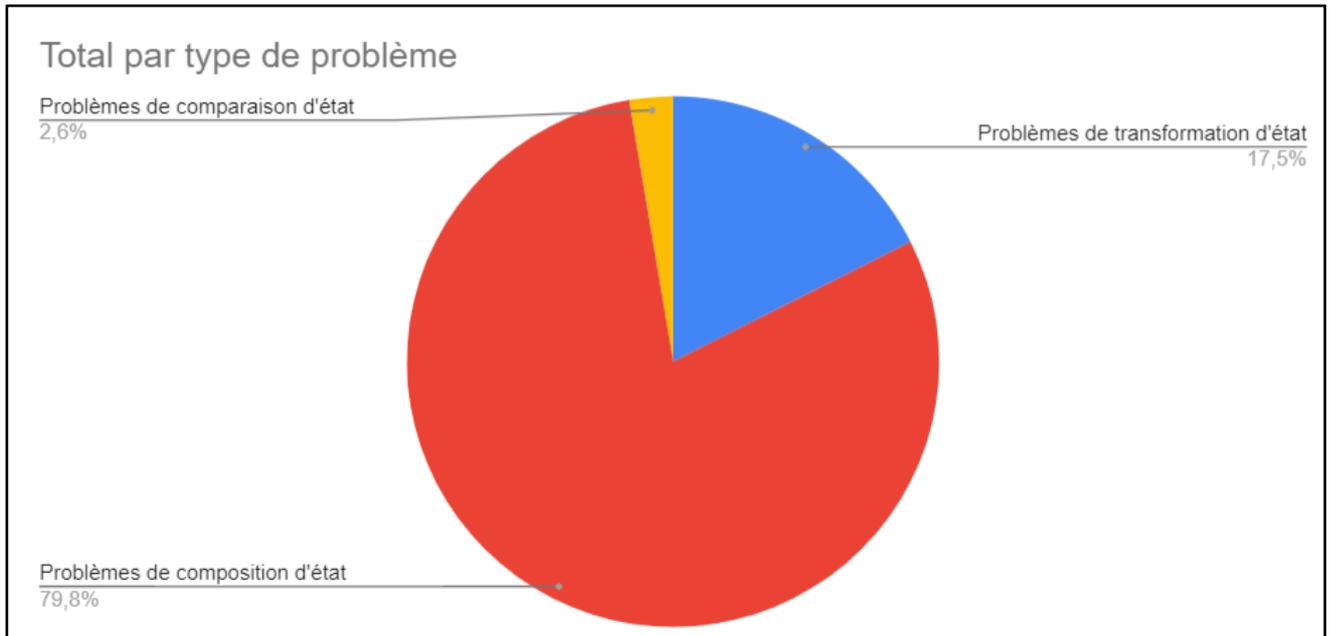
Combien Zoé a-t-elle pris de biscuits ?



Arthur a pris ..... biscuits.

Zoé a pris ..... biscuits.

Annexe 8 : Types de problèmes présents dans le manuel *Cap Maths CP*, Hatier.



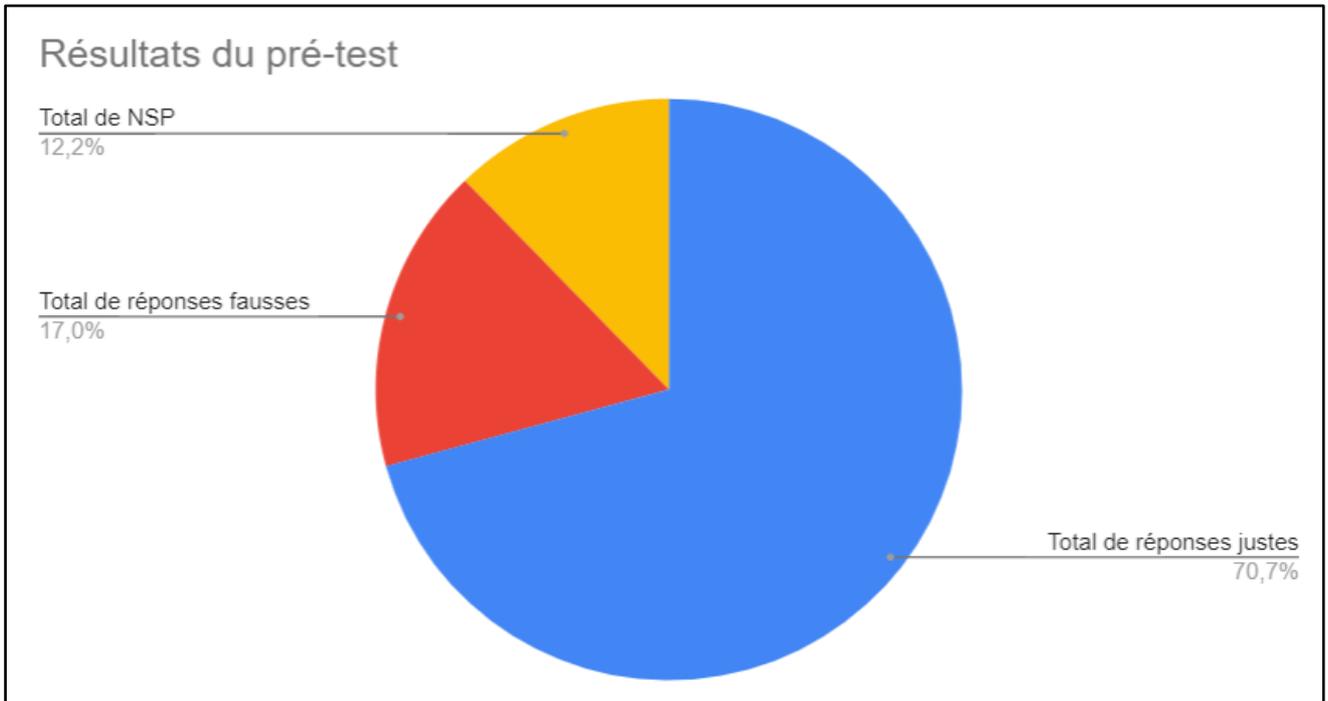
Annexe 9 : Première partie du pré-test.

Prénom :	Date :
<i>Mathématiques</i>	
<u>Entoure</u> la bonne réponse et <u>écris</u> pourquoi tu penses que les égalités sont ou ne sont pas correctes.	
3 + 2 = 5	L'égalité est correcte : oui / non
-----	
-----	
4 + 3 = 7 + 2	L'égalité est correcte : oui / non
-----	
-----	
7 = 5 + 2	L'égalité est correcte : oui / non
-----	
-----	
4 + 5 = 8 + 1	L'égalité est correcte : oui / non
-----	
-----	
4 + 3 + 2 = 4 + 5	L'égalité est correcte : oui / non
-----	
-----	

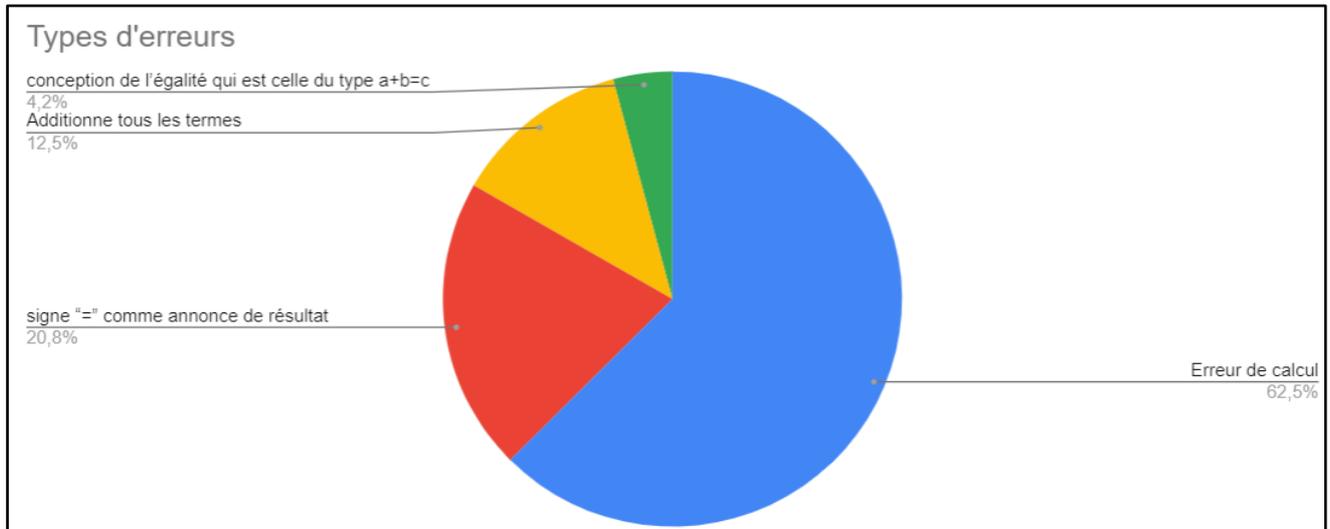
Annexe 10 : Deuxième partie du pré-test.

Prénom :	Date :
<i>Calcul mental</i>	
Complète les égalités. Fais une croix si tu ne sais pas.	
$2 + 7 = \dots$	$4 + \dots = 6 + \dots$
$2 + \dots = 6$	$3 = 1 + \dots$
$5 + \dots = 8 + 2$	$8 = 1 + \dots + 3$
	$4 + 5 = \dots + 2$

Annexe 11 : Graphique des résultats de la deuxième partie du pré-test.



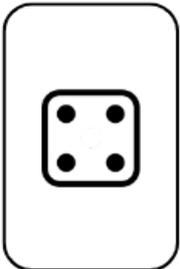
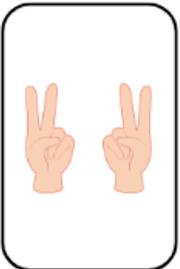
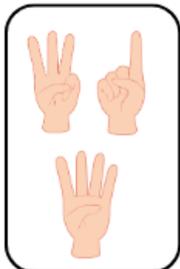
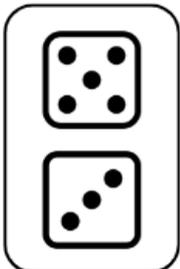
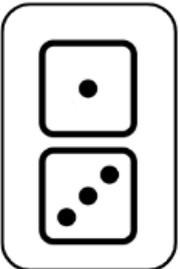
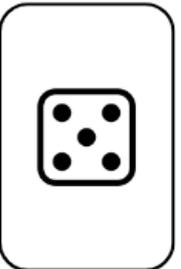
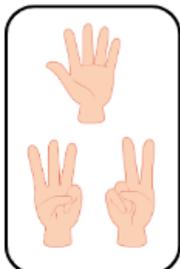
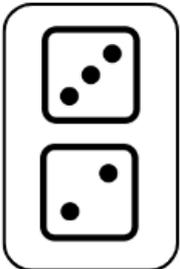
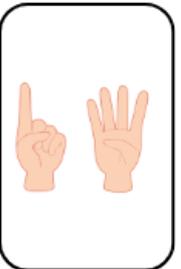
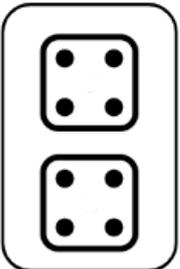
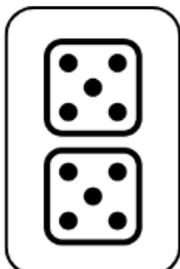
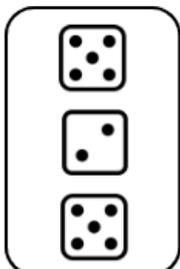
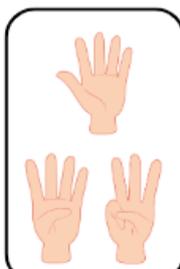
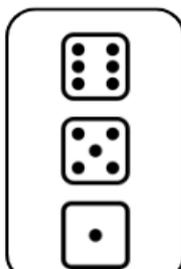
Annexe 12 : Graphique des types d'erreurs repérées dans la deuxième partie pré-test.



## Annexe 13 : Fiche de préparation de la séance.

Séance 1	Titre : Les égalités		Niveau : CE1 Période : P3
Domaine : Mathématiques, Nombres et calculs (Calcul mental).		Compétences : - Calculer (mentalement avec des nombres entiers en utilisant des stratégies adaptées aux nombres en jeu) - Raisonner (anticiper le résultat d'un calcul)	
Objectifs : - Mobiliser différentes désignations écrites d'un même nombre - Comprendre la notion d'égalité		Matériel : - 8 paquets de 24 cartes - 1 paquet de cartes grand format - Feuilles A5 avec lignage	
Temps / dispositif		Déroutement	
Oral collectif. 3 min		L'enseignante donne la consigne aux élèves : "Je vous propose un nouveau défi, aujourd'hui vous allez jouer à trois. Le but du jeu va être de trouver le plus d'égalités possible. Pour cela, chaque groupe aura deux paquets de cartes face cachée. Deux élèves devront retourner en même temps la première carte de la pile et vérifier s'il y a ou pas égalité entre les deux quantités représentées sur les cartes. La troisième personne devra écrire cette égalité sur une feuille. A chaque égalité trouvée, vous échangerez les rôles.  Démonstration : l'enseignante et deux élèves montrent l'exemple. L'enseignante précise qu'à chaque carte retournée, on met les cartes de côté.	
Phase de manipulation, par trinôme 15 min		Les élèves jouent au jeu des égalités. L'enseignante se déplace de groupe en groupe afin d'observer les procédures mobilisées. Elle n'hésite pas à faire verbaliser les élèves sur ce qu'ils sont en train de faire et rappelle les règles si besoin. De même, elle régule si elle voit que les élèves n'écrivent pas tous les termes représentés sur une carte mais la quantité totale. L'enseignante en profite pour noter les groupes qui trouvent les égalités suivantes afin de les partager lors de la mise en commun : 3+7=10 8 = 6 + 2 5+2+5=6+6 1+4=3+2 4+4=3+1+4 L'enseignante repère également une éventuelle erreur dans les listes des élèves pour introduire le signe ≠ lors de la mise en commun. (ex : 5+2+5= 5+3+2)	
Phase de mise en commun, oral collectif 7min		L'enseignante interroge les groupes sur les égalités à mettre en commun. Elle illustre les propos des élèves à l'aide de cartes grand format, sous lesquelles elle écrit l'égalité avec des chiffres. Puis elle demande aux autres élèves s'ils ont dans leur liste une égalité qui représente la même quantité que celle écrite au tableau. Une fois une égalité écrite, l'enseignante demande aux élèves s'ils sont d'accord et leur demande de vérifier l'égalité → Elle est juste parce qu'on a la même quantité (validé par le calcul ou représentations de dés et ou doigts). Pour la dernière égalité, l'enseignante demande s'il est possible de dire qu'elle est juste sans trouver le résultat. → Elle est juste car on remarque "5" des deux côtés du signe "=", de plus on a "5" d'un côté et de l'autre "3+2", appui sur la décomposition du 5.	
Phase d'institutionnalisation oral collectif 10		L'enseignante propose aux élèves de co-construire une petite leçon afin de se rappeler ce qu'est une égalité. Elle interroge un élève : "Qui peut donner un exemple d'égalité ?" Elle écrit l'exemple donné par un élève au tableau (2+2=4) Elle interroge un élève : "Pourquoi on peut écrire le signe "=" ?" Elle écrit au tableau : "Ici, on a bien la même quantité des deux côtés du signe "="." (montrer avec les doigts/les dés) Elle leur fait dire qu'il n'y a pas qu'une seule façon d'écrire une égalité, qu'il n'y a pas de sens ni d'ordre. → On peut écrire le signe "=" entre un calcul et le résultat → Entre deux écritures de la même quantité Elle écrit au tableau : "On peut aussi écrire : 4 = 2 + 2 1 + 3 = 2 + 2" Elle demande aux élèves, en écrivant au tableau "1+3" "5+1" : "Et ici, est-ce que je peux mettre le signe "=" ?" Suite aux réponses et justifications, l'enseignante écrit ≠ entre les deux parties. Elle écrit au dessus "Mais si ce n'est pas le cas, on écrit le signe ≠"	
Leçon à co-construire avec les élèves :			
<u>L'égalité</u>			
2+2=4			
Ici, on a bien la même quantité des deux côtés du signe "="			
On peut aussi écrire :			
4 = 2 + 2			
1 + 3 = 2 + 2			
Mais si ce n'est pas le cas, on écrit le signe ≠ :			
1 + 3 ≠ 5 + 1			

Annexe 14 : Jeu de cartes.

	$4 + 0$		$6 + 2$		
		$2 + 3$	$6 + 4$		$3 + 7$
					$6 + 6$
		$3 + 1 + 1$			
$8$	$10$	$12$			

Annexe 15 : Post-test.

Complète les égalités. Fais une croix si tu ne sais pas.

$$4 + 5 = \dots\dots$$

$$3 + \dots\dots = 7$$

$$4 + \dots\dots = 5 + 3$$

$$6 + \dots\dots = 8 + \dots\dots$$

$$5 = 2 + \dots\dots$$

$$7 = 2 + \dots\dots + 4$$

$$2 + 8 = \dots\dots + 3$$

Annexe 16 : Analyse à priori du post-test.

Premièrement, comme les élèves auront déjà effectué un exercice de ce type, cela pourrait mettre de côté les difficultés liées à la tâche ou à la compréhension. Deuxièmement, cela nous permettra de comparer les résultats obtenus lors du pré-test avec ceux du post test. En effet, nous avons gardé la même quantité et les mêmes types d'égalités, ce que nous avons changé ce sont les nombres proposés. Avant même de commencer l'exercice, l'enseignante distribuera la leçon imprimée qui a été co-construite la semaine précédente. Cela permettra d'effectuer un rappel sur l'égalité ainsi que de faire du lien entre le jeu de cartes et l'exercice.

Voici les réponses possibles des élèves :

$$4 + 5 = \dots\dots$$

*Réponse 1* (correcte) : "9"

*Autre réponse possible* : erreur de calcul

$$3 + \dots\dots = 7$$

*Réponse 1* (correcte) : "4"

*Réponse 2* (incorrecte) : "10", si l'élève additionne tous les termes

*Autre réponse possible* : erreur de calcul

$$4 + \dots\dots = 5 + 3$$

*Réponse 1* (correcte) : "4".

*Réponse 2* (incorrecte): "12" si l'élève additionne tous les termes.

*Réponse 3* (incorrecte) : "8" si l'élève additionne les termes de droite sans prendre en compte le "4+".

*Réponse 4* (incorrecte) : "1" si l'élève ne prend pas en compte le "+3".

*Autre réponse possible* : erreur de calcul

$$2 + 8 = \dots\dots + 3$$

*Réponse 1* (correcte) : "7".

Réponse 2 (incorrecte) : “13” si l’élève additionne tous les termes.

Réponse 3 (incorrecte) : “10” si l’élève additionne les termes à gauche du signe “=” sans prendre en compte le “+3”.

Autre réponse possible : erreur de calcul

$$5 = 2 + \dots$$

Réponse 1 (correcte) : “3”

Réponse 2 (incorrecte) : “7”, si l’élève additionne les termes sans prendre en compte la place des signes “=” et “+”.

Autre réponse possible : erreur de calcul

$$7 = 2 + \dots + 4$$

Réponse 1 (correcte) : “1”

Réponse 2 (incorrecte) : “13”, si l’élève additionne les termes.

Réponse 3 (incorrecte) : “9”, si l’élève additionne les termes sans prendre en compte le “+4” ni la place des signes “=” et “+”.

Autre réponse possible : erreur de calcul

$$6 + \dots = 8 + \dots$$

Pour cette égalité-ci, une infinité de réponses est possible. Pour que l’égalité soit correcte, il faut que le nombre écrit dans la partie droite soit le nombre écrit dans la partie gauche auquel on soustrait 2.

Réponse partiellement vraie :

“2” et “X” : l’élève met un “2” dans la première lacune car  $6+2=8$ , mais met une croix dans la deuxième lacune car il ne sait pas quoi mettre. Un “0” à la place de la croix rendrait la réponse totalement vraie.

Réponses fausses :

“14” et “X” si l’élève ajoute tous les termes

“X” et “14” si l’élève ajoute tous les termes et ne prend pas en compte la place des signes.