



HAL
open science

Le cas de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition en cycle 2 et en cycle 3

Marine Louvet, Clémentine Rival

► To cite this version:

Marine Louvet, Clémentine Rival. Le cas de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition en cycle 2 et en cycle 3. Education. 2023. dumas-04576818

HAL Id: dumas-04576818

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-04576818>

Submitted on 15 May 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License



INSPE Institut national
supérieur du professorat
et de l'éducation
Académie de Montpellier

MASTER MEEF mention 1er degré

« Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation »

Mémoire de 2^{ème} année

Année universitaire 2022 - 2023

**LE CAS DE LA PROPRIÉTÉ DE DISTRIBUTIVITÉ DE LA
MULTIPLICATION PAR RAPPORT À L'ADDITION EN
CYCLE 2 ET EN CYCLE 3**

**LOUVET MARINE
RIVAL CLÉMENTINE**

Directrice du mémoire : Céline Héliot-Constantin

Assesseure : Chantal Tuffery-Rochdi

Soutenu le 23 mai 2023

Remerciements

Nous tenons à remercier notre directrice de mémoire, Madame Constantin pour son investissement, son aide, sa disponibilité et tous ses précieux conseils pour l'élaboration de notre mémoire.

Résumé

Le calcul mental est présent dans les programmes de l'enseignement au moins depuis les années 1883. Le sens donné aux nombres, l'utilisation de l'écrit ou encore les procédures automatiques sont des caractéristiques associées au calcul mental et que nous recherchons dans les programmes. Les procédures automatiques appelées aussi automatisme sont liées mais sont aussi en contradiction avec les procédures automatisées ce qui est l'un des points qui a conduit notre recherche. En étudiant les caractéristiques du calcul mental, nous sélectionnons un type opératoire retrouvé fréquemment dans les programmes de cycle 2 et de cycle 3 qui est la multiplication. Celle-ci possédant trois propriétés, nous avons fait le choix de n'en cibler qu'une seule : la distributivité. En l'étudiant nous ciblons des difficultés en lien avec la décomposition des nombres que les élèves pourraient rencontrer et qui mèneraient à des erreurs dans la réalisation de calculs en lien avec la distributivité. La distributivité n'est pas au programme ni en cycle 2 ni en cycle 3 pourtant elle est abordée dans les classes de l'école élémentaire. Nous cherchons donc à savoir comment elle est abordée en classe par l'étude des manuels et le lien qui est fait dans ceux-là avec l'entrée dans la multiplication. Nous cherchons également à savoir du côté des élèves quelles sont les formes de distributivité que nous pouvons rencontrer. Pour approfondir nos recherches nous avons pris la décision de faire nos études dans deux classes : en CE2 et en CM2 afin de chercher l'existence de différences entre ces deux cycles. Notre étude nous permet de voir que les élèves de cycle 2 et de cycle 3 utilisent de manière égale la distributivité mais les élèves de cycle 3 sont plus aptes à utiliser des procédures en fonction des nombres en jeu ce qui amène à dire que les élèves de cycle 3 ont un plus grand sens du nombre que les élèves de cycle 2. Dans les manuels, la multiplication est abordée de diverses façons qui influencent les réponses des élèves lors de notre test et particulièrement les élèves de CE2 mais aussi les élèves de CM2 qui effectuent une multiplication posée en calcul mental car elle est au cœur des apprentissages du cycle 3.

Summary

Mental arithmetic has been present in educational programs at least since 1883. The meaning given to numbers, the use of writing or even automatic procedures are characteristics associated with mental arithmetic and that we look for in programs. Automatic procedures also called automatism are related but are also in contradiction with

automated procedures which is one of the points that led our research. By studying the characteristics of mental calculation, we select an operating type frequently found in cycle 2 and cycle 3 programs, which is multiplication. This has three properties: we have chosen to target only one: distributivity. By studying it, we are targeting difficulties related to the decomposition of numbers that students could encounter and which would lead to errors in carrying out calculations related to the distributive property. Distributivity is not on the program either in cycle 2 or in cycle 3, yet it is addressed in elementary school classes. We are therefore trying to find out how it is approached in class by studying the textbooks and the link that is made in them with the entry into multiplication. We are also trying to find out from the students' side, what are the forms of distributivity that we can encounter. To deepen our research, we decided to do our studies in two classes: in third grade and in fifth grade to seek the existence of differences between these two cycles. Our study allows us to see that the students of cycle 2 and cycle 3 use the distributive property equally but the students of cycle 3 are more apt to use procedures according to the numbers involved, which leads to say that the students of cycle 3 have a greater sense of number than pupils of cycle 2. In the textbooks, multiplication is approached in various ways which influence the answers of the pupils during our test and particularly the pupils of the third grade but also the pupils of the fifth grade who carry out a posed multiplication in mental calculation because it is at the heart of the learning of cycle 3.

Table des matières

| | |
|--|----|
| Introduction | 1 |
| 1) Éléments de cadrage de la problématique | 2 |
| 1.1) Définition du calcul mental | 3 |
| 1.1.1) Notion de number sens..... | 4 |
| 1.1.2) Utilisation de l'écrit | 4 |
| 1.1.3) Calcul mental et calcul posé | 5 |
| 1.1.4) Le paradoxe entre automatisme et procédures automatisées | 6 |
| 1.2) Enjeux liés à l'enseignement et à l'apprentissage du calcul mental..... | 8 |
| 1.2.1) Les programmes de 1883 à 1970 | 8 |
| 1.2.2) Les programmes de 1970 à 1980 | 9 |
| 1.2.3) Les programmes de 1980 à 2002 | 9 |
| 1.2.4) Les programmes de 2007 à aujourd'hui..... | 11 |
| 1.3) La multiplication au cœur des enseignements..... | 12 |
| 1.3.1) La définition de la multiplication selon le Larousse | 12 |
| 1.3.2) La définition de la multiplication au travers de Butlen..... | 13 |
| 1.3.3) La définition de la multiplication au travers de Clivaz et de Lecoq | 13 |
| 1.3.4) La définition de la multiplication au travers d'Euclide | 14 |
| 1.4) La distributivité | 15 |
| 1.4.1) Définition de la distributivité..... | 15 |
| 1.4.2) Les caractéristiques de la distributivité..... | 15 |
| 1.4.2.1) La distributivité par rapport à l'addition | 15 |
| 1.4.2.2) La distributivité par rapport à la soustraction..... | 16 |
| 1.4.3) Les difficultés dans la décomposition du nombre..... | 16 |
| 1.4.3.1) Décomposition additive canonique | 17 |
| 1.4.3.2) Décomposition multiplicative | 17 |
| 1.5) Le domaine de validité et d'efficacité | 18 |
| 1.5.1) Définition du domaine de validité et d'efficacité | 18 |
| 1.5.2) Le domaine de validité et d'efficacité de la distributivité..... | 19 |
| 1.6) Question de recherche et hypothèses..... | 20 |
| 2) Méthodologie | 21 |
| 2.1) Tests réalisés avec une classe de CE2 et de CM2 | 21 |

| | |
|--|----|
| 2.1.1) Test pour les élèves de CM2..... | 22 |
| 2.1.1.1) La place du nombre à décomposer..... | 22 |
| 2.1.1.2) Le choix des nombres..... | 22 |
| 2.1.1.3) Les procédures attendues..... | 23 |
| 2.2) Test pour les élèves de CE2 (voir annexe 2)..... | 25 |
| 2.3) Étude des manuels..... | 26 |
| 2.3.1) Les manuels de CE2..... | 26 |
| 2.3.1.1) Maths au CE2 éditions ACCÈS..... | 26 |
| 2.3.1.2) Cap Maths CE2..... | 27 |
| 2.3.2) Les manuels de CM2..... | 27 |
| 2.3.2.1) Maths au CM2 éditions ACCÈS..... | 27 |
| 2.3.2.2) Cap Maths CM2..... | 28 |
| 3) Analyses et résultats..... | 28 |
| 3.1) Résultats et analyses des tests en CM2..... | 28 |
| 3.1.1) Les procédures de l'élève A..... | 29 |
| 3.1.2) Les procédures des élèves B et C..... | 29 |
| 3.1.3) La procédure de l'élève D..... | 30 |
| 3.1.4) La procédure de l'élève E..... | 30 |
| 3.1.5) La procédure de l'élève F..... | 31 |
| 3.1.6) La procédure de l'élève G..... | 32 |
| 3.2) Résultats et analyses des tests en CE2..... | 33 |
| 3.2.1) Analyses et résultats du premier exercice..... | 33 |
| 3.2.2) Analyses et résultats du deuxième exercice..... | 35 |
| 3.3) Analyse des manuels de CE2..... | 37 |
| 3.3.1) Maths au CE2 éditions ACCÈS..... | 37 |
| 3.3.1.1) L'entrée dans la multiplication..... | 37 |
| 3.3.1.2) L'entrée à la distributivité..... | 39 |
| 3.3.2) Cap Maths CE2..... | 40 |
| 3.3.2.2) L'entrée à la distributivité..... | 41 |
| 3.4) Analyse des manuels de CM2..... | 42 |
| 3.4.1) Maths au CM2 éditions ACCÈS : la séance 1 de la séquence 2..... | 42 |
| 3.4.1.1) La place du nombre à décomposer..... | 42 |
| 3.4.1.2) Le choix des nombres..... | 42 |

| | |
|---|----|
| 3.4.2) Maths au CM2 édition ACCES : la séance 2 de la séquence 2..... | 43 |
| 3.4.2.1) La place du nombre à décomposer | 43 |
| 3.4.2.2) Le choix des nombres..... | 43 |
| 3.4.3) Maths au CM2 édition ACCES : la séance 3 de la séquence 3..... | 43 |
| 3.4.3.1) La place du nombre à décomposer | 43 |
| 3.4.3.2) Le choix des nombres..... | 44 |
| 3.4.4) Cap maths CM2 programmes de 2016..... | 44 |
| 3.4.4.1) L'unité 3 | 44 |
| 3.4.4.2) L'unité 6 | 45 |
| 3.4.4.3) L'unité 7 | 45 |
| 4) Discussion | 47 |
| Conclusion | 50 |
| Bibliographie | 52 |
| Annexes | 54 |

Table des figures

| | |
|--|----|
| Figure 1 : <i>EuroMaths CM2 2009</i> | 19 |
| Figure 2 : Extrait de la copie de l'élève A lors de l'exercice 1 puis de l'exercice 2..... | 29 |
| Figure 3 : Extrait de la copie de l'élève B..... | 29 |
| Figure 4 : Extrait de la copie de l'élève C..... | 30 |
| Figure 5 : Extrait de la copie de l'élève D effectuant une addition itérée..... | 30 |
| Figure 6 : Extrait de la copie de l'élève E effectuant une fausse distributivité..... | 31 |
| Figure 7 : Extrait de la copie de l'élève E multipliant le résultat donné par 100..... | 32 |
| Figure 8 : Extrait de la copie de l'élève G multipliant le résultat donné par 2..... | 32 |
| Figure 9 : Extrait de la copie de l'élève A2 passant par le calcul de l'aire d'un..... rectangle | 34 |
| Figure 10 : Extrait de la copie de l'élève B2 effectuant une double décomposition..... | 34 |
| Figure 11 : Extrait de la copie de l'élève C2 décomposant le nombre 23..... | 35 |
| Figure 12 : Extrait de la copie de l'élève D2 ajoutant 6 au résultat..... | 35 |
| Figure 13 : Extrait de la copie de l'élève E2 multipliant le résultat par 2..... | 36 |
| Figure 14 : Extrait de la copie de l'élève F2 réalisant une décomposition canonique..... | 36 |
| Figure 15 : <i>Maths au CE2 éditions ACCÈS, 2020, p.24</i> | 38 |
| Figure 16 : <i>Maths au CE2 éditions ACCÈS, 2020, p.24</i> | 38 |
| Figure 17 : <i>Maths au CE2 éditions ACCÈS, 2020, p.25</i> | 39 |
| Figure 18 : <i>Maths au CE2 éditions ACCÈS, 2020, p.64</i> | 39 |
| Figure 19 : <i>Cap Maths CE2, 2016, p.86</i> | 41 |
| Figure 20 : <i>Cap Maths CM2, 2017, p.84</i> | 45 |

Introduction

Un type de calcul figure toujours dans les programmes et prend même une place quotidienne dans l'enseignement : le calcul mental. Et pourtant, un article de Boule, disant que « le sport favori des enfants à l'école, ni même celui de leurs maîtres » n'était pas le calcul mental nous a interrogés. Le calcul mental semble être selon Boule, complexe et cela depuis des années.

L'enseignement de ce type de calcul est devenu le départ de tous nos questionnements. Nous avons donc décidé, lors de nos stages de première année, d'observer la manière dont les enseignants abordaient ce type de calcul et les différentes difficultés que rencontraient les élèves. Nous avons pu constater que les élèves, lors de calculs mentaux où la distributivité était possible, ne les résolvaient pas de la même manière en cycle 2 et en cycle 3. En particulier, il nous a semblé que les élèves de cycle 2 utilisaient, lors de calculs mentaux sur la multiplication, beaucoup plus la distributivité que les élèves de cycle 3. Étant l'une des propriétés de la multiplication, nous nous sommes particulièrement intéressées à cette opération dans le calcul mental.

Les évaluations nationales de 2006 de 6ème révèlent que seulement 36 à 37% d'élèves ont réussi le calcul de produit tels que 18×20 et 25×40 . Cependant, ces calculs ne semblent pas convoquer beaucoup de connaissances sur les nombres et les opérations. En effet, multiplier par 20 consiste à trouver le double, ici le double de 18 est 36. 36 représente le nombre de dizaines donc $18 \times 20 = 360$. De plus, multiplier 25 par 40 revient à multiplier 25 par 4 dizaines. 25×4 dizaines = 100 dizaines soit 1000. Les relations entre ces nombres sont vues dès le cycle 2 ce qui nous a amenées à nous interroger sur la manière dont la multiplication peut être enseignée au cycle 2, et dans quelle mesure les propriétés de cette opération sont travaillées en cycle 2 et en cycle 3. En ce sens, nous cherchons comment la multiplication peut être abordée en classe et quelles sont les principales difficultés rencontrées par les élèves lors de calculs mentaux impliquant la multiplication.

Nous avons alors essayé dans un premier temps de comprendre comment les élèves de cycle 2 et de cycle 3 réalisaient un calcul mentalement et quelles procédures ils utilisaient afin de voir s'il y avait une grande différence de résolution de calculs mentaux en cycle 2 et en cycle 3.

Nous nous sommes alors questionnées sur ce qu'était véritablement le calcul mental. Pour cela, nous avons étudié sa définition et ses caractéristiques à savoir la notion de number sens,

la place de l'écrit au sein du calcul mental ou encore le paradoxe entre les automatismes et les procédures automatisées que possèdent les élèves.

A la suite de ce questionnement, nous avons décidé d'étudier l'évolution des programmes depuis 1883 afin de constater si les caractéristiques du calcul mental ont toujours été présentes ou non.

A la fin de cette première partie, nous nous sommes penchées sur une opération qui est étudiée dès le cycle 2 et qui est approfondie au cycle 3: la multiplication. Premièrement, quelle est sa définition et comment est-elle introduite dans les classes?

Nous avons affiné nos recherches en nous focalisant sur l'une des propriétés de celle-ci : la distributivité. Nous avons analysé ses caractéristiques et nous nous sommes intéressées à l'une des difficultés de la distributivité qui est la décomposition du nombre.

Ces analyses nous ont conduit à rechercher quelles sont les procédures mises en place par les élèves lors de la résolution de calculs mentaux impliquant la distributivité. Elles nous ont conduit également à nous demander comment la multiplication est-elle introduite en classe et a-t-elle un impact sur les productions des élèves.

Ces recherches nous ont permis de nous poser la question suivante : Pourquoi les formes de distributivité pourraient influencer l'utilisation de la distributivité dans le calcul mental ?

1) Éléments de cadrage de la problématique

Dans cette partie nous cherchons à comprendre comment les élèves réalisent un calcul mentalement et quelles méthodes et procédures ils peuvent utiliser pour cela. Nous allons dans un premier temps définir le calcul mental en abordant les caractéristiques liées à celui-ci en passant par la perception des nombres, l'utilisation de l'écrit mais également le paradoxe de l'automatisme tel qu'il est défini par Butlen (2007) et cela est ce qui nous a particulièrement intéressées : les procédures automatisées et l'automatisme. Nous étudierons ensuite les programmes afin de percevoir la notion de calcul mental au fil du temps et de relever la présence ou l'absence des caractéristiques évoquées précédemment et leur évolution. Nous nous centrerons alors sur la multiplication et ses propriétés pour nous amener à l'utilisation de la distributivité. Pour finir nous aborderons l'une des difficultés rencontrées lors de la réalisation de ces calculs mentaux.

1.1) Définition du calcul mental

Il existe différentes définitions du calcul mental. Le calcul mental reste encore difficile à définir. Dans les mœurs, le calcul mental se ferait exclusivement dans la tête sans l'aide de supports quels qu'ils soient. Artigue (2004) constate que le calcul est vu différemment en fonction des points de vue adoptés et des positions occupées. Elle cite un passage du rapport de la CREM disant que le calcul est opposé au raisonnement que ce soit dans les démarches de pensée ou bien dans les formes d'apprentissage qu'il requiert. Le calcul renverrait à une activité mécanique, automatisable, sans intelligence, il est réduit à sa part mécanisée. Son apprentissage renverrait à l'idée d'entraînement purement répétitif. Elle démontre alors qu'il est regrettable que le monde dissocie le calcul et le raisonnement. Mais le calcul mental est-il vu de la même manière pour tous les auteurs ayant travaillé autour du calcul mental ?

Pour Constantin (2017) l'un des objectifs du calcul mental en primaire est de comparer les différentes techniques possibles ainsi que leur domaine d'efficacité selon les nombres en jeu. En effet lorsqu'on étudie la technique de la décomposition du nombre comme 12×5 étant $10 \times 5 + 2 \times 5$, il est alors inutile d'utiliser cette technique pour le calcul de 9×5 ou de 11×5 si l'on souhaite garder 2 chiffres au terme de gauche pour faire la comparaison car il serait préférable d'utiliser pour ces calculs la technique de $10 \times 5 - 5$ pour 9×5 ou $10 \times 5 + 5$ pour 11×5 .

Pour Butlen (2007) le calcul mental est un calcul impliquant des situations utilisant les nombres et non les chiffres. Boule (1998) évoque que peu importe la technique utilisée pour résoudre une opération, le but étant que l'élève travaille sur les nombres et non sur les chiffres. Il explique que si un élève s'appuie sur les nombres et non sur les chiffres, il comprendra alors plus facilement un résultat approché et pourra alors chercher le résultat exact en s'appuyant sur le résultat approché. Ex : $43 - 21$ l'élève peut chercher d'abord le résultat approché en arrondissant les nombres : $40 - 20 = 20$ donc on s'attend à ce que le résultat de l'opération soit proche de 20. L'élève pourra ensuite utiliser différentes techniques pour trouver le résultat tout en sachant que son résultat doit être proche de 20. Il semble qu'un enfant qui ne possède pas de notion sur les nombres, ou des notions très faibles, ne pourrait pas faire le lien entre 20 et le résultat exact qu'il recherche car il ne saurait pas que 22 est proche de 20 sur la file numérique. Il est alors ici abordé la notion de "number sense" que nous détaillerons plus particulièrement avec Chesné (2014). Pour

Boule, le calcul mental apporte à l'élève différents éléments pour réussir en calcul en général.

- “1. Il permet, pour des opérations simples, de se passer de crayon et de papier, et surtout d'obtenir le résultat plus rapidement. 2.
- Il entraîne une meilleure compréhension des nombres, et par conséquent de meilleurs résultats y compris dans le calcul écrit. 3.
- Il fait intervenir des représentations multiples des nombres, et par conséquent résiste mieux à l'oubli que des procédures apprises mécaniquement et souvent dépourvues de sens pour les enfants. “(Boule, 1998, p16)

Chesné (2014) montre l'importance de donner du sens aux nombres en mettant des situations en place pour appuyer cela.

1.1.1) Notion de number sens

La notion de “number sens” n'a pas de définition exacte mais elle est facilement reconnaissable. En effet, un élève qui possède un sens du nombre est un élève qui a une bonne compréhension de la signification du nombre, qui est capable de mettre en relation les nombres et qui a une bonne perception des nombres. Sood (2009) affirme que “la perception des nombres sert de base à l'apprentissage des concepts et des compétences mathématiques formels” (p.14). Il montre également qu'un manque de perception des nombres peut entraîner des difficultés en mathématiques. Nous pouvons donc supposer que si les élèves souhaitent réussir en calcul mental, il leur faut acquérir une perception des nombres. Seulement pour acquérir cette perception ou pour la développer, il est nécessaire de travailler le calcul mental. Cela est donc une formation à double sens.

Il explique aussi que le calcul mental opère sur les nombres et non sur des chiffres comme c'est le cas pour le calcul posé lorsque l'élève doit calculer 48×25 et qu'il calcule 5×8 puis 5×4 puis 2×8 et pour finir 2×4 il utilise donc que des chiffres. Il permet d'enraciner l'ordre de grandeur, le sens des opérations et leurs propriétés.

Lorsqu'on effectue un calcul tel que 48×25 mais cette fois mentalement, un élève peut avoir besoin d'utiliser l'écrit pour noter les étapes intermédiaires de son calcul mental.

1.1.2) Utilisation de l'écrit

En effet, si l'élève choisit la procédure de distributivité pour résoudre l'opération 48×25 , il doit d'abord calculer 40×20 puis 40×5 puis 8×20 et **enfin** 8×5 pour additionner ensuite les résultats et obtenir le résultat final du calcul donné. Il doit alors retenir 4

résultats pour effectuer l'addition. Cela peut donc être une difficulté majeure dans le calcul mental.

Boule (1998) évoque alors le fait que le calcul mental n'est pas uniquement du calcul fait dans la tête mais qu'il est possible d'utiliser l'écrit pour diminuer la quantité d'informations à retenir.

Le calcul mental n'est alors pas un calcul uniquement réalisé dans la tête mais il peut également contenir des phases d'écrits lorsqu'il s'agit d'aider les élèves dans la résolution de celui-ci.

Nicolas de Kocker (2007) montre à travers un tableau la différence entre des calculs nécessitant de la réflexion et des calculs sans réflexion. Il appuie alors l'idée de l'importance de l'utilisation d'un support papier pour écrire les différentes étapes intermédiaires dans le calcul complexe c'est-à-dire un calcul nécessitant plusieurs étapes. Il prend l'exemple de $35 + 17 = 30 + 5 + 10 + 7$.

Il évoque aussi une autre façon de penser l'écrit dans le calcul mental. En effet, il explique aussi qu'écrire permet de donner du sens et que la trace écrite peut être importante. Par exemple, écrire des procédures dans un cahier pourrait être une façon de les enseigner. Cependant, il faut que le choix des procédures ainsi que le nombre restent raisonnables. Cette trace écrite se veut rassurante pour les élèves et il semblerait qu'elle soit, en ce sens, intéressante.

En revanche, lorsqu'un élève utilise l'écrit dans son calcul mental ou qu'il s'appuie sur les chiffres et non sur les nombres, il est possible qu'il ne fasse plus la distinction entre calcul mental et calcul posé. Nous allons alors aborder la différence entre calcul mental et calcul posé.

1.1.3) Calcul mental et calcul posé

Le calcul posé est un calcul écrit dans son intégralité où la place des chiffres dans le nombre est essentielle. Par exemple, lorsque nous effectuons une multiplication posée nous multiplions chiffre après chiffre et nous décomposons le nombre uniquement de cette façon en s'attardant sur la place des chiffres dans le nombre pour s'assurer d'écrire le résultat au bon endroit. Lors d'une multiplication posée, une technique précise est apprise en classe en fonction de l'enseignant mais elle ne varie pas au cours de l'année.

En revanche, lorsque nous effectuons une multiplication mentalement, nous recherchons différentes techniques les plus adaptées en fonction du nombre en jeu comme l'explique

Constantin (2017). Le calcul mental permet de développer le raisonnement et l'esprit de recherches de l'élève en l'incitant à utiliser la bonne méthode au bon moment.

Pour conclure, Butlen, Constantin, Boule ou encore Chesné définissent le calcul mental comme des calculs utilisant des procédures liées aux nombres et non liées aux chiffres effectués à partir d'un support ou non et produit sur un support écrit ou non.

Mais lorsque nous évoquons les procédures liées au nombre ou encore les calculs que nous faisons de manière automatique, n'existe-t-il pas un lien entre ces deux termes ? Pouvons-nous utiliser les deux termes sans difficulté ? Nous allons à présent aborder le paradoxe entre automatisme et procédures automatisées qui pourrait empêcher les élèves de réaliser les calculs attendus.

1.1.4) Le paradoxe entre automatisme et procédures automatisées

L'automatisme est un mécanisme qui nous permet de libérer notre mémoire de travail. Lorsque nous réalisons un processus automatique, nous le faisons sans intention, de manière inconsciente et cela n'interfère pas avec une autre tâche de travail que nous sommes en train de réaliser. L'automatisme le plus courant est ici les tables de multiplication que nous apprenons par cœur et dont nous ne réfléchissons même plus à comment nous obtenons ce résultat. Nous pouvons également retrouver les procédures automatisées qui deviennent des automatismes. L'automatisme est ici tourné vers le comportement automatique pour lequel nous résolvons un calcul avec un seul type de procédures.

Les procédures automatisées sont, quant à elles, plus longues à obtenir et sont associées à des calculs moins fréquents que les tables de multiplication que nous pouvons rencontrer au quotidien. Butlen (2007) explique qu'une procédure automatisée est une procédure que l'élève a effectué plusieurs fois et dont il est capable par la suite de restituer pour effectuer un calcul sans avoir besoin de la reconstruire. Nous retrouvons les procédures automatisées dans les multiplications, lorsque nous savons qu'il faut utiliser la distributivité pour résoudre ce calcul. C'est une procédure que nous avons automatisée mais nous réfléchissons tout de même au moment du calcul à la procédure que nous devons utiliser.

Nous distinguerons ici procédures automatisées et automatisme comme le comportement automatisé afin de ne pas répéter à chaque fois quel est l'automatisme dont nous parlons.

Les automatismes et les procédures automatisées sont très proches mais sont en contradiction. L'automatisme peut être soit un comportement systématique pour effectuer un calcul avec toujours la même procédure utilisée soit l'utilisation de plusieurs procédures

que l'élève a automatisées. Butlen (2007) évoque le paradoxe entre procédures automatisées et automatisme.

Un élève qui ne possède pas assez d'automatismes, par exemple dans la décomposition des nombres lors d'une multiplication, rencontrera des difficultés dans la résolution de cette multiplication. Butlen (2007) constate que les élèves lors de la résolution d'un nouveau calcul, s'appuient davantage sur leurs connaissances déjà ancrées et qui sont pour eux une valeur sûre. Nous pouvons supposer que les élèves, pour la multiplication notamment, travaillent régulièrement en classe la multiplication posée ou sous la forme écrite et qu'ils vont donc même mentalement réaliser cette multiplication posée afin de les rassurer car c'est quelque chose qu'ils auront déjà travaillé auparavant. Cependant nous avons vu précédemment que faire une multiplication posée dans sa tête ne signifie pas faire du calcul mental car l'élève ne donne aucun sens aux nombres en utilisant cette technique opératoire. Pour les élèves, cette technique leur semble plus rapide et plus efficace et ils ne cherchent pas un autre moyen pour résoudre la multiplication. Alors que s'ils possédaient d'autres procédures automatisées ils pourraient se rendre compte que telle procédure est plus rapide qu'une autre. En effet pour la multiplication de 12×5 par exemple l'élève va immédiatement poser dans sa tête car il est capable de le faire. Mais si c'est un élève qui a appris d'autres procédures, il sera en mesure de calculer $10 \times 5 + 2 \times 5$ qui est un calcul plus rapide que le calcul posé. L'élève utilisera ici la propriété de distributivité de la multiplication. Mais la distributivité est-elle étudiée à l'école ? Les élèves vont-ils utiliser cette propriété pour résoudre un calcul tel que 12×5 ?

Butlen (2007) explique que l'élève doit savoir décomposer les nombres mais qu'il doit également avoir automatisé cette décomposition afin de réussir à utiliser cette procédure à ce moment-là.

Nous constatons donc qu'un élève qui ne possède pas assez de procédures automatisées peut l'amener à conserver un comportement automatique.

Butlen (2007) résume le paradoxe de l'automatisme et des procédures automatisées en disant que trop peu de procédures automatisées peut renforcer l'automatisme et que davantage de procédures automatisées peuvent permettre d'échapper à l'automatisme. Mais si l'élève possède trop de procédures automatisées n'aura-t-il pas des difficultés à s'adapter et à savoir quelle procédure utiliser, à quel moment ? Ne reviendra-t-il pas à une procédure qu'il a étudié le plus fréquemment en classe par exemple le calcul posé qui sera effectué dans la tête ?

Après avoir présenté différentes caractéristiques du calcul mental, nous nous demandons si les programmes précisent les caractéristiques du calcul mental et s'il y a une évolution de la prise en compte de ces caractéristiques de 1883 à aujourd'hui.

1.2) Enjeux liés à l'enseignement et à l'apprentissage du calcul mental

Les enseignants ont pour obligation d'enseigner le calcul mental puisque cette discipline figure depuis des années dans les programmes. Butlen (2007) retrace l'histoire des programmes. Il met en avant trois grandes périodes : de 1883 à 1970, de 1970 à 1980 et de 1980 à 2004. Nous allons reprendre ses analyses tout en nous intéressant plus particulièrement aux caractéristiques du calcul mental que nous avons étudiées précédemment. Nous chercherons la présence d'une différenciation entre calcul mental et calcul posé et si la notion de perception des nombres et le sens donné à ceux-ci ou de l'utilisation de l'écrit pour résoudre un calcul mental sont explicités. Nous irons, à la différence de Butlen (2007), jusqu'aux programmes d'aujourd'hui pour comparer les deux programmes de 1883 à aujourd'hui.

1.2.1) Les programmes de 1883 à 1970

Tout d'abord, Butlen (2007) souligne que les programmes de 1883 à 1970 mettent l'accent sur la mémorisation et l'automatisme. Il explique alors que le calcul mental se distingue du calcul écrit. Cela montre que le calcul mental est une discipline propre, avec un enseignement spécifique. Il relève le fait qu'en 1883, le programme du cours supérieur, qui réfère au cycle 3 d'aujourd'hui, vise à l'apprentissage de procédures rapides de calculs, écrites ou mentales et au développement d'automatismes chez les élèves. Les enseignants doivent alors apporter aux élèves différentes procédures qui leur permettent d'arriver rapidement au résultat et les aider à automatiser certaines procédures.

En 1925, le programme est inchangé mais a pour objectif prioritaire en mathématiques de maîtriser le calcul mental et le calcul écrit.

“Calculer, calculer rapidement et exactement, tel est l'objectif principal de l'enseignement mathématique à l'école élémentaire [...] en particulier, aucune classe d'arithmétique ne devait s'écrouler sans que des exercices de calcul mental aient été proposés aux élèves” (cité par Butlen, 2007, p.25).

Butlen cite le programme de 1945 dans lequel il est expliqué que les enseignants doivent s'appuyer sur des problèmes de la vie courante, sûrement pour donner du sens, lorsqu'ils

font du calcul mental avec les élèves. Ce programme énonce également les trois compétences qui sont à travailler lors de la pratique de cette discipline qui sont : “retenir des données ou des résultats partiels, mobiliser des faits numériques, mettre en œuvre un court raisonnement” (Butlen, 2007, p.25)

Pour conclure, les enjeux liés aux programmes de 1883 à 1970 sont la maîtrise d’un calcul mental rapide et efficace. Les programmes font la distinction entre calcul mental et calcul écrit et n’évoquent pas l’utilisation de l’écrit pour calculer mentalement. Il y a ici une rupture entre calcul mental et calcul écrit qui sont deux éléments distincts et éloignés. Il y a cependant une recherche dans le sens donné aux nombres dans les programmes de 1945 où les enseignants doivent s’appuyer sur des problèmes de la vie courante.

1.2.2) Les programmes de 1970 à 1980

Dans les programmes de 1970, le calcul mental n'est cité que brièvement. L'accent est mis sur les propriétés des opérations. Il n’y a pas de distinction entre le calcul écrit et le calcul mental. Cependant le calcul mental est associé à l’utilisation des différentes propriétés de calcul notamment dans la multiplication où il est cité explicitement l’associativité, la commutativité et la distributivité.

Pour conclure, le programme appliqué de 1970 à 1980 est orienté dans les propriétés des opérations mais pas dans les caractéristiques du calcul mental. Nous constatons alors que les programmes ont évolué entre 1883 et 1980 mais pas dans le sens du calcul mental, il y a plutôt une régression de la présence du calcul mental au cours de ces années.

1.2.3) Les programmes de 1980 à 2002

En revanche, en étudiant le programme de 1980, nous pouvons voir que le calcul mental est de nouveau au cœur des apprentissages. En effet, il est cité plus régulièrement et ses caractéristiques sont plus développées. Nous relevons que dans ce programme il est dit que l’élève peut utiliser l’écrit pour résoudre un calcul mentalement et qu’à l’inverse il peut calculer mentalement pour résoudre un calcul écrit. Mais il est aussi dit que l’élève doit savoir distinguer à des moments précis quand il peut réaliser un calcul écrit ou un calcul mental et qu’il doit faire la distinction entre les deux car il est possible d’utiliser l’écrit pour résoudre un calcul mentalement pour se libérer des informations non essentielles à retenir dans son calcul mais il ne peut pas écrire tout son calcul. Il y a donc un lien entre calcul

mental et l'utilisation de l'écrit dans ces programmes. C'est ici une réelle évolution de cette relation dans les programmes. Mais cette évolution perdure-t-elle jusqu'à nos jours ? Reste-t-elle écrite dans les programmes suivants ?

Nous constatons également que ce programme aborde la notion de perception des nombres mais n'oblige pas à donner du sens aux nombres utilisés. Il est possible d'utiliser des situations qui donnent du sens aux nombres mais également des nombres qui ne sont pas intégrés dans des situations.

Il est aussi abordé dans ce programme que l'élève peut choisir sa propre démarche pour résoudre un calcul mental, qu'il doit posséder différentes procédures pour pouvoir utiliser celle qui lui convient le mieux en fonction du calcul proposé. Il y a, dans ce programme, une réelle intention de réintroduire le calcul mental de manière quotidienne et d'enseigner le calcul mental en évoquant plusieurs procédures pour étayer le choix des élèves. Butlen (2007) note, tout de même, que même si les programmes demandent aux enseignants d'aborder plusieurs procédures lors d'une séance de calcul mental, aucune indication n'est donnée sur comment les aborder ou comment les enseigner.

“L'objectif du calcul mental est que les enfants soient capables d'effectuer toute une gamme de calculs, sans pour autant qu'ils aient appris à associer de façon stéréotypée une méthode donnée à un type de calcul donné.” (cité par Butlen, 2007, p.29)

A partir du programme de 2002, une distinction est faite entre 3 types de calcul : calcul mental, calcul instrumenté et calcul écrit. Dans le calcul mental, il apparaît également la différence entre calcul automatisé et calcul réfléchi. Ce programme conserve le lien entre l'utilisation de l'écrit et le calcul mental détaillé dans le programme de 1980 et met davantage en avant l'utilisation de situations de la vie quotidienne pour donner du sens aux nombres et aux calculs effectués.

Nous pouvons donc en conclure que les programmes de 1980 à 2002 sont en accord et que les mêmes caractéristiques du calcul mental sont conservées. Le programme de 2002 évolue en distinguant trois types de calcul et en citant le calcul mental comme une technique de calcul à part entière.

1.2.4) Les programmes de 2007 à aujourd'hui

Le programme de 2007 sépare lui aussi le calcul en 3 parties : le calcul posé, le calcul instrumenté et le calcul mental. Pour le calcul mental, il est toujours divisé en 2 parties qui sont le calcul automatisé et le calcul réfléchi. Il donne une durée de pratique quotidienne du calcul mental qui n'était pas spécifié auparavant même si le terme "quotidien" pouvait revenir. Il est dit que lors de la réalisation d'un calcul réfléchi il est possible de l'effectuer uniquement mentalement mais que l'utilisation de l'écrit peut servir d'aide pour la réalisation de calculs mentaux. Il est évoqué également que les élèves doivent s'appuyer sur les propriétés des nombres sans que les enseignants ne les guident vers une propriété plus qu'une autre. Nous pouvons faire le lien ici avec les programmes de 1970 qui étaient centrés sur les propriétés des opérations.

Quant aux programmes d'aujourd'hui, le calcul mental reste toujours au cœur des apprentissages et est toujours une partie unique parmi les parties sur le calcul en général. Cependant, le calcul automatisé et le calcul réfléchi ne sont plus évoqués. Un nouveau terme est apparu : le calcul en ligne qui fait partie du calcul mental. Pour mieux comprendre la définition que donne le gouvernement sur ce terme nous allons nous pencher sur d'autres documents plus spécifiques. Dans un numéro spécial du bulletin officiel consacré aux mathématiques, nous retrouvons les différentes notions du calcul évoqué dans le bulletin officiel. Une partie est destinée au calcul en ligne. Il est dit que le calcul en ligne est un type de calcul ressemblant au calcul mental mais pour lequel l'utilisation de l'écrit est autorisée car nous opérons sur des nombres plus grands qui nécessitent des étapes intermédiaires non présentes dans le calcul mental. Nous constatons alors que le calcul mental est éloigné de l'utilisation de l'écrit et que le terme de calcul en ligne est réservé aux calculs nécessitant l'utilisation de l'écrit. Le calcul mental est donc un calcul basé sur les automatismes des élèves comme les tables de multiplication ou les compléments à 10 alors que le calcul en ligne correspondrait au calcul réfléchi évoqué dans les programmes des années précédentes. Pour mettre en lien ces documents, nous avons décidé de regarder sur Eduscol les documents associés au calcul en cycle 2 et 3. Nous constatons également qu'Eduscol distingue le calcul mental du calcul en ligne avec une utilisation de l'écrit spécifique au calcul en ligne.

Cependant, Eduscol fait le lien entre calcul mental et calcul en ligne pour le sens donné aux nombres, les différentes procédures abordées pour la résolution d'un même calcul ou encore pour appréhender les propriétés des opérations.

Le sens donné aux nombres est donc présent depuis de nombreuses années et reste présent dans les programmes d'aujourd'hui.

En conclusion, les programmes ont grandement évolué et ont abordé au fil des années de nombreuses notions du calcul mental. Le calcul mental était peu développé il y a un siècle mais semblait tout de même déjà important à effectuer. L'utilisation de l'écrit est restée présente au fil du temps ce qui marque que le calcul mental n'est pas uniquement un calcul réalisé dans la tête. De nouveaux termes sont apparus pour développer le calcul mental tels que calcul automatisé, calcul réfléchi ou encore calcul en ligne. Cela a permis de dissocier le calcul automatisé du calcul avec des étapes intermédiaires. En revanche, aujourd'hui les programmes semblent avoir dissociés le calcul mental de l'utilisation de l'écrit. En effet, ils utilisent le terme de calcul en ligne pour désigner le calcul qui nécessite de l'écrit et le calcul mental qui est un calcul réalisé uniquement dans la tête. Dans tous les programmes la notion de propriétés des opérations était présente mais dans les programmes de 2020 les propriétés de la multiplication ne sont pas explicites. Seuls des calculs de différentes formes évoquent les propriétés de la multiplication de manière implicite. Nous pouvons nous demander aujourd'hui quelles sont les propriétés les plus développées en classe ? Sont-elles toutes développées dans le même but ? Doivent-elles toutes être apprises de manière égale ?

Nous allons à présent étudier la multiplication car nous avons constaté que durant la définition du calcul mental, les exemples les plus fréquents étaient liés à la multiplication.

1.3) La multiplication au cœur des enseignements

1.3.1) La définition de la multiplication selon le Larousse

Selon le Larousse, une multiplication serait une opération "qui consiste à additionner un nombre par lui-même un certain nombre de fois". Comme toutes les opérations, la multiplication comprend 4 aspects qui sont le symbole, le sens, la technique opératoire et l'aspect théorique. Les techniques opératoires regroupent toutes les procédures que nous pouvons mettre en place pour parvenir au résultat et nous verrons par la suite, qu'il est relativement complexe de sélectionner une procédure pour un type opératoire et qu'il est tout autant difficile de l'enseigner. L'aspect théorique quant à lui, comprend les différentes définitions de la multiplication mais aussi les propriétés qu'elle vérifie. Il existe 3 propriétés de multiplication : la commutativité, l'associativité, la distributivité. Nous disons qu'une multiplication est commutative si nous pouvons changer l'ordre des facteurs : $a \times b = b \times a$.

Si nous prenons l'exemple du produit 3×4 , il est possible de changer l'ordre des facteurs sans changer le résultat. Ainsi, $3 \times 4 = 4 \times 3$. La multiplication est dite associative si nous pouvons regrouper de manière différente les facteurs d'un produit de 3 facteurs sans changer le produit : $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$. Si nous prenons l'exemple du produit $(2 \times 3) \times 4$, les parenthèses peuvent être déplacées sans avoir d'impact sur le résultat de l'opération. Donc, $(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$.

Les questions que se pose Butlen (2007) qui sont "Comment des élèves de CE1 acquièrent-ils la notion de produit de deux entiers naturels ?" et "Comment l'écriture multiplicative $a \times b$ désignant ce produit prend-elle sens ?" amènent à se demander comment introduire la multiplication ?

1.3.2) La définition de la multiplication au travers de Butlen

Butlen (2007) montre que même si majoritairement en France l'entrée dans la multiplication se fait par addition itérée c'est-à-dire par $n \times p = p+p+p+p\dots$ (p étant écrit n fois), une autre méthode est largement abordée dans les travaux de M. Artigue, G. Brousseau, R. Brissiaud, D. Coquin-Viennot, G. Déramécourt et R. Douady : celle de la mesure-produit. En effet, Butlen fait la nette distinction entre l'utilisation du terme « fois » et l'utilisation de l'expression « multiplié par ». Il explique alors que selon la situation du problème, le choix du terme faisant référence à la multiplication était différent. Il prend alors l'exemple suivant : le nombre de tours de manège à 3F le tour et le prix que l'on doit payer pour effectuer ces tours. Ici, le terme « fois » est plus approprié. En revanche, lors d'un problème de calcul d'aire d'un rectangle par exemple, l'expression « multiplié par » est plus légitime car ici est utilisée la mesure-produit.

Butlen évoque alors différents points de vue concernant la multiplication donc différentes introductions à celle-ci.

1.3.3) La définition de la multiplication au travers de Clivaz et de Lecoq

Clivaz (2016), cite Vergnaud (1981) en disant que "c'est même la seule représentation possible si nous voulons partir d'un matériel concret" (p.242). En effet, l'addition itérée provient d'une situation telle que : "5 fois 3 voitures" où on prend 3 voitures + 3 voitures + 3 voitures + 3 voitures + 3 voitures. Le 5 n'a alors aucun sens dans la multiplication, il est utilisé uniquement pour avoir le bon nombre de fois 3 voitures. Seul le "3" possède un sens et représente ici les voitures. Clivaz (2016) explique alors que dans cette

situation la commutativité n'a pas de sens et sera donc difficilement applicable par les élèves. Il est vrai que pourquoi aurait-on "3 fois 5 voitures" alors qu'on cherche combien de fois on a 3 voitures ? C'est pourquoi, malgré le fait que cette méthode d'introduction à la multiplication soit majoritaire en France, elle a été critiquée. Lecoq considère que cette introduction n'est pas adaptée aux élèves. Lecoq, comme Clivaz, dit que cette introduction ne traduit pas la commutativité de la multiplication et il va jusqu'à dire qu'elle s'y oppose. La définition du Larousse ne serait donc pas, pour Lecoq, la bonne définition de la multiplication. L'utilisation de l'addition itérée ne serait pas un outil efficace pour découvrir la multiplication car, comme le remarque Butlen (2007), elle conduit à étudier la multiplication quasiment exclusivement au niveau des écritures.

L'addition itérée étant en lien avec la propriété de distributivité, Clivaz (2016) explique néanmoins qu'il est possible de montrer le fonctionnement de la distributivité en décomposant 5 en 3+2 par exemple où il y aurait 3 fois 3 voitures puis 2 fois 3 voitures. Ici encore, le 5 n'a pas de sens mais il permet une approche de la distributivité. Si on veut présenter cet exemple en classe, il est nécessaire de montrer que même si on sépare le nombre de voitures ou qu'on ait 3 fois 5 voitures, le résultat sera inchangé. Cette approche permettra une nouvelle compréhension des nombres ce qui est recherché lors de la mise en place du calcul mental.

Pour conclure, Lecoq comme Clivaz ne trouvent pas que l'addition itérée soit pertinente pour introduire la multiplication. Or, comme nous l'avons vu dans l'introduction, lors de calculs mentaux sur la multiplication, les élèves de cycle 2 utilisent beaucoup l'addition itérée notamment dans la distributivité.

1.3.4) La définition de la multiplication au travers d'Euclide

Euclide introduit la multiplication par le calcul de l'aire d'un rectangle. L'entrée de la multiplication ne se fait pas par addition itérée mais par le calcul de l'aire d'un rectangle. Constantin (2017) montre également que l'entrée dans la multiplication peut se faire par le calcul de l'aire. Nous considérons alors le produit comme mesure de l'aire d'un rectangle en prenant par exemple 15×12 où la longueur du rectangle est de 15 unités et sa largeur est de 12 unités. Nous pouvons voir les unités comme des carrés présents dans ce rectangle et lorsque nous comptons tous les carrés de rectangle nous trouvons le résultat de la multiplication 15×12 .

Nous relevons donc deux entrées principales dans la multiplication soit par l'addition itérée soit par le calcul de l'aire d'un rectangle. Ces deux formes peuvent mener à la distributivité. Mais qu'est-ce que la distributivité ? Comment peut-elle être utilisée en classe ?

1.4) La distributivité

1.4.1) Définition de la distributivité

La distributivité rend compte d'une équivalence entre deux calculs. C'est le produit d'un facteur par une somme qui est équivalente à la somme des produits de ce facteur par chacun des termes. On peut alors l'écrire : $a*(b+c) = a*b + a*c$ où a, b et c peuvent désigner des nombres entiers quelconques. Elle peut être utilisée avec un grand nombre de variables didactiques, c'est pourquoi nous allons étudier les caractéristiques de la distributivité.

1.4.2) Les caractéristiques de la distributivité

1.4.2.1) La distributivité par rapport à l'addition

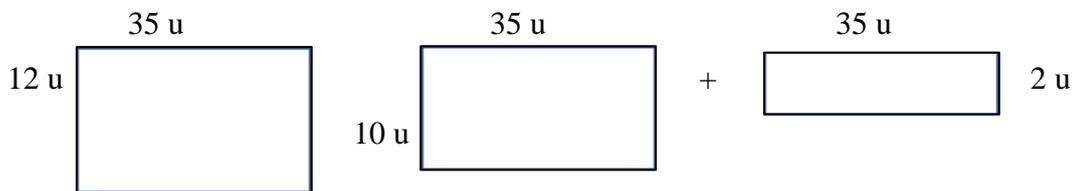
Il existe plusieurs types de distributivité par rapport à l'addition : la distributivité par l'addition itérée, par l'addition canonique ou par le calcul de l'aire. Par exemple, en abordant la multiplication par addition itérée, il est tout à fait possible d'utiliser la distributivité comme le démontre Constantin (2017). En effet, en prenant 14×12 comme multiplication, l'addition itérée peut mener à faire $14 \times 12 = 12 + 12 + 12 + 12 + \dots + 12$ ce qui revient à faire en utilisant la distributivité $14 \times 12 = 10 \times 12 + 4 \times 12$ qui équivaut à $(12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12) + (12 + 12 + 12 + 12)$. La distributivité est ici utilisée à partir de l'addition itérée.

Elle montre également que la distributivité offre plusieurs types de décomposition. La décomposition additive peut être canonique : elle prend en compte la décomposition selon les centaines, les dizaines et les unités. Par exemple, en faisant 48×255 , 255 est décomposé de manière canonique c'est-à-dire en $200 + 50 + 5$ permettant d'obtenir une distributivité du type $48 \times 200 + 48 \times 50 + 48 \times 5$.

Ainsi, la distributivité peut être le fruit d'une décomposition additive comme avec l'addition itérée ou canonique mais nous ne retrouvons pas uniquement la décomposition additive.

En conservant la deuxième façon d'aborder la multiplication en classe, la distributivité peut également être présente dans le calcul de l'aire d'un rectangle. En effet, si un rectangle fait 35 unités de longueur et 12 unités de largeur, trouver l'aire revient à multiplier 35 par 12.

Ainsi, en découpant le rectangle en deux parties, cela renvoie à utiliser la distributivité car il est possible alors de faire $35 \times 10 + 35 \times 2$. Cela est possible à réaliser car il existe une propriété sur l'aire qui dit que l'aire de la réunion de deux rectangles disjoints est égale à la somme des aires de ces rectangles.



1.4.2.2) La distributivité par rapport à la soustraction

En abordant la multiplication par addition itérée, il n'y a pas seulement la distributivité par rapport à l'addition qui peut être utilisée. En effet, il est également possible d'aborder la distributivité par rapport à la soustraction. Lorsque certains calculs présentent les nombres tels que 9, 19 ou 29, il est possible d'utiliser la décomposition par soustraction. Par exemple, 9×45 peut être décomposé de la manière suivante : $10 \times 45 - 1 \times 45$ en partant de l'opération : $(10-1) \times 45$. Partir d'une dizaine et enlever une unité permet de faciliter le calcul.

1.4.3) Les difficultés dans la décomposition du nombre

À la suite de notre étude, nous avons mis en avant le fait que les élèves pouvaient rencontrer des difficultés pour sélectionner une procédure adaptée notamment dû au fait qu'ils n'avaient pas la connaissance des nombres nécessaires pour sortir de leur zone de confort. Nous avons mis en évidence la méthode de décomposition des nombres qui reste d'après Butlen (2007) l'une des méthodes les moins utilisées par les élèves lors de ses tests. Butlen (1992) a réalisé des tests pendant deux ans sur plusieurs classes de l'école élémentaire allant du CP au CM2. Il a relevé les procédures des élèves pour effectuer différentes opérations. À la suite de cela, il a démontré que la décomposition des nombres était la moins utilisée par les élèves. Par exemple, les élèves n'ont pas la capacité de voir que lors de la multiplication 45×17 les nombres peuvent être décomposés soient en $40+5$ et $10+7$ soient de différentes manières comme, par exemple, en $45 \times (12+5)$. Pour l'addition, ces nombres peuvent être décomposés de différentes manières telles que $40+5+12+5$ ou $43+2+15+2$ qui mènent à des calculs plus simples et plus facilement calculables car ils mènent à la dizaine

supérieure. Pour la multiplication, la décomposition qui permet de simplifier les calculs, reste la première énoncée car c'est celle retrouvée le plus fréquemment à la suite des tests de Butlen (1992) et car elle se base sur une décomposition additive canonique. Les 2 autres décompositions ne sont pas des décompositions dites "naturelles" car elles ne décomposent pas le nombre en dizaines et unités. Ces décompositions ne semblent donc pas être les plus judicieuses pour une multiplication tandis que pour une addition ces décompositions semblent rester judicieuses. Elles amènent une multiplication par 12 ou par 43 qui ne sont pas des calculs automatisés et qui demandent une plus grande réflexion. Si les élèves ne possèdent pas l'automatisme des compléments à la dizaine supérieure il est probable qu'ils ne puissent pas réaliser la décomposition des nombres comme il est nécessaire de le faire pour résoudre une multiplication par exemple.

1.4.3.1) Décomposition additive canonique

Nous avons évoqué le terme de décompositions "naturelles" en citant les décompositions en centaines, dizaines et unités. Mais peut-on dire qu'elles sont naturelles pour tous ? Cela peut-il devenir un terme générique ?

En effet, lors de nos observations en classe, ou à la suite de l'étude des programmes nous avons constaté que la décomposition canonique était un thème largement abordé en classe dès le cycle 2. Cette décomposition est retrouvée dans de nombreux calculs, et est utilisée pour aborder de nombreuses notions telles que la multiplication posée par exemple où nous utilisons cette décomposition pour multiplier un facteur par la somme des produits du second facteur. Cependant, si nous conservons les caractéristiques du calcul mental étudiées précédemment, nous constatons qu'utiliser la décomposition d'un nombre sous sa forme canonique peut conduire à perdre le sens du nombre et à s'appuyer uniquement sur les chiffres. Les élèves pourront alors perdre le sens de ce qu'ils sont en train de faire et la décomposition ne sera alors pas une décomposition naturelle. Le terme "naturel" est utilisé pour dire que c'est la décomposition que les élèves rencontrent le plus souvent en classe mais cela ne signifie pas que c'est une décomposition comprise par tous.

1.4.3.2) Décomposition multiplicative

Boule (1998) aborde la décomposition multiplicative des nombres en évoquant l'intérêt de connaître les caractères de divisibilité de ces nombres. En effet, lors d'une multiplication de type 28×35 si l'élève possède des automatismes sur les critères de divisibilité de ces

nombres, il peut décomposer les nombres en : $7 \times 4 \times 7 \times 5$ pour pouvoir obtenir le nombre 20 afin de faciliter la multiplication finale en 20×49 . Mais cela peut être une réelle difficulté pour l'élève s'il ne connaît pas correctement ses tables de multiplication.

Un élève peut décomposer le nombre correctement mais il doit connaître la bonne propriété à utiliser à partir de cette décomposition. En effet, lors du calcul de 45×17 , en décomposant 17 en $10 + 2 + 5$, s'il fait $45 \times 10 = 450$ puis $450 \times 2 = 900$ puis $900 \times 5 = 4500$ alors il n'obtient pas le bon résultat mais il a pourtant décomposé correctement le nombre 17 en $10 + 2 + 5$. Il ne réussira alors pas forcément à s'adapter et sera face à une réelle difficulté. Ici encore la propriété mise en jeu en lien avec la décomposition des nombres qui doit être connue par les élèves est la propriété de distributivité. L'élève réalise ici une fausse distributivité. Mais est-elle apprise aux élèves alors qu'elle n'est pas présente dans les programmes ? Pour que l'élève la connaisse il faut qu'il l'ait apprise à un moment donné mais est-ce le cas ?

À la suite de cette étude sur les caractéristiques de la distributivité, nous nous sommes demandé dans quelles mesures la distributivité pouvait être efficace mais également quand était-elle valide ?

Pour cela nous allons étudier le domaine de validité et d'efficacité de la distributivité.

1.5) Le domaine de validité et d'efficacité

1.5.1) Définition du domaine de validité et d'efficacité

Pour comprendre quand utiliser la distributivité en calcul mental, il est primordial de connaître son domaine de validité et d'efficacité et surtout de comprendre ce qu'est un domaine de validité et un domaine d'efficacité.

Butlen (2007) évoque dans son article que lors d'une visite dans une classe de CM2, le professeur avait déjà donné aux élèves différentes procédures pour réaliser plusieurs exercices de calculs de produits. Ces procédures ont été jugées plus économiques.

Ainsi, dans le domaine de validité d'une procédure se trouve le critère d'économie de calculs.

Moins une procédure demande de calculs dans un type opératoire, plus elle sera économique et donc plus elle sera propice à être utilisée dans ce type opératoire.

Le sens est aussi un critère primordial. Les procédures les moins coûteuses mais qui sont dénuées de sens ne semblent avoir aucun intérêt à être présentées aux élèves.

Nous avons vu précédemment, avec Sood (2009) qu'il est important que les élèves acquièrent une perception des nombres pour réussir en calcul mental. Donner un sens aux nombres et non aux chiffres est un des critères de domaine de validité et d'efficacité d'une procédure de calcul mental.

Pour conclure, le domaine de validité repose sur au moins deux critères : l'économie de calculs et l'apport de sens de la procédure.

Au niveau du domaine de l'efficacité, les procédures pourraient être sélectionnées aussi selon le taux de réussite des élèves. Butlen (2007) affirme que les enseignants n'imposent pas de procédures spécifiques mais veulent simplement que les élèves soient capables d'expliquer clairement les avantages de chaque procédure. De plus, ce domaine pourrait reposer sur la rapidité d'exécution des calculs. Plus les élèves sont rapides en calcul mental, plus la procédure qu'ils ont choisie est efficace pour les amener au résultat.

1.5.2) Le domaine de validité et d'efficacité de la distributivité.

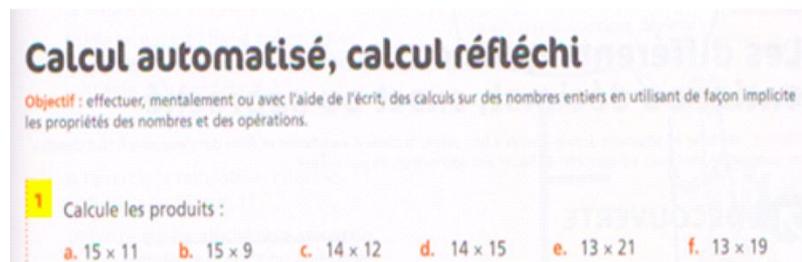


Figure 1: *EuroMaths CM2 2009* issue de Constantin (2007), p.185

Dans cet exercice tiré du manuel EuroMaths issu de l'article de Constantin, on peut mettre en évidence le domaine de validité et d'efficacité de la distributivité. Par exemple, pour le calcul 15×11 , si l'on applique la distributivité on obtient : $15 \times 10 + 15 \times 1$. Or, en réalité, 1×15 demande une étape supplémentaire de calcul, cela revient à faire $15 \times 10 + 15$. Si nous effectuons directement ce dernier calcul, la propriété de distributivité n'est pas réellement convoquée. Ainsi, pour ce genre de calcul, la distributivité n'est pas la procédure la plus efficace. De même pour 15×9 , la distributivité nécessitera une étape supplémentaire par rapport à l'addition itérée, elle n'est donc pas motivée. Pour des raisons d'efficacité, il est préférable que l'élève ne fasse pas $15 \times 4 + 15 \times 5$ mais qu'il fasse plutôt $15 \times 10 - 15$. L'utiliser ici est plus compliqué et moins adapté, ce n'est donc pas la procédure la plus efficace.

En revanche, pour des calculs tels que : 14×12 , si nous appliquons la distributivité nous obtenons $14 \times 10 + 14 \times 2$. Ici, la distributivité garde tout son sens, elle facilite les calculs et est donc considérée comme une procédure appropriée.

Ainsi, nous pouvons conclure que lorsque le facteur conduit à une décomposition sous la forme d'une somme dont l'un des termes est égal à 1, cela nécessite une étape supplémentaire de calcul par rapport à l'addition itérée. Ainsi, dans le calcul 24×11 , la décomposition peut être la suivante : $24 \times 10 + 24$. Ici, la distributivité n'est donc pas utilisée. Elle sera utilisée uniquement lorsque l'élève effectue la décomposition du nombre 11 en $10+1$ et qu'il multiplie 24 par 10 puis par 1 et qu'il fait la somme des deux résultats.

1.6) Question de recherche et hypothèses

Nos recherches nous ont permis de comprendre que d'une part il y avait plusieurs introductions à la multiplication, d'autre part que la distributivité présentait plusieurs caractéristiques bien distinctes les unes des autres. En effet, nous avons observé que les élèves de cycle 2 utilisaient plus la distributivité en calcul mental que les élèves de cycle 3. Était-ce le fruit du hasard ? En nous centrant sur la distributivité, nous avons étudié quelques formes de distributivité : par addition itérée, par soustraction ou encore par le calcul de l'aire. Ces différentes formes sont-elles vues au cycle 2 et au cycle 3 ? L'entrée de la multiplication au cycle 2 favorise-t-elle une forme de distributivité ? Toutes ces questions nous ont amené à la question de recherche suivante : Quelles sont les formes de distributivité utilisées en cycle 2 et en cycle 3 qui pourraient expliquer une différence d'utilisation des nombres lors de la résolution de calculs mentaux ?

En cherchant les différentes façons d'utiliser la distributivité, nous pourrions comprendre pourquoi les élèves de cycle 3 utiliseraient moins la distributivité que les élèves de cycle 2. Plusieurs hypothèses émergent face à cette question de recherche telles que :

- Hypothèse 1 : Les élèves de cycle 2, en décomposant les nombres dans le calcul d'une multiplication, décomposent uniquement celui de gauche car ils font référence à l'addition itérée contrairement aux élèves de cycle 3 qui décomposent un nombre sans prêter attention à son positionnement dans la multiplication.
- Hypothèse 2 : Les manuels de cycle 2 et de cycle 3, par la proposition d'exercices précis, incitent les élèves à utiliser la distributivité.

- Hypothèse 3 : Le choix des nombres dans l'enseignement entraîne le choix d'une décomposition précise.
- Hypothèse 4 : Les opérations posées étant vues en cycle 3 expliquent que les élèves de cycle 3 utilisent plus le calcul posé lors du calcul mental et donc moins la distributivité.

2) Méthodologie

Afin de répondre à notre question de recherche, nous avons fait le choix de concevoir un test identique et de le proposer en cycle 2 et en cycle 3 afin d'observer les procédures des élèves dans différents calculs et de constater la présence ou non d'un écart entre le choix des procédures en fonction des calculs proposés. À la suite de ce test, nous avons voulu approfondir les réponses des élèves obtenues en nous penchant sur les manuels utilisés en classe pour voir s'il y avait un lien de causalité entre l'approche de la multiplication en classe et les procédures utilisées pour répondre à des calculs ciblant la distributivité.

2.1) Tests réalisés avec une classe de CE2 et de CM2

Pour tenter de répondre à notre problématique, il semble pertinent d'utiliser une méthodologie mixte c'est-à-dire quantitative et qualitative. Dans un premier temps, dans le but de valider ou d'invalider ces différentes hypothèses, nous avons préparé un test que nous faisons passer à des élèves de cycle 2 : une classe de CE2 composée de 26 élèves en période 3. Cette classe n'est pas une classe en réseau d'éducation prioritaire. On fait également passer ce test dans une classe de CM2 composée de 24 élèves. Cette classe n'est pas non plus classée en réseau d'éducation prioritaire. Ce test présente des calculs où l'utilisation de la distributivité comme procédure semble être la plus judicieuse. Le choix des nombres est alors très important afin d'obtenir des résultats proches de ceux attendus. Grâce à celui-ci, nous pourrions déjà observer si l'écart d'utilisation de la distributivité entre cycle 2 et cycle 3 est significatif ou non. Lors de la mise en place de ce test, le but est de recueillir les procédures des élèves. Nous effectuons également une correction collective où le but de la correction est que les élèves expriment les procédures qu'ils ont choisi d'utiliser pour répondre aux calculs proposés. D'une part, cela permettra de voir s'ils utilisent la distributivité, d'autre part de voir si les élèves de cycle 3 ne sont pas tentés finalement de poser les calculs dans leur tête étant donné que les opérations posées sont au cœur du

programme de ce cycle. En réalisant ce test nous pourrions alors voir également si les élèves décomposent les nombres et si oui, de quelles manières.

2.1.1) Test pour les élèves de CM2

Dans le test que l'on propose en CM2 (voir annexe 1), l'enseignant dicte oralement des calculs que les élèves doivent résoudre. L'élève doit être capable de pouvoir expliquer son raisonnement. Le but de cette première partie est de voir si l'élève utilise, de lui-même, la propriété de distributivité.

2.1.1.1) La place du nombre à décomposer

Dans le premier exercice, les calculs proposés sont les suivants :

- a) 48×5 b) 12×25 c) 34×12

Le premier calcul est la multiplication d'un nombre à 1 chiffre par un nombre à 2 chiffres. Cette configuration est simple. Les deux autres calculs sont des multiplications d'un nombre à 2 chiffres par un nombre à 2 chiffres. Ces calculs sont plus complexes et nécessitent une décomposition. Dans le calcul a et b, le nombre qu'il est préférable de décomposer se situe à gauche tandis qu'il se situe à droite dans le calcul c. Cela permet de savoir si les élèves décomposent uniquement le nombre se trouvant à gauche du signe opératoire ou s'ils choisissent le nombre à décomposer en fonction d'un autre critère tel que sa grandeur ou encore un nombre fréquemment rencontré.

Dans le deuxième exercice, le but est d'amener les élèves à utiliser la distributivité grâce aux calculs proposés. La particularité de cet exercice est que l'on oblige les élèves à utiliser le calcul donné au début de l'exercice, ici : $23 \times 14 = 322$.

A partir de ce calcul, et uniquement à partir de celui-ci, les élèves doivent calculer sans poser les multiplications en expliquant comment ils ont procédé. Les calculs sont les suivants :

- a) 23×16 b) 123×14 c) 25×14

Ici, la place du nombre à décomposer varie aussi. Dans le calcul a, l'élève est amené obligatoirement à décomposer le nombre de droite qui est 16 en $14 + 2$. Cependant, dans le calcul b et c, le nombre à décomposer est celui de gauche c'est-à-dire 123 et 25.

2.1.1.2) Le choix des nombres

Dans le premier exercice, pour le calcul b, il nous a semblé pertinent de multiplier 25 par 12 dans le but que l'élève décompose 12 en $10 + 2$. En effet, multiplier par 10, puis par 2 revient à faciliter le calcul car la table de 2 est très largement maîtrisée au CM2. On a

choisi d'utiliser 25 également pour voir si l'élève connaît d'autres procédures que la distributivité et notamment : $12 \times 100 : 4 = 12 \times 25$.

Dans le calcul c, nous avons décidé de choisir des nombres pairs et qui requièrent la table de 4 et de 2, tables relativement simples au CM2. Le but est d'observer si les élèves décomposent plutôt 12 qui reste quand même la décomposition la plus simple ou s'ils décomposent 34. Ainsi, nous pourrions constater si les élèves choisissent particulièrement un nombre à décomposer, comme 12 par exemple, ou si le nombre qu'ils décomposent est le fruit du hasard.

Dans le deuxième exercice, nous avons choisi les nombres de sorte que l'addition finale ne nécessite pas de retenue. En effet, nous ne voulions pas complexifier le calcul alors que l'intérêt de cet exercice est de voir si l'élève réussit à utiliser la procédure de distributivité lorsque celle-ci lui est imposée.

Ainsi, $23 \times 14 = 322$, $23 \times 16 = 322 + 2 \times 23 = 368$.

2.1.1.3) Les procédures attendues

Pour la première partie du test les procédures attendues sont :

- La distributivité en décomposant le nombre de gauche pour le calcul 48×5 ($40 \times 5 + 8 \times 5$) ou le calcul 12×25 ($10 \times 25 + 2 \times 25$)
- L'addition itérée pour le calcul 48×5 ($48 + 48 + 48 + 48 + 48$ ou $5 + 5 + 5 + \dots + 5$)
- La distributivité en décomposant le nombre de droite pour le calcul 34×12 ($34 \times 10 + 34 \times 2 = 340 + 68 = 408$)
- Le calcul de l'aire d'un rectangle où l'élève coupe le rectangle en deux parties telles que pour le calcul 12×25 : un rectangle de largeur 10 et de longueur 25 et un autre de largeur 2 et de longueur 25 qui mène au calcul suivant : $10 \times 25 = 250$ et $2 \times 25 = 50$ donc $12 \times 25 = 300$

Dans cette première partie, nous n'attendons pas le résultat exact, ni une procédure bien définie. Nous cherchons à observer comment les élèves résolvent ces calculs ainsi que quelle procédure utilisent-ils. Cela nous permettra de répondre à deux de nos hypothèses qui sont :

- les élèves en décomposant les nombres dans un calcul, décomposent uniquement celui de droite car ils font référence à l'addition itérée
- les opérations posées étant vues en cycle 3 expliquent que les élèves de cycle 3 utilisent plus le calcul posé lors du calcul mental et donc moins la distributivité

Pour la deuxième partie du test les procédures attendues à partir du calcul donné sont :

- La décomposition canonique pour le calcul 123×14 ($100 \times 14 + 20 \times 14 + 3 \times 14 = 1400 + 280 + 42 = 1400 + 322 = 1722$)
- L'addition itérée : $23 \times 16 = 23 \times 14 + 2 \times 23 = 322 + 46 = 368$ et pour $25 \times 14 = 23 \times 14 + 2 \times 14 = 322 + 28 = 350$

Dans ce deuxième exercice, le calcul donné ($23 \times 14 = 322$) influence les élèves à l'utilisation de la distributivité. Ce premier point permet de vérifier si les élèves de cycle 3 savent utiliser cette propriété de la multiplication. Le premier et le dernier calcul les incitent à utiliser l'addition itérée tandis que le deuxième calcul les incite à utiliser la décomposition canonique.

S'ils n'utilisent pas l'aide, cela pourrait montrer qu'ils n'ont pas appris à utiliser la distributivité par l'addition itérée

Les erreurs des élèves que nous pouvons rencontrer sur l'ensemble du test sont :

- La fausse distributivité où l'élève fait par exemple pour 12×25 : $12 \times 2 + 12 \times 5$ ou pour 34×12 il peut décomposer les 2 facteurs et multiplier que l'un des 2 termes ex : $(30 + 4) \times (10 + 2)$ cela donnerait pour l'élève : $30 \times 10 + 4 \times 2$.
- Lors de l'utilisation de l'addition itérée, l'élève peut faire pour 23×16 : $23 \times 14 \times 2$. Il peut également pour 48×5 oublier un nombre ou commettre une erreur dans l'addition de tous les nombres 48.

A l'issue de nos recherches permettant la création de ce test, nous nous sommes aidées du manuel Cap Maths CM2 ainsi que d'un extrait de manuel Euromaths CM2 que Constantin (2017) analyse dans son article.

Nous avons pu constater que le manuel Cap Maths ne proposait que des calculs où le facteur se situait à droite et que les multiplications se trouvaient toujours sous la forme de nombres à 2 chiffres par un facteur à un chiffre. De ce fait, nous nous sommes questionnées et nous avons quand même décidé de proposer aux élèves des multiplications de nombres à 2 chiffres par un facteur à 2 chiffres.

Dans un premier temps nous avons fait le choix de ne pas influencer les élèves sur les procédures qu'ils vont utiliser. Nous attendons de cette première partie que :

- Soit aucun élève ne choisit la procédure de distributivité auquel cas cela affirmerait que ce n'est pas une procédure dite naturelle pour eux.
- Soit quelques élèves parviennent à utiliser cette procédure-ci signifiant que certains d'entre eux la maîtrisent et l'utilisent.

- Soit une grande majorité d'entre eux utilisent cette procédure montrant que la distributivité est comprise et ancrée grâce aux années précédentes.

Dans le troisième cas, cette observation permettrait de dire que l'utilisation moindre de la distributivité au cycle 3 contrairement au cycle 2 ne viendrait pas d'une absence de connaissance de cette procédure.

2.2) Test pour les élèves de CE2 (voir annexe 2)

Ce test est identique par rapport à celui proposé aux élèves de CM2 pour le premier exercice et pour le deuxième exercice seuls les nombres dans les calculs sont modifiés afin de nous adapter à la différence entre les deux cycles où les attendus ne sont pas les mêmes. Les nombres sont tout de même choisis de la même manière entre les 2 cycles c'est -à -dire qu'on part de 23 pour les 2 cycles et on multiplie par 4 ou par 14 en fonction du cycle. Nous faisons varier les mêmes éléments (ajout de 2 unités dans les 2 tests, multiplier le nombre 4 ou 14 par 123 pour les 2 tests) dans les calculs en conservant la base 4 ou 14 en fonction du niveau de la classe.

Ce test se présente toujours sous la forme de deux exercices :

- Un premier exercice dans lequel le choix des procédures utilisées n'est pas influencé par la consigne.
- Un deuxième exercice dans lequel la consigne amène les élèves à utiliser la propriété de distributivité afin de résoudre les calculs.

Dans le premier exercice, les calculs proposés sont les mêmes que ceux proposés aux élèves de CM2. Seul le deuxième exercice présente des différences dans le choix des nombres. Les calculs proposés au deuxième exercice sont les suivants :

- a) 23×6 b) 123×4

Pour une question de durée de l'exercice, nous avons décidé de proposer un calcul en moins aux élèves de CE2.

Les procédures attendues dans le premier exercice sont les mêmes que pour le cycle 3 car nous utilisons les mêmes nombres qu'au cycle 3. Nous nous attendons tout de même à une moins grande variété de procédures du fait de leur plus jeune âge et donc de leur expérience moins grande dans le milieu scolaire.

Dans le deuxième exercice, tout comme le test des CM2, les élèves sont obligés d'utiliser le calcul qui leur est donné. Le calcul imposé est le suivant : $23 \times 4 = 92$

Les calculs proposés dans ce deuxième exercice sont les suivants :

a) 23×6 b) 123×4

Le premier calcul fait appel à la distributivité lorsque l'élève fait $23 \times 4 + 23 \times 2$. Le deuxième calcul, quant à lui, amène à une décomposition canonique lorsque l'élève fait $100 + 23 = 123$ puis à une distributivité lorsqu'il fait $100 \times 4 + 23 \times 4$. L'élève décompose le nombre en $100 + 23$ afin de conserver le nombre 23 qui est donné dans la consigne. Lors de la distributivité, l'élève aura alors uniquement à calculer $100 \times 4 = 400$ car le résultat de 23×4 est donné dans l'énoncé. Il devra alors additionner les 2 nombres : $400 + 92 = 492$.

Les procédures sont alors très proches voire identiques à celles attendues en CM2.

Ces deux tests nous permettent de réaliser une étude qualitative en identifiant l'ensemble des procédures données par les élèves.

2.3) Étude des manuels

À la suite de ce test, il semble être intéressant d'étudier les manuels choisis pour chacun des cycles tout en conservant les mêmes éditions pour les différents cycles. Nous avons choisi deux éditions : CAP maths CE2, CM2 et ACCÈS CE2, CM2. Pour analyser ces manuels, nous relèverons différents calculs centrés sur la multiplication et plus particulièrement en calcul mental. Nous observerons les nombres utilisés qui peuvent mener à une décomposition différente en fonction des nombres choisis.

2.3.1) Les manuels de CE2

Pour les manuels de CE2, nous allons voir quelle est l'entrée à la multiplication proposée par le manuel. S'agit-il d'une entrée par addition itérée ? Nous allons aussi observer, si le nombre à décomposer se situe exclusivement à droite ou exclusivement à gauche ? Ou s'il se situe aussi bien à gauche qu'à droite ? Nous regarderons également si le manuel, par les exercices, influence l'utilisation de la distributivité. Le manuel influencera-t-il une distributivité par addition itérée ? Par l'addition canonique ou par le calcul de l'aire ?

2.3.1.1) Maths au CE2 éditions ACCÈS

Ce manuel est découpé par périodes, c'est-à-dire en cinq périodes et possède 49 unités au total. C'est ce manuel-là que l'enseignante utilise dans la classe de CE2 où nous avons fait passer le test. Dans notre partie analyse, nous verrons l'entrée dans la multiplication proposée par ce manuel, puis, nous verrons s'il aborde la distributivité et

quand. Il semblerait intéressant de voir les différences entre ce manuel et celui de Cap Maths pour comprendre si, la réussite au test que l'on a fait passer, aurait pu dépendre du manuel choisi.

2.3.1.2) Cap Maths CE2

Ce manuel est découpé en 10 grandes unités dans lesquelles on retrouve du calcul mental et du calcul en ligne. Pour les CE2, nous regarderons les différents choix des nombres, la place du nombre à décomposer dans la distributivité, les exercices proposés : ont-ils une influence sur l'utilisation de la propriété de distributivité ?

Puis, nous chercherons à voir quelle est l'entrée à la multiplication proposée par les manuels et nous chercherons si cette entrée est en lien avec la propriété de distributivité.

2.3.2) Les manuels de CM2

Pour les manuels de CM2, nous allons voir comme pour les manuels de CE2 quels sont les nombres choisis dans une multiplication. Est-ce que le calcul présente une multiplication d'un nombre à un chiffre par un nombre à deux chiffres ou une multiplication d'un nombre à deux chiffres par un nombre à deux chiffres ? Ou présente-t-il les deux ? Nous allons aussi observer si le nombre à décomposer se situe exclusivement à droite ou exclusivement à gauche ? Ou peut-être qu'il se situe aussi bien à gauche qu'à droite ? Nous regarderons également si le manuel, par les exercices, influence l'utilisation de la distributivité.

2.3.2.1) Maths au CM2 éditions ACCÈS

Le manuel Maths au CM2 éditions ACCÈS présente un sommaire par période. Au total se trouvent 35 unités dans lesquelles se trouvent une partie calcul mental et une partie calcul en ligne. Nous pouvons observer plusieurs éléments qui semblent pertinents. Premièrement, les tables de multiplication sont présentes dans la partie calcul mental pratiquement dans chaque unité. Cela montre l'importance et la place que prennent les tables de multiplication tant dans le calcul mental que dans la résolution de problèmes.

Dans l'unité 2, c'est-à-dire au début du manuel et donc au début de l'année scolaire, se trouve une séquence de 4 séances de calcul en ligne dont 3 sont dédiées à la distributivité. Le titre de cette séquence est : "calculer des produits en utilisant la distributivité". Nous l'analyserons dans la partie analyse et résultats.

2.3.2.2) Cap Maths CM2

Le manuel Cap Maths est constitué de 10 unités. Trois couleurs sont présentes dans ce manuel : la couleur orange correspondant aux nouveaux apprentissages, la couleur bleue correspondant à des révisions et enfin la couleur verte correspondant à la consolidation des savoirs. Chaque unité possède des exercices de calcul mental. Cela semble montrer que le calcul mental est travaillé de manière très régulière et tout au long de l'année si l'on se réfère à la progression du manuel. Dans celui-ci, nous pouvons constater que la distributivité est abordée dans plusieurs unités : l'unité 3, l'unité 6 et l'unité 7. Elle est donc étudiée également tout au long de l'année.

3) Analyses et résultats

3.1) Résultats et analyses des tests en CM2

A la suite du test effectué dans la classe de CM2, nous avons relevé les copies de chaque élève et nous avons constaté des résultats très divers. Il y a au total 24 élèves qui ont effectué les exercices et 6 calculs par élève ce qui fait en tout 144 résultats. Parmi ces 144 résultats, 16 calculs n'ont pas été effectués souvent par manque de temps ou la procédure n'était pas une procédure qu'on s'attendait à avoir. Il nous reste alors 128 résultats exploitables.

Nous avons relevé que sur ces 128 résultats, 30 sont issus d'une fausse distributivité. Dans le terme "fausse distributivité" nous regroupons tous les calculs où l'élève a commencé une décomposition du nombre mais n'est pas allé au bout de son calcul ou encore qu'il a multiplié le nombre trouvé dans la première étape du calcul par la décomposition de ce nombre. Nous détaillerons plus cette partie à la suite de nos résultats.

Notre tableau d'analyse de procédures (voir annexe 3) comporte 7 procédures différentes menant à la distributivité ou non. 6 procédures sur les 7 nommées ont été utilisées par les élèves de CM2 lors de leurs différents calculs ce qui signifie que ces élèves connaissent un grand nombre de procédures pour résoudre un même type de calcul.

On constate par ailleurs que malgré le fait que les élèves soient guidés vers la distributivité dans l'exercice 2, certains utilisent tout de même une autre procédure qui peut les rassurer car c'est une procédure qu'ils ont utilisée lors de l'exercice précédent.

Nous avons relevé les copies de 7 élèves de CM2 que nous nommerons A, B, C, D, E, F, G

3.1.1) Les procédures de l'élève A

Nous constatons que malgré le fait que les élèves soient guidés vers la distributivité dans l'exercice 2, l'élève A a utilisé une autre procédure qui a pu le rassurer puisque c'est une procédure qu'il a utilisée lors de l'exercice précédent.

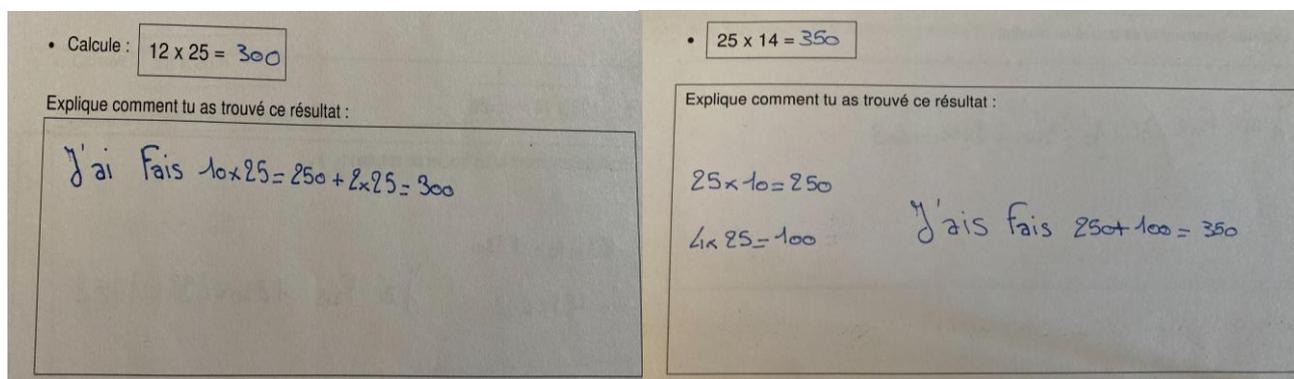


Figure 2 : Extrait de la copie de l'élève A lors de l'exercice 1 puis de l'exercice 2

3.1.2) Les procédures des élèves B et C

Malgré le fait que nous soyons en situation de calcul mental et que le calcul posé ne soit pas autorisé lors de ce temps, nous retrouvons 16 résultats de calculs ayant utilisé le calcul posé pour exprimer un résultat. Nous estimons que le calcul est posé lorsque l'élève utilise une retenue ou qu'il agit sur les chiffres au lieu d'agir sur les nombres. Nous supposons que la multiplication posée étant au cœur des apprentissages, les élèves peuvent être influencés par l'utilisation de cette technique de calcul.

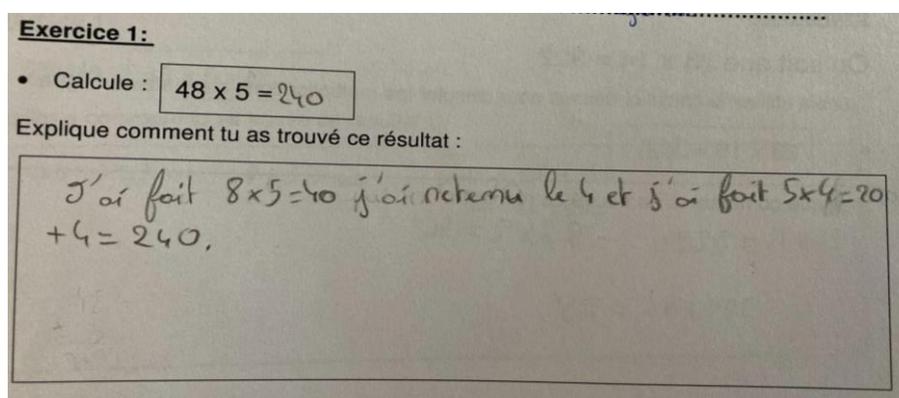


Figure 3 : Extrait de la copie de l'élève B

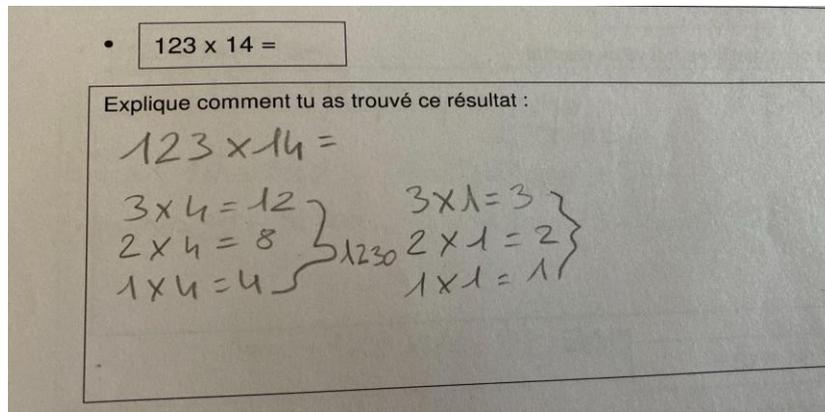


Figure 4 : Extrait de la copie de l'élève C

3.1.3) La procédure de l'élève D

Dans le premier calcul présent sur cette feuille d'exercice (48x5), on retrouve 14 élèves sur 24 qui décomposent le facteur de gauche pour donner un résultat à ce calcul. C'est la seule procédure faisant référence à la distributivité qui est utilisée ici. Les 10 autres élèves réalisent soit une multiplication posée soit utilisent l'addition itérée comme sur la copie ci-dessous.

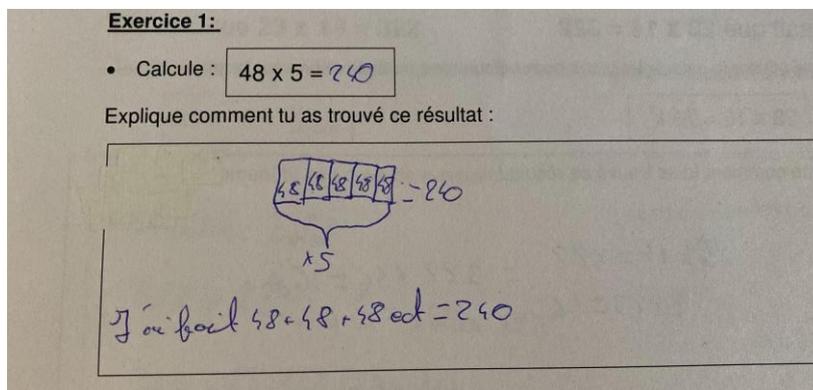


Figure 5 : Extrait de la copie de l'élève D effectuant une addition itérée

3.1.4) La procédure de l'élève E

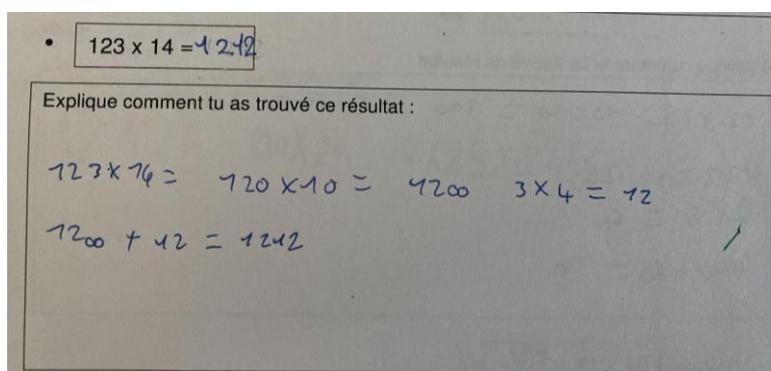
Pour les deux autres calculs du premier exercice nous avons placé le nombre 12 une fois à gauche du signe opératoire et une fois à droite pour observer si les élèves étaient capables de décomposer le nombre le plus petit à chaque fois où s'ils utilisaient le nombre qui leur semblait le plus simple à décomposer pour eux. En confondant les résultats des 2 calculs, nous trouvons 13 élèves qui décomposent le nombre de gauche et 13 élèves qui décomposent le nombre de droite peu importe la valeur du nombre. En effet seulement 7 à 8 élèves décomposent le nombre 12 et 5 à 6 élèves décomposent l'autre nombre. Ces valeurs ne sont pas assez significatives pour dire que les élèves choisissent systématiquement le plus petit nombre à décomposer ou le plus grand. En décomposant le nombre de gauche ou de droite, nous pouvons dire que les élèves ne s'appuient pas uniquement sur l'addition itérée

pour décomposer un nombre mais qu'ils agissent en fonction soit du hasard, soit car c'est un nombre pour lequel ils sont plus à l'aise.

Les 3 calculs suivants, faisant partie de l'exercice 2, amènent les élèves à utiliser la distributivité.

Pour le premier calcul, 16 élèves sur 24 ont utilisé la procédure que nous attendions et ils ont donc réussi à utiliser la propriété de la distributivité.

Pour le deuxième calcul, nous attendions une décomposition canonique du nombre menant ensuite à la distributivité, mais nous constatons à partir du tableau d'analyse que seulement 7 élèves ont utilisé la procédure que nous attendions. La majorité des autres élèves ont réalisé une fausse distributivité en faisant par exemple pour 123×14 : $120 \times 10 = 1200$ et $3 \times 4 = 12$. L'élève E a décomposé 123 en $120 + 3$ et 14 en $10 + 4$ mais son résultat est faux car elle ne calcule pas 3×10 et 4×120 . Cette erreur avait été anticipée lors de la réalisation de notre test.



• $123 \times 14 = 1242$

Explique comment tu as trouvé ce résultat :

$$123 \times 14 = 120 \times 10 = 1200 \quad 3 \times 4 = 12$$
$$1200 + 12 = 1212$$

Figure 6 : Extrait de la copie de l'élève E effectuant une fausse distributivité

3.1.5) La procédure de l'élève F

L'élève pouvait aussi partir du calcul donné : $23 \times 14 = 322$ et comme on ajoute 100 à 23 pour le calcul de 123×14 , l'élève faisait $23 \times 14 = 322$ et $322 \times 100 = 32200$. L'élève ne fait ici pas la distinction entre l'addition et la multiplication et modifie le signe pensant qu'il doit mettre un signe multiplicatif car nous sommes dans une multiplication et non une addition. L'élève au lieu de multiplier 14 par 100 multiplie le résultat par 100. Ce type d'erreur a également été démontré dans l'une des parties situées au-dessus, qui concernait les difficultés rencontrées par les élèves dans la décomposition multiplicative.

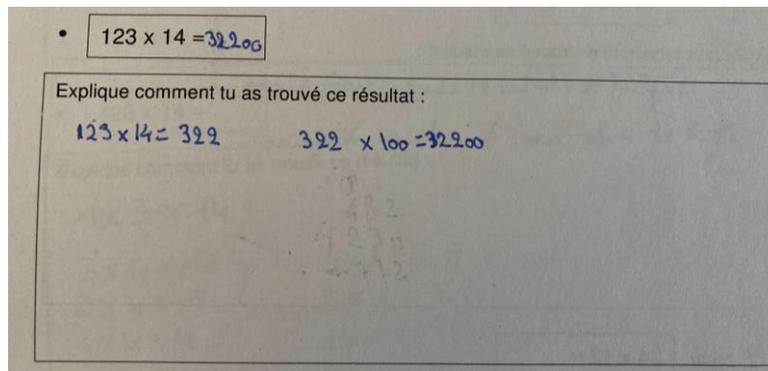


Figure 7 : Extrait de la copie de l'élève E multipliant le résultat donné par 100

3.1.6) La procédure de l'élève G

Pour le dernier calcul, un quart des élèves n'a pas eu le temps de le réaliser. Sur le reste des élèves, seulement 9 ont utilisé la procédure que l'on attendait en décomposant 25 en 23 + 2.

Les autres élèves ont majoritairement effectué une fausse distributivité en effectuant $23 \times 14 = 322$ et en multipliant le résultat par 2 et non le 14. Ce type d'erreur a également été démontré dans l'une des parties situées au-dessus, qui concernait les difficultés rencontrées par les élèves dans la décomposition multiplicative.

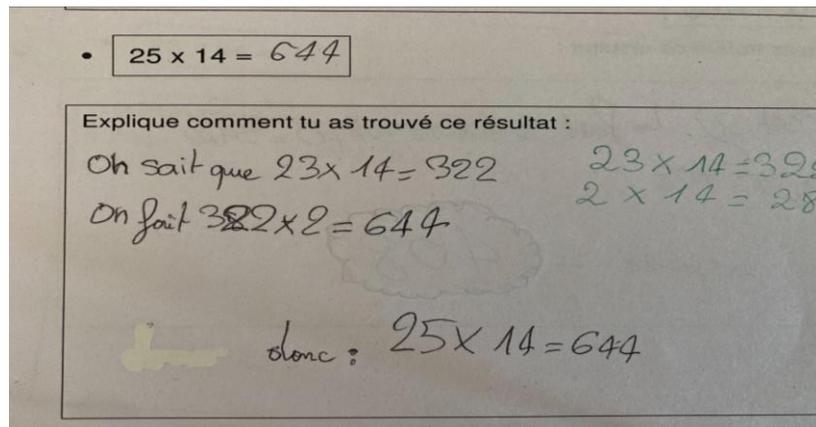


Figure 8 : Extrait de la copie de l'élève G multipliant le résultat donné par 2

Comme nous l'avons vu précédemment lors de l'analyse de la copie de l'élève A, cette élève a, quant à elle, décomposé 14 au lieu de décomposer 25 et a donc trouvé également le bon résultat mais en utilisant une autre procédure.

Nous constatons donc à l'issue de l'observation de ces résultats que les élèves connaissent différentes procédures mais qu'ils se contentent pour la plupart de conserver les procédures qu'ils connaissent déjà. Les élèves qui n'utilisent pas ou peu la distributivité dans le premier exercice rencontrent des difficultés à effectuer les calculs de l'exercice 2.

En revanche, comme nous l'avions anticipé avant la réalisation de notre test, les élèves qui utilisent la distributivité sont probablement des élèves qui ont étudié celle-ci dans les années précédentes.

3.2) Résultats et analyses des tests en CE2

3.2.1) Analyses et résultats du premier exercice

Tout d'abord pour cette classe, nous avons fait le choix d'enlever un calcul car nous savions que le test était long et que les CE2 ne pourraient pas arriver jusqu'au bout si celui-ci était composé de trop de calculs. Pour donner les nombres qui vont suivre nous nous appuyons sur la réalisation d'un tableau d'analyses de procédures des élèves de CE2 qui se trouve en annexe 4. Ce tableau comporte 8 procédures mêlant distributivité ou non distributivité. Nous avons ajouté une procédure supplémentaire par rapport au tableau effectué pour la classe de CM2 parce que nous avons trouvé une procédure supplémentaire utilisée uniquement par les élèves de CE2. Les élèves de CE2 ont donc utilisé plus de procédures que les élèves de CM2 car nous retrouvons toutes les procédures citées dans l'ensemble des copies. Nous avons donc un total de 130 calculs car nous avons 26 élèves et 5 calculs par élève. Sur ces 130 calculs, 28 n'ont pas été effectués par manque de temps de la part des élèves.

Pour le premier calcul, 48×5 , 21 élèves ont effectué la procédure que nous attendions c'est-à-dire une décomposition du nombre 48 en $40 + 8$.

En revanche, pour les calculs 2 et 3 du premier exercice, nous pouvons constater une disparité des résultats de la part des élèves. Pour le calcul de 12×25 , seulement 7 élèves décomposent le nombre à gauche du signe opératoire (12) et les autres effectuent le calcul soit en passant par le calcul de l'aire d'un rectangle comme l'élève A2 soit en décomposant les 2 nombres de part et d'autre du signe opératoire comme l'élève B2 présentés ci-dessous.

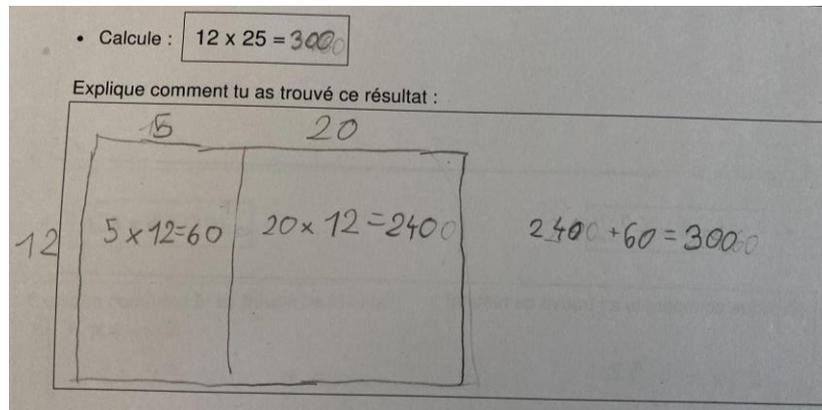


Figure 9 : Extrait de la copie de l'élève A2 passant par le calcul de l'aire d'un rectangle

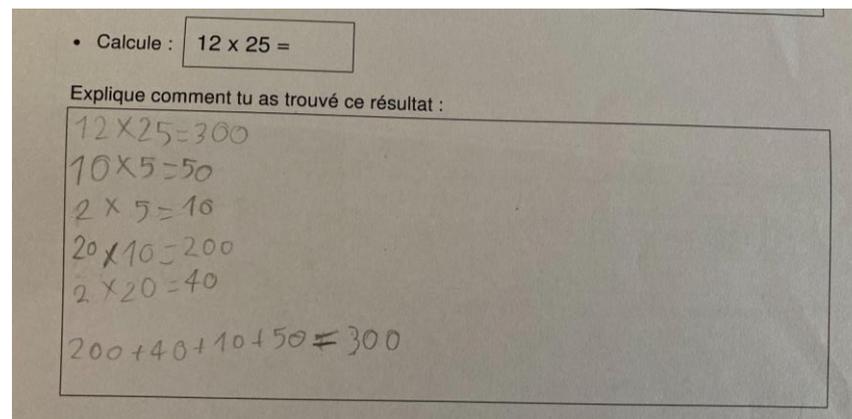


Figure 10 : Extrait de la copie de l'élève B2 effectuant une double décomposition

Pour le calcul de 34×12 , on observe les mêmes procédures de calcul mais on constate que seulement 2 élèves décomposent le nombre 12 qui est cette fois à droite du signe opératoire et 4 élèves décomposent 34. Malgré le peu d'écart entre ces deux résultats, nous pouvons supposer que le nombre 34 est un nombre compliqué pour les élèves et qu'ils ne choisissent pas directement la simplicité ce qui pourrait faire référence ici à l'addition itérée. Nous nous pencherons alors dans une prochaine partie sur comment est abordée la multiplication et comment est-elle travaillée en CE2.

A la suite de ce premier exercice, nous constatons donc que les élèves décomposent principalement le nombre à gauche du signe opératoire. Nous pouvons alors faire le lien avec notre première hypothèse qui dit que les élèves décomposent plus facilement le nombre à gauche du signe opératoire en lien avec l'addition itérée.

Nous constatons également qu'ils utilisent le calcul de l'aire d'un rectangle ce qui peut nous amener à nous demander également s'ils utilisent cette procédure en classe pour aborder la multiplication.

3.2.2) Analyses et résultats du deuxième exercice

Dans la deuxième partie du test, nous orientons les élèves vers une procédure liée à la distributivité.

Pour le premier calcul, nous constatons que 11 élèves ont effectué la procédure attendue qui était de décomposer 6 en $4 + 2$ et uniquement celle-ci. Seuls 2 élèves ont décomposé le nombre se situant à gauche du signe opératoire en $20 + 3$. C'est la procédure qui a été utilisée par l'élève C2 ci-dessous.

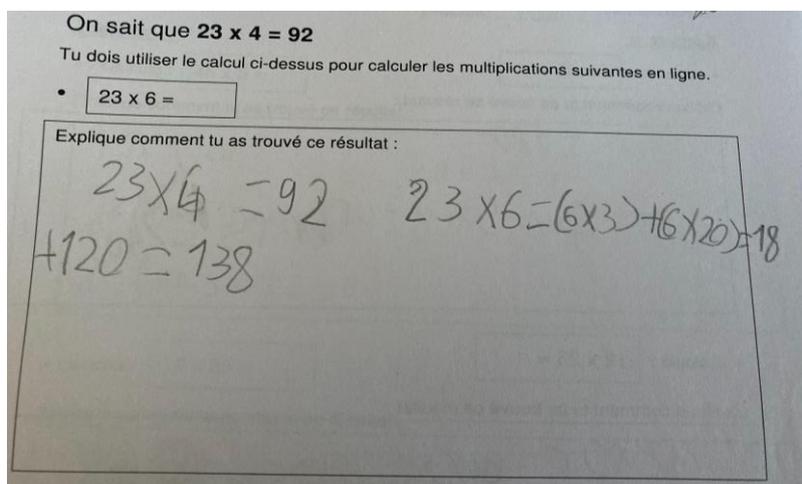


Figure 11 : Extrait de la copie de l'élève C2 décomposant le nombre 23

Les autres élèves ont soit pas répondu à la question soit, pour 5 d'entre eux, ont effectué une fausse distributivité. Ils ont, soit en partant du calcul donné, ajouté 6 au résultat soit ils ont correctement décomposé 6 en $4 + 2$ mais ils ont multiplié le résultat de 23×4 par 2 au lieu de multiplier 23×2 . C'est le cas pour les élèves D2 et E2. Cette erreur est évoquée dans la partie liée aux difficultés des élèves dans la décomposition multiplicative des nombres.

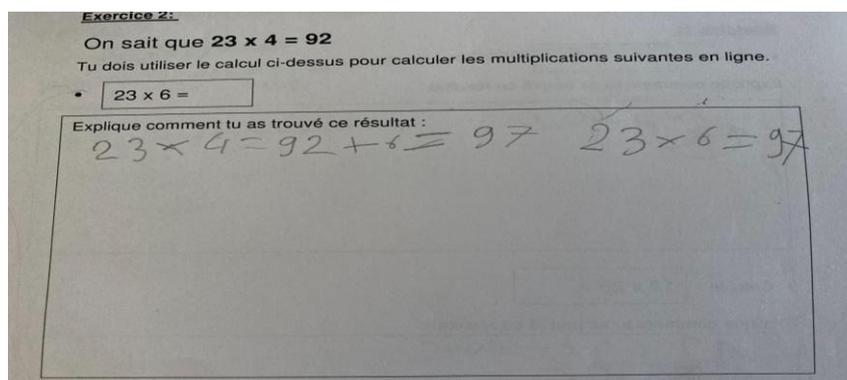


Figure 12 : Extrait de la copie de l'élève D2 ajoutant 6 au résultat

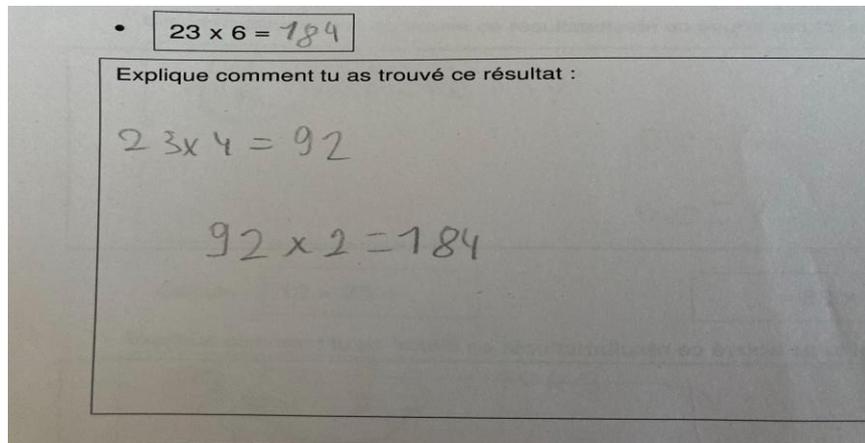


Figure 13 : Extrait d'une copie de l'élève E2 multipliant le résultat par 2

Pour le dernier calcul, 12 élèves ont réalisé une décomposition canonique pour calculer 123×4 et ils n'ont utilisé aucune autre procédure en lien avec la distributivité pour effectuer celui-ci. C'est ce que l'élève F2 a fait.

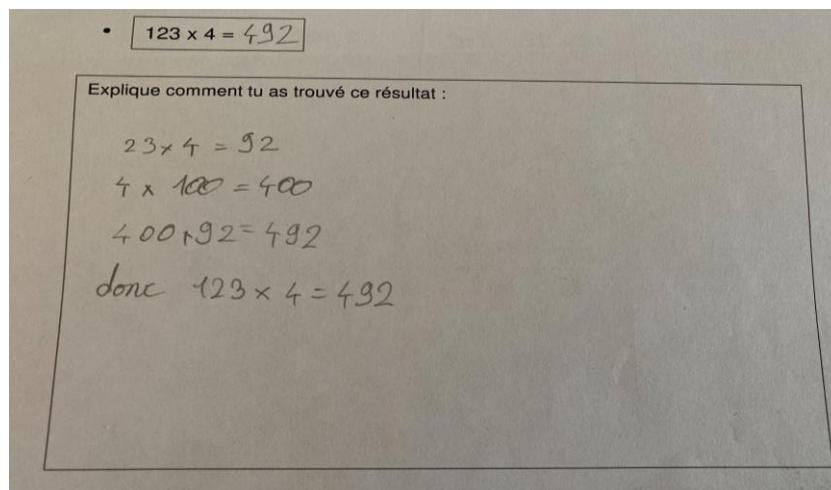


Figure 14 : Extrait de la copie de l'élève F2 réalisant une décomposition canonique

Les autres élèves ont soit effectué une fausse distributivité en multipliant le résultat de 23×4 par 100 soit ils n'ont pas effectué le calcul.

Nous constatons donc que les élèves de CE2 se focalisent sur les procédures qu'ils ont apprises auparavant et ne cherchent pas à en essayer de nouvelles. Lorsque nous leur donnons une méthode, ils l'appliquent et ne varient pas cette procédure. Les procédures libres rencontrées dans le premier exercice sont, pour la plupart, en lien avec l'addition itérée ou le calcul de l'aire d'un rectangle, deux méthodes qui permettent l'entrée dans la multiplication. Nous pouvons alors supposer que les élèves s'appuient sur leurs connaissances antérieures pour trouver les résultats aux calculs proposés. Nous verrons dans

une prochaine partie comment les manuels abordent la multiplication afin de voir si nos suppositions sont confirmées ou non.

En comparant les deux cycles, et plus particulièrement la classe de CE2 et la classe de CM2, nous constatons que les CM2 utilisent plus aisément la décomposition des nombres, qu'ils soient à gauche ou à droite du signe opératoire. Les CE2, quant à eux, restent dans la continuité de l'addition itérée et décomposent principalement le nombre à gauche du signe opératoire. Les élèves de CE2 utilisent le calcul de l'aire d'un rectangle pour trouver le résultat aux calculs comportant 2 chiffres à chacun des 2 nombres de l'opération tandis que les CM2 n'utilisent pas cette procédure. Nous constatons alors une évolution entre les élèves de CE2 et de CM2, notamment dans les procédures utilisées, où les élèves de CM2 manipulent plus la décomposition des nombres alors que les élèves de CE2 restent dans des procédures connues et données. Nous constatons également que les élèves de CE2 décomposent les 2 nombres d'un calcul donné tandis que les CM2 n'utilisent pas cette procédure. Cela pourrait confirmer que les élèves de cycle 2 possèdent moins le sens des nombres que les élèves de cycle 3 qui, eux, sembleraient prendre des décisions en fonction des nombres en jeu. Au cycle 3, nous rencontrons 16 élèves qui utilisent la multiplication posée lors de leurs calculs contre 5 en cycle 2. Nous pouvons alors supposer que les élèves de cycle 3 utilisent plus la multiplication posée car elle est au cœur des apprentissages du cycle 3.

3.3) Analyse des manuels de CE2

3.3.1) Maths au CE2 éditions ACCES

Ce manuel est découpé par périodes, c'est-à-dire en cinq périodes et possède 49 unités au total. Il semble pertinent d'analyser l'entrée dans la multiplication proposée par ce manuel, puis, voir s'il aborde la distributivité et quand. C'est ce manuel-là que l'enseignante utilise dans la classe de CE2 où l'on a fait passer le test. Il pourrait être donc intéressant de voir les différences entre ce manuel et celui de Cap Maths pour comprendre si, la réussite au test que l'on a fait passer, aurait pu dépendre du manuel choisi.

3.3.1.1) L'entrée dans la multiplication

L'entrée dans la multiplication est proposée en période 1, c'est-à-dire au début de l'année scolaire. La multiplication est abordée par la résolution de problèmes. La méthode utilisée est l'addition itérée. Au départ les élèves sont confrontés au problème suivant :

8 Résoudre des problèmes multiplicatifs (1)

✓ Je sais résoudre des problèmes en utilisant la multiplication.

Dans la salle du restaurant scolaire de l'école Jules Ferry, il y a 14 tables de 8 places. Combien y a-t-il de places au total ?

Avec l'addition
 $8+8+8+8+8+8+8+8+8+8+8+8+8+8=$

Avec la multiplication
 $14 \times 8 =$

Il y a places dans la salle du restaurant scolaire.

La multiplication est l'opération qui permet d'additionner plusieurs fois un même nombre.

Figure 15 : Maths au CE2 éditions ACCÈS, 2020, p.24.

L'élève est amené à comprendre que $14 \times 8 = 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14$. Puis, des exercices sont proposés. Dans le premier exercice, les élèves sont amenés à choisir les calculs correspondants au dessin qui leur est donné. La multiplication par le rectangle est implicitement abordée dans cet exercice.

Borre les calculs qui ne correspondent pas au dessin.

Figure 16 : Maths au CE2 éditions ACCÈS, 2020, p.24.

Cette méthode peut permettre à l'élève d'avoir une approche plus visuelle de la multiplication ce qui peut l'aider à comprendre cette notion. Puis, des exercices d'application sont proposés. Les élèves doivent appliquer la méthode de l'addition itérée sans l'aide d'un dessin. Cela permet de renforcer l'idée vue dans les pages précédentes. En effet, $3 + 3 + 3 + 3 = 5 \times 3$.

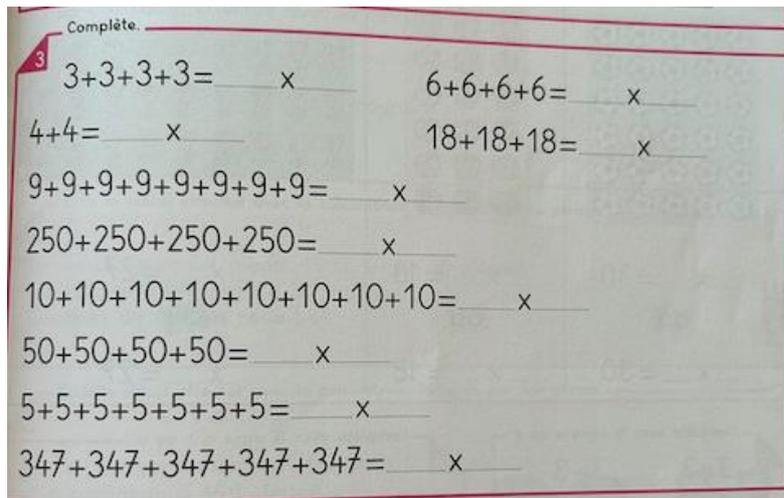


Figure 17 : Maths au CE2 éditions ACCÈS, 2020, p.25.

Ainsi, l'entrée dans la multiplication se fait par addition itérée de manière progressive : d'abord avec l'aide d'un dessin, puis de manière plus théorique.

3.3.1.2) L'entrée à la distributivité

Une fois que l'on a vu la méthode utilisée pour enseigner la multiplication, il semble être important de s'intéresser à la notion de distributivité. Ce manuel propose-t-il des calculs permettant l'utilisation de la distributivité ? Comment ce manuel amène-t-il à cette notion ? Et à quel moment de l'année ?

Dans l'unité 20, se trouvant donc en période 3, on peut retrouver dans ce manuel une page dédiée au calcul en ligne des produits. Cette notion est abordée, comme la multiplication, par la résolution d'un problème. Le problème proposé est le suivant :

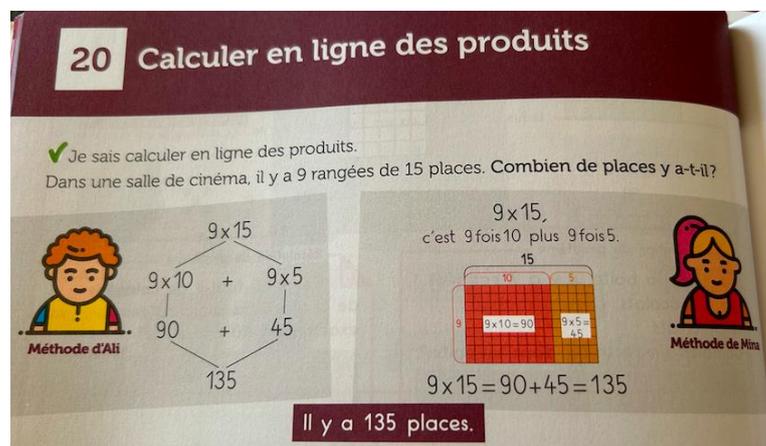


Figure 18 : Maths au CE2 éditions ACCÈS, 2020, p.64.

Cette fois-ci, la méthode est une méthode explicite car le problème est déjà résolu. Les élèves doivent donc comprendre la procédure sans l'utiliser. Ce problème est résolu de deux manières différentes. La première est plutôt théorique tandis que la deuxième est plutôt visuelle. En effet, nous pouvons voir que la technique visuelle abordée est celle des rectangles. Cela expliquerait pourquoi certains élèves l'ont utilisée lors du test : c'était une notion qu'ils avaient déjà vue. Grâce au rectangle, la décomposition du nombre semble plus simple et peut faciliter largement la compréhension des élèves. Ici, 15 est décomposé en $10 + 5$. Le nombre à décomposer est le nombre de droite ne correspondant pas à l'addition itérée, ce qui semble permettre d'éloigner les élèves de l'addition itérée.

A la suite de cette trace écrite se trouvent des exercices sur la multiplication. Les calculs sont les suivants :

a) 5×14 b) 6×18 c) 5×24 d) 32×6 e) 32×6 f) 4×234 g) 406×5

Les cinq premiers calculs mettent en jeu une multiplication d'un nombre à un chiffre par un nombre à deux chiffres. La différence est que dans les trois premiers, le nombre à décomposer se situe à droite, toujours en référence à l'addition itérée. Puis, il se situe à gauche dans les trois autres calculs suivants, ce qui complexifie progressivement l'exercice. Enfin, les deux dernières opérations sont des multiplications d'un nombre à un chiffre par un nombre à trois chiffres. Une fois le nombre à décomposer est à droite puis il est à gauche. Ainsi, l'exercice se complexifie progressivement.

La multiplication posée à un chiffre est vue, d'après le manuel, dans l'unité qui suit : l'unité 21.

Un peu plus tard dans la progression, dans l'unité 24, le calcul en ligne d'une multiplication d'un nombre à deux chiffres par un nombre à deux chiffres est abordé. Ainsi, l'élève apprend à calculer en ligne une multiplication telle que : 14×23 où 14 est décomposé en $10 + 4$. La technique des rectangles est également utilisée. Cette technique est en réalité utilisée pour expliquer la multiplication en colonne.

3.3.2) Cap Maths CE2

Ce manuel est, comme pour celui des CM2, découpé en 10 grandes unités dans lesquelles on retrouve du calcul mental et du calcul en ligne.

3.3.2.1) L'entrée à la multiplication

Il semble pertinent d'analyser l'entrée à la multiplication proposée par le manuel. Cap Maths aborde la multiplication dès la période 1. Dans la deuxième unité, on retrouve le type d'exercice suivant :

- a) $6+6+6+6 = \dots \times \dots$
- b) $8+8+8+8+8+8+8+8 = \dots \times \dots$
- c) $3 \times 15 = \dots + \dots + \dots$
- d) $7 \times 4 = \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots$

Cet exercice montre que l'entrée à la multiplication se fait par addition itérée. De plus, il renforce l'idée que, par exemple, $7 \times 4 = 4 \times 7$.

Puis, dans l'unité 6, nous retrouvons les premiers calculs faisant référence à la distributivité. Il est proposé les calculs suivants :

- a) 52×2 b) 208×4

La consigne est "Calcule avec la méthode de ton choix". L'élève peut alors utiliser l'addition itérée soit, par exemple $208 + 208 + 208 + 208$ ou bien $200 \times 4 + 200 \times 8$.

Puisque dans les unités précédentes l'addition itérée a été abordée, il semblerait peut-être plus logique que les élèves l'utilisent. Toujours dans cette unité, la multiplication posée est aussi abordée dans cette unité. Ainsi, à la fin de l'unité 6, si l'on suit la progression du manuel, l'élève connaît l'addition itérée et commence à poser en colonne les multiplications.

3.3.2.2) L'entrée à la distributivité

Dans l'unité 7, vers la fin de la progression du manuel, nous retrouvons une méthode abordant la distributivité. C'est d'ailleurs une des méthodes utilisées par certains élèves de CE2 lors du test. Le calcul suivant est proposé : 12×25 . Ici, 12 est décomposé à $10 + 2$.

B Multiplication : calcul réfléchi

→ Tu peux utiliser deux méthodes :

Méthode 1 Tu décomposes $12 = 10 + 2$

12×25 est égal à 12 fois 25.
C'est donc égal à 10 fois 25 plus 2 fois 25.
C'est donc égal à $250 + 50$.

Donc $12 \times 25 = 300$.

12×25

← 25 →

12

10

2

$10 \times 25 = 250$

$2 \times 25 = 50$

Figure 19 : Cap Maths CE2, 2016, p.86.

Il s'agit d'une méthode explicite c'est-à-dire que la technique est expliquée aux élèves et ils doivent l'appliquer sur les exercices d'entraînement proposés par l'unité, ici l'unité 7. Pour conclure, la distributivité est abordée dans ce manuel plutôt à la fin, après avoir vu l'addition itérée ainsi que la multiplication posée.

3.4) Analyse des manuels de CM2

3.4.1) Maths au CM2 éditions ACCÈS : la séance 1 de la séquence 2

Comme nous l'avons vu précédemment, l'unité 2 est composée d'une séquence de 4 séances de calcul en ligne dont 3 sont dédiées à la distributivité. Nous allons nous intéresser à la séquence proposée.

3.4.1.1) La place du nombre à décomposer

Les calculs de la séance 1 sont les suivants :

a) 28×6 b) 32×9 c) 83×7 d) 66×6

Nous pouvons constater que le nombre à décomposer se trouve dans cet exercice exclusivement à gauche. Ainsi, par exemple, $28 \times 6 = 20 \times 6 + 8 \times 6$.

Ce premier exercice semble faire référence à l'addition itérée en invitant les élèves à décomposer premièrement le facteur de gauche.

3.4.1.2) Le choix des nombres

Nous pouvons aussi constater que les multiplications proposées sont des multiplications d'un nombre à deux chiffres par un nombre à 1 chiffre. Cela simplifie le calcul. Le nombre qui possède un chiffre est un nombre dont ils ont révisé les tables juste avant d'effectuer cet exercice. Cela peut permettre aux élèves de savoir ce qu'ils doivent faire, ici le but étant de décomposer le nombre à deux chiffres pour le multiplier par un nombre connu. Pour chaque calcul, il n'y a pas de retenu ce qui permet à l'élève de se focaliser uniquement sur la décomposition du nombre. Cependant, certains calculs sont plus compliqués que d'autres comme par exemple dans 83×7 où l'élève doit savoir calculer 80×7 alors que pour le calcul de 32×9 les chiffres sont moins grands et donc plus abordables dans une multiplication.

3.4.2) Maths au CM2 édition ACCES : la séance 2 de la séquence 2

3.4.2.1) La place du nombre à décomposer

Les calculs de la séance 2 sont les suivants :

- a) 9×207 b) 7×210 c) 6×213 d) 4×306

Nous pouvons constater que le nombre à décomposer se trouve dans ces quatre calculs à droite. Ainsi, par exemple, $9 \times 207 = 9 \times 200 + 9 \times 7$. Ce manuel invite donc, dans cette séance, à l'utilisation d'une distributivité dont la décomposition du nombre se fait exclusivement à droite. Le manuel semblerait vouloir progressivement faire entrer les élèves dans la distributivité en se détachant de l'addition itérée.

3.4.2.2) Le choix des nombres

Cette fois-ci, nous pouvons constater que ce sont des multiplications d'un nombre à un chiffre par un nombre à trois chiffres. Les calculs se complexifient progressivement. Dans cette séance, nous constatons également que les nombres choisis ne font pas intervenir de retenue lors du calcul. Les nombres comportent dans cet exercice des centaines ce qui amènent de la difficulté aux élèves. Pour limiter cette difficulté, nous constatons que le choix des chiffres dans le nombre à 3 chiffres sont des petits chiffres (2,3,1,0,6). Dans le premier calcul il y a le calcul de 9×7 mais les exercices précédents de cette séance mènent à la connaissance de la table de 9 donc nous sous-entendons que l'élève est capable d'effectuer le calcul 9×7 sans difficulté.

3.4.3) Maths au CM2 édition ACCES : la séance 3 de la séquence 3

3.4.3.1) La place du nombre à décomposer

La troisième séance propose d'autres calculs et un autre type de distributivité : la distributivité par soustraction. Les calculs sont les suivants :

- a) 98×213 b) 99×306 c) 98×300 d) 198×24

Dans ces calculs, les élèves doivent passer par 100 ou 200 pour le dernier calcul. Ainsi, pour le premier calcul nous avons :

$98 \times 213 = 100 \times 213 - 2 \times 213$. Ici, le nombre à décomposer se trouve exclusivement à gauche. Pour la distributivité par soustraction, le manuel propose de décomposer exclusivement le nombre de gauche. Cela pourrait être dû à la complexité de l'exercice.

En effet, la soustraction est plus complexe pour les élèves que l'addition. Le manuel semble donc revenir sur une décomposition du nombre de gauche faisant référence à l'addition itérée, procédure connue par les élèves.

3.4.3.2) Le choix des nombres

Ici, les nombres ne sont pas choisis au hasard. Ils sont proches de 100 ou 200 et permettent principalement l'utilisation de la table de 2, table largement connue au CM2. Cela permet de simplifier considérablement le calcul.

Nous pouvons donc conclure, sur cette première observation, que le manuel invite les élèves de CM2 à décomposer parfois le nombre de droite et parfois le nombre de gauche. Cela montre aux élèves qu'il est possible de décomposer soit le nombre de droite, soit le nombre de gauche et donc il invite les élèves à se détacher de l'addition itérée dans laquelle le nombre à décomposer se trouve principalement à gauche.

Les calculs proposés dans la séance 1 et 2 semblent être plus faciles que ceux proposés dans la séance 3 car ce sont des calculs faisant appel à la distributivité par addition itérée. En revanche, le choix des nombres dans la séance 3 facilite tout de même les calculs.

Enfin, cette séquence étant située dans la première période montre bien que la distributivité est une notion déjà vue les années précédentes. Cette notion ne sera pas reprise dans le manuel au cours de l'année et ne sera pas présente dans l'unité 35 qui est une unité dédiée à la réinvestigation des compétences acquises en CM2.

3.4.4) Cap maths CM2 programmes de 2016

Nous avons pu voir, lors de la présentation de ce manuel, que la distributivité est abordée dans plusieurs unités : l'unité 3, l'unité 6 et l'unité 7. Contrairement à l'édition ACCÈS, la notion est donc abordée tout au long de l'année selon la progression du manuel.

3.4.4.1) L'unité 3

Dans l'unité 3, certains calculs se trouvant dans deux exercices différents amènent à la procédure de la distributivité.

Les calculs du premier exercice abordant la distributivité sont les suivants :

- a) 4×15 b) 6×25 c) 4×45

Ici, le nombre à décomposer se trouve à droite. Ce manuel, contrairement à celui des éditions ACCÈS, se détache de l'addition itérée dès le départ. De plus, les autres calculs présents dans ce même exercice n'abordent pas la notion de distributivité. En effet, les calculs sont

des multiplications par 2, 40, 30, 50, 60. Ainsi, la distributivité ne ferait pas l'objet d'un seul et même exercice.

Dans le deuxième exercice, les calculs sont similaires mais le nombre à décomposer se situe à gauche. Si les élèves ont appris la multiplication par l'addition itérée, il semblerait que ces calculs leur paraissent plus simples. Les calculs sont les suivants :

- a) 25×5 b) 48×5 c) 24×5 .

De plus, dans ces deux exercices la multiplication met en jeu un nombre à 2 chiffres et un nombre à 1 chiffre rendant le calcul plus simple à résoudre.

3.4.4.2) L'unité 6

Dans cette unité, on retrouve également deux exercices mais cette fois-ci dédiés entièrement à des calculs permettant l'utilisation de la propriété de distributivité comme le montre la figure ci-dessous.

Figure 20 shows two exercises, 5 and 6, from a math book. Exercise 5 is titled '5 Calcule.' and contains nine multiplication problems arranged in a 3x3 grid: a. 52×2 , b. 204×3 , c. 105×4 , d. 36×5 , e. 61×5 , f. 24×3 , g. 48×5 , h. 35×3 , i. 250×4 . Exercise 6 is titled '6 Calcule.' and also contains nine multiplication problems in a 3x3 grid: a. 16×4 , b. 102×6 , c. 75×4 , d. 99×2 , e. 99×5 , f. 15×8 , g. 75×5 , h. 15×9 , i. 120×5 .

Figure 20 : Cap Maths CM2, 2017, p.84.

Dans l'exercice 5 comme dans l'exercice 6, le nombre à décomposer se situe exclusivement à droite et s'éloigne donc du schéma de l'addition itérée.

Cette fois, la multiplication implique un nombre à deux ou trois chiffres et un nombre à 1 chiffre.

3.4.4.3) L'unité 7

Dans l'unité 7, on retrouve un exercice où l'utilisation de la distributivité s'y prête. Les calculs sont les suivants :

- a) 4×12 b) 12×21 c) 12×8 d) 13×12 e) 35×12

Ici, le nombre à décomposer est soit à droite soit à gauche ce qui complexifie légèrement l'exercice et surtout ce qui montre aux élèves que la décomposition peut se faire à gauche ou à droite. De surcroît, ici, nous avons soit une multiplication d'un nombre à 2 chiffres par un nombre à 1 chiffre soit d'un nombre à 2 chiffres par un nombre à 2 chiffres ce qui complexifie également l'exercice. Cela peut s'expliquer grâce à la temporalité de l'unité. En effet, l'unité 7 se trouvant à la fin du manuel, la résolution des multiplications par la distributivité est plus difficile qu'au début du manuel.

Pour conclure, nous avons constaté que deux manuels d'un même niveau de classe peuvent être très différents. Dans le premier manuel analysé, la distributivité est une véritable notion du manuel puisqu'elle apparaît dans le titre de la séquence 2 de calcul mental. De plus, il semblerait que cette notion soit vue comme un réinvestissement des apprentissages des années précédentes qui sera abordée uniquement en début d'année. En revanche, dans le deuxième manuel, la distributivité est couplée à d'autres types de calculs tels que $\times 10$, $\times 30$, $\times 50$ et elle est présente tout au long du manuel, donc tout au long de l'année.

Le choix d'utilisation d'un manuel pourrait alors être à l'origine d'une plus grande maîtrise de la distributivité en CM2.

Cette différence peut s'expliquer par l'année de sortie de ces manuels. Le premier est très récent puisqu'il est paru en 2022 contrairement au second qui est paru cinq ans avant, en 2017. Le premier répond donc aux attentes des programmes de 2021 alors que le second répond à celles des programmes de 2016.

Pour conclure, pour le cycle 3, le manuel choisi peut influencer la maîtrise de la distributivité. En effet, dans le premier manuel elle est une notion à part entière mais n'est abordée qu'une seule fois alors que dans le deuxième manuel, la distributivité est présente tout au long du manuel et de manière implicite.

Pour le cycle 2, l'entrée à la multiplication est la même : il s'agit de l'addition itérée.

Seulement, dans Cap Maths, la distributivité est vue au début de l'année tandis qu'elle est plutôt abordée en fin d'année dans les éditions ACCES.

Nous pouvons nous demander : Le choix du manuel ainsi que de la progression qu'il propose expliquerait-il certains écarts entre deux classes de même niveau?

4) Discussion

Nos recherches et nos divers questionnements nous ont amenés à une question de recherche faisant l'objet de notre mémoire qui est la suivante : Quelles sont les formes de distributivité utilisées en cycle 2 et en cycle 3 qui pourraient expliquer une différence d'utilisation des nombres lors de la résolution de calculs mentaux ?

A la suite de cette question de recherche, quatre hypothèses ont été formulées. Ces hypothèses ont été le fil conducteur tout au long de notre méthodologie et de notre analyse. Pour valider, ou au contraire, invalider nos hypothèses, nous avons fait passer un test dans deux classes de cycles différents : en CE2 et en CM2.

Ce test nous a permis d'observer qu'il n'y a pas de distinction significative entre l'utilisation de la distributivité au cycle 2 et au cycle 3 mais qu'en revanche, 81 % des élèves de CE2 décomposent le facteur de gauche en référence à l'addition itérée contre 58% des CM2.

Notre première hypothèse qui est que les élèves de cycle 2, en décomposant les nombres dans le calcul d'une multiplication, décomposent uniquement celui de gauche car ils font référence à l'addition itérée contrairement aux élèves de cycle 3 qui décomposent un nombre sans prêter attention à son positionnement dans la multiplication, peut être validée.

Dans le cycle 2, l'entrée dans la multiplication par l'aire du rectangle amène à la décomposition et donc à la distributivité. En effet, les deux manuels que l'on a étudiés proposent cette entrée-ci. Ils incitent donc à l'apprentissage de la décomposition canonique permettant aux élèves d'utiliser la distributivité dans le calcul mental.

Nous observons que dans les manuels de cycle 3 que nous avons étudiés, la distributivité est présente dans la progression soit tout au long de l'année soit dans une unité se situant au début du manuel donc au début de l'année. Dans le manuel ACCESS, comme nous l'avons vu précédemment, la distributivité est une véritable notion du manuel puisqu'elle apparaît dans le titre de la séquence 2 de calcul mental. Pour autant, nous n'y trouvons pas des exercices qui amènent véritablement à la distributivité. En effet, l'exercice que l'on a proposé dans notre test a amené directement les élèves à la distributivité puisqu'ils devaient obligatoirement utiliser le calcul qui leur était donné pour trouver le résultat d'un autre calcul. L'exercice a amené l'élève à la décomposition, et pas toujours à la décomposition canonique. De même pour le manuel Cap Maths, la distributivité est couplée à d'autres types de calculs tels que $\times 10$, $\times 30$, $\times 50$ et elle est présente tout au long de l'année. Elle ne fait

pas l'objet d'un seul et même exercice. Ainsi, ce manuel n'invite pas, par ses exercices, à l'utilisation de la distributivité.

Les manuels de cycle 2, par la proposition de ses exercices, incitent les élèves à utiliser la distributivité ce qui n'est pas le cas pour le cycle 3. Pourtant, le taux d'utilisation de la distributivité au cycle 2 et au cycle 3 lors de notre test, est pratiquement le même.

Notre hypothèse, qui est que les manuels de cycle 2 et de cycle 3, par la proposition d'exercices précis, incitent les élèves à utiliser la distributivité, peut être validée pour le cycle 2 mais ne peut pas l'être pour le cycle 3.

En analysant les manuels et également les tests, nous avons constaté que les nombres n'étaient jamais choisis au hasard. Tout d'abord lorsque nous avons créé le test pour les élèves de CE2 et de CM2 nous avons pris le temps de choisir les nombres afin que les élèves ne se retrouvent pas en difficulté lors d'une multiplication, pour les inciter à décomposer un nombre plus qu'un autre comme 48×5 où la décomposition du nombre 5 est moins évidente que la décomposition du nombre 48 et multiplier par 5 est une procédure simple et fréquente chez les élèves. En créant deux opérations comportant le nombre 12, nous avons souhaité voir si c'était toujours le même nombre qui était décomposé même si sa place avait changé ou si l'élève décomposait le nombre en fonction d'une place particulière.

De manière générale dans nos tests ainsi que dans les manuels, les nombres choisis sont pour la plupart des nombres pairs, ou des nombres finissant par 5.

Dans l'exercice 2 de notre test, nous avons choisi des nombres menant à une décomposition précise comme pour 23×14 dont le résultat était donné et nous avons fait varier le nombre de gauche en 25 ou 123 ou de droite en 16 en gardant toujours l'un des 2 facteurs de base. De cette façon, les élèves étaient orientés vers une décomposition précise du nombre souhaité. En choisissant cette décomposition, nous avons éloigné les élèves de la décomposition canonique afin de leur montrer que la décomposition d'un nombre ne s'arrête pas à sa décomposition canonique et que les nombres peuvent être décomposés de différentes manières. Ce principe amène à donner du sens aux nombres comme nous l'avons démontré lors des difficultés des élèves et notamment dans la partie sur la décomposition additive canonique des nombres.

Nous pouvons donc affirmer que le choix des nombres dans l'enseignement entraîne une décomposition précise des nombres, qui est notre hypothèse 3, est validée.

À la suite de nos analyses, nous avons constaté que les élèves de CM2 utilisent plus la multiplication posée que les élèves de CE2. Ce constat provient sûrement du fait que la multiplication posée est au cœur des apprentissages du cycle 3. Cependant le fait que les

élèves de cycle 3 possèdent une procédure supplémentaire par rapport aux élèves de cycle 2 ne les empêche pas d'utiliser la procédure de distributivité. Les élèves de CM2 sont capables de s'adapter et de choisir la procédure qui convient au moment souhaité. Notre hypothèse 4 qui est que les opérations posées étant vues en cycle 3 expliquent que les élèves de cycle 3 utilisent plus le calcul posé lors du calcul mental et donc moins la distributivité, peut alors être validée lorsque nous montrons que les élèves de CM2 utilisent plus la multiplication posée que les élèves de CE2. En revanche, elle ne peut pas être validée lorsqu'on dit que les élèves de cycle 3 utilisent moins la distributivité que les élèves de cycle 2.

Conclusion

Pour conclure, nos différentes recherches nous ont amené à comprendre les caractéristiques du calcul mental ainsi que sa place au sein des programmes depuis 1883. Nous nous sommes basées sur un type opératoire : la multiplication et plus particulièrement à une de ses propriétés : la distributivité.

Nos interrogations nous ont mené à notre question de recherche : “Quelles sont les formes de distributivité utilisées en cycle 2 et en cycle 3 qui pourraient expliquer une différence d’utilisation des nombres lors de la résolution de calculs mentaux ?”, fil conducteur de notre mémoire. Quatre hypothèses ont émergé à la suite de cette question et ont été validées ou invalidées grâce à la réalisation d’un test en cycle 2 et cycle 3 ainsi que l’analyse de différents manuels de ces cycles.

La numération étant au cœur des apprentissages du cycle 2, les élèves de ce cycle semblent être amenés à utiliser la décomposition canonique. Cette décomposition canonique est retrouvée dans le calcul de l’aire d’un rectangle enseignée au cycle 2. L’addition itérée étant également utilisée pour entrer dans la multiplication, les formes de distributivité les plus utilisées en cycle 2 sont alors le calcul de l’aire d’un rectangle et la décomposition du facteur de gauche faisant référence à l’addition itérée. Les élèves de CE2 utilisent de nombreuses procédures sans prêter attention aux nombres en jeu. Ils appliquent des procédures en fonction de leurs connaissances en s’éloignant de la notion du nombre. Par exemple, lorsqu’ils décomposent les 2 nombres de l’opération, ils ne font pas le choix de décomposer le nombre le plus simple pour eux ou celui qui rendra le calcul plus efficace. Pour eux, la notion de number sens est encore floue, surtout lorsque nous la comparons avec la classe de CM2 dont les élèves prennent des décisions en fonction du nombre présent.

En revanche, les élèves de cycle 3 utilisent différentes procédures lors de la réalisation de calculs mentaux et par la manière dont ils utilisent ces procédures, nous pouvons supposer qu’ils possèdent une meilleure notion du nombre. Ils donnent alors, par le choix de procédures différentes utilisées au moment voulu, le sentiment que le sens du nombre est mieux développé chez eux. À la suite de nos analyses, nous avons observé qu’un manuel de CM2 abordait la distributivité par soustraction. Les élèves ont donc le choix de diverses procédures qu’ils peuvent appliquer en fonction des nombres proposés. Ils sont donc capables d’utiliser les nombres de différentes manières en s’éloignant même de la

décomposition canonique acquise en cycle 2. Pourtant, nous avons pu remarquer au travers du test que le taux de réussite dans l'utilisation de la distributivité est quasiment le même dans les 2 cycles. Comme le dit Butlen (2007) trop de procédures chez un élève peut le mettre en difficulté car il ne parvient pas à choisir laquelle il doit utiliser pour effectuer un calcul mental. Cela peut expliquer la diversité des procédures retrouvées dans les résultats du test et particulièrement les résultats s'éloignant de la propriété de distributivité chez les CM2 tels que la multiplication posée.

À la suite de notre travail, nous pouvons nous demander comment est enseignée la notion de number sense à la fin du cycle 1 et au début du cycle 2 amenant à la décomposition des nombres, essentielle dans la propriété de distributivité.

Bibliographie

- Artigue, M. (2004). L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives, *IREM*, 54, 23-39, <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WR/IWR04001/IWR04001.pdf>.
- Boule, F. (1998). Les étapes du calcul mental, *Grand N*, 62, 15-33, https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/62n3_1562313474918-pdf.
- Butlen, D., Charles-Pezard, M. (2000). Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège, *IREM*, 41, 5-24, <https://publimath-test.irem.univ-mrs.fr/numerisation/WR/IWR00029/IWR00029.pdf>.
- Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique*. Presses universitaires de Franche-Comté.
- Butlen, D., Charles-Pezard, M. (2007). Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté : le calcul mental entre sens et technique, *Grand N*, 79, 7-32, https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/79n2_1554796874332-pdf.
- Chesne, J.-F. (2004). *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental*, Thèse de doctorat, Université de Paris 7 - Denis de Diderot, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01081505/document>.
- Clivaz, S. (2016). Connaissances mathématiques des enseignants et enseignement de l'algorithme de la multiplication, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 36(2), <https://revue-rdm.com/2016/connaissances-mathematiques-des/>.
- Constantin, C. (2017). La distributivité : quelles connaissances pour enseigner la

multiplication à l'école primaire? *Grand N*, 100, 105-130, https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/100n5_1572699357829-pdf.

De Kocker, N., Grewis, A., Maurin, C., Wozniak, F. (2007). Les enjeux d'un enseignement du calcul mental à l'école. <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WO/TWO08017/TWO08017.pdf>

Fischer, J.-P. (1987). L'automatisation des calculs élémentaires à l'école, *Revue française de pédagogie*, volume 80, 17-24, https://www.persee.fr/doc/AsPDF/rfp_0556-7807_1987_num_80_1_1471.pdf.

Shalby, A. (2015). Le sens du nombre : un concept difficile à définir, mais facile à reconnaître, *Jdm*, 1, 85-102, <http://myismail.net/docs/crmef/jdm/revue/2015/Shalby.pdf>.

Sood, S. (2009). Teaching Number Sense: Examining the Effects of Number Sense Instruction on Mathematics Competence of Kindergarten Students. *Research in Philosophy of Special Education*. Lehigh University, <https://www.arcjournals.org/pdfs/ijhsse/v2-i2/2.pdf>.

Annexes

Annexe 1 : Test et procédures attendus chez les élèves de CM2

Calcul mental

Consigne orale de la première partie du test :

“Nous allons vous distribuer une feuille sur laquelle il y a plusieurs calculs. On vous demande de le résoudre sans les poser car je vous le rappelle, nous commençons la séance de calcul mental. Dans le plus grand cadre, vous devez expliquer comment vous avez fait pour trouver ce résultat. Vous pouvez faire une phrase, expliquer avec des nombres, vous expliquez de la manière que vous voulez votre calcul.”

Temps requis pour cette première partie : 10 min (Consigne + temps laissé aux élèves)

Exercice 1:

- Calcule :

$$48 \times 5 = 40 \times 5 + 5 \times 8 = 240$$

Explique comment tu as trouvé ce résultat :

J'ai décomposé 48 en 40 + 8 et j'ai multiplié ces 2 nombres par 5.

Les autres procédures attendues par les élèves:

$5 \times 8 + 5 \times 4 = 60$, ici les élèves auront utilisé la fausse distributivité.

$50 \times 5 - 2 \times 5 = 240$, ici les élèves auront utilisé la distributivité par la soustraction.

$5 \times 8 = 40$ je pose 0, je retiens 4. $5 \times 4 = 20$ + la retenue "4" = 24 On obtient donc 240.

Ici, l'élève aura posé le calcul, nous ne serons plus dans du calcul mental.

- Calcule :

$$12 \times 25 = 25 \times 10 + 25 \times 2 = 300$$

Explique comment tu as trouvé ce résultat :

J'ai décomposé 12 en $10 + 2$ et j'ai multiplié ces 2 nombres par 25.

Les autres procédures attendues par les élèves

$$100 \times 12 = 1200 \text{ et } 1200 : 4 = 300$$

$12 \times 20 + 12 \times 5 = 240 + 5 \times 2 + 10 \times 5 = 240 + 10 + 50 = 300$, cette procédure utilise à la fois la distributivité mais elle demande plus d'intermédiaires ce qui l'a rend plus complexe.

$$12 \times 50 : 2 = 600 : 2 = 300$$

$12 \times 5 + 12 \times 2 = 60 + 24 = 84$, les élèves auront utilisé la fausse distributivité.

Certains vont également poser la multiplication.

- Calcule :

$$34 \times 12 = 34 \times 10 + 34 \times 2 = 340 + 68 = 408$$

Explique comment tu as trouvé ce résultat :

Ici, la difficulté principale est le changement de centaine.

J'ai décomposé 12 en $10 + 2$ et j'ai multiplié ces deux nombres par 34.

Les autres procédures utilisées par les élèves:

$$34 \times 1 + 34 \times 2 = 34 + 68 = 102, \text{ ils auront utilisé la fausse distributivité.}$$

Exercice 2:

Consigne orale de la deuxième partie du test : “ A présent nous allons vous donner une deuxième feuille sur laquelle il y a aussi des calculs. Comme pour la première partie, vous devez chercher les résultats des calculs sans poser la multiplication. Pour vous aider, nous vous donnons le résultat du calcul de 23×16 . Il faut que vous utilisiez **obligatoirement** ce

résultat pour résoudre les calculs. N'oubliez pas d'expliquer comment vous avez trouvé le résultat.”

Temps requis pour la deuxième partie du test : 10 à 15 min en fonction de la rapidité des élèves. On prévoit 2 calculs bonus pour les élèves les plus rapides afin qu'ils n'attendent pas les autres élèves.

A la fin de cette partie, les feuilles seront ramassées et nous amènerons une correction orale pour les 3 calculs de la dernière partie. Nous relèverons les feuilles avant afin que les élèves ne modifient ni leurs réponses ni leurs explications.

On sait que $23 \times 14 = 322$. A l'aide de ce résultat, cherche les résultats des calculs suivants :

- $23 \times 16 = 23 \times 14 + 23 \times 2$
 $= 322 + 46$
 $= 368$

Explique ton raisonnement

Les élèves peuvent faire :

$23 \times 14 + 2 = 322 + 2 = 324$ Cette procédure est erronée.

$20 \times 16 + 3 \times 16 = 320 + 48 = 368$

$23 \times 10 + 23 \times 6 = 230 + 138 = 368$

Ils peuvent poser la multiplication

$23 \times 14 \times 2 = 644$ Mixte de la décomposition multiplicative et additive. Procédure erronée

- $123 \times 16 = 100 \times 16 + 23 \times 16 = 1600 + 368 = 1968$

Explique ton raisonnement

J'ai décomposé 123 en $100 + 23$, j'ai multiplié ces deux nombres par 16 et j'ai additionné les deux résultats.

$23 \times 16 + 100 = 368 + 100 = 468$. Cette procédure est erronée.

$(100 + 20 + 3) \times 16 = 100 \times 16 + 20 \times 16 + 3 \times 16 = 1600 + 320 + 48 = 1968$.

- $25 \times 14 = 23 \times 14 + 2 \times 14 = 350$

Explique ton raisonnement

J'ai décomposé 25 en $23 + 2$. J'ai ensuite fait $23 \times 14 + 2 \times 14$.

$14 \times 100 : 4 = 1400 : 4 = 350$, est la méthode qui paraît la plus simple mais qui ne correspond pas à ce qui est demandé dans la consigne.

Annexe 2 : Test et procédures attendus en classe de CE2:

Calcul mental

Consigne orale de la première partie du test : “Nous allons vous distribuer une feuille sur laquelle il y a plusieurs calculs. On vous demande de le résoudre sans les poser car je vous le rappelle, nous commençons la séance de calcul mental. Dans le plus grand cadre, vous devez expliquer comment vous avez fait pour trouver ce résultat. Vous pouvez faire une phrase, expliquer avec des nombres, vous expliquez de la manière que vous voulez votre calcul.”

Temps requis pour cette première partie : 10 min (Consigne + temps laissé aux élèves)

Exercice 1:

- Calcule :

$$48 \times 5 = 40 \times 5 + 5 \times 8 = 240$$

Explique comment tu as trouvé ce résultat :

J'ai décomposé 48 en $40 + 8$ et j'ai multiplié ces 2 nombres par 5.

Les autres procédures attendues par les élèves:

$5 \times 8 + 5 \times 4 = 60$, ici les élèves auront utilisé la fausse distributivité.

$50 \times 5 - 2 \times 5 = 240$, ici les élèves auront utilisé la distributivité par la soustraction.

$5 \times 8 = 40$ je pose 0, je retiens 4. $5 \times 4 = 20$ + la retenue “4” = 24 On obtient donc 240.

Ici, l'élève aura posé le calcul, nous ne serons plus dans du calcul mental.

- Calcule :

$$12 \times 25 = 25 \times 10 + 25 \times 2 = 300$$

Explique comment tu as trouvé ce résultat :

J'ai décomposé 12 en $10 + 2$ et j'ai multiplié ces 2 nombres par 25.

Les autres procédures attendues par les élèves

$$100 \times 12 = 1200 \text{ et } 1200 : 4 = 300$$

$12 \times 20 + 12 \times 5 = 240 + 5 \times 2 + 10 \times 5 = 240 + 10 + 50 = 300$, cette procédure utilise à la fois la distributivité mais elle demande plus d'intermédiaires ce qui l'a rend plus complexe.

$$12 \times 50 : 2 = 600 : 2 = 300$$

$12 \times 5 + 12 \times 2 = 60 + 24 = 84$, les élèves auront utilisé la fausse distributivité.

Certains vont également poser la multiplication.

- Calcule :

$$12 \times 14 = 14 \times 10 + 14 \times 2 = 140 + 28 = 168$$

Explique comment tu as trouvé ce résultat :

J'ai décomposé 12 en $10 + 2$ et j'ai multiplié ces deux nombres par 14 et j'ai fini par une addition.

$10 \times 12 + 4 \times 12 = 120 + 48 = 168$, ici les élèves auront décomposé le facteur 14 et non pas le facteur 12

Ces 2 nombres rapprochés nous permettent de voir quel facteur l'élève décompose. En fonction du facteur qu'ils décomposent on pourra répondre à l'hypothèse 1 qui est : les élèves en décomposant les nombres dans un calcul, décomposent uniquement celui de droite car ils font référence à l'addition itérée.

Exercice 2:

Consigne orale de la deuxième partie du test : “ A présent nous allons vous donner une deuxième feuille sur laquelle il y a aussi des calculs. Comme pour la première partie, vous devez chercher les résultats des calculs sans poser la multiplication. Pour vous aider, nous vous donnons le résultat du calcul de 23×16 . Il faut que vous utilisiez **obligatoirement** ce résultat pour résoudre les calculs. N’oubliez pas d’expliquer comment vous avez trouvé le résultat.”

Temps requis pour la deuxième partie du test : 10 à 15 min en fonction de la rapidité des élèves. On prévoit 2 calculs bonus pour les élèves les plus rapides afin qu’ils n’attendent pas les autres élèves.

A la fin de cette partie, les feuilles seront ramassées et nous amènerons une correction orale pour les 3 calculs de la dernière partie. Nous relèverons les feuilles avant afin que les élèves ne modifient ni leurs réponses ni leurs explications.

On sait que $23 \times 4 = 92$. A l’aide de ce résultat, cherche les résultats des calculs suivants

- $23 \times 6 = 23 \times 4 + 23 \times 2$
 $= 92 + 46$
 $= 138$

Explique ton raisonnement

Possibilité d’utiliser des schémas

Les élèves peuvent faire :

$23 \times 6 + 2 = 138 + 2 = 140$ Cette procédure est erronée.

$20 \times 8 + 3 \times 8 = 160 + 24 = 184$

- $123 \times 4 = 100 \times 4 + 23 \times 4 = 400 + 92 = 492$

Explique ton raisonnement

J'ai décomposé 123 en $100 + 23$, j'ai multiplié ces deux nombres par 4 et j'ai additionné les deux résultats.

$23 \times 6 + 100 = 138 + 100 = 238$. Cette procédure est erronée.

$(100 + 20 + 3) \times 6 = 100 \times 6 + 20 \times 6 + 3 \times 6 = 600 + 120 + 18 = 738$.

Annexe 3 : Tableau d'analyses des procédures des élèves de CM2

| Critères | Sous-critères | | | | | | | TOTAL / 144 |
|--------------------|------------------------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------|-------------|
| | Procédures | Calcul 1 48x5 | Calcul 2 12x25 | Calcul 3 34x12 | Calcul 4 23x16 | Calcul 5 123x14 | Calcul 6 25x14 | |
| Distributivité | Décomposition du facteur de gauche | 14 | 8 | 5 | | | 9 | 36 |
| | Décomposition du facteur de droite | | 6 | 7 | 16 | 2 | 1 | 32 |
| | Décomposition canonique | | | | | 7 | | 7 |
| | Calcul de l'aire d'un rectangle | | | | | | | 0 |
| | | | | | | | | 75 |
| Non distributivité | Addition itérée | 3 | 2 | | 2 | | 1 | 8 |
| | Multiplication posée | 6 | 5 | 3 | | 2 | | 16 |
| | Fausse ditributivité | | 2 | 4 | 6 | 10 | 8 | 30 |
| | non fait ou autres procédures | 1 | 1 | 5 | | 3 | 5 | 15 |
| | | | | | | | | 69 |

Annexe 4 : Tableau d'analyses des procédures des élèves de CE2

| Critères | Sous-critères | | | | | | TOTAL / 130 |
|--------------------|------------------------------------|------------------|-------------------|-------------------|------------------|-------------------|-------------|
| | Procédures | Calcul 1 48x5 | Calcul 2 12x25 | Calcul 3 34x12 | Calcul 4 23x6 | Calcul 5 123x4 | |
| Distributivité | Décomposition du facteur de gauche | 21 | 7 | 4 | 2 | | 34 |
| | Décomposition du facteur de droite | | 1 | 2 | 11 | | 14 |
| | Décomposition canonique | | | | | 12 | 12 |
| | Calcul de l'aire d'un rectangle | | 4 | 3 | | | 7 |
| | Décomposition des 2 facteurs | | 4 | 5 | | | 9 |
| | | | | | | | 76 |
| Non distributivité | Addition itérée | | | | | | 0 |
| | Multiplication posée | 3 | 1 | 1 | | | 5 |
| | Fausse ditributivité | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 21 |
| | Non fait ou autres procédures | 1 | 4 | 6 | 8 | 9 | 28 |
| | | | | | | | 54 |