



HAL
open science

Introduction de la division posée au cycle 3 : articulation entre langage, manipulation et algorithmes de la division posée

Marjorie Flamme, Julie Lienard

► To cite this version:

Marjorie Flamme, Julie Lienard. Introduction de la division posée au cycle 3 : articulation entre langage, manipulation et algorithmes de la division posée. Education. 2023. dumas-04576888

HAL Id: dumas-04576888

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-04576888>

Submitted on 15 May 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0
International License



**MASTER MEEF mention 1er degré
« Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation »
Mémoire de 2^{ème} année
Année universitaire 2022 - 2023**

**INTRODUCTION DE LA DIVISION POSEE AU CYCLE 3 :
ARTICULATION ENTRE LANGAGE, MANIPULATION ET
ALGORITHME DE LA DIVISION POSEE**

**Marjorie FLAMME
Julie LIENARD**

Directrice du mémoire : Céline CONSTANTIN - HELIOT
Assesseur : Céline DALARD

Soutenu le 18/04/2023

Résumé

Ce mémoire de recherche s'intéresse à l'enseignement de la division posée au cycle 3, notamment à l'introduction de la technique usuelle du calcul posée. L'intérêt porté à l'histoire de la division ainsi qu'à son enseignement ont permis de retracer son évolution (Guet). Par ailleurs, la compréhension d'un ancien algorithme utilisé jusqu'à l'adoption du système métrique, la méthode Galley (aussi appelée division en galère), éclaire sur l'algorithme actuel de la division posée. Seulement, bien que les modifications subies par la technique aient tenté de la simplifier, la division est à l'origine de bon nombre de difficultés chez les élèves (Brousseau). Alors que certaines résistances sont inhérentes à l'application de l'algorithme et au manque de sens que les apprenants lui octroient, d'autres sont directement liées aux malentendus langagiers (Boulet). Les résultats extraits de deux séances menées après d'une classe de cours moyen première année (CM1), s'appuyant sur des analyses *a priori* et *a posteriori*, portent sur l'articulation entre le langage, la manipulation et l'algorithme de la division posée.

Mots-clés : Division - Algorithme - Méthode Galley - Division en galère - Langage - Manipulation

Abstract

This research focuses on the teaching of posed division in cycle 3, particularly the introduction of the usual technique of posed calculation. The interest for the history of division as well as for its teaching has allowed to retrace his evolution (Guet). Furthermore, the comprehension of an old algorithm used until the adoption of the metric system, the Galley method (also called galley division), sheds light on the current algorithm of posed division. However, although modifications to the technique have attempted to simplify it, the division is at the origin of many difficulties for pupils (Brousseau). While some of the resistance is inherent to the application of the algorithm and the lack of sense meaning that learners attribute to it, others are directly linked to language misunderstandings (Boulet). The extracted results from of two sessions carried out with a class of CM1, based on *a priori* and *a posteriori* analyses, concern the articulation between language, manipulation and the algorithm of the division.

Keywords : Division - Algorithm - Galley method - Galley division - Language - Manipulation

Remerciements

Nous tenons avant tout à remercier Céline Constantin-Héliot, notre directrice de mémoire, pour son accompagnement tout au long de ces deux années. L'engouement prêté à notre sujet ainsi que les nombreux conseils reçus ont été porteurs.

Un grand merci également à Céline Dalard d'avoir accepté de faire partie du jury pour la soutenance de notre mémoire.

Nous souhaitons également adresser nos remerciements à Geneviève Brunot, directrice des études et responsable du site de la faculté d'éducation de Nîmes, pour avoir fait le nécessaire afin que nous puissions réaliser à temps nos interventions en classe.

Nous voulons également adresser nos remerciements à la circonscription d'accueil pour avoir accédé à notre requête d'interventions en classe. De même, nous ne saurions assez remercier enseignants et élèves ayant pris part à cette recherche.

Pour finir, une pensée est adressée aux étudiants de la CRT pour avoir suivi l'avancée de notre travail et qui à plusieurs reprises ont également soulevé des questionnements pertinents.

Table des matières

Introduction	9
1. Cadre théorique.....	11
1.1 L'évolution de la division posée.....	11
1.1.1 Histoire de la division	11
1.1.2 Comprendre un ancien algorithme : la méthode Galley.....	11
1.1.3. Comprendre l'algorithme de la division posée actuel.....	15
1.1.3.1 Distinction entre concept de la division, et algorithme de la division.	18
1.2 Comparer deux algorithmes de division posée.....	19
1.2.1 Identifier des critères de comparaison	19
1.2.2 Comparaison de la méthode Galley et l'algorithme de la division posée actuel	20
1.3 Les divisions rencontrées à l'école élémentaire	22
1.3.1 Distinction entre division euclidienne et division exacte.....	22
1.3.1.1 Division-partition et division-quotition.....	23
1.3.2 Le langage accompagnant l'algorithme de la division posée	23
1.4 La division dans un contexte de partage.....	25
1.4.1 Les situations de partage.....	25
1.4.2 Les activités de partage.....	26
1.5 Les difficultés intervenant dans l'algorithme de la division posée	27
1.5.1 Enquête CEDRE (Cycle des Évaluations Disciplinaires Réalisées sur Échantillons).....	29
1.6 Problématique et hypothèses	31
2. Méthode.....	34
2.1 Cadrage expérimental	34
2.1.1 Ancrage de la situation d'apprentissage dans les programmes officiels.....	34
2.1.2 Choix du manuel	35
2.1.3 Choix de la classe.....	35
2.1.4 Présentation de l'échantillon.....	35
2.1.5 Recueil des données	36
2.1.5.1 La captation vidéo	36
2.1.5.2 Les fiches élèves.....	36
2.1.5.3 Les photographies des productions	36
2.1.6 Choix des dispositifs.....	36
2.1.7 Choix de l'organisation des activités	37

2.1.8 Choix de la dénomination des étiquettes.....	37
2.1.9 Choix des nombres de la séance 1	37
2.1.10 Choix des nombres de la séance 2	38
2.1.11 Réalisation des mises en commun.....	40
2.2 Analyse a priori de la situation d'apprentissage	40
2.2.1 Séance 1	41
2.2.1.1 La situation de partage	41
2.2.1.2 Tableau d'organisation des données.....	42
2.2.2 Séance 2	44
2.2.2.1 La situation de partage	44
2.2.2.2 Introduction de la technique usuelle de calcul	44
2.2.3 Procédures attendues.....	45
2.3 Analyse a posteriori de la situation d'apprentissage.....	46
2.3.1 Les situations de partage impliquant des manipulations.....	47
2.3.2 Vérifications après réalisation du partage.....	50
2.3.3 De la manipulation vers l'algorithme écrit de la division posée.....	51
2.3.4 Introduction progressive de la technique usuelle de calcul.....	53
2.3.5 La place du discours.....	55
Résultats et discussion.....	57
Limites et intérêts	60
Conclusion.....	62
Bibliographie	63

Table des figures

Figure 1. Livre d'arithmétique de François Estienne Martelly (1736) I.N.R.P Musée national de l'éducation, Rouen, Mont-Saint-Aignan.	12
Figure 2. Présentation de l'algorithme de division posée d'après la méthode Galley.....	13
Figure 3. Première étape de l'algorithme de division posée d'après la méthode Galley.....	13
Figure 4. Deuxième étape de l'algorithme de division posée selon la méthode Galley.	14
Figure 5. Intégralité de l'algorithme de division posée d'après la méthode Galley.	14
Figure 6. Illustration de la multiplication correspondant à la vérification de l'algorithme de division posée d'après la méthode Galley.	15
Figure 7. Première boucle de l'algorithme de la division posée de la division de 642 par 16.	17
Figure 8. Deuxième boucle de l'algorithme de la division posée de la division de 642 par 16.	17
Figure 9. Première boucle de l'algorithme de la division posée de 642 par 16 en commençant par la droite.....	18
Figure 10. Poursuite de l'algorithme de la division posée de 642 par 16 en commençant par la droite.....	18
Figure 11. Discours adjoint à la division employant le terme « rentre ».....	24
Figure 12. Discours adapté à la division dans le sens de la mesure.	24
Figure 13. Discours adapté à la division dans le sens du partage.....	25
Figure 14. Quotient de 0 dans le cas de la division euclidienne.....	28
Figure 15. Quotient de 0 dans le cas de la division exacte.....	29
Figure 16. Erreur de répertoire multiplication dans la première boucle de l'algorithme.	30
Figure 17. Erreur de répertoire soustractif dans la deuxième boucle de l'algorithme.....	30
Figure 18. Omission de la virgule dans le calcul du quotient.....	31
Figure 19. Ajout d'un zéro après positionnement de la virgule.....	31
Figure 20. Division euclidienne de 583 par 4.....	39
Figure 21. Identification des chiffres similaires dans la division posée de 583 par 4.	40
Figure 22. Tableau proposé dans les travaux de recherche de Coquand Mise en place de l'algorithme de la division au CM1 (1977).	42
Figure 23. Tableau donné aux élèves inspiré de l'article de Coquand (1977).....	43
Figure 24. Tableau donné aux élèves inspiré de l'article de Coquand (1977) étant complété.	43
Figure 25. Division posée avec quotient sous forme d'addition.	45
Figure 26. Disposition des étiquettes en lignes.	47
Figure 27. Organisation par groupements de dix étiquettes de même unité de numération.....	48

Figure 28. Organisation par groupement d'étiquettes d'une même unité de numération.	48
Figure 29. Disposition respectant l'ordre des unités de numération dans chaque part.	49
Figure 30. Disposition aléatoires des unités de numération dans chaque part.	49
Figure 31. Vérification des valeurs trouvées à l'aide d'une addition posée.	50
Figure 32. Réalisation correcte de l'algorithme de la division posée avec erreurs liées au positionnement de certains nombres et au trait soustractif.	52
Figure 33. Inscription de zéros jusqu'au chiffre des unités.	54
Figure 34. Verbatim mise en commun Séance 1 activité 3.	54
Figure 35. Verbatim mise en commun Séance 2 activité 2.	55
Figure 36. Verbatim institutionnalisation Séance 2 activité 1.	56

Table des annexes

Annexe 1 - Séance proposée par Cap Maths (unité 8, apprentissage 4).....	64
Annexe 2 - Fiche de préparation séance 1.....	65
Annexe 3 - Fiche de préparation séance 2.....	69
Annexe 4 - Réalisation du partage équitable de 413 étiquettes entre 3 joueurs.....	72
Annexe 5 - Réalisation du partage équitable de 583 étiquettes par 4 joueurs.....	75
Annexe 6 - Grille d'analyse vierge.....	78
Annexe 7 - Verbatims séance 1.....	79
Annexe 8 - Verbatims séance 2.....	85
Annexe 9 - Grilles d'analyses complétées.....	88

Introduction

Les apprentissages, qu'ils soient scolaires ou non, nécessitent du temps permettant la découverte, l'appropriation et l'intégration de la nouvelle notion par l'apprenant. En conséquence, il est nécessaire d'accorder une durée suffisante aux processus d'apprentissage, mais aussi de les échelonner.

L'école primaire, du domaine acquérir les premiers outils mathématiques au champ disciplinaire des mathématiques, offre l'occasion aux élèves de développer des compétences en calcul. Ainsi, tout au long des 3 cycles de l'école, puis plus tard au cycle 4, une progressivité des apprentissages permet d'appréhender tous les aspects du calcul, en passant par le calcul mental, en ligne, posé, mais aussi par le calcul instrumenté. Par ailleurs, toutes les formes de calcul s'appuient sur des connaissances de faits numériques mais parfois aussi sur d'autres opérations. Cela est d'autant plus valable pour la division.

Bien que les élèves soient confrontés dès l'école maternelle à des activités de partage s'apparentant à des situations préparatoires à la division, la division posée est la dernière des quatre opérations à être enseignée à l'école élémentaire. En effet, l'introduction de l'algorithme de calcul est un des objectifs du cycle 3, particulièrement de la classe de cours moyen première année (CM1). Ce constat est à l'origine de plusieurs interrogations. En effet, il nous a amené à nous intéresser aux raisons faisant que la division posée est systématiquement découverte après l'addition, la soustraction ainsi que la multiplication. Plus spécifiquement, nous nous sommes aussi questionnées sur les savoirs nécessaires à la réalisation de la technique usuelle de calcul et à la manière dont ils sont construits.

Par ailleurs, afin que les élèves abordent avec confiance l'algorithme de la division, un enseignement explicite doit lui être dédié afin de faciliter l'institution du sens. Ainsi, l'intérêt porté à la construction du sens nous a amené, au fil de nos échanges, à nous intéresser au langage employé lors de l'enseignement de la technique usuelle de calcul ainsi qu'à l'intérêt d'avoir recours à la manipulation lors de l'introduction de la notion.

L'intérêt porté à la division ainsi que l'ensemble des lectures effectuées nous ont progressivement permis d'aboutir à notre question de recherche : **Comment l'articulation entre le langage, la manipulation et l'algorithme de la division posée participe à la construction du sens chez les élèves lors d'une séance d'introduction ?**

En vue de répondre à cette question de recherche, une première partie consacrée à l'enseignement du concept et de l'algorithme de la division posée permet d'appréhender les évolutions qu'a subi l'opération. En conséquence, l'étude d'un ancien algorithme ainsi que de celui que nous utilisons actuellement en France en témoigne. Dans une section dédiée, ces deux algorithmes sont confrontés grâce à l'identification de critères de comparaisons. Ensuite, nous verrons plus spécifiquement les divisions rencontrées par les élèves de l'école élémentaire puis le langage utilisé lors de la pose de l'opération. Une partie est exclusivement dédiée à la contextualisation de la division au travers des situations et activités de partages. L'intérêt porté aux difficultés des élèves permet de nous éclairer sur les résistances auxquelles ils se confrontent lors de l'application de l'algorithme de la division posée. L'enquête CEDRE (Cycle des Évaluations Disciplinaires Réalisées sur Échantillons) constitue un apport majeur. Finalement, s'en suit l'annonce de la question de recherche ainsi que des hypothèses émises. Une seconde partie dédiée à la méthode de notre recherche permet d'avancer les choix effectués pour réaliser le recueil de données. Dans le même temps, une attention est portée aux analyses *a priori* et *a posteriori* de l'expérimentation. Suite à cela, dans une troisième section, nous aurons l'occasion d'apprécier les résultats ainsi que de les discuter au regard de la littérature. Finalement, nous présenterons les intérêts et limites de notre recherche avant de conclure.

1. Cadre théorique

1.1 L'évolution de la division posée

L'évolution de l'algorithme de la division posée tout comme son enseignement résultent d'une succession de modifications subies à travers le temps. Il est donc nécessaire, afin de comprendre les choix actuels, de rendre compte de l'histoire de la division ainsi que d'éclairer la compréhension d'un ancien algorithme de cette opération. En effet, la comparaison de deux algorithmes de division posée (la méthode Galley et l'algorithme actuel) éclaire sur les types de divisions rencontrées à l'école élémentaire mais également sur les difficultés qui en découlent.

1.1.1 Histoire de la division

Depuis son établissement dans l'antiquité égyptienne, la division n'a cessé de subir des transformations. Naturellement, l'appellation et la définition de cette opération fondamentale ont évolué conjointement à son écriture. De cette façon, afin de mieux apprécier les évolutions traversées permettant de comprendre comment le concept de la division est actuellement appréhendé, l'étude épistémologique et historique de Guiet (1995) permet de nous éclairer. Aussi bien désignée comme « division » chez Fibonacci en 1202 (cité par Guiet, 1995, p. 53) ou comme « partition » par Treviso en 1478 (cité par Guiet, 1995, p. 53), les deux termes sont dès lors retrouvés dans la littérature pour désigner l'opération (Guiet, 1995, p. 53). Par ailleurs, Digges, en 1572, (cité par Guiet, 1995, p. 54) propose une première définition en déclarant que la division montre uniquement « combien de fois la somme mineure est contenue dans la somme majeure ». Celle-ci se voit rapidement précisée par ce dernier et est définie comme « la recherche de combien de fois le diviseur peut-être fractionné ou trouvé dans le dividende, le quotient étant le décideur » (Guiet, 1995, p. 53). Finalement, d'après Guiet (1995), la définition semblant faire le plus consensus parmi les auteurs, et que l'on retrouve encore largement dans les manuels scolaires, propose que la division consiste en « la recherche d'un nombre, qui, multiplié par le diviseur, est égal au dividende » (Guiet, 1995, p. 54).

1.1.2 Comprendre un ancien algorithme : la méthode Galley

L'objectif de cet écrit de recherche étant d'acquérir les connaissances nécessaires à l'enseignement de cette technique opératoire, nous avons choisi dans un premier temps de comprendre un ancien algorithme, celui de la méthode Galley.

La méthode Galley, autrement appelée la division en galère, est l'algorithme de la division posée utilisé et préconisé dans l'enseignement vers la fin du XVIII^{ème} siècle (Guiet, 1995). Cette

méthode a été utilisée jusqu'à la Convention Nationale, c'est-à-dire jusqu'à l'adoption du système métrique. Le changement vers la méthode actuelle relative à cet algorithme a eu lieu progressivement, les deux méthodes ayant subsisté conjointement durant un temps (Guiet, 1995). Guiet (1995) propose, dans son écrit, un exemple de division Galley tiré du livre d'arithmétique de Martelly (1736) (figure 1).

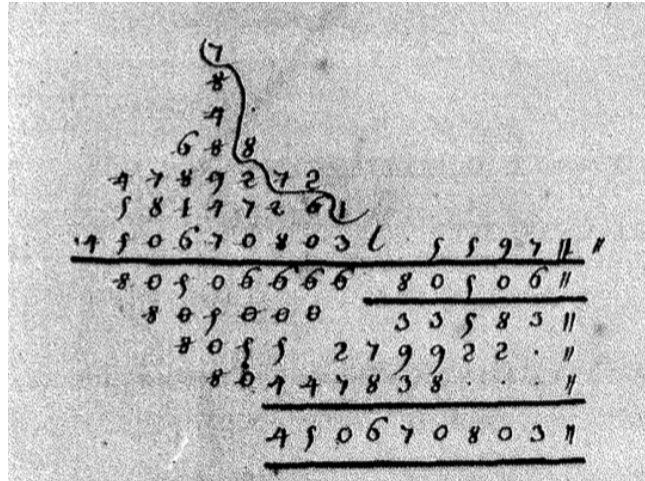


Figure 1. Livre d'arithmétique de François Estienne Martelly (1736) I.N.R.P Musée national de l'éducation, Rouen, Mont-Saint-Aignan.

La procédure de cette méthode « consiste à effacer les nombres au fur et à mesure ou à les rayer » (Guiet, 1995, p. 64). Elle s'accompagne également d'une vérification à l'aide d'une multiplication écrite, cet élément de contrôle est conseillé lors de l'apprentissage de cette méthode (Guiet, 1995). Dans l'exemple trouvé dans le livre d'arithmétique de François Estienne Martelly, Guiet (1995) observe grâce à l'organisation spatiale de la division posée que les chiffres écrits au-dessus de la plus longue barre noire correspondent aux restes de chaque étape, tandis que le nombre écrit au-dessous de cette dernière correspond au diviseur.

Pour mieux comprendre cet algorithme, il est nécessaire dans un premier temps d'identifier le rôle de chaque nombre intervenant dans la division. Ainsi, le nombre renseigné à gauche au-dessus de la barre noire correspond au dividende tandis que le nombre en-dessous de la barre noire à droite est le diviseur.

Pour exemplifier, dans la division de 642 par 16, la disposition de la division sera ainsi (figure 2) :

$$\begin{array}{r} 642 \quad | \\ \hline 16 \end{array}$$

Figure 2. Présentation de l'algorithme de division posée d'après la méthode Galley.

Afin d'approfondir la compréhension de l'algorithme de cette méthode, nous nous sommes intéressées au *Livre d'arithmétique de Barrême* sur lequel Guiet (1995) prend en partie appui. En effet, Barrême explicite avec précision les différentes étapes de l'algorithme de la méthode Galley, ainsi que le discours qui lui est associé.

Selon Barrême (1736), afin de réaliser la première boucle il est nécessaire de poser le diviseur, dans notre cas 16, après le trait tiré et sous le dividende partiel 64. L'élève doit s'assurer que le chiffre de la plus grande unité de numération soit inférieur à la plus grande unité de numération du dividende. L'élève se pose alors la question : « en [64] combien de fois [16], il est [4] fois il faut poser [4] au produit, disant [4] fois [16] font [64] et [64] reste [0] » (Barrême, 1736, p. 144). Il soustrait alors le premier chiffre du diviseur au premier chiffre du dividende. L'élève doit ensuite rayer les chiffres utilisés. Il procède ensuite de la même manière à chaque étape du calcul (Guiet, 1995) (figure 3).

$$\begin{array}{r} \cancel{2} 0 \\ \cancel{6} 4 2 \quad | 4 \\ \hline \cancel{1} 6 \quad \quad 16 \end{array}$$

Figure 3. Première étape de l'algorithme de division posée d'après la méthode Galley.

Le reste de chacune des étapes est écrit au-dessus de la place de l'unité de numération correspondante. Il est important de vérifier que le reste de la division ou de la sous-division est inférieur au diviseur, sinon il y a une erreur dans la division (Le Gendre, 1753). Il en est de même pour le reste de l'opération. Dans l'exemple, on soustrait le produit de 4 fois 6 au nombre 24, ce qui donne un reste égal à 0. On raye donc les chiffres 24 et 6 (figure 3). L'élève répète l'opération afin de traiter tous les chiffres du dividende (figure 4).

$$\begin{array}{r}
 20 \\
 \hline
 642 \quad | \quad 40 \\
 \underline{166} \quad \quad 16 \\
 1
 \end{array}$$

Figure 4. Deuxième étape de l'algorithme de division posée selon la méthode Galley.

Comme l'explique Barrême (1736) pour la seconde boucle il faut poser 16 tout en reculant d'une figure (Barrême, 1736, p. 144) en mettant le 1 (chiffre des dizaines du diviseur) sous le chiffre 4 du dividende, le diviseur est alors écrit une nouvelle fois. Lorsque cette étape est réalisée, les opérations réalisées lors de la première étape se répètent. Puis, le diviseur est une nouvelle fois déplacé vers la droite du calcul, permettant de le continuer (Guiet, 1995). Le nombre de fois que le diviseur est déplacé correspond également au nombre d'opérations qui sont réalisées et donc au nombre de figures qui se trouvent dans la partie quotient (Le Gendre, 1753). Lorsque le calcul est achevé, des chiffres restent non rayés. Ils correspondent à l'écriture du nombre relatif au reste de la division.

Le nombre défini à droite de la division posée constitue ainsi la partie entière du quotient. La partie relative au reste est mise en évidence par le trait rouge, dans l'exemple, le nombre 02. Ce nombre est par la suite exprimé sous forme de fraction où le numérateur de celle-ci est le nombre correspondant au reste (Guiet, 1995). Le dénominateur de l'écriture fractionnaire est identique au diviseur de la division que l'on cherche à résoudre. Finalement, la division (figure 5) est exprimée de la manière suivante : $642 = 40 \text{ r}2$. Dans le langage mathématique actuel, l'égalité fondamentale de cette division est : $642 = 40 \times 16 + 2$.

$$\begin{array}{r}
 20 \\
 \hline
 642 \quad | \quad 40 \\
 \underline{166} \quad \quad 16 \\
 1
 \end{array}$$

Figure 5. Intégralité de l'algorithme de division posée d'après la méthode Galley.

Enfin comme dit précédemment, la méthode Galley inclut une étape de vérification à l'aide d'une multiplication. La disposition de la division posée facilite l'écriture opératoire de la

multiplication. En effet, le quotient est alors multiplié par le diviseur, cette opération donne un produit relatif au reste soustrait au dividende. Le Gendre (1753) explique :

Pour faire la preuve de la division [...] il faut multiplier [...] le diviseur par le quotient indifféremment, & ajoutant le reste de la division s'il y en a, la somme viendra égale au nombre à diviser si la règle est bien faite, si elle vient autrement la règle est fautive (Le Gendre, 1753, p. 39) (figure 6).

$$\begin{array}{r}
 \cancel{2} \overline{) 0} \\
 \underline{6 \ 4 \ 2} \quad | \ 4 \ 0 \\
 \ 6 \ 6 \quad \underline{1 \ 6} \\
 \ 4 \quad \ 6 \\
 \ 0 \quad \ 6 \ 0 \bullet \\
 \ 0 \quad \ 6 \ 4 \ 0
 \end{array}$$

Figure 6. Illustration de la multiplication correspondant à la vérification de l’algorithme de division posée d’après la méthode Galley.

1.1.3. Comprendre l’algorithme de la division posée actuel

La Convention Nationale marque un tournant essentiel en ce qui concerne la vision de la division (Guiet, 1995). Effectivement, cette période historique s’accompagne de l’adoption du système métrique. Ainsi, le système décimal est dès lors intégré à la division. Le système métrique et sa décimalisation mettent en évidence un certain nombre de contraintes intervenant systématiquement dans le processus algorithmique de la division (Guiet, 1995).

L’algorithme de la division repose sur « une répétition de boucles formées chacune d’une estimation d’un chiffre du quotient suivie d’une multiplication et de la soustraction du produit obtenu du reste des opérations précédentes » (Brousseau, 2010, p. 16). En conséquence, la maîtrise de l’exécution des boucles de l’algorithme de la division est une condition primordiale afin de parvenir à la réalisation d’une division posée. S’assurer que chaque étape est correctement effectuée est indispensable avant de passer à la suivante, au risque de commettre des erreurs nécessitant un ajustement *a posteriori* des sous-programmes erronés (Brousseau, 2010). De surcroît, Laplace (1795, cité par Guiet, 1995, p. 62) témoigne également de l’importance de sélectionner, afin d’entamer la première boucle de l’opération, autant de chiffres que nécessaire afin que le dividende partiel contienne le diviseur en partant de la gauche du dividende. Ce principe, se devant d’être considéré dès le commencement de l’algorithme, doit être systématiquement respecté au risque de mener à une mauvaise résolution de l’opération. Par ailleurs, l’explicitation d’une boucle de l’algorithme de la division posée est essentielle afin de comprendre le fonctionnement de la

technique opératoire avant d'illustrer la réalisation complète de deux calculs en vue de justifier l'intérêt de débiter par la gauche du dividende.

Conformément à la définition qu'apporte Brousseau (2010), la première boucle de l'algorithme de la division débute par la détermination du dividende partiel en partant de la gauche des chiffres de ce nombre (Laplace, 1795, cité par Guiet, 1995, p. 62). Ainsi, le dividende partiel doit être composé du moins de chiffres possibles mais étant un nombre plus grand (ou aussi grand) que le diviseur afin d'estimer le premier chiffre du quotient (Brousseau, 2010). De là, on cherche combien de fois le diviseur est représenté dans le dividende partiel. On renseigne alors le nombre obtenu, qui correspond au chiffre le plus à gauche du quotient. Ce nombre sera alors multiplié au diviseur pour retrancher le produit du dividende partiel (Laplace, 1795, cité par Guiet, 1995, p. 62). Ainsi, la véracité du chiffre du quotient trouvé ne peut être vérifiée qu'après contrôle du sous-programme, ce qui vient clore la première boucle de l'algorithme de la division. L'établissement du dividende partiel, donnant lieu à une nouvelle boucle, se forme en abaissant à côté du reste le chiffre du dividende se trouvant à droite du dernier chiffre constituant le nombre du dividende partiel déterminé à la précédente boucle, de manière à ce qu'il contienne également le diviseur. Seulement, si lors d'une nouvelle boucle le chiffre du quotient est 0, un second chiffre du dividende doit être descendu sur la même ligne, et ce jusqu'à ce que le quotient soit différent de 0. L'opération se poursuit avec l'enchaînement des boucles jusqu'à ce que tous les chiffres du dividende soient abaissés et une fois un reste trouvé inférieur au diviseur (Brousseau, 2010).

Pour illustrer, la réalisation de la technique usuelle de calcul de la division posée en débutant par la gauche des chiffres du dividende est appliquée à notre exemple de la division de 642 par 16. Ainsi, le dividende partiel initiant la première boucle (figure 7) se devant d'être plus grand que le diviseur mais composé du moins de chiffres possible est 64. De cette manière, le nombre 16 (diviseur) est contenu 4 fois dans le dividende partiel 64. Le premier chiffre du quotient (4) est renseigné. Le produit du chiffre du quotient trouvé et du diviseur est annoté en-dessous du dividende partiel afin de constituer une soustraction posée. Ainsi, la soustraction de 64 (résultat du produit entre le premier chiffre du quotient et le diviseur) à 64 (nombre du dividende partiel de la première boucle) est effectuée. Le résultat de l'opération, le reste (0), est renseigné. La première boucle s'achève après la vérification du sous-programme. Le reste est inférieur au diviseur, et celui-ci ne comporte pas d'erreur de calcul ($16 \times 4 = 64$; $64 - 64 = 0$). En conséquence, l'algorithme de la division posée se poursuit avec la réalisation de la seconde boucle (figure 8). Le chiffre 2 (chiffre des unités du dividende 642) est abaissé à côté du reste obtenu lors du précédent sous-programme. Ainsi, le dividende partiel est 2. Le diviseur n'étant contenu aucune fois dans le dividende partiel

identifié, le quotient établi est 0. Le produit (égal à 0) obtenu par la multiplication du quotient (0) et du diviseur (16) est renseigné sous le dividende partiel afin d'y être soustrait. La soustraction de 2 – 0 permet d'identifier le reste de l'opération qui est 2. De la même manière que précédemment, la vérification du sous-programme est effectuée. Tous les chiffres du dividende sont abaissés et le reste est inférieur au diviseur. L'algorithme de la division posée prend fin.

$$\begin{array}{r|l}
 642 & 16 \\
 -64 & 4 \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Figure 7. Première boucle de l'algorithme de la division posée de la division de 642 par 16.

$$\begin{array}{r|l}
 642 & 16 \\
 -64 & 40 \\
 \hline
 02 & \\
 -0 & \\
 \hline
 2 &
 \end{array}$$

Figure 8. Deuxième boucle de l'algorithme de la division posée de la division de 642 par 16.

Comme précédemment, la technique usuelle de calcul de la division posée est appliquée à l'opération de 642 par 16. Cependant, l'algorithme de la division posée est dès lors réalisé en débutant par la droite des chiffres du dividende. La première boucle (figure 9) débute alors par l'identification du dividende partiel 42. Ainsi, le diviseur est contenu 2 fois dans le dividende partiel, ce qui constitue le premier chiffre du quotient identifié. Par ailleurs, puisque l'algorithme a débuté par l'unité de numération la plus petite, le chiffre du quotient (2) est l'unité. Le produit du diviseur et du quotient s'élève donc à 32. Ce résultat est retranché au dividende partiel (42). Le reste obtenu par la soustraction de 32 à 42 est 10. La vérification du sous-programme est effectuée, et la seconde boucle de l'algorithme est entamée (figure 10). Le dernier chiffre du dividende est abaissé. Cependant, la division ayant été commencée par la droite des chiffres du dividende, la suite de l'algorithme ne peut avoir lieu. Le reste est alors 610. Or, à la fin de l'algorithme de la division posée le reste (610) est supérieur au diviseur (16). De plus, le quotient identifié (2) n'est pas

correct. Ces observations permettent d'admettre qu'il est impossible de débiter la technique usuelle de la division posée par la droite du dividende.

$$\begin{array}{r|l}
 642 & 16 \\
 -32 & 2 \\
 \hline
 10 &
 \end{array}$$

Figure 9. Première boucle de l'algorithme de la division posée de 642 par 16 en commençant par la droite.

$$\begin{array}{r|l}
 642 & 16 \\
 -32 & 2 \\
 \hline
 610 &
 \end{array}$$

Figure 10. Poursuite de l'algorithme de la division posée de 642 par 16 en commençant par la droite.

1.1.3.1 Distinction entre concept de la division, et algorithme de la division.

L'étude de manuels et de cahiers d'élèves (avant et après la Convention) conduit Guiet (1995) à constater que si le fonctionnement de la division est de prime abord considéré comme une technique et non comme un concept, cela ne permet pas à l'élève d'instituer du sens à l'égard de l'algorithme de l'opération. Seulement, le concept, bien qu'il contribue à rendre compte du fonctionnement de l'algorithme de la division, ne peut à lui seul l'expliquer. En effet, les relations entre l'algorithme et le concept de la division ne sont pas instinctives (Boulet, 1998).

La distinction principale entre le concept de division et l'algorithme conventionnel se situe au niveau de l'exploitation du système décimal de numération qui est essentielle à l'application de cet algorithme (Boulet, 1998, p. 16).

Effectivement, les savoirs en numération permettent de définir le nombre de chiffres composant le quotient (Guiet, 1995). Pour illustrer, la division de 642 par 16 débute par la division du dividende partiel 64 (16 n'étant contenu aucune fois dans 6, chiffre des centaines). Ainsi, 16 est contenu quatre fois dans 64 avec un reste de 0. Autrement dit, 16 est quatre dizaines de fois dans 64

dizaines. En conséquence, il n'y a aucune autre dizaine (le reste). Le premier chiffre du quotient est par conséquent 4 au rang des dizaines. Une fois ce premier terme déterminé, le nombre de chiffres du quotient peut être connu. Le quotient de la division de 642 par 16 est donc un nombre à deux chiffres. Il est possible de procéder ainsi puisque 6 centaines, 4 dizaines et 2 unités se décomposent en 64 dizaines et 2 unités.

En revanche, la détermination du quotient peut également se faire sans connaissance en numération. En effet, il suffit de considérer l'intégralité du dividende, c'est-à-dire la collection dans son ensemble. Ainsi, il est possible de réaliser autant de groupements équipotents que ce qu'indique le diviseur ou bien, de composer des groupements comportant autant d'unités que ce que mentionne le diviseur. De cette façon, le quotient se trouve par dénombrement, soit du nombre de groupements, soit du nombre d'unités dans les groupements (Boulet, 1998).

En conséquence, « le regroupement en ensembles de dix n'est pas nécessaire au concept de division, mais il l'est pour l'application de l'algorithme conventionnel » (Boulet, 1998, p. 16).

1.2 Comparer deux algorithmes de division posée

1.2.1 Identifier des critères de comparaison

Dans le but de comprendre les choix relatifs à l'utilisation de l'algorithme de division posée actuel, il est intéressant de le comparer avec un ancien algorithme de division posée. Dans le cadre de cette analogie, l'algorithme de la méthode Galley est comparé à l'algorithme actuel faisant appel à la division euclidienne. Pour cela, il est nécessaire d'identifier des critères de comparaison.

Guiet (1995), aborde dans un premier temps le coût de la lecture et l'interprétation des résultats et des sous résultats. En effet, l'importance de l'interprétation des résultats et sous résultats nous renvoie aux dires de Barrême (1736) :

Une grande Division est un petit labyrinthe en lo[s]ange : et si par un méconte on s'est une fois égaré, il n'y a pas mo[y]en de revenir par où on a commencé, à moins que de recommencer une nouvelle Règle (Barrême, 1736, p. 140).

Les deux mathématiciens portent donc un intérêt aux sous-étapes qui sont porteuses de sens. Cet aspect fait donc apparaître un nouveau critère de comparaison. En effet, le fait d'explicitier ou non les sous étapes peut apparaître comme une variable didactique. Elle stimule différentes compétences et connaissances telles que le fait de maîtriser le nombre comme mémoire d'une quantité. Brousseau (2010), traite de cette variable dans le contexte multiplicatif. Toutefois, les recherches qu'il a effectuées peuvent être transcrites dans le contexte de l'algorithme de la division.

Le didacticien s'intéresse à l'importance et aux disponibilités des répertoires exigés. Il soulève donc la question des prérequis permettant la bonne résolution d'un algorithme de division. Conjointement à ces questionnements, Brousseau (2010) s'interroge sur la possibilité et le coût de contrôle, c'est-à-dire de vérification de l'opération.

Barrême (1736), lui, aborde le sens d'écriture et le sens de résolution de la division. Il est vrai que les opérations abordées antérieurement à l'apprentissage de la division partagent le même sens d'écriture et de résolution. Toutefois, il est intéressant de constater les différents sens d'écriture et de les expliquer (Barrême, 1736).

Enfin, la comparaison de l'organisation spatiale ainsi que les outils permettant la bonne utilisation des algorithmes peuvent permettre de comprendre l'algorithme actuel de division posée en donnant un rôle à chaque terme (Guiet, 1995), mais également de se mettre à la place d'un élève qui découvre un nouvel algorithme.

1.2.2 Comparaison de la méthode Galley et l'algorithme de la division posée actuel

Les critères de comparaison étant identifiés, il est nécessaire de les exploiter afin de comparer l'algorithme de la division posée utilisée avant 1600, soit la méthode Galley, et l'algorithme de la division posée actuelle. Cette comparaison a pour but de comprendre pourquoi l'algorithme de la division posée utilisée aujourd'hui est celui qui prime pour l'apprentissage et l'utilisation de la division.

En s'appuyant sur les propos de Barrême (1736), il qualifie la division du XVII^{ème} siècle de « petit labyrinthe en losange » (1736, p. 140). Cette analogie traduit le caractère complexe de l'interprétation des résultats par la difficulté à se repérer dans les sous-étapes de l'algorithme. En effet, conformément aux propos de Guiet (1995), la complexité de l'algorithme de la division posée dans la méthode Galley s'accroît lors de la lecture de la valeur du nombre à prendre en compte. En effet, les chiffres sont placés successivement et inégalement entre les colonnes et les lignes (Guiet, 1995). De plus, l'auteur ajoute que le dividende partiel (nombre due à une sous étape de la l'algorithme) doit être lu en diagonale. Ceci ne facilite pas l'identification des résultats partiels. La méthode Galley est liée à « une somme de soustractions successives » (Guiet, 1995, p. 50) dans laquelle l'écriture des résultats doit être alignée et « rassembl[ée] sur le même plan » (Guiet, 1995, p. 50). Cet amas de chiffres rend le décodage des résultats et sous résultats difficile.

Cet aspect est moins présent avec la division posée actuelle. En effet, comme le dit Guiet (1995) « les restes des dividendes partiels sont écrits au-dessus du dividende » (Guiet, 1995, p. 51). L'élève a donc la possibilité de se remémorer le rôle et l'origine de toutes les retenues. On peut

donc dire que le coût de lecture et d'interprétation des résultats partiels est intrinsèquement lié à l'organisation spatiale de la présentation de l'opération posée puisqu'il faut lire certains nombres comme des restes partiels et d'autres, placés au même endroit, comme le reste de la division (Guiet, 1995).

La compréhension et l'interprétation des résultats sont utiles, toutefois, il est nécessaire et primordial de maîtriser des connaissances antérieures à la séance d'apprentissage de l'algorithme de la division posée, c'est-à-dire les prérequis nécessaires à la bonne utilisation de l'algorithme. Barrême (1736) expose le fait que la division est la dernière opération travaillée car pour comprendre et appliquer cet algorithme il est obligatoire de maîtriser les autres techniques opératoires, telles que l'addition, la soustraction ainsi qu'être capable de multiplier deux nombres entiers. En effet, la méthode Galley nécessite l'utilisation d'une suite de soustractions et de multiplications. Barrême (1736) considère la division comme l'opération d'arithmétique qui nécessite la plus grande application.

Il en est de même pour l'algorithme actuel. En effet, les différentes étapes de résolution demandent principalement la maîtrise de la soustraction et de la multiplication. Comme le précise Guiet (1995), la division suit « des procédures où les soustractions sont posées sous le dividende partiel » (Guiet, 1995, p. 76). Les prérequis nécessaires à la réussite des deux algorithmes sont donc similaires.

Par ailleurs, les deux méthodes détiennent d'autres points communs. En effet, Barrême (1736) affirme que les autres opérations travaillées en premier à l'école étaient traitées de droite à gauche, tandis que la division, elle, était résolue en commençant par la plus grande unité de numération que possède le dividende, soit de gauche à droite (Barrême, 1736).

Enfin, la disposition spatiale des deux algorithmes de la division posée sont différentes. La méthode Galley possède une barre noire horizontale qui sépare les restes des sous-divisions des diviseurs partiels (Barrême, 1736). De plus, cette méthode laisse place à une vérification. La multiplication comme opération-contrôle fait partie intégrante de l'organisation spatiale de la division posée (Guiet, 1995). L'algorithme actuel, lui, s'organise à l'aide d'une potence qui sépare, par des espaces prédéfinis, les rôles de chaque nombre. Cependant aucune vérification n'est incluse dans l'algorithme. Le contrôle du résultat est possible mais demande la réalisation d'une nouvelle opération : multiplier le quotient par le diviseur, le nombre trouvé doit être égal au dividende. Ces deux algorithmes ont donc chacun un outil d'organisation (trait ; potence) permettant de définir le rôle de chaque nombre. Toutefois, la vérification de la division n'est pas présente dans l'algorithme actuel de la division posée. Comme le dit Guiet (1995) : « Il n'y a pas d'activités écrites de

questionnement de conjecture, de contrôle (sauf exception faite pour le recours à la multiplication inverse) » (Guet, 1995, p. 79).

L'algorithme de la division utilisé actuellement est alors empli par les héritages de la méthode Galley. Ainsi, de nombreux éléments peuvent être mis en perspectives afin de témoigner de cette dévolution. De cette même manière, l'étude du caractère étymologique et historique de la division, ainsi que l'identification des critères de comparaison permet d'éclairer les choix de l'algorithme actuel au regard de la complexité et des difficultés inhérentes à celui de la méthode Galley. Seulement, bien que l'algorithme de la division posée comme il l'est désormais appréhendé ait tenté de pallier l'imbroglie de celui auquel il succède tout en conservant certains de ses traits, d'autres limites s'entrevoient. Ainsi, la familiarisation avec cette technique usuelle de calcul à l'école élémentaire n'est pas quelque chose d'aisé pour les apprenants.

1.3 Les divisions rencontrées à l'école élémentaire

1.3.1 Distinction entre division euclidienne et division exacte

La division de nombres par l'intermédiaire du calcul posé faisant appel à l'utilisation de la puissance permet aux élèves de l'école élémentaire de se confronter à deux sortes de divisions parmi la pluralité de celles qui existent en mathématiques. En conséquence, la division euclidienne avec reste ainsi que la division exacte sont successivement abordées.

Que ce soit pour le cas de la division euclidienne avec reste ou la division exacte, les nombres a et b (ou $b \neq 0$), respectivement le dividende et le diviseur, sont entiers. Seulement, la division exacte admet uniquement le quotient (q) comme résultat, tandis que la division euclidienne avec reste en admet deux, le quotient (q) ainsi que le reste (r). De cette manière, même si le reste de la division euclidienne est nul, elle dispose tout de même de deux résultats (avec un reste égal à zéro). Ainsi, la difficulté à saisir la différence entre ces deux types de divisions dès lors que le reste est nul peut engendrer des confusions entre division euclidienne avec reste et division exacte, l'une pouvant être prise pour l'autre. Or, bien que l'écriture de l'égalité de l'opération soit différente pour la division euclidienne ($a = b \times q + r$ et $r < b$; soit $642 = 16 \times 40 + 2$ dans notre cas) et la division exacte ($a = b \times q$; soit $642 = 16 \times 40,125$ pour notre exemple), une autre différence est notable. En effet, contrairement à la division euclidienne, la division exacte n'a pas nécessairement un quotient entier dans le cas où les nombres a et b sont entiers.

1.3.1.1 Division-partition et division-quotition

Les deux types de divisions précédemment citées (division euclidienne et division exacte) peuvent aussi bien relever d'un problème de division-partition ou de division-quotition (Vergnaud, 1997).

Les problèmes relevant de la division-partition, qui pourrait aussi être appelée la division selon le sens du partage (Boulet 1998), consistent en la recherche de la valeur d'une part alors que le nombre de parts total est connu (Vergnaud, 1997). Ainsi, les sous-collections constituées à partir d'une plus grande sont identiques. Dans ce type de division, le diviseur est un entier inférieur au dividende. De même, le quotient est plus petit que le dividende (Boulet, 1998). Pour illustrer, dans le problème de division-partition « Lou a 642 timbres qui recouvrent un album de 16 pages. Combien y a-t-il de timbres par page ? », le dividende est 642 et le diviseur est 16. Ce qui est cherché correspond au quotient.

Inversement, dans les problèmes relevant de la division-quotition et référant à la division dans le sens de la mesure (Boulet, 1998), la valeur d'une part est connue tandis que le nombre total de parts est cherché (Vergnaud, 1997). Dans ce type de division, le diviseur doit être inférieur au dividende (Boulet, 1998), comme ce qu'est le cas dans le problème « Marie a une boîte de 642 perles. Elle fait des colliers de 40 perles. Combien peut-elle faire de colliers ? ».

Par ailleurs, les divergences existantes dans les deux types de divisions ainsi que la formulation des exemples les illustrant, nous ont amené à nous interroger sur les différences pouvant régir le discours accompagnant la division posée.

1.3.2 Le langage accompagnant l'algorithme de la division posée

Boulet (1998) éclaire sur l'intérêt que présente l'emploi d'un langage précis accompagnant la division et le sens qu'on souhaite donner à l'opération. Le langage typiquement utilisé dans l'accompagnement de l'algorithme de la division tel que « la diviseur rentre x fois dans le dividende partiel » est à l'origine de résistances dans l'apprentissage de l'opération. Ainsi, ce type de formulation employé, qu'importe la division, questionne sur le sens lui étant attribué. Comme le soulève Boulet (1998), si cette forme abrégée renvoie à une question du type « combien de paquets de x objets peuvent être formés avec y objets », alors l'expression réfère uniquement au sens de la mesure (division-quotition). Or, le terme « rentre » est utilisé également pour des divisions dans le sens du partage (division-partition) (figure 11).

L'imprécision inhérente au discours est ainsi source de difficultés. En conséquence, l'apprenant peut penser que l'objectif est que le diviseur « rentre » dans les dividendes partiels. De surcroît, lorsque le dividende partiel ne comprend pas au moins une fois le diviseur et que tous les chiffres du dividende sont abaissés, la personne en apprentissage peut considérer la valeur de ce qui « ne rentre pas » comme étant ce qui reste (figure 11). Ainsi, « une erreur souvent commise par les personnes en apprentissage est celle de placer le dividende comme reste à la fin de l'algorithme » (Boulet, 1998, p.16).

$\begin{array}{r} 642 \\ -64 \\ \hline 02 \\ -0 \\ \hline 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 16 \\ \hline 40 \end{array}$	<p>« 16 ne rentre pas dans 6. Je baisse un chiffre du dividende. »</p> <p>« 16 rentre 4 fois dans 64. »</p> <p>« 16 ne rentre pas dans 2. Tous les chiffres du dividende sont descendus, il me reste 16. »</p> <p>L'élève est donc amené à écrire « $642 \div 16 = 40$ reste 16 » plutôt que « $642 \div 16 = 40$ reste 2 ».</p>
--	--	--

Figure 11. Discours adjoint à la division employant le terme « rentre ».

L'utilisation d'un langage approprié tout au long de l'application de l'algorithme de la division permet d'en préserver son sens (sens de la mesure ou sens du partage) ainsi que de restreindre voire résoudre certains problèmes y étant liés (Boulet, 1998).

Ainsi, la formulation accompagnant la division dans le sens de la mesure doit conserver l'idée que l'on cherche le nombre de fois qu'une quantité est contenue dans une plus grande connue (figure 12).

$\begin{array}{r} 642 \\ -64 \\ \hline 02 \\ -0 \\ \hline 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 16 \\ \hline 40 \end{array}$	<p>« Combien de colliers de 16 peut-on faire avec 6 perles ? Impossible. Je baisse un chiffre du dividende. »</p> <p>« Combien de colliers de 16 peut-on faire avec 64 perles ? 4. »</p> <p>« Combien de colliers de 16 peut-on faire avec 2 perles ? Aucun. Il reste 2 perles. »</p> <p>L'élève identifie le bon reste est écrit « $642 \div 16 = 40$ reste 2 ».</p>
--	--	--

Figure 12. Discours adapté à la division dans le sens de la mesure.

De la même manière, le langage doit être adapté à la division dans le sens du partage par l'emploi d'une formulation lui étant spécifique (figure 13).

$$\begin{array}{r|l}
 642 & 16 \\
 -64 & 40 \\
 \hline
 02 & \\
 -0 & \\
 \hline
 2 &
 \end{array}$$

« Si 6 centaines sont partagées en 16 ensemble, alors combien de centaines par ensemble ? Impossible ».

« Si 64 dizaines sont partagées en 16 ensemble, alors combien de dizaines par ensemble ? 4 ».

« Si 2 unités sont partagées en 16 ensemble, alors combien d'unités par ensemble ? 0 ».

« Il reste 2 unités non partagées ».

L'élève identifie le bon reste est écrit « $642 \div 16 = 40$ reste 2 ».

Figure 13. Discours adapté à la division dans le sens du partage.

Comme mis en exergue, le langage a une place prépondérante tout au long de la réalisation de l'algorithme de la division posée. L'inexactitude des termes ou formulations employées engendre des confusions et ambiguïtés quant au type de division traité, au sens lui étant octroyé, ainsi qu'à l'interprétation des nombres dans le contexte de résolution de l'opération. Cette constatation appuie l'importance de prêter une attention spécifique au discours accompagnant l'algorithme de la division posée, particulièrement lors de son introduction en classe.

1.4 La division dans un contexte de partage

1.4.1 Les situations de partage

Le sens attribué à la division ainsi que le concept lui-même se construisent également à l'aide du vécu de l'élève et de la classe (Perrin-Glorian, 1995). Les premières significations attribuées au concept de division sont des situations de partage équitable faisant intervenir des nombres entiers. Ainsi, dans les situations de partage « l'on cherche soit la valeur d'une part, soit le nombre de parts ». Pour ce faire, les élèves s'appuient massivement sur la reproduction des objets mis en jeu dans les situations afin de les représenter puis les résoudre. En revanche, les écritures et symboles pour représenter ces deux types de problèmes ne sont pas les mêmes (Perrin-Glorian, 1995).

Les situations de partage où la valeur d'une part est cherchée sont modélisées de manière organisée telle que lors d'une distribution de chacun des objets de la situation en fonction du nombre de parts total. Ainsi, ces situations mènent à des additions répétées (e.g J'en ai distribué $16 + 16 + 16 + 16 \dots$).

Les situations de partage où le nombre de parts est à trouver sont représentées plus généralement par groupements de paquets. Elles peuvent mener à une série de soustractions répétées (e.g J'ai rempli une boîte, il m'en reste $642 - 16$, je peux faire une autre boîte $626 - 16$ puis une boîte de $610 - 16 \dots$) ou à des additions réitérées (e.g J'en ai utilisé $16 + 16 + 16 + 16 \dots$). Reposant sur les groupements, ces situations de partage où le nombre de parts est cherché participent à l'apprentissage de la numération et sont ainsi rencontrées dès le cours préparatoire (Perrin-Glorian, 1995).

1.4.2 Les activités de partage

Les activités de partage, résultant directement des situations de partage, constituent des situations préparatoires à l'apprentissage de la division (Neyret, 1984). Ces activités sont intrinsèquement liées à celles de comparaisons et d'échanges (Neyret, 1984). Effectivement, la vérification du partage passe par la comparaison des collections afin de s'assurer que celui-ci ait été équitable. Ainsi, l'activité même de partage constitue une situation problème pour l'élève (Neyret, 1984).

Pour parvenir à leur bonne résolution, les activités de partage prennent appui sur des procédures numériques et géométriques. Par ailleurs, Neyret (1984) met en évidence trois catégories de procédures auxquelles les élèves ont recours.

Alors que les élèves utilisent la distribution comme méthode de partage dès le début de l'école maternelle, cette procédure se perfectionne promptement. En effet, dans un premier temps les élèves ne vont ni considérer la quantité donnée à chaque fois, ni le nombre de distributions opérées. Rapidement, ils vont s'orienter vers la distribution un pour un jusqu'à épuisement total de la collection. Peu à peu, les élèves se familiarisent avec des distributions plus expertes où plusieurs objets de la collection sont donnés en même temps, de manière répétée (e.g deux pour deux, trois pour trois...) ou alternativement (e.g deux pour deux, puis un pour un, puis deux pour deux...). Seulement, en fonction des variantes liées à la distribution, il est plus ou moins évident pour l'élève de prendre conscience du reste, ce dernier étant masqué. La distribution un pour un, contrairement à celle deux pour deux, dissimule le reste en amenant l'élève à distribuer le dernier objet de la collection qui n'a pas encore été attribué, or cela mène à une erreur dans l'équité du partage. La perception finale du partage peut aussi être influencée par la façon dont l'élève s'y prend, c'est-à-dire en distribuant avec une seule main ou les deux simultanément. De la même manière, lors de la distribution à deux mains, l'élève va pouvoir se rendre compte de la présence d'un potentiel reste plus aisément que dans une distribution réalisée à main unique (Neyret, 1984).

Une autre procédure pouvant être mise en œuvre très tôt par les élèves se base sur la visualisation. Ainsi, les élèves ont tendance à réaliser de prime abord un partage approximatif en deux de la collection pouvant éventuellement reposer sur son organisation géométrique. Progressivement, ce partage va devenir plus assuré notamment grâce à la disposition géométrique des sous-collections constituées permettant de s'apercevoir plus facilement de l'équipotence de celles-ci, sans avoir recours au calcul. Par ailleurs, la procédure de visualisation est généralement utilisée comme moyen de validation après une distribution (Neyret, 1984).

Bien que les procédures reposant sur le comptage (uniquement pour de petites collections) soient utilisées par certains élèves en classe de grande section, elle n'est pas encore généralisée. Effectivement, ces procédures requièrent des connaissances poussées sur les nombres et sont ainsi fortement liées aux compétences des élèves. En revanche, elle est plus largement employée comme moyen de validation une fois le partage effectué. Ainsi, après distribution, notamment si l'élève a distribué les objets de la collection un par un et à une seule main, le comptage permet de s'assurer que le partage est équitable. De même, une fois les sous-collections constituées et organisées géométriquement, le comptage sert de vérification. L'élève peut alors réajuster son partage initial en cas d'erreur et mener à la réussite. À l'inverse, le comptage peut aussi conduire à des erreurs qui n'étaient pas présentes avec la procédure initiale (Neyret, 1984).

Les activités de partage mobilisent différentes procédures. En effet, les procédures de distribution permettent d'effectuer un partage, toutefois elles demandent une vigilance particulière sur l'identification du reste, sans laquelle le partage est faussé. Les procédures de partage peuvent également être couplées avec une procédure de visualisation ou une procédure de comptage afin de vérifier le partage.

1.5 Les difficultés intervenant dans l'algorithme de la division posée

La division, en plus d'être une des activités considérées comme les plus complexes à l'école (Benzaken, 1973), concentre les difficultés des répertoires multiplicatifs et soustractifs tout en ajoutant celles lui étant spécifiques (Brousseau, 2010). Ainsi, tel qu'il a été introduit en Europe et plus particulièrement en France par Fibonacci, l'algorithme de la division posée engendre diverses difficultés pour les élèves dans son application (Brousseau, 2010).

La difficulté inhérente à la division posée repose sur l'ordre dans lequel s'exécute chacune des boucles de l'algorithme (Barrême, 1788). En effet, alors que les opérations précédemment

appries s'effectuent de droite à gauche des chiffres du nombre, la division se réalise par boucles allant de gauche à droite des chiffres du dividende (Barrême, 1788).

La division posée, ayant une organisation spécifique et immuable, permet de déterminer les fonctions de chacun des nombres disposés (Perrin-Glorian, 1995). De cette façon, la première difficulté à laquelle se trouve confrontée l'élève est l'identification du diviseur et du dividende, ainsi qu'à leur bon positionnement de part et d'autre de la potence (Perrin-Glorian, 1995). La difficulté supplémentaire qui survient lors de la pose de la division et que l'élève doit anticiper la place nécessaire pour effectuer les décalages découlant des soustractions successives le risque étant de perdre l'alignement des colonnes. Par ailleurs, la détermination des chiffres du quotient en amont du calcul permet aux élèves de pallier cette difficulté (Brousseau, 2010).

Pour procéder à la première boucle de l'algorithme, la difficulté qui se présente avant tout à l'élève se trouve dans la détermination du dividende partiel. En effet, celui-ci doit être composé de suffisamment de chiffres pour contenir le diviseur, mais également du moins de chiffres possible. Une fois le dividende partiel défini, la recherche de combien de fois le diviseur est contenu dans le nombre défini soumet à nouveau les élèves à une difficulté. De plus, au cours de l'opération les élèves peuvent être amenés à trouver un produit précédemment utilisé pour déterminer un chiffre du quotient, et doivent donc réitérer la multiplication ce qui rend davantage coûteuse la réalisation de la division notamment pour les élèves en difficulté avec les multiplications. Ainsi, la détermination des chiffres du quotient confronte les élèves à des difficultés puisque celle-ci nécessite la réalisation de multiples tentatives, pourtant étapes incontournables (Brousseau, 2010).

Une difficulté majeure pour les élèves et qui s'avère être source de différentes erreurs est lorsqu'ils sont confrontés à un quotient qui est 0. Ils doivent non seulement renseigner le quotient trouvé même si celui-ci est nul, ainsi que dans un second temps, descendre sur la même ligne un nouveau chiffre du dividende, et ceux jusqu'à ce que le quotient soit différent de 0 (Brousseau, 2010) (figure 14 et figure 15).

$$\begin{array}{r|l}
 642 & 16 \\
 -64 & 40 \\
 \hline
 02 & \\
 -0 & \\
 \hline
 2 &
 \end{array}$$

Figure 14. Quotient de 0 dans le cas de la division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l}
 642 & 16 \\
 \hline
 -64 & 40, 1 \\
 \hline
 02 & \\
 -0 & \\
 \hline
 20 &
 \end{array}$$

Figure 15. Quotient de 0 dans le cas de la division exacte.

1.5.1 Enquête CEDRE (Cycle des Évaluations Disciplinaires Réalisées sur Échantillons)

L'enquête CEDRE (Cycle des Évaluations Disciplinaires Réalisées sur Échantillons) a pour objectif d'évaluer les acquis des élèves en cours moyen deuxième année (CM2) ainsi qu'à mesurer l'évolution de leurs connaissances et compétences entre deux prises d'informations (2008 et 2014). Ainsi, en mathématiques, l'évaluation repose sur les champs mentionnés dans les programmes de 2008, dont ceux des nombres entiers naturels ainsi que du calcul.

Les résultats de l'enquête mettent en évidence que la division est nettement moins bien réussie que les autres opérations également évaluées (addition, soustraction, multiplication). Ainsi, l'analyse des productions des élèves permet de mettre en évidence les difficultés auxquelles ils se confrontent lors de la réalisation de l'algorithme de la division.

La méconnaissance par les élèves des répertoires multiplicatifs et soustractifs les conduit à des erreurs de calculs menant à des restes partiels incorrects, ce qui a pour conséquence de fausser la suite de l'opération ou l'équation correspondante. Les erreurs relatives au répertoire multiplicatif interviennent notamment dans le calcul d'un chiffre du quotient partiel, lorsque l'élève cherche combien de fois le diviseur est contenu dans le reste partiel (figure 16). Le calcul erroné de la différence entre les chiffres permettant l'établissement du nouveau reste partiel relève du répertoire soustractif (figure 17). Même si les élèves maîtrisent la technique de l'algorithme de la division posée, ces erreurs de calculs intermédiaires faussent les suivants, ce qui mène finalement à la détermination incorrecte du quotient.

$$\begin{array}{r|l}
 642 & 16 \\
 -64 & 30 \\
 \hline
 02 & \\
 -0 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$3 \times 16 = 64$ ce qui est faux.

Figure 16. Erreur de répertoire multiplication dans la première boucle de l'algorithme.

$$\begin{array}{r|l}
 642 & 16 \\
 -64 & 40 \\
 \hline
 02 & \\
 -0 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$642 = 16 \times 40 + 0$ au lieu de $642 = 16 \times 40 + 2$.

Figure 17. Erreur de répertoire soustractif dans la deuxième boucle de l'algorithme.

La division exacte donnant un quotient décimal est source de difficulté pour les élèves qui n'ont pas une bonne maîtrise de l'algorithme de la division et omettent de disposer une virgule ou ne la place pas au bon endroit dans le calcul du quotient. L'analyse des productions montre également que certains élèves positionnent bien la virgule mais y postposent un zéro (ce qui est faux) (figure 18 et figure 19).

L'ignorance du fait que le reste doit être inférieur au diviseur mais aussi au quotient (dans les étapes intermédiaires du calcul) avant qu'un des chiffres du dividende partiel soit abaissé dessert l'élève dans le contrôle de la détermination des chiffres du quotient en ne lui permettant pas de détecter son erreur.

Dès lors que le dividende se termine par un zéro, les élèves ne réalisent pas correctement la technique opératoire de la division. En effet, alors que certains n'ajoutent pas de zéro au quotient avant de poursuivre l'opération, d'autres positionnent une virgule alors que le chiffre zéro serait attendu.

$$\begin{array}{r|l}
 642 & 16 \\
 \hline
 -64 & 40125 \\
 \hline
 02 & \\
 -0 & \\
 \hline
 20 & \\
 -16 & \\
 \hline
 40 & \\
 -32 & \\
 \hline
 80 & \\
 -80 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Figure 18. Omission de la virgule dans le calcul du quotient.

$$\begin{array}{r|l}
 642 & 16 \\
 \hline
 -64 & 40,0125 \\
 \hline
 02 & \\
 -0 & \\
 \hline
 20 & \\
 -16 & \\
 \hline
 40 & \\
 -32 & \\
 \hline
 80 & \\
 -80 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Figure 19. Ajout d'un zéro après positionnement de la virgule.

1.6 Problématique et hypothèses

Comme vu précédemment, les recherches autour de l'algorithme de la division sont au cœur des préoccupations relatives à l'arithmétique depuis plusieurs siècles. En effet, Barrême ainsi que Le Gendre, ont explicité les méthodes d'algorithme de division posée utilisées avant la Convention telle que la méthode Galley (Barrême, 1736 ; Le Gendre, 1753). De surcroît, Guiet (1995) relate les

transformations subies par l'algorithme de la division posée de ses origines jusqu'à la méthode actuelle. Boulet (1998) met en garde quant au langage accompagnant la réalisation de la technique opératoire. En effet, l'emploi du terme « rentre » quelque soit le type de division est source de malentendus. Cependant, cette formulation est davantage adaptée à la division-quotition (Boulet, 1998). De plus, Perrin-Glorian (1995) fait le constat que les situations de partage ou le nombre de parts est à trouver sont les premières rencontrées par les élèves. C'est pourquoi dans cet écrit de recherche nous nous demandons : Comment l'articulation entre le langage, la manipulation et l'algorithme de la division posée participe à la construction du sens chez les élèves lors d'une séance d'introduction ?

Hypothèse 1 : Les manipulations permettant de représenter chacune des boucles de l'algorithme de la division posée aident l'attribution du sens à la technique usuelle de calcul.

Très tôt, dès l'école maternelle, les élèves se confrontent à des situations de partage requérant la manipulation de matériel. Ainsi, la continuité entre les manipulations effectuées par les élèves lors des situations de partage et les boucles de l'algorithme de la division posée limite les dissonances. Cette correspondance fait le lien entre l'écriture de l'algorithme et le sens qu'attribuent les élèves aux boucles algorithmiques lors de la manipulation. En conséquence, le passage à l'écriture de l'algorithme est progressif et s'appuie sur les connaissances des élèves envers la manipulation.

Hypothèse 2 : Les manipulations au service de la division posée sont efficaces à condition que l'organisation spatiale du matériel traduise la situation de partage.

L'organisation spatiale du matériel lors d'une manipulation témoigne de l'attribution du sens de chaque nombre dans la situation de partage. Cette manipulation est bénéfique à l'apport de sens à chaque acteur de la division : dividende, diviseurs, reste, quotient.

Hypothèse 3 : La manipulation est au service du sens de la division posée à condition que la conversion des unités de numération s'opère entre unités qui se suivent.

Les situations de partage rencontrées à l'école primaire peuvent être accompagnées de manipulations aidant à l'attribution de sens. Toutefois, chaque manipulation est régie par des conditions lui permettant un maintien dans son domaine d'efficacité. La maîtrise des conversions assure la bonne exécution des différentes boucles de l'algorithme.

Hypothèse 4 : La congruence des discours accompagnant d'une part la manipulation et d'autre part l'algorithme de la division posée favorise l'attribution du sens à la technique usuelle de calcul.

La manipulation du matériel représentant la situation de partage peut être accompagnée, geste par geste, d'un discours. Par ailleurs, les boucles de l'algorithme de la division posée peuvent également être oralisées. Ainsi, les continuités entre les discours rendent évidentes la congruence entre les étapes de la manipulation et les boucles algorithmiques. Inversement, les divergences existantes dans les discours complexifient la mise en relation de la manipulation et la technique usuelle de calcul.

Conformément à la question de recherche établie ainsi que des hypothèses en découlant, nous avons tenté de mettre en regard une situation de partage équitable requérant la manipulation d'étiquettes et la réalisation de l'algorithme de la division posée. De surcroît, le discours accompagnant les deux modalités ont également été mis en regard. Ainsi, la description des boucles de l'algorithme de la division posée a permis de mettre en lumière ce qu'il est possible ou non de retranscrire par la manipulation et les divergences existantes dans les discours.

De prime abord, le dividende et le diviseur sont facilement identifiables lors de la manipulation ainsi que dans le calcul posé. La détermination du dividende partiel afin de procéder à la première boucle de l'algorithme de la division posée est en conséquence évidente dans le cadre de la technique usuelle de calcul. Le fait que le matériel choisi soit des étiquettes où les unités de numération sont inscrites, la détermination du premier dividende partiel est simple. Effectivement, pour l'identifier, il suffit de sélectionner l'unité de numération la plus grande (où les unités de numérations les plus grandes consécutives) que le diviseur peut supporter. Autrement, les discours adjoints à la manipulation et à l'algorithme de la division posée sont similaires.

La recherche de combien fois le diviseur est contenu dans le dividende partiel est aussi bien permise par la technique usuelle de la division posée, que par l'activité de manipulation. Ainsi, le nombre obtenu correspond au premier chiffre du quotient partiel. Bien qu'il soit évident à identifier lors du partage effectué avec matériel, le quotient partiel n'apparaît pas aussi clairement que dans la technique usuelle de la division posée où celui-ci est clairement renseigné à l'écrit. Cependant, il est oralement identifié.

La validité du chiffre du quotient trouvé est effectué sans avoir recours à l'écriture pour la division posée ou à la manipulation pour le partage réalisé avec les étiquettes. Seulement, les discours entretenus de part et d'autre sont différents. Effectivement, l'algorithme de la division

posée conduit à se demander « Dans X combien fois Y ? » en donnant pour réponse « Il y a Z fois Y dans X ». En revanche, la manipulation conduit à répondre « Il y a Y fois Z dans X ».

Par ailleurs, alors que l'établissement du dividende partiel permettant d'entamer une nouvelle boucle se forme en abaissant un chiffre du dividende dans l'algorithme de la division posée, aucune manipulation particulière est requise avec les étiquettes. Ainsi, la présence potentielle d'un 0 dans le dividende n'engendre pas les difficultés entrevues dans l'opération posée. Le partage des étiquettes se poursuit classiquement. De surcroît, les discours ne congruent pas.

Finalement, l'algorithme de la division posée se poursuit par l'enchaînement des boucles et l'obtention d'un reste. De même, le partage des étiquettes s'effectue jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus aucunes, où jusqu'à obtenir un reste. La condition étant que le reste soit inférieur au diviseur.

2. Méthode

2.1 Cadrage expérimental

Le travail de recherche repose sur une situation de partage, menant à la technique usuelle de la division posée, proposée par un manuel scolaire. Les modifications, apports et réflexions réalisés sur la base de la situation initiale ont nécessité d'effectuer des choix justifiés.

2.1.1 Ancrage de la situation d'apprentissage dans les programmes officiels

Le Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale (MEJS, 2020), pour le cycle 3, mentionne dans la partie *Nombres et calculs* :

Si la maîtrise des techniques opératoires écrites permet à l'élève d'obtenir un résultat de calcul, la construction de ces techniques est l'occasion de retravailler les propriétés de la numération et de rencontrer des exemples d'algorithmes complexes. (MEJS, 2020, p. 92)

Par ailleurs, dans la section calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux, spécifiquement pour le calcul posé, le programme mentionne l'importance de la connaissance ainsi que de la mise en oeuvre d'un algorithme de calcul posé afin de réaliser des opérations de division euclidienne d'un entier par un autre.

Les attendus de fin d'année de CM1 pour le domaine des mathématiques précisent qu'en calcul posé les élèves apprennent notamment à utiliser l'algorithme de la division euclidienne de deux nombres entiers.

2.1.2 Choix du manuel

L'établissement de nos hypothèses ainsi que l'élaboration de nos critères d'analyses ont permis d'orienter notre choix de manuel scolaire. La sélection de Cap Maths CM1 proposé par Hatier s'est effectuée suite à l'intérêt suscité par une situation d'introduction à l'algorithme de la division posée. Ainsi, le guide pédagogique s'y rapportant constitue également une référence majeure afin de s'approprier l'activité.

L'ouvrage est organisé en 10 unités statuant autour des principaux apprentissages inhérents au domaine des mathématiques (problèmes, nombres, calculs, grandeurs et mesures, espace et géométrie). Chacune des unités s'effectuent, selon les concepteurs du manuel, sur environ 3 semaines et demie de classe.

L'identification de cette situation d'apprentissage a en conséquence aiguillé la sélection de la classe auprès de laquelle l'expérimentation est menée. Nous avons fait le choix de privilégier une classe utilisant tout au long de l'année le manuel Cap Maths.

2.1.3 Choix de la classe

Le choix du niveau de classe sur lequel s'axe notre étude s'est porté sur le cours moyen première année (CM1). L'intérêt que présente ce niveau de l'école élémentaire est qu'en début d'année les élèves n'ont jamais été exposés à l'apprentissage de la division posée. De plus, ils maîtrisent les répertoires soustractifs et multiplicatifs nécessaires à la réalisation de l'opération.

Par ailleurs, la mise en œuvre des séances de mathématiques ont lieu dans un établissement classé réseau d'éducation prioritaire (REP). Cette spécificité conduit à un effet loupe sur les phénomènes les moins visibles pouvant être observés en classes ordinaires.

2.1.4 Présentation de l'échantillon

L'intervention s'effectue auprès d'une classe de CM1 ayant un effectif de 21 élèves, parmi lesquels 9 sont des filles et 12 des garçons. Plusieurs d'entre eux bénéficient d'un accompagnement du RASED (Réseaux d'aides spécialisées aux élèves en difficulté). En conséquence, les élèves ne pouvant assister que partiellement à nos interventions pourront prendre part à l'activité pour laquelle ils sont présents en classe, mais leurs données seront exclus de la recherche.

Le niveau de classe, particulièrement pour le domaine des mathématiques, est jugé comme étant relativement hétérogène.

2.1.5 Recueil des données

2.1.5.1 La captation vidéo

Le recueil des données est réalisé à l'aide d'un caméscope placé au fond de la salle de classe. Son positionnement permet d'inclure tous les élèves de la classe, ainsi que de filmer le tableau. De cette manière, les images ainsi que les dires de l'ensemble de la classe sont saisis. Ce moyen de captation est particulièrement intéressant afin de recueillir les explications orales des élèves quant aux procédures utilisées, mais aussi les discours les accompagnants, les termes et formulations employés.

2.1.5.2 Les fiches élèves

L'intégralité des fiches données aux élèves sont recueillies. Il est important que leurs prénoms soient renseignés afin de permettre l'analyse des données recueillies tout du long de l'intervention en classe.

2.1.5.3 Les photographies des productions

Chaque réalisation finale de la manipulation du matériel ainsi que les fiches élèves s'y rapportant sont photographiées. Cela permet de relater les procédures de partage utilisées par les élèves, mais également les différences entre la manipulation et les informations inscrites sur les fiches. De plus, la mise en regard de la manipulation avec la complétion des fiches permet de s'apercevoir dans quelle mesure les élèves parviennent à octroyer du sens à la manipulation.

2.1.6 Choix des dispositifs

Le questionnement entretenu au sujet de l'effectif des groupes nous a orienté vers la constitution de petits groupes. Cette modalité de travail semble plus propice à l'enrichissement des échanges et à l'implication de chaque membre. En effet, la crainte relative à la constitution de groupes plus grands est que l'inclusion et la participation dans les échanges de tous les élèves soient moins favorables.

Par ailleurs, afin d'éviter que des élèves se retrouvent à l'envers du sens de lecture des étiquettes, le travail en binôme est privilégié. Autrement, la répartition en binômes de travail permet de maximiser le recueil de données tout en rendant raisonnable la préparation matérielle nécessaire aux activités de manipulation.

2.1.7 Choix de l'organisation des activités

L'intérêt de retravailler les activités de la situation initiale (annexe 1) est de conduire les apprenants de manière plus progressive à l'algorithme de la division posée. De cette manière, les élèves peuvent instituer davantage de sens à la technique usuelle de calcul. Des situations préparatoires à l'algorithme de la division posée, inspirées de la littérature scientifique, sont ainsi induites.

Par ailleurs, l'enrichissement et la modulation des activités initiales ont conduit à un approfondissement des tâches, et donc à un allongement du temps de travail y étant alloué. En conséquence, afin que les apprentissages ne soient pas excessivement denses, l'unique situation (composée de trois parties, A, B, C) donne finalement lieu à deux séances distinctes de trois activités chacune (annexe 2 et annexe 3).

2.1.8 Choix de la dénomination des étiquettes

Contrairement à la situation de référence où la manipulabilité était facultative (à la demande des groupes en ressentant le besoin uniquement), tous les groupes ont à disposition des étiquettes manipulables. Ainsi, la manipulabilité du matériel rend plus aisée l'intérêt de réaliser le partage des étiquettes représentant les catégories d'unités en commençant par les unités de numérations les plus grandes (de gauche à droite).

De plus, les inscriptions des étiquettes sont modifiées au bénéfice de « 1 centaine », « 1 dizaine », « 1 unité ». Ainsi, ce changement opéré par rapport à la situation de base (Cap Maths), où les étiquettes « cent », « dix », « un » non manipulables figurant dans le manuel, permet aux apprenants d'associer plus facilement une quantité à une unité de numération. En effet, à l'oral, la lecture des étiquettes une fois le partage effectué offre une décomposition canonique du nombre (e.g «... centaines ... dizaines et ... unités ».).

2.1.9 Choix des nombres de la séance 1

L'intégralité des activités de la première séance porte sur le partage équitable de 413 étiquettes entre 3 joueurs. L'annexe 4 illustre chacune des étapes du partage.

Le nombre « 413 », représenté par quatre étiquettes « 1 centaine », une étiquette « 1 dizaine » et trois étiquettes « 1 unité », favorise les conversions entre unités de numérations et permet également d'obtenir un reste non nul à la fin du partage. Effectivement, chaque joueur perçoit une centaine. Trois centaines sont donc distribuées et une centaine est restante. Ainsi, une

première conversion est requise. L'étiquette « 1 centaine » est échangée contre dix étiquettes « 1 dizaine ». À la suite de cette conversion, les élèves disposent de onze étiquettes « 1 dizaine » à partager équitablement entre les joueurs. Neuf étiquettes « 1 dizaine » sont réparties équitablement (chaque joueur dispose de trois dizaines), et deux étiquettes « 1 dizaine » ne peuvent être données. En conséquence, une seconde conversion d'unités de numération est attendue. Ce sont deux dizaines (deux étiquettes « 1 dizaine ») qui sont convertis afin d'obtenir vingt unités, donc vingt étiquettes « 1 unité ». Dès lors, vingt-trois unités se voient être partagées équitablement entre les 3 joueurs prenant part au partage. Tous les joueurs disposent alors de sept étiquettes « 1 unité » (vingt et une unités sont distribuées), et il reste deux étiquettes « 1 unité ». Le partage prend fin.

De surcroît, le binôme de nombres (nombre d'étiquettes et nombre de joueurs) a été choisi de manière à ce qu'à chaque étape du partage, l'unité de numération la plus grande puisse être partagée une première fois avant de subir une conversion d'unités de numération. Cet impératif est assuré par la situation de partage mettant en jeu 413 étiquettes et 3 joueurs. Effectivement, les centaines sont d'abord partagées puis une conversion est réalisée. Ensuite, les dizaines sont distribuées équitablement et une conversion est effectuée avec celles restantes. Pour finir, les unités sont partagées entre les joueurs et un reste est identifié.

2.1.10 Choix des nombres de la séance 2

La deuxième séance repose sur la situation de partage équitable (avec manipulabilité du matériel) puis la division posée de 583 par 4. L'annexe 5 illustre chacune des étapes du partage.

Le nombre « 583 », représenté par cinq étiquettes « 1 centaine », huit étiquettes « 1 dizaine » et trois étiquettes « 1 unité », favorise les conversions entre unités de numérations et permet également d'obtenir un reste non nul à la fin du partage de la même manière que précédemment. Effectivement, chaque joueur perçoit une centaine. Quatre centaines sont donc distribuées et une centaine est restante. Ainsi, une première conversion est requise. L'étiquette « 1 centaine » est échangée contre dix étiquettes « 1 dizaine ». À la suite de cette conversion, les élèves disposent de dix-huit étiquettes « 1 dizaine » à partager équitablement entre les joueurs. Seize étiquettes « 1 dizaine » sont réparties équitablement (chaque joueur dispose de quatre dizaines), et deux étiquettes « 1 dizaine » ne peuvent être données. En conséquence, une seconde conversion d'unités de numération est attendue. Ce sont deux dizaines (deux étiquettes « 1 dizaine ») qui sont convertis afin d'obtenir vingt unités, donc vingt étiquettes « 1 unité ». Dès lors, vingt-trois unités se voient

être partagées équitablement entre les 4 joueurs prenant part au partage. Tous les joueurs disposent alors de cinq étiquettes « 1 unité » (vingt unités sont distribuées), et il reste trois étiquettes « 1 unité ». Le partage prend fin.

Le couple de nombres (583 et 4) utilisé dans la division posée (figure 20) répond à plusieurs impératifs également. Relevant d'une situation d'introduction à l'algorithme de la division posée, et donc afin de limiter les difficultés supplémentaires, le diviseur doit permettre l'identification d'un dividende partiel simple à chacune des boucles de l'algorithme. Ainsi, le premier dividende partiel identifié est constitué d'un chiffre unique (celui des centaines, « 5 »). Ensuite, seul un chiffre du dividende partiel est abaissé par boucle (le chiffre des dizaines dans un premier temps « 8 », puis celui des unités, « 3 », lors de la boucle suivante).

$$\begin{array}{r|l}
 583 & 4 \\
 -4 & 145 \\
 \hline
 18 & \\
 -16 & \\
 \hline
 23 & \\
 -20 & \\
 \hline
 3 &
 \end{array}$$

Figure 20. Division euclidienne de 583 par 4.

De plus, les restes obtenus à chacune des boucles de l'algorithme de la division posée ne doivent pas être trop importants afin réduire les contraintes matérielles. En effet, les conversions d'unités de numération nécessitent une quantité importante d'étiquettes.

Autrement, la division de 583 par 4 facilite l'identification des chiffres et nombres évoqués, particulièrement lors des mises en commun se déroulant à l'oral. En effet, les différents nombres apparaissant lors de la réalisation de l'algorithme de la division posée sont uniques (n'apparaissent qu'une seule fois au cours du calcul). En revanche, même si certains chiffres (« 4 », « 1 », « 5 ») sont retrouvés plusieurs fois (figure 21), les rôles différents qu'ils occupent permettent d'identifier aisément celui dont il est sujet. Effectivement, le chiffre « 4 » désigne le diviseur, le produit issu de la multiplication du diviseur et du premier chiffre du quotient partiel qui est retranché au dividende partiel (qui est 5) lors de la première boucle de l'algorithme, ainsi que le chiffre des dizaines du

quotient. Le chiffre « 1 » désigne le premier chiffre du quotient mais aussi le reste obtenu à la fin de la réalisation de la première boucle de la technique usuelle de calcul. Le chiffre « 5 » réfère à la fois au chiffre des centaines du dividende ainsi qu'au chiffre des unités du quotient.

$$\begin{array}{r|l}
 583 & 4 \\
 -4 & 145 \\
 \hline
 18 & \\
 -16 & \\
 \hline
 23 & \\
 -20 & \\
 \hline
 3 &
 \end{array}$$

Figure 21. Identification des chiffres similaires dans la division posée de 583 par 4.

2.1.11 Réalisation des mises en commun

Les mises en commun se déroulent après les activités de recherche. Le matériel servant lors de ces retours collectifs est le même que ceux dont les élèves disposent.

De prime abord, il est demandé aux élèves de dire la valeur de chacune des parts perçue par les joueurs et de spécifier la quantité restante. Ce sondage permet de mettre en évidence les réponses aberrantes ainsi que d'anticiper l'organisation de la mise en commun.

Pour chacune des situations, plusieurs binômes sont sollicités afin de décrire tout ou partie de leur procédure. En fonction des explications données, l'enseignante réalise la situation au tableau. Chacune des étapes est verbalisée afin de guider les élèves vers l'utilisation d'un discours prenant appui sur des formulations (non utilisation du terme rentre) et termes spécifiques (partage équitable, conversion, échange, dividende, diviseur, quotient, reste...). Cette manière de procéder oblige les élèves à être le plus précis possible dans les instructions orales transmises.

Finalement, chaque mise en commun donne lieu à une synthèse permettant de faire état de ce qui a été fait, mais aussi de ce qui est à retenir.

2.2 Analyse *a priori* de la situation d'apprentissage

L'opérationnalisation de la recherche se fait par l'intermédiaire de deux séances. La première séance permet d'amorcer l'introduction de l'algorithme de la division posée en ayant recours à la manipulation, mais aussi en prenant appui sur le discours l'accompagnant. De plus, l'introduction d'un tableau d'organisation des données, servant d'intermédiaire avant l'introduction

de la technique usuelle de calcul, se présente comme une aide vers l'attribution du sens aux boucles de l'algorithme. Autrement, la deuxième séance se centre sur la disposition des nombres intervenant dans la situation de partage dans un second tableau. Ce dernier est destiné à évoluer afin de mener progressivement à la présentation usuelle de la division posée.

2.2.1 Séance 1

La première séance s'articule autour de trois activités à réaliser en binômes. L'activité 1 compte un temps de présentation de la situation de partage qui sera retrouvée dans l'ensemble des tâches de la séance. Autrement, les activités ont une organisation immuable où la phase de recherche en groupe donne lieu à un temps de mise en commun avec l'ensemble de la classe.

2.2.1.1 La situation de partage

La situation de partage en jeu dans les différentes activités est la même pour l'intégralité de la séance. La situation de recherche (s'appuyant sur de la manipulation), porte sur une situation de division-partition. Effectivement, cette condition se présente comme un impératif puisqu'il n'est pas possible matériellement de manipuler une division-quotition. En effet, pour que ça soit réalisable en obtenant un petit quotient, le choix des valeurs mènerait à de trop petits nombres.

La situation de partage équitable présentée aux élèves met en jeu 3 joueurs. Les élèves doivent procéder au partage des 413 points représentés par l'ensemble des étiquettes. Tous les binômes disposent d'un paquet d'étiquettes manipulables contenant quatre étiquettes où il est inscrit « 1 centaine », une étiquette « 1 dizaine » ainsi que trois étiquettes « 1 unité ». Afin de mener à bien le partage, les élèves ont à disposition au fond de la classe une banque d'étiquettes (ayant la même dénomination) leur permettant d'effectuer des échanges pour réaliser des conversions entre unités de numération.

La manipulabilité du matériel rend plus aisée l'intérêt de réaliser le partage des étiquettes représentant les catégories d'unités en commençant par les unités de numérations les plus grandes (de gauche à droite). De plus, cela permet aux apprenants d'associer plus facilement une quantité à une unité de numération. En effet, à l'oral, la lecture des étiquettes une fois le partage effectué offre une décomposition canonique du nombre (e.g «... centaines ... dizaines et ... unités »).

2.2.1.2 Tableau d'organisation des données

L'introduction d'un tableau permettant d'organiser les informations relatives au partage est réalisée lors de la mise en commun de la deuxième activité.

Cet apport permet de mettre en évidence les principes de la présentation conventionnelle de l'algorithme de la division posée. Ainsi, le tableau qui est présenté aux élèves s'inspire d'un des tableaux présents dans les travaux de recherche de Coquand (1977), et particulièrement du dernier auquel l'auteur fait appel avant l'introduction de la potence (figure 22). Cependant, nous avons fait le choix de le simplifier. En effet, Coquand (1977) fait apparaître les encadrements relatifs au choix du dividende partiel ainsi que le résultat des multiplications précédant les soustractions visibles dans l'écriture usuelle de l'algorithme de la division posée, ce que nous n'avons pas jugé essentiel concernant notre recherche.

<i>Encadrements</i>	<i>Nombres restants</i>	<i>Somme due</i>
$19\ 600 < 20\ 608 < 22\ 400$	$20\ 608$	
$28 \times 700 < 20\ 608 < 28 \times 800$	$- 19\ 600$	700
$840 < 1\ 008 < 1\ 120$	$\underline{1\ 008}$	
$28 \times 30 < 1\ 008 < 28 \times 40$	$- 840$	$+ 30$
$28 \times 6 = 168$	$\underline{168}$	
$28 \times 6 = 168$	$- 168$	$+ 6$
	$\underline{0}$	$\underline{736}$

Figure 22. Tableau proposé dans les travaux de recherche de Coquand Mise en place de l'algorithme de la division au CMI (1977).

Ce tableau (figure 23) place le dividende ainsi que le diviseur afin de familiariser les élèves à la disposition conventionnelle visible dans l'algorithme de la division posée. Ensuite, des sections sont consacrées aux divisions des dividendes partiels. Enfin, deux cases sous le diviseur sont respectivement attribuées à l'écriture des quotients partiels ainsi que le quotient.

En amont de la manipulation, les élèves renseignent dans le tableau les informations dont ils disposent. En conséquence, le dividende est inscrit à gauche du tableau, chaque chiffre étant placé dans la colonne relative à l'unité de numération qui lui est destinée. Les élèves positionnent également le diviseur à droite du tableau. Ce placement imposé aux élèves correspond à une première organisation spatiale des nombres en fonction de leur rôle dans la division. Chaque

nombre possède une place relative à l'organisation spatiale de la technique usuelle de l'algorithme de la division posée. Ce choix didactique est une étape avant l'apparition de la potence telle qu'elle est présente dans l'organisation conventionnelle. Elle permet aux élèves de comprendre et de donner du sens à la présence de la potence afin que l'apprentissage de l'algorithme de la division posée soit facilitée. Aussi, le tableau éclaire la compréhension du fonctionnement de la division permettant de préparer les élèves à la réalisation de la technique usuelle de calcul.

Les élèves complètent le tableau (figure 24) au fur et à mesure qu'ils réalisent la manipulation des étiquettes. Ainsi, le produit du quotient trouvé et du diviseur est retranché au dividende partiel. Les quotients partiels sont renseignés au fur et à mesure en étant présentés en quinconce. Aussi, les unités de numérations U sont adjointes au quotient partiel identifié. Finalement, les quotients partiels sont additionnés (en tenant compte de l'unité de numération) afin d'extraire le quotient de la division.

C	D	U	
5	8	3	4

Figure 23. Tableau donné aux élèves inspiré de l'article de Coquand (1977).

C	D	U	
5	8	3	4
-4			1 centaine
1	8		+
-1	6		4 dizaines
	2	3	+
	-2	0	5 unités
		3	1 4 5

Figure 24. Tableau donné aux élèves inspiré de l'article de Coquand (1977) étant complété.

2.2.2 Séance 2

La deuxième séance compte trois activités dont seule la première se réalise en binôme. Par ailleurs, les groupes sont reconstitués en vue de la première activité de la deuxième séance. Comme précédemment, une phase collective de mise en commun succède à la phase de recherche.

2.2.2.1 La situation de partage

De la même manière qu'à la première séance, la situation de partage en jeu est la même pour l'ensemble des activités de la session (sauf pour la fiche d'exercices). Seulement, ce n'est qu'à la première activité que les binômes ont recours à la manipulation du matériel.

Les élèves doivent procéder au partage équitable de 583 entre quatre joueurs. Dès lors, ils disposent de cinq étiquettes « 1 centaine », huit étiquettes « 1 dizaine » ainsi que trois étiquettes « 1 unité ». La banque d'étiquettes est disponible au fond de la classe afin de réaliser les conversions requises pour la réalisation du partage.

2.2.2.2 Introduction de la technique usuelle de calcul

La seconde activité de la séance repose sur l'introduction d'une division posée selon la technique usuelle de calcul. Plus aucune étiquette (manipulable ou non) n'est à disposition des élèves. Ainsi, individuellement, les élèves ont à effectuer la division de 583 par 4. La première boucle du calcul est renseignée ainsi que le discours l'accompagnant en prenant pour modèle celui présenté par Cap Maths. Les élèves doivent poursuivre l'opération.

Bien que l'algorithme de la division est dès lors classiquement introduit, le tableau avec lequel les élèves se sont familiarisés est en partie retrouvé. Même si le tableau évolue, les élèves disposent de suffisamment de repères afin que les modifications permettant de passer du tableau à la potence soient progressives. En effet, seuls certains traits du tableau sont effacés afin de laisser entrevoir la potence usuelle. Les nombres conservent également leurs positions. Le quotient est conservé sous forme d'addition (figure 25) avant d'apparaître en nombre entier.

5 8 3	4	
-4	1 centaine	
1 8		
-1 6	+ 4 dizaines	
2 3		
- 2 0	+ 5 unités	
3	145	

Figure 25. Division posée avec quotient sous forme d'addition.

2.2.3 Procédures attendues

1. Les élèves prennent appui sur des procédures de distributions basiques en distribuant à une main et / ou étiquette par étiquette.

2. Les élèves ont recours à des procédures de distributions expertes en distribuant avec deux mains et / ou plusieurs étiquettes en même temps pour une part.

3. La disposition spatiale du matériel de manipulation permettant de représenter chacune des parts est effectuée en lignes, en marquant une séparation évidente entre chacune des parts.

4. La disposition spatiale du matériel de manipulation permettant de représenter chacune des parts est effectuée en colonnes, en marquant une séparation évidente entre chacune des parts.

5. Les élèves regroupent ensemble (disposition groupée d'étiquettes) les étiquettes de la même unité de numération.

6. Les élèves effectuent des groupements d'étiquettes par paquets de dix étiquettes d'une même unité de numération.

7. La valeur d'une part est déterminée par comptage des étiquettes de chacune des unités de numération.

8. La valeur d'une part est déterminée par comptage des étiquettes sans prendre en considération les unités de numération.

9. Une procédure attendue des élèves est qu'ils procèdent au partage des étiquettes en débutant par la plus grande unité de numération disponible. Dès lors qu'un maximum d'étiquettes de la plus grande unité de numération a été distribuée équitablement entre les membres prenant part au partage, la procédure est répétée avec l'unité de numération inférieure la plus grande.

10. Les élèves réalisent le partage des étiquettes sans commencer par la plus grande unité de numération.

11. Une procédure attendue des élèves est le recours aux échanges d'étiquettes. En effet, les différents partages ne sont possibles que si les élèves réalisent des conversions d'étiquettes contre d'autres étiquettes représentant la même valeur. Ainsi, 1 centaine correspond à 10 dizaines, qui correspond à 100 unités (de même, 1 dizaine est égal à 10 unités). Seulement, nous attendons que les élèves aient recours aux conversions d'étiquettes dès lors qu'ils ont distribué autant d'étiquettes que possible de la plus grande unité de numération permise. Cela permet de réduire les conversions à opérer puis les groupements par dix d'unités de numération en cas de conversions superflus.

12. Les complétions des tableaux sont effectuées parallèlement aux manipulations des étiquettes. Ainsi, à une manipulation correspond un renseignement dans les tableaux d'organisation des données.

13. Les élèves réalisent le partage des étiquettes dans un premier temps, puis complètent les tableaux.

2.3 Analyse *a posteriori* de la situation d'apprentissage

Le recueil des données lié à la mise en œuvre des deux séances menées en classe est analysé afin de mettre en évidence des tendances et extraire des éléments pertinents. Ainsi, le traitement des résultats prend appui sur une grille d'analyse (annexe 6). Les grilles d'analyses complétées pour l'ensemble des groupes et des activités sont également retrouvées en annexe 9.

2.3.1 Les situations de partage impliquant des manipulations

À plusieurs reprises, que cela soit imposé par la consigne ou à l'appréciation des groupes, les élèves ont recours à la manipulation d'étiquettes représentant des unités de numération. En conséquence, les élèves disposent du paquet d'étiquettes distribué en début d'activité. Afin de mener à bien le partage, les binômes doivent procéder à la distribution des étiquettes tout en les organisant spatialement, puis en veillant parallèlement à réaliser les conversions nécessaires. Or, l'accumulation du matériel dans l'espace limité de la table (ou plusieurs tables collées) est parfois source de difficultés liées à la gestion du nombre d'étiquettes ainsi qu'à leur taille. En effet, l'espace dont les groupes disposent s'avère quelquefois trop restreint pour accueillir les étiquettes de la manière souhaitée. Nous remarquons que les groupes qui réalisent le partage sans commettre d'erreurs dans les conversions entre unités de numération ont tendance à disposer les étiquettes en colonnes, les unes en dessous des autres. Les binômes commettant des erreurs dans les conversions d'unités de numération, notamment ceux qui ont plus d'étiquettes que nécessaire, sont dans l'obligation d'organiser le partage autrement. Les erreurs commises par le groupe 6 (séance 1) lors des conversions entre unités de numération, et donc des échanges d'étiquettes, l'ont orientés vers une organisation en lignes. Ce mode d'organisation leur permet d'étaler le matériel sur la longueur de deux tables (figure 26).

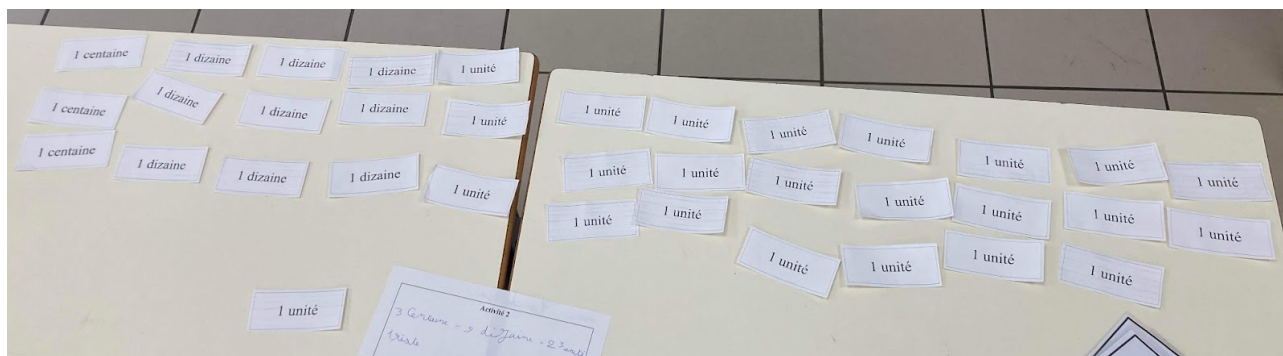


Figure 26. Disposition des étiquettes en lignes.

De la même manière, lorsque les groupes réalisent des conversions qui ne sont pas nécessaires et qu'ils se retrouvent avec un surnombre d'étiquettes d'une unité de numération sans effectuer une conversion de dix unités de numération inférieures en une unité de numération supérieure, l'organisation spatiale des étiquettes est influencée. En effet, afin de pallier la contrainte spatiale liée au manque de place au regard du nombre important d'étiquettes, des groupements sont effectués (figure 27). Par ailleurs, le groupement correspondant à dix étiquettes d'une unité de numération permet aussi au groupe d'avoir une idée davantage visuelle de la valeur pour une part.

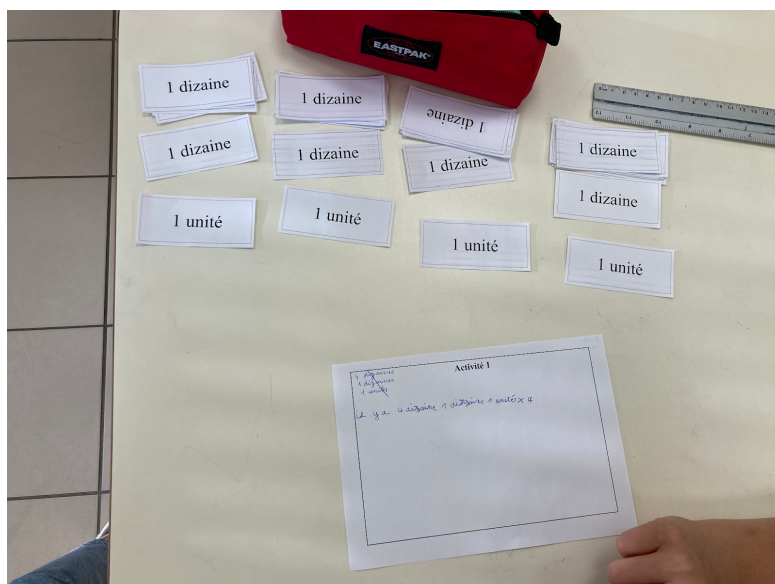


Figure 27. Organisation par groupements de dix étiquettes de même unité de numération.

La contrainte spatiale conduit des groupes à réaliser le partage en ligne dans un premier temps, puis à regrouper les étiquettes d'une même unité de numération afin de réduire la place occupée par le matériel (figure 28). Seulement, bien que le nombre de parts intervenant dans la partage soit visible, cela n'est pas le cas pour la valeur d'une part. Cette organisation par groupement d'étiquettes d'une même unité de numération peut par la suite être à l'origine de malentendus relatifs à l'aspect décimal de la numération. En effet, un groupement d'étiquettes correspond à une catégorie d'unité de numération et non à un groupement de dix étiquettes d'une unité de numération pouvant être convertie en une unité de numération directement supérieure.

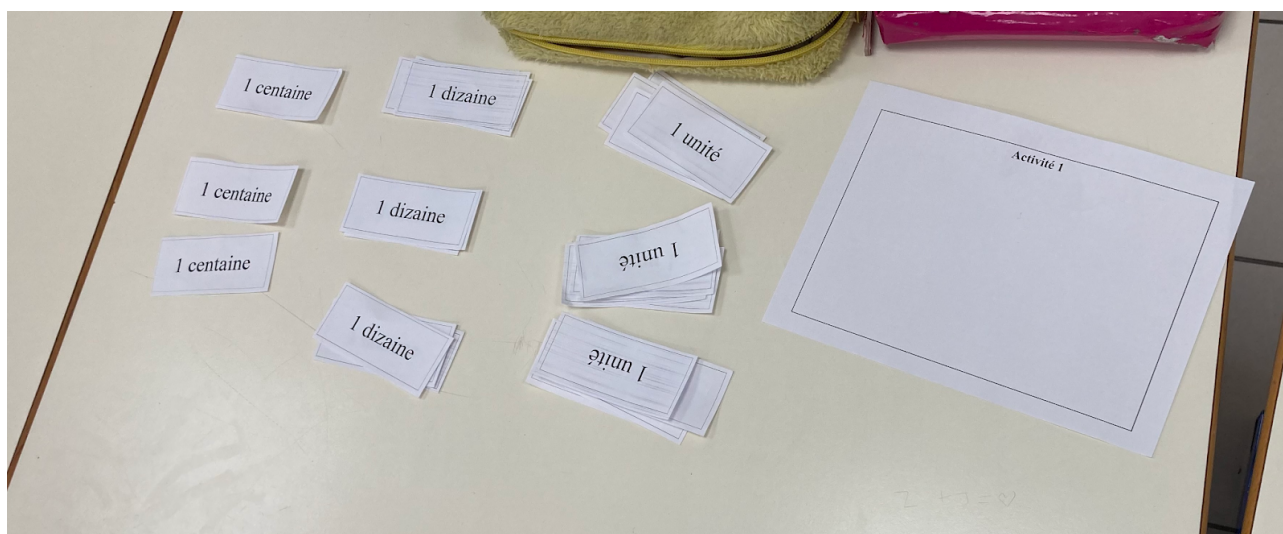


Figure 28. Organisation par groupement d'étiquettes d'une même unité de numération.

Par ailleurs, aucune consigne n'est précisée quant à l'organisation des étiquettes. Seulement la disposition du matériel faite par les binômes traduit majoritairement la situation de partage équitable. En effet, des lignes, des colonnes ou encore des tas correspondant au nombre de part, c'est-à-dire au diviseur, ont été observés. De plus, la valeur du quotient est lisible puisque certains groupes ont respecté l'ordre usuel des unités de numération soit centaine, dizaine, unité (figure 29).

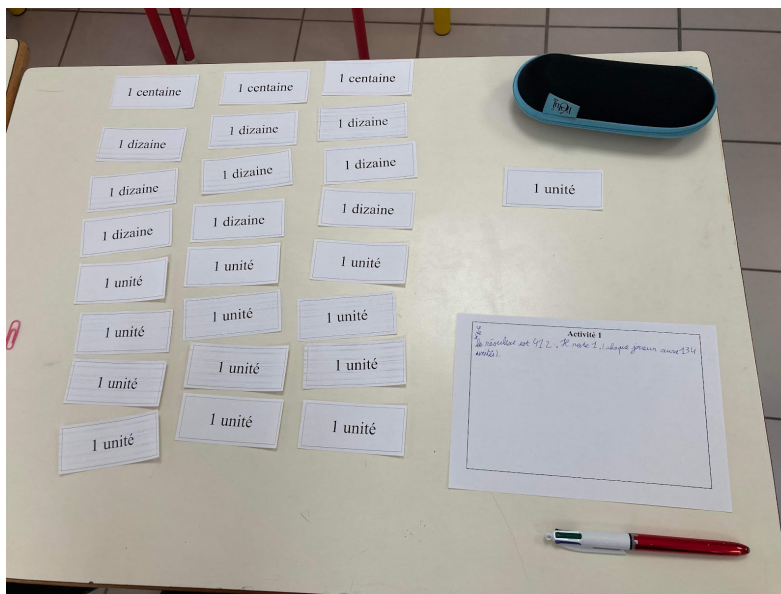


Figure 29. Disposition respectant l'ordre des unités de numération dans chaque part.

En revanche, on observe que certains groupes ont organisé aléatoirement les unités de numération au sein d'une part (figure 30).

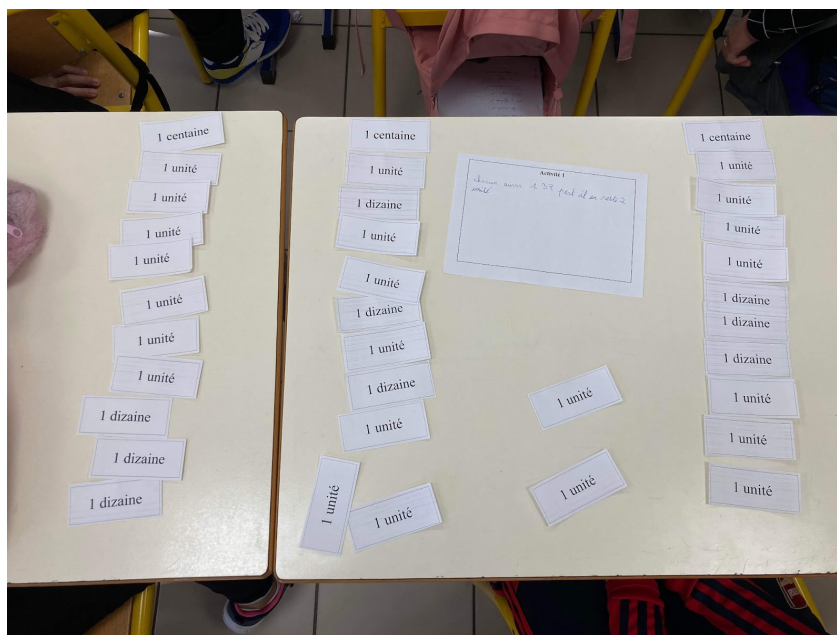


Figure 30. Disposition aléatoires des unités de numération dans chaque part.

Bien que les unités de numération ne soient pas systématiquement organisées en tenant compte de l'ordre des unités de numération, les connaissances des élèves leur ont permis de renseigner la valeur trouvée pour une part en tenant compte cette fois-ci des unités de numération.

2.3.2 Vérifications après réalisation du partage

Bien que les manipulations traduisent pour la majorité la situation de partage, certains groupes sont amenés à vérifier leurs résultats. Ainsi, les procédures de vérification observées prennent différentes formes.

Certains groupes privilégient des vérifications visuelles telle qu'une correspondance spatiale des étiquettes pour s'assurer de l'égalité de la valeur de chaque part. Les élèves pointent les étiquettes en réalisant des allers-retours avec leurs doigts afin de vérifier si celles se trouvant au même niveau (spatialement) ont bien la même valeur.

Des procédures de comptage sont également utilisées par les élèves afin de s'assurer de la valeur totale des étiquettes. En effet, une contrainte du partage exprimée clairement aux élèves est de conserver la valeur initiale du partage. Ainsi, pour le partage de 413 par 3 par exemple, la valeur « 413 » doit être conservée tout du long de la réalisation du partage. Cette vérification est traduite par certaines phrases de conclusion : « On a trouver 3 centaine, 9 dizaine et 21 unité il nous reste 2 reste. Chacun a 137 points. ». En énumérant l'ensemble des étiquettes, ils s'assurent de la quantité totale pour ensuite donner la valeur d'une part.

Une fois le partage terminé, certains groupes réalisent sur leur ardoise une addition afin de vérifier l'exactitude des valeurs trouvées. Ainsi, la valeur du quotient (valeur d'une part) est ajoutée autant de fois qu'il y a de parts dans le partage en additionnant le reste. Si la somme trouvée est égale à la valeur totale du partage, alors le partage réalisé est correct (figure 31).

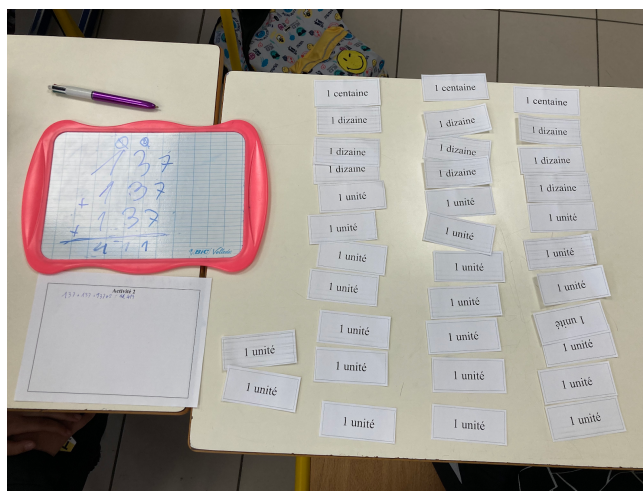


Figure 31. Vérification des valeurs trouvées à l'aide d'une addition posée.

2.3.3 De la manipulation vers l'algorithme écrit de la division posée

La dernière activité de la première séance ainsi que la première activité de la seconde séance assurent le passage de la manipulation vers la forme écrite de l'algorithme de la division posée. Lors de ces deux activités les élèves réalisent un partage en organisant les nombres dans un tableau (tableau évolutif laissant apparaître la potence au fil du temps) afin de donner du sens à la place de chaque terme dans la technique usuelle de calcul.

Les nombres de la situation de partage sont identiques pour l'ensemble des activités d'une même séance. Ce facteur, longuement réfléchi lors de la conception des séances, fait émerger certaines procédures d'élèves. En effet, les élèves se souviennent des manipulations, des conversions associées mais également des nombres impliqués lors du partage (les restes partiels, les dividendes partiels, le quotient et le reste). Ceci peut être perçu comme un frein dans l'apprentissage, cependant, ce fait montre lors de la mise en œuvre que les élèves se concentrent davantage sur la disposition spatiale ainsi que sur l'organisation des nombres dans le tableau. En effet, les élèves nomment certaines cases afin de s'organiser. Par exemple, un groupe (figure 32) a noté sur le tableau « valeur d'une part » afin d'identifier la case qui correspond au quotient. Le tableau disposant des traits qui représentent la ligne permettant d'inscrire le résultat de la soustraction a parfois posé problème aux élèves. Bien qu'ils aient réalisé correctement chacune des étapes de la division, les nombres apparaissant successivement sous le dividende ne sont pas toujours positionnés au bon endroit, au regard du trait marquant la soustraction (figure 32). Par ailleurs, les élèves ayant compris que le reste doit être visible sur la dernière ligne du tableau, ils sont amenés à placer trois nombres entre deux traits du tableau représentant les soustractions. Nous remarquons dans ce cas que les groupes ne font pas apparaître le trait soustractif entre les termes qui sont à soustraire, et le résultat de l'opération. L'erreur de placement des nombres dans le tableau engendre ainsi des confusions sur le placement des signes moins, comme cela est conventionnellement attendu dans la soustraction posée (figure 32).

C	D	U	
4	1	3	3
			3
3	0	0	1 centaine
1	1	3	3 dizaines
	9	0	7 unités
	0	3	
	0	7	
		2	137

Activité 3

$ \begin{array}{r} 300 \\ - 113 \\ \hline 90 \\ - 23 \\ \hline 21 \\ - 21 \\ \hline = 2 \end{array} $	<div style="margin-bottom: 10px;">dividende 413</div> <div style="margin-bottom: 10px;">diviseur 3</div> <div style="margin-bottom: 10px;">quotient 137</div> <div>reste 137</div>
--	--

Figure 32. Réalisation correcte de l'algorithme de la division posée avec erreurs liées au positionnement de certains nombres et au trait soustractif.

Lors de la première activité de la seconde séance, la tâche est identique à la dernière proposée lors de la séance 1. En revanche, les nombres intervenant dans le partage sont différents. Les allers-retours entre la manipulation des étiquettes et la forme écrite de l'algorithme aident les élèves à l'attribution de sens dans la disposition spatiale du tableau.

En revanche, la manipulation et la complétion du tableau d'organisation des données sont abordées de manières différentes par les binômes.

Certains complètent le tableau parallèlement à la manipulation. En effet, ces groupes réalisent premièrement la distribution des étiquettes « 1 centaine » puis renseignent dans le tableau, au niveau du quotient, le chiffre des centaines trouvé. Ensuite, ils effectuent la soustraction de la valeur distribuée sous le dividende partiel. Si besoin, les élèves réalisent les échanges d'étiquettes nécessaires à la poursuite du partage équitable. Cette procédure est répétée pour chaque unité de numération.

D'autres groupes réalisent dans un premier temps la manipulation indépendamment du tableau. Le passage par la manipulation comme traduction de la situation de partage est donc nécessaire pour eux. Puis, dans un second temps, ils complètent le tableau avec les valeurs trouvées lors de la manipulation. En conséquence, le partage des étiquettes constitue un appui majeur pour

les élèves afin de réaliser correctement l'algorithme de la division posée. Les groupes ont connaissance des nombres devant figurer dans la pose de la division. Ainsi, la réalisation de la technique usuelle de calcul est facilitée mais permet également aux élèves de s'apercevoir plus aisément d'une potentielle erreur dans l'une des boucles.

Enfin, certains groupes n'ont pas du tout recours à la manipulation afin de compléter le tableau. En effet, ils réalisent la division posée à l'aide du tableau puis rédigent la phrase réponse.

Quelquefois par souci de contrat didactique, des groupes effectuent la manipulation après la complétion du tableau afin de respecter la consigne donnée. La familiarisation de ces élèves avec la technique usuelle de l'algorithme de la division posée est suffisante afin de se détacher entièrement de la manipulation.

2.3.4 Introduction progressive de la technique usuelle de calcul

La potence présente dans la technique usuelle de calcul de la division posée n'est pas apparue immédiatement dans nos activités. En effet, bien qu'elle soit en partie considérée comme culturelle, il est primordial d'introduire la potence en lui donnant du sens. Pour cela, le tableau d'organisation des données proposé a évolué au cours des activités afin de laisser apparaître progressivement la potence. Il est expliqué aux élèves que les autres traits présents dans le premier tableau d'organisation des données sont coûteux et rendent moins lisible le calcul. La simplification du tableau est immédiatement comprise par les élèves et n'est pas perçue comme un obstacle à la compréhension des nombres y figurant.

D'un point de vue des nombres, certains choix faits lors de la préparation des séances ont dû être modifiés afin d'adapter les enseignements aux besoins des élèves de la classe. En effet, les soustractions intermédiaires et intégrées à l'algorithme de la division permettant d'obtenir le reste partiel laissent initialement apparaître exclusivement le chiffre (ou les chiffres, en fonction du dividende partiel identifié) de l'unité de numération concernée. Seulement, beaucoup d'interrogations et d'incompréhensions de la part des élèves liées à leurs connaissances sur les unités de numération ont nécessité l'inscription des zéros permettant de représenter les unités de numération jusqu'au chiffre des unités afin de réaliser les soustractions intermédiaires (figure 33). Bien que les zéros disparaîtront plus tard dans le processus d'apprentissage, ils sont à cet instant bénéfiques dans l'attribution de sens et donc à la compréhension de l'algorithme écrit comme le met en évidence l'extrait de verbatim de la mise en commun de l'activité 3 de la séance 1 (figure 34)

C	D	U	
4	1	3	3
- 3	0	0	1 centaine
- 1	1	3	3 dizaines
	9	0	7 unités
	2	3	
-	2	1	
		2	137

Figure 33. Inscription de zéros jusqu'au chiffre des unités.

Mise en commun Séance 1 activité 3 :

Enseignante : Dans mon tableau, j'ai quatre-cent-treize à partager en trois. Qu'est-ce que je fais ?

Élève 8 : On fait quatre-cent-treize moins trois-cent.

Enseignante : Pourquoi moins trois-cent ?

Élève 8 : Parce que je fais quatre moins trois.

Élève 1 : Et que trois centaines c'est trois cents unités.

Figure 34. Verbatim mise en commun Séance 1 activité 3.

Par ailleurs, afin de parvenir à la réalisation de l'algorithme de la division posée de la manière la plus efficace et usuelle, l'intérêt d'enlever les zéros est présenté aux élèves lors de l'activité 2 de la séance 2 (figure 35). Le fait que les élèves aient pu se familiariser une première fois avec l'algorithme de la division posée en prenant appui sur des connaissances utiles pour la réalisation des boucles a permis de les orienter progressivement vers la méthode experte de la division posée. Les élèves instituent plus aisément du sens aux choix faits dans les boucles du calcul.

Mise en commun Séance 2 activité 2 :

Enseignante : Comme toute à l'heure, on partage cinq-cent-quatre-vingt-trois en quatre.

Élève 1 : Une centaine chacun donc j'en distribue quatre. Ça fait quatre-cents. Donc cinq-cent-quatre-vingt-trois moins quatre-cents.

Enseignante : Tout à fait ! Mais on peut gagner du temps. Maintenant on va voir qu'on n'est pas obligés de marquer les zéros. On peut juste soustraire les unités de numération que l'on regarde. Donc là, je peux faire cinq centaines moins quatre centaines. Combien ça fait de centaines restantes ?

Élève 1 : Une centaine qui reste.

Enseignante : Oui ! Ensuite, on abaisse le chiffre des dizaines. Ça fait dix-huit dizaines. Qu'est-ce que je fais maintenant ?

Élève 3 : En dessous de dix-huit on marque cent-soixante.

Enseignante : On n'est plus obligé de mettre le zéro ensuite. Qu'est-ce que je peux marquer ?

Élève 3 : Juste seize alors.

Figure 35. Verbatim mise en commun Séance 2 activité 2.

Afin que les élèves comprennent bien à quoi correspond chacun des chiffres du quotient, dans les premières activités amenant à la pose de la division, ce nombre est inscrit de manière décomposée. En effet, dès lors qu'un chiffre du quotient partiel est trouvé, il est inscrit avec le nom de l'unité de numération correspondante. Une fois que l'opération est terminée, la valeur d'une part correspond à la recombinaison du quotient (e.g 1 centaine + 3 dizaines + 7 unités renvoie au quotient 137). Progressivement au cours des activités, il est demandé aux élèves d'écrire le quotient directement sous la forme d'un nombre. Bien que la forme numérique soit présentée comme plus efficace, on observe que pour une majorité d'élèves, la forme décomposée en unités de numération est privilégiée. Cependant, l'entraînement à la réalisation de l'algorithme de la division posée permettra sans aucun doute aux élèves d'y parvenir.

2.3.5 La place du discours

Les activités des deux séances donnent lieu à des échanges enseignante-élèves se réalisant oralement. De manière générale, les élèves s'appuient sur les formulations utilisées par l'enseignant afin de verbaliser leurs procédures. Le vocabulaire est également repris. En effet, les élèves utilisent les termes relatifs au nom des unités de numération ainsi qu'à la désignation des termes en jeu dans la division. Le discours de l'enseignante facilite l'appropriation pour les élèves du vocabulaire

adéquat (figure 36).

Institutionnalisation Séance 2 activité 1 :

Enseignante : Comment on l'appelle cinq-cent-quatre-vingt-trois ?

Élève 3 : C'est le dividende ?

Enseignante : Tout à fait.

Enseignante : Le quatre, comment on l'appelle ?

Élève 4 : Le diviseur.

Enseignante : La valeur de chaque joueur, elle s'appelle comment ?

Élève : Le quotient.

Enseignante : Et finalement, le trois ?

Élève 3 : Le reste.

Figure 36. Verbatim institutionnalisation Séance 2 activité 1.

Par ailleurs, l'attention portée par l'enseignante à la précision de son discours afin de limiter les malentendus langagiers, notamment ceux inhérents à l'utilisation du terme « rentre », limite son emploi par les élèves. En effet, aucune occurrence n'est relevée du côté des élèves.

La seconde activité de la deuxième séance s'appuie sur le discours écrit. En effet, sous la division posée à réaliser, un texte est joint afin d'apporter des explications aux étapes de la première boucle de l'algorithme. Seulement, lors de la mise en commun, aucun élève ne s'appuie sur ce paragraphe afin d'expliquer la poursuite de l'algorithme. Malgré tout, ils emploient des termes précis et experts afin de justifier leurs procédures. Probablement, la complexité du texte rend difficile son appropriation. Sa bonne compréhension par tous n'est pas assurée. Certains élèves effectuent sûrement la division en prenant appui sur les connaissances préalables plutôt que sur l'explication relative à la première boucle.

Résultats et discussion

Le travail de recherche s'intéresse à l'articulation entre le langage, la manipulation et l'algorithme de la division posée, en lien avec la construction du sens chez les élèves.

Dans le cadre des deux séances menées en classe de CM1, les données sont recueillies de trois manières. En effet, la captation audiovisuelle de l'ensemble de la classe donne lieu à l'analyse des discours des élèves lors des temps de mise en commun avec le groupe-classe. Les photographies des dispositions spatiales des étiquettes faites par les élèves mettent en avant les procédures auxquelles ils ont recours pour réaliser et donner du sens au partage. Enfin, le recueil des productions écrites des élèves donne à voir le vocabulaire employé dans les phrases-réponses pour les situations de partage, mais aussi leur compréhension à l'égard de l'algorithme de la division posée.

L'analyse de ces données permet de se prononcer quant aux hypothèses émises dans le cadre de ce travail de recherche.

La première hypothèse selon laquelle les manipulations permettant de représenter chacune des boucles de l'algorithme de la division posée aident l'attribution du sens à la technique usuelle de calcul est validée. Ainsi, comme avancé par Perrin-Glorian (1995), la possibilité de représenter matériellement l'algorithme de la division posée par une situation de partage équitable requérant l'usage d'un matériel manipulable constitue une aide pour les élèves. Les séances réalisées en classe montrent que certains élèves utilisent la manipulation conjointement à l'algorithme écrit. En effet, chaque boucle de l'algorithme étant traduisible par une manipulation, les élèves transfèrent le sens de la division donné par la manipulation à l'algorithme écrit de la division posée. Dans le cadre des deux séances, les élèves ont la possibilité d'utiliser la manipulation des étiquettes à chaque phase. La manipulation imposée dans les premières activités est ensuite simplement proposée comme une aide. Seulement, l'utilisation des étiquettes est fortement conseillée aux groupes présentant des difficultés. En outre, la manipulation permettant de représenter chacune des boucles de l'algorithme de la division posée participe à l'attribution de sens de l'algorithme de la division posée.

La visualisation est une procédure grandement utilisée par les élèves dans la réalisation des partages comme à pu l'avancer Neyret (1984). La disposition spatiale du matériel permet de rendre compte du nombre de parts, mais aussi de s'assurer visuellement de l'équipotence de celles-ci. De plus, conformément à la description fournie par Perrin-Glorian (1995) concernant l'agencement dans l'espace du matériel de manipulation pour les situations de partage où la valeur d'une part est

cherchée, la distribution est réalisée de manière à distinguer nettement le nombre de parts. Dès la première phase de recherche de la séance 1, les élèves disposent les étiquettes de façon à faire nettement apparaître le diviseur dans la situation de partage. En effet, le nombre de colonnes, lignes ou tas réalisés correspondent au diviseur. Les élèves laissent apparaître progressivement les autres valeurs des termes impliqués dans la situation de partage. Ils peuvent donc déterminer la valeur de chaque terme en dénombrant le nombre d'étiquettes au sein d'une colonne, ligne ou tas, mais également en considérant les étiquettes restantes à la fin du partage. Ainsi, l'analyse des données recueillies permet d'affirmer que les manipulations au service de la division posée sont efficaces à condition que l'organisation spatiale du matériel traduise la situation de partage.

La notion de conversion entre unités de numération fait partie intégrante de notre expérimentation. Bien que nous ayons pensé lors de la conception des séances à effectuer un rappel sur les conversions d'unités de numération, la difficulté rencontrée par l'ensemble des groupes lors de la première phase de recherche nous a amené à précipiter l'explicitation des règles d'échanges. Par ailleurs, la manipulation et l'implication physique participent grandement à la compréhension des conversions et de leur importance dans les situations de partage. En effet, les élèves doivent se lever et se rendre au fond de la classe pour procéder aux échanges. Ce mouvement physique matérialisant l'échange facilite l'acquisition de sens concernant les conversions dans l'algorithme. Cependant, les nombreuses procédures de vérification réalisées par les élèves témoignent de leur incertitude quant à la maîtrise de la technique de conversion. Les conversions réalisées dans les phases de manipulations sont parfois un obstacle. Un groupe essaye notamment de convertir l'intégralité des étiquettes dans l'unité de numération la plus petite, soit les unités. Les tables utilisées par ce groupe ne peuvent accueillir l'ensemble des étiquettes converties par manque de place. Cette quantité d'étiquettes apparaît comme un obstacle pour les élèves car l'intendance en devient trop importante. Un autre résultat marquant est la non conversion d'unités de numération plus petite en une plus grande. En effet, il arrive que certains groupes effectuent des conversions d'unités de numération superflue ce qui a pour conséquence qu'à la fin du partage les élèves disposent de plus de dix unités de numération pour une unité donnée. Seulement, les groupes ne réalisent pas une conversion d'unités en une unité de numération supérieure, bien qu'il s'agisse de l'unité qui la précède directement. En conséquence, l'hypothèse que la manipulation favorise l'accès au sens de la division posée si les conversions entre unités de numération se réalisent entre unités qui se suivent doit être nuancée. Ainsi, la troisième hypothèse n'est que partiellement validée. Les élèves ne réalisent les conversions entre unités de numération qui se succèdent uniquement dans

un sens, de la plus grande unité vers la plus petite.

Les résultats obtenus ne permettent pas de conclure quant à l'hypothèse selon laquelle la congruence des discours joints à la manipulation et à l'algorithme de la division posée favorise l'attribution du sens à la technique usuelle de calcul. Bien que les recherches de Boulet (1998) témoignent de l'importance d'employer un discours spécifique accompagnant la division et que nous ayons pris le soin de s'assurer que les boucles de l'algorithme et que chacune des étapes de la manipulation peuvent s'illustrer des mêmes formulations langagières, le manque de données ne permet ni de valider, ni d'invalider l'hypothèse. Ainsi, l'enregistrement du discours de chacun des groupes aurait été particulièrement intéressant afin de procéder à une réelle analyse des formulations employées à la fois lors des manipulations, mais aussi dans l'explication de la réalisation de l'algorithme.

Limites et intérêts

Malgré tout le soin apporté au travail de recherche ainsi qu'aux réflexions menées sur l'organisation des séances, notre étude comporte des limites qu'il est nécessaire de considérer.

Un point saillant devant être mis en exergue est intrinsèquement lié au choix opéré quant à l'utilisation d'un couple de nombres unique pour l'ensemble des activités d'une même séance. La répétition engendre inévitablement un effet d'apprentissage chez les élèves. Effectivement, bien que la reproduction des mêmes agissements améliore l'efficacité et la dextérité des élèves dans la réalisation de la tâche, la mémorisation des manipulations à effectuer ou des nombres est notable. Conséquemment, il est très difficile de percevoir dans quelle mesure les élèves ont réalisé la tâche uniquement par mémorisation des étapes successives ou s'ils ont véritablement institué du sens à leurs agissements. De ce fait, nous pensons qu'un certain nombre d'élèves, bien qu'ils aient réalisé avec justesse ce qui était attendu, ont uniquement eu recours à leur mémoire.

Un élément important à prendre en compte repose dans les contraintes matérielles. En effet, un unique caméscope a été utilisé pour filmer les séances. Ainsi, bien qu'il ait été placé dans un endroit stratégique de la salle de classe afin d'enregistrer l'ensemble des binômes mais aussi le tableau, il ne permet d'avoir qu'une seule impression d'ensemble. De part l'intérêt porté aux manipulations du matériel, la captation vidéo de chacun des groupes pour chacune des manipulations aurait permis d'obtenir des données particulièrement riches. Aussi, l'enregistrement par l'intermédiaire de caméscopes ou de dictaphones aurait grandement profité au recueil d'éléments relatifs au langage employé par les élèves au sein des groupes.

Autrement, les changements de groupes opérés entre les deux séances, et parfois même entre les activités d'une même session constituent une limite importante. Effectivement, la mise en évidence de tendances ou de modifications quant aux procédures utilisées par un même binôme est rendue plus complexe. Le travail de groupe repose sur un échange entre pairs, et par conséquent à une adaptation à l'autre qui nécessite parfois de faire des compromis. Ainsi, les changements de binômes induisent parfois des réajustements dans l'emploi des procédures. Par ailleurs, bien que pour la recherche cet élément retentisse sur l'analyse des résultats, il est très enrichissant pour les élèves.

En revanche, la mise en œuvre de nos interventions soutient grandement l'intérêt

d'introduire de manière progressive l'algorithme de la division posée. Effectivement, la multiplication des étapes entrant en jeu avant la réalisation de la technique usuelle de calcul permet à l'élève d'instituer du sens à l'égard de l'opération. De plus, la récurrence des activités ainsi que des nombres au sein d'une même séance sont facilitantes. La répétition s'avère nécessaire afin de permettre aux élèves d'acquérir des automatismes ainsi que de s'approprier des procédures expertes.

Conclusion

La maîtrise de l'algorithme de la division confronte les élèves à de nombreuses difficultés. Bien que ces résistances soient pour une majorité intrinsèquement liées à la technique même du calcul posé, d'autres trouvent leurs fondements dans l'apprentissage du concept.

Il apparaît comme primordial que l'enseignant prête une attention particulière aux termes et formulations employées afin de donner les outils langagiers nécessaires aux élèves d'une part, mais aussi de limiter les malentendus liés au discours. L'utilisation d'un langage précis et efficace contribue à la construction du sens pour les élèves.

Autrement, le recours à la manipulation de matériel apparaît comme un appui lors de l'introduction de la notion. La représentation de la situation par la manipulation favorise la réduction de la charge cognitive des élèves ainsi que l'aspect concret de la tâche. Seulement, la manipulation doit se présenter comme une aide et non comme une obligation. En effet, nous avons pu observer que certains groupes, après plusieurs activités de manipulation, n'y ont recours plus que par contrat didactique.

Par ailleurs, au vu des résultats recueillis à partir des analyses des temps de classe, nous avons toutes les raisons de penser que l'introduction et la familiarisation des élèves avec l'algorithme de la division posée requiert du temps. L'apprentissage de la technique de calcul doit être pensée de manière échelonnée avec une avancée progressive, mais pas moins ambitieuse. Les élèves ont besoin de temps afin de s'approprier la technique usuelle du calcul posé et mobiliser les connaissances associées aux champs additif et multiplicatif ainsi qu'au technique de conversions, qui peuvent être à l'origine de difficultés.

L'intérêt porté au sens semble également être déterminant dans l'apprentissage de l'algorithme de la division posée. La compréhension qu'ont les élèves de la réalisation du calcul posé les prémunis de certaines erreurs pouvant être commises lors d'une application strictement automatique de l'algorithme.

Finalement, ce travail de recherche témoigne de la complexité de l'enseignement de l'algorithme de la division posée, mais aussi de son appropriation par les élèves lors des premiers temps d'apprentissage.

Bibliographie

- Anselmo, N., Combiér, G., Charnay, R., Dussuc, M.P., Madier, D. (2020). *Cap Maths CM1*. Hatier.
- Barrême, F. (1736). *L'arithmétique du Sr Barreme ou Le livre facile pour apprendre l'arithmétique de soi-même, & sans maître*. [E-book]. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201289f/f1.item>
- Benzaken, C (1973). La division à l'école : division euclidienne et division exacte. *Grand N*, (1), 25-44.
- Boulet, G. (1998). La nature dichotomique de la division : une analyse didactique. *Bulletin AMQ*, (38), 14-22.
- Brousseau, G. (2010). Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels. *Grand N*, (85), 13-41.
- Coquand, M. (1978). Mise en place de l'algorithme de la division en CM1. *Grand N*, (14), 7-24.
- DEPP. (2017). CEDRE 2014 mathématiques en fin d'école.
- Guiet, J. (1995). Une petite histoire de la division : de ses origines jusqu'à la méthode « Galley ». *Grand N*, (57), 33-54.
- Guiet, J. (1995). Une petite histoire de la division : de la méthode Galley à la méthode actuelle. *Grand N*, (58), 53-80.
- Le Gendre, F. (1753). *L'arithmétique en sa perfection*. [E-book]. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k281942h.image>
- Ministère de l'Éducation Nationale et de la Jeunesse (s.d). Repères annuels de progression en mathématiques au cycle 3. Consulté le 27/12/2022 sur <https://eduscol.education.fr/document/14026/download>
- Ministère de l'Éducation Nationale de la Jeunesse et du Sport (2020). Programme du cycle 3. Bulletin officiel, n° 31 du 30 juillet 2020. Consulté le consulté le 27/12/2022 sur https://cache.media.eduscol.education.fr/file/A-Scolarité_obligatoire/37/5/Programme2020_cycle_3_comparatif_1313375.pdf
- Neyret, R. (1984). Activités de partage en maternelle. Première partie : Procédures et représentations. *Grand N*, (33), 33-50.
- Perrin-Glorian, M.J. (1995). Sens, algorithmes et représentations symboliques.
- Vergnaud, G. (1989). La théorie des champs conceptuels. *Vème école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique*, (6), 47-50.
- Vergnaud, G. (1997). Le moniteur de mathématique : résolution de problèmes. Cycle 3 : niveaux 2-3 CM1-CM2. Nathan.

Annexe 2 - Fiche de préparation séance 1

Niveau : CM1	Domaine : Mathématiques	Période : 3
Titre de la séquence : La division posée		Nombre de séances : 1 / 2
Titre de la séance : Premiers pas vers l'algorithme de la division posée		Durée : 45 min
<p>Attendus de fin de cycle :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux. - Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux. 		
<p>Programme :</p> <p><u>Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Connaître les unités de la numération décimale pour les nombres entiers (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et les relations qui les lient. <p><u>Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux :</u></p> <p><u>Calcul posé :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Connaître et mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour effectuer la division euclidienne d'un entier par un entier. 		
<p>Objectif :</p> <p>Identifier et donner du sens aux étapes de l'algorithme de la division posée</p>		
<p>Compétence :</p> <p>Réaliser un partage équitable</p>		
<p>Matériel :</p> <p>Étiquettes « 1 centaine », « 1 dizaine », « 1 unité » (élèves / tableau)</p> <p>Fiches activités</p> <p>Tableau d'organisation des données</p>		
	Déroulement	Durée
	<p>Activité 1</p> <p><u>Phase 1 : Présentation de l'activité</u></p> <p>Présentation de la situation de partage équitable (3 joueurs / 413 points) à la classe.</p> <p>Chaque trinôme reçoit une enveloppe d'étiquettes (4 étiquettes « 1 centaine », 1 étiquette « 1 dizaine », 3 étiquettes « 1 unité ») leur permettant d'effectuer le partage.</p> <p><i>« On va vous donner une enveloppe avec des étiquettes. Sur les étiquettes il est marqué « 1 centaine » ou « 1 dizaine » ou « 1 unité ». La valeur totale des étiquettes est de 413. Vous devez partager cette quantité en 3 parts égales pour que chaque joueur ait la même somme. Il est possible qu'il reste des étiquettes, mais la valeur du reste doit être la plus petite possible. »</i></p>	5 min
		Classe entière

<p><i>« Sur cette table [la montrer], il y a d'autres étiquettes identiques à celles que vous avez. Après vous être tous mis d'accord, une seule personne du groupe peut venir se servir. Mais attention, il doit toujours y avoir 413 au total. »</i></p> <p>Demander à un élève de répéter la consigne. <i>« Est-ce que quelqu'un peut réexpliquer avec ses mots ce que vous allez devoir faire ? »</i></p> <p><u>Phase 2 : Phase de recherche</u> Les élèves procèdent au partage tout en verbalisant leurs actions. Ils s'organisent de la manière dont ils le souhaitent. Une fois le partage terminé, les trinômes renseignent sur la fiche distribuée la part de chacun ainsi que la quantité restante.</p> <p><i>« Une fois que vous avez fini le partage, sur la fiche [la montrer], vous devez écrire combien reçoit chaque joueur et la quantité restante. Attention, vous n'avez pas le droit d'utiliser de gomme. »</i></p> <p><i>« Je vous laisse 10 minutes pour effectuer le partage. Tous les membres du groupe doivent être d'accord avec les stratégies que vous utilisez. »</i></p> <p>Circuler entre les groupes afin d'anticiper la mise en commun. Effectuer de l'étayage avec les groupes les plus en difficultés pour reformuler et clarifier les consignes.</p> <p><u>Phase 3 : Mise en commun</u> En fonction de ce qui a été observé lors de la phase de manipulation, les groupes choisis par l'enseignante sont sollicités afin d'intervenir dans la mise en commun. Cela permet de mettre en avant certaines procédures utilisées par les groupes lors du partage. Les procédures de partage et de résolutions sont explicitées et discutées.</p> <p><i>« Le temps est écoulé ! Plus personne ne touche aux étiquettes. Levez vos fiches pour montrer vos résultats. »</i></p>	10 min	Binômes
<p><i>« On va reprendre le partage ensemble. Une personne par groupe va me dire la technique qu'ils ont utilisé pour que je réalise le partage. »</i></p> <p>Reprendre la situation au tableau en verbalisant chacune des manipulations effectuées. Les verbalisations accompagnant la réalisation du partage selon les indications des élèves sont une reformulation de leurs explications.</p> <p>Lors de la mise en commun, une attention particulière est portée à la notion de conversion d'étiquettes.</p>	10 min	Classe entière

<p>Récupérer les enveloppes avec toutes les étiquettes ainsi que les fiches réponses.</p> <p><i>« Rangez toutes les étiquettes dans l'enveloppe. Je vais passer récupérer les enveloppes et les fiches réponses. »</i></p> <p>Reprendre la situation de partage des étiquettes et introduire parallèlement le tableau d'organisation des données.</p> <p>Activité 3</p> <p><u>Phase 1 : Phase de recherche</u></p> <p>Les élèves procèdent une dernière fois au partage équitable (3 joueurs / 413 points) en s'appuyant sur les procédures précédemment explicitées (conversions d'étiquettes, procédures de partage). Parallèlement, ils complètent le tableau d'organisation des données.</p> <p><i>« Vous avez réalisé le partage de 413 par 3 en manipulant les étiquettes. Vous allez le refaire mais attention maintenant vous devez organiser les données dans le tableau. Les données se sont les nombres, les résultats que vous allez trouver. »</i></p> <p><u>Phase 2 : Mise en commun</u></p> <p>En fonction de ce qui a été observé lors de la phase précédente, les groupes choisis par l'enseignante sont sollicités afin d'intervenir dans la mise en commun. Cela permet d'observer les différentes organisations proposées par les groupes dans leur tableau. Les organisations sont explicitement discutées.</p>	5 min	Binômes
<p><i>« Le temps est écoulé ! Levez vos tableaux pour montrer vos résultats. »</i></p> <p><i>« On va reprendre l'organisation du tableau ensemble. Une personne par groupe va me dire l'organisation des données qu'ils ont faites. Nous en discuterons afin de nous mettre d'accord sur une organisation. »</i></p>	10 min	Classe entière

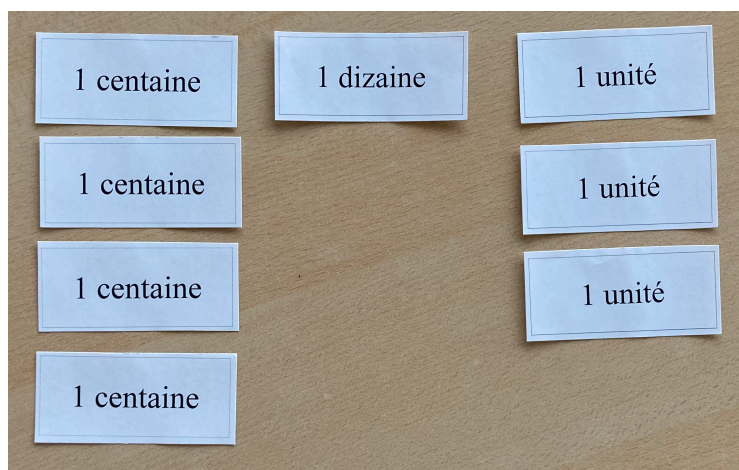
Annexe 3 - Fiche de préparation séance 2

Niveau : CM1	Domaine : Mathématiques	Période : 3	
Titre de la séquence : La division posée		Nombre de séances : 2 / 2	
Titre de la séance : Introduction à l’algorithme de la division posée		Durée : 50 min	
<p>Attendus de fin de cycle :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux. - Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux. 			
<p>Programme :</p> <p><u>Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Connaître les unités de la numération décimale pour les nombres entiers (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et les relations qui les lient. <p><u>Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux :</u></p> <p><u>Calcul posé :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Connaître et mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour effectuer la division euclidienne d’un entier par un entier. 			
<p>Objectif :</p> <p>Mettre en œuvre un algorithme de calcul posé</p>			
<p>Compétence :</p> <p>Réaliser une division posée selon la technique usuelle de calcul</p>			
<p>Matériel :</p> <p>Étiquettes « 1 centaine », « 1 dizaine », « 1 unité » (élèves / tableau)</p> <p>Fiches activités</p> <p>Tableau</p> <p>Fiche d’exercices</p>			
Déroulement		Durée	Dispositif
<p>Rappels sur la séance 1.</p> <p><i>« Lors de la première séance, nous avons découvert une manière d’organiser les données d’un partage. Pour cela, nous avons réalisé des partages équitables à l’aide de la manipulation. Puis, nous avons organisé les résultats sous forme de tableau.</i></p> <p><i>Aujourd’hui, nous allons nous concentrer sur la forme écrite de la division posée en apprenant à réaliser le partage sans étiquettes. »</i></p> <p>Reconstitution des binômes.</p> <p>Activité 1</p> <p><u>Phase 1 : Phase de recherche</u></p> <p>Présentation de la situation de partage équitable (4 joueurs / 583 points).</p>		5 min	Classe entière

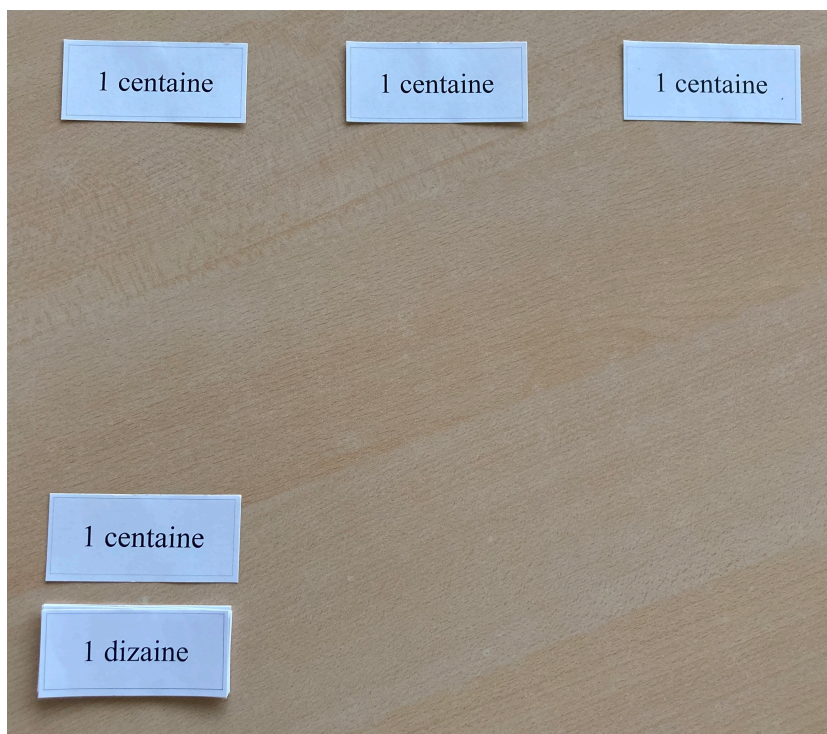
<p>Chaque binôme reçoit une série d'étiquettes (5 étiquettes « 1 centaine », 8 étiquettes « 1 dizaine », 3 étiquettes « 1 unité »). Les étiquettes doivent être disposées sur la table, de la plus grande unité de numération (à gauche) à la plus petite unité de numération (à droite).</p> <p>Les élèves procèdent au partage équitable (4 joueurs / 583 points) en réinvestissant les connaissances acquises en séance 1.</p> <p>Parallèlement à la manipulation des étiquettes, les élèves complètent le tableau d'organisation des données.</p> <p><i>« Comme vous l'avez réalisé lors de la première séance, partagez la somme des étiquettes, cette fois-ci en 4 parts égales. Vous devez également remplir le tableau avec les données et résultats trouvés lors de la manipulation. »</i></p>	10 min	Binômes
<p><u>Phase 2 : Mise en commun</u></p> <p>Les binômes font part oralement des résultats trouvés (part de chacun / quantité restante) en tirant les informations du tableau d'organisation des données.</p> <p><i>« Expliquez, oralement, les résultats trouvés et leur place dans le tableau. »</i></p>	5 min	Classe entière
<p>Activité 2</p> <p><u>Phase 1 : Phase de recherche</u></p> <p>Les élèves ne disposent plus d'étiquettes.</p> <p>Les élèves poursuivent la division de 583 par 4 (la première boucle est effectuée) en prenant appui sur le discours y étant joint.</p> <p><i>« La première boucle de la division est déjà écrite dans le tableau. Vous devez compléter le tableau comme nous avons pu le faire lors des dernières activités. »</i></p> <p><u>Phase 2 : Mise en commun</u></p> <p>Les élèves font part oralement des résultats trouvés (quotient et reste).</p> <p>Des élèves sont sollicités pour expliquer la manière dont ils ont réalisé chacune des étapes du calcul.</p>	10 min	Binômes
<p><i>« Expliquez, oralement, les résultats trouvés et leur place dans le tableau. »</i></p> <p>Reprendre la division posée au tableau en verbalisant chacune des étapes des boucles du calcul.</p> <p>Nommer chacun des éléments entrant en jeu dans la technique usuelle de calcul (potence, dividende, diviseur, quotient, reste,</p>	10 min	Classe entière

<p>signification des acronymes des unités de numération).</p> <p>Activité 3 <u>Phase 1 : Entraînement</u> Les élèves s'exercent afin de se familiariser avec l'algorithme de la division posée.</p> <p><i>« Maintenant que vous maîtrisez les étapes de la division posée, voici une fiche d'entraînement. Réalisez chaque division de la même manière que nous avons appris lors des dernières activités. »</i></p>	<p>10 min</p>	<p>Classe entière</p>
---	---------------	-----------------------

Annexe 4 - Réalisation du partage équitable de 413 étiquettes entre 3 joueurs



Le paquet d'étiquettes est composé de quatre étiquettes « 1 centaine », d'une étiquette « 1 dizaine » et de trois étiquettes « 1 unité ». Le partage de la valeur totale, 413, est à effectuer entre 3 joueurs.

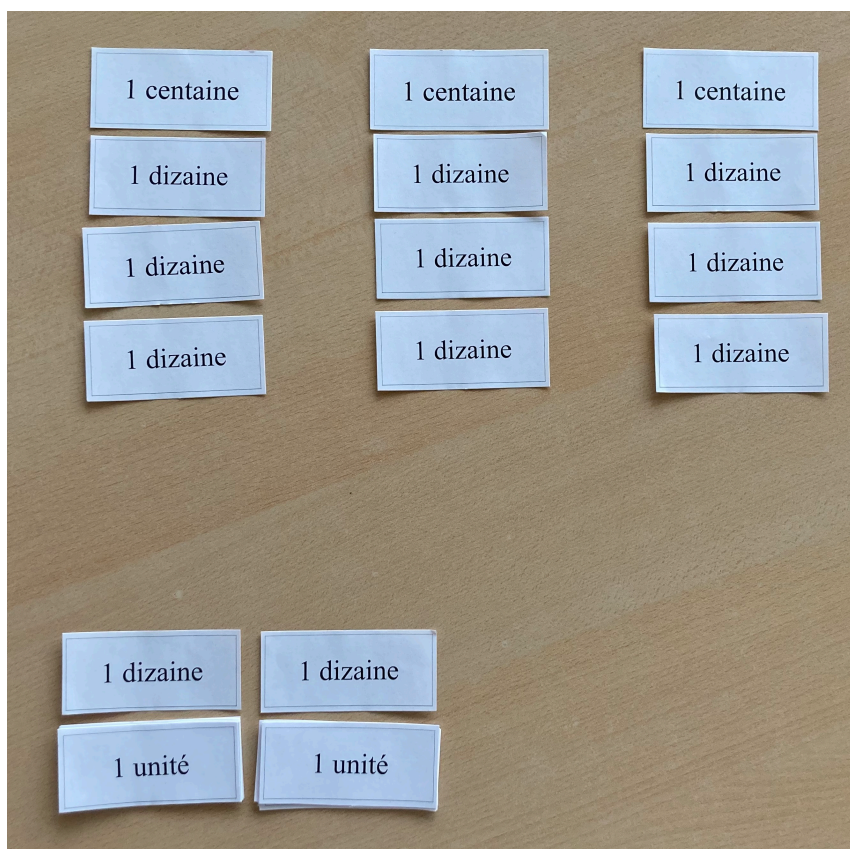


Étape 1 : Partage des centaines

Une étiquette « 1 centaine » est distribuée par part. Il reste une étiquette « 1 centaine » non distribuée.

Étape 2 : Conversion de l'étiquette « 1 centaine »

L'étiquette « 1 centaine » restante est échangée contre dix étiquettes « 1 dizaine ».

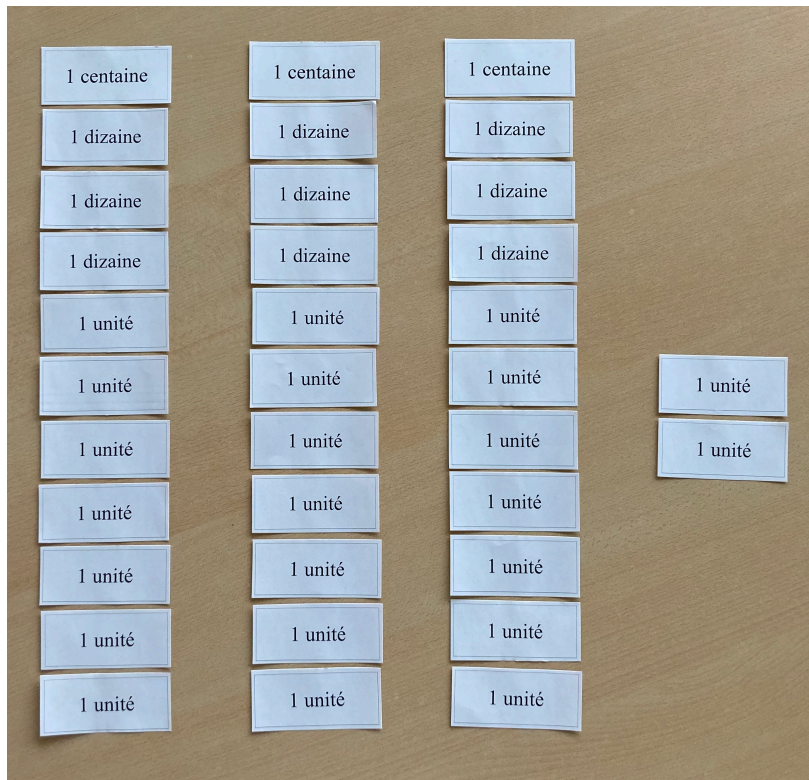


Étape 3 : Partage des dizaines

Trois étiquettes « 1 dizaine » sont distribuées par part. Il reste deux étiquettes « 1 dizaine » non distribuées.

Étape 4 : Conversion des deux étiquettes « 1 dizaine ».

Les étiquettes « 1 dizaine » restantes sont chacune d'elles échangées contre dix étiquettes « 1 unité ». En conséquence, vingt étiquettes « 1 unités » sont obtenues.



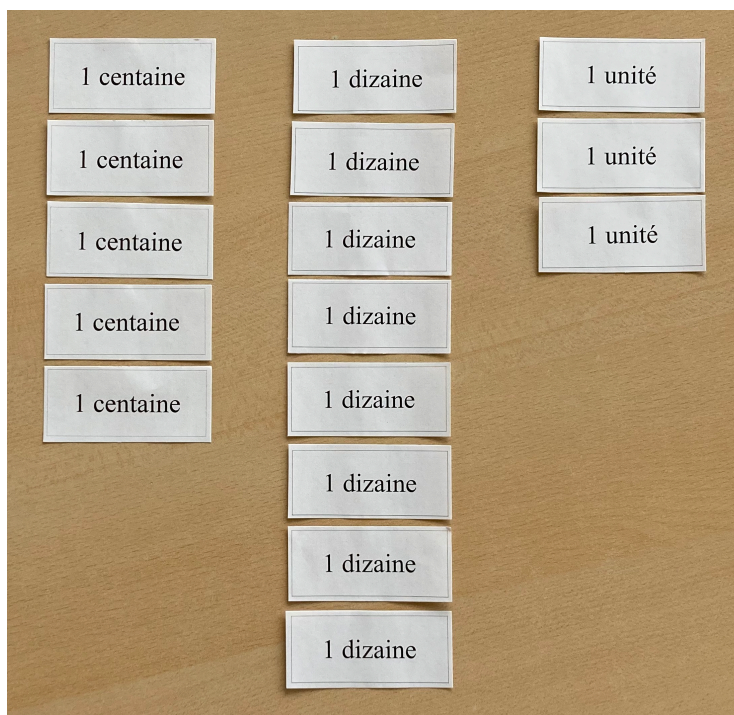
Étape 5 : Partage des unités

Sept étiquettes « 1 unité » sont distribuées par part. Il reste deux étiquettes « 1 unité » non distribuées.

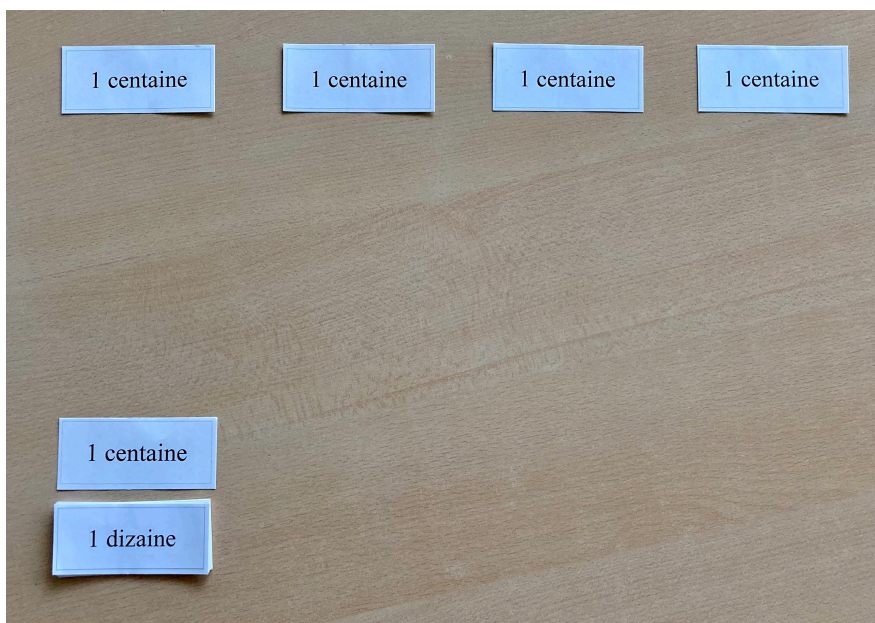
Étape 6 : Conclusion du partage

La valeur d'une part est de 137. En effet, pour chaque part il y a une étiquette « 1 centaine », trois étiquettes « 1 dizaine » et sept étiquettes « 1 unité ». Le reste est de deux étiquettes « 1 unité ».

Annexe 5 - Réalisation du partage équitable de 583 étiquettes par 4 joueurs



Le paquet d'étiquettes est composé de cinq étiquettes « 1 centaine », de huit étiquettes « 1 dizaine » et de trois étiquettes « 1 unité ». Le partage de la valeur totale, 583, est à effectuer entre 4 joueurs.

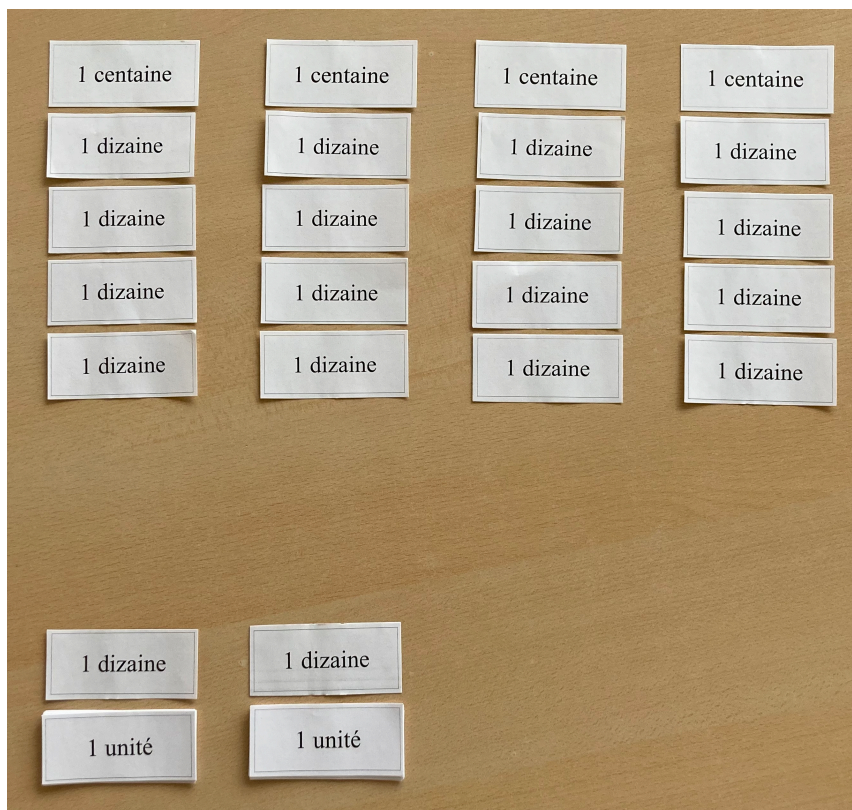


Étape 1 : Partage des centaines

Une étiquette « 1 centaine » est distribuée par part. Il reste une étiquette « 1 centaine » non distribuée.

Étape 2 : Conversion de l'étiquette « 1 centaine »

L'étiquette « 1 centaine » restante est échangée contre dix étiquettes « 1 dizaine ».

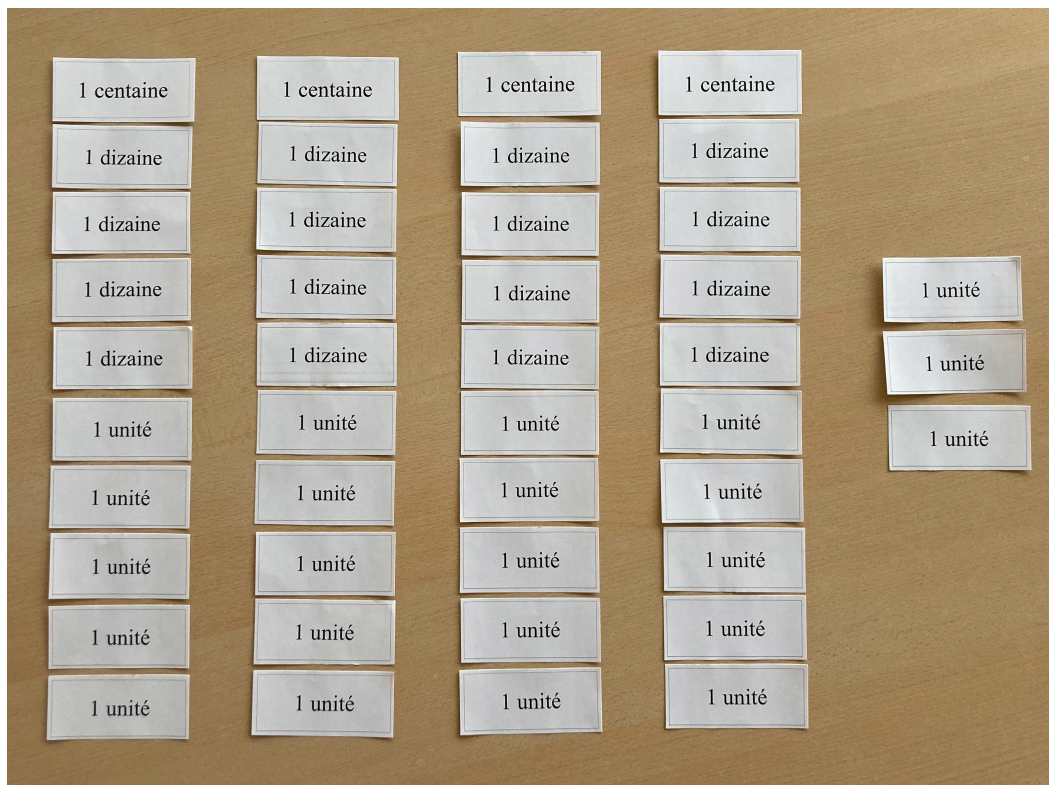


Étape 3 : Partage des dizaines

Quatre étiquettes « 1 dizaine » sont distribuées par part. Il reste deux étiquettes « 1 dizaine » non distribuées.

Étape 4 : Conversion des deux étiquettes « 1 dizaine ».

Les étiquettes « 1 dizaine » restantes sont chacune d'elles échangées contre dix étiquettes « 1 unité ». En conséquence, vingt étiquettes « 1 unités » sont obtenues.



Étape 5 : Partage des unités

Cinq étiquettes « 1 unité » sont distribuées par part. Il reste trois étiquettes « 1 unité » non distribuées.

Étape 6 : Conclusion du partage

La valeur d'une part est de 145. En effet, pour chaque part il y a une étiquette « 1 centaine », quatre étiquettes « 1 dizaine » et cinq étiquettes « 1 unité ». Le reste est de trois étiquettes « 1 unité ».

Annexe 6 - Grille d'analyse vierge

Groupe :

Séance

Activité

Moment de la séance / activité :

Procédures employées :

Procédures anticipées ? OUI / NON

Utilisation de la technique de conversion :

Explication orale des procédures employées :

Organisation spatiale de la situation de partage :

Lien entre procédures employées et hypothèses :

Annexe 7 - Verbatims séance 1

Mise en commun Séance 1 activité 1 (procédure 1) :

Enseignante : Qui peut m'expliquer comment il a fait pour faire le partage ?

Élève 1 : Les centaines je les divise en trois parties.

L'enseignante se saisit de trois étiquettes « 1 centaine » et les place de manière distincte sur le tableau.

Enseignante : Il me reste une centaine.

Élève 1 : Les unités tu les mets avec les centaines.

Enseignante : Les unités je les mets avec les centaines ?

Élève 1 : Une dans chaque.

Enseignante : Ah je les répartis.

Élève 1 : Puis après cent dix, tu dois les échanger avec des étiquettes.

Enseignante : Avec quoi je les échange ?

Élève 1 : Cent, avec trente, trente, trente ça fait quatre-vingt-dix.

Enseignante : Je mets combien d'étiquettes ? J'ai des centaines, des dizaines et des unités.

Élève 1 : Tu mets trois dizaines dans la première, trois dizaines dans la deuxième, trois dizaines dans la troisième.

L'enseignante réalise la conversion d'une étiquette « 1 centaine » en dix étiquettes « 1 dizaine », puis dispose trois étiquettes « 1 dizaine » pour chacune des parts.

Élève 1 : Il reste vingt. Donc après tu mets six dans chaque, et il t'en restera deux.

Enseignante : Qu'est-ce que je fais ?

Élève 1 : Tu mets une étiquette de dizaine. Après tu mets six étiquettes unités dans chaque.

L'enseignante effectue d'abord la conversion d'une étiquette « 1 dizaine » en dix étiquettes « 1 unité », puis place six étiquettes « 1 unité » dans chaque part.

Élève 1 : normalement cent-trente-sept, cent-trente-sept, cent-trente-sept et il reste deux.

Enseignante : Il reste deux unités.

Mise en commun Séance 1 activité 1 (procédure 2) :

Enseignante : On part de quatre-cent-treize.

Élève 2 : On donne une centaine à tout le monde.

L'enseignante réalise le partage.

Élève 2 : Ensuite j'ai donné trois dizaines à tout le monde.

Enseignante : Et comment je fais pour avoir trois dizaines ? Au tableau je n'ai qu'une seule étiquette « 1 dizaine ».

Élève 2 : Il en faut deux autres .

Enseignante : Je les rajoute ?

Élève 2 : Oui.

Enseignante : Et si je les rajoute, est-ce qu'il y a toujours quatre-cent-treize ?

Élève 2 : Non, mais en fait je n'ai pas terminé. Je mets trois dizaines de partout.

Enseignante : Et est-ce que mon nombre total c'est toujours quatre-cent-treize ?

Élève 2 : Non pas encore.

Enseignante : Moi je veux qu'il y ait tout le temps quatre-cent-treize.

Enseignante : Comment je peux faire ?

Élève 2 : On échange.

Enseignante : On échange combien ?

Élève 2 : L'étiquette « 1 centaine » on l'échange avec dix.

Enseignante : Dix dizaines ?

Élève 2 : Oui.

L'enseignante réalise les conversions nécessaires.

Enseignante : Maintenant on a onze dizaines puisque l'on a converti l'étiquette « 1 centaine » en dix étiquettes « 1 dizaine » et qu'il y a aussi notre dizaine du nombre de départ.

Élève 2 : Là, il faut mettre trois dizaines par joueur.

Enseignante : Il me reste deux dizaines.

Élève 2 : On les échange avec vingt unités.

L'enseignante réalise les conversions nécessaires.

Élève 2 : Après on met quatre unités à chaque part.

L'enseignante effectue le partage.

Enseignante : Il m'en reste beaucoup des unités.

Élève 2 : Oui, mais là ça marche. Ils ont tous cent-trente-quatre.

Enseignante : cent-trente-quatre, plus cent-trente-quatre, plus cent-trente-quatre, ça fait combien ?

Les élèves effectuent le calcul sur leur ardoise.

Élève 2 : Ça fait quatre-cent-deux. Donc il nous reste des étiquettes.

Enseignante : Donc, est-ce que je peux en donner d'autres ?

Élève 2 : On en donne une à chacun, puis une à chacun jusqu'à ce qu'on ne puisse plus.

Élève 2 : Il reste deux unités.

Mise en commun Séance 1 activité 2 (procédure 1) :

Enseignante : On va refaire le partage de quatre-cent-treize en trois ensemble. Qu'est-ce que je fais ?

Élève 3 : On met une centaine à chaque joueur.

Enseignante : On avait quatre centaines au début. J'en ai donné trois, il m'en reste une.

Élève 3 : L'étiquette « 1 centaine » il faut l'échanger avec dix dizaines.

Élève 3 : Après on donne les dizaines. Tu en donnes trois à chacun.

Enseignante : Qu'est-ce que je fais ensuite ?

Élève 1 : Avec une dizaine on va faire dix unités. Puis avec l'autre dizaine on fait dix unités.

Enseignante : Donc j'ai combien d'unités ?

Élève 1 : Il y a vingt unités au total.

Enseignante : Combien je mets d'unités par joueur ?

Élève 3 : Ils auront chacun sept unités.

Enseignante : Et donc, qu'est-ce qu'il reste ?

Élève 3 : Il reste deux unités.

Enseignante : Finalement, qu'est-ce qu'on en dit de tout ça ?

Élève 3 : cent-trente-sept, plus cent-trente-sept, plus cent-trente-sept, plus deux. Ça fait quatre-cent-treize.

Institutionnalisation séance 1 activité 2 :

Enseignante : On donne des noms aux nombres que l'on retrouve dans le partage. Comment on l'appelle le nombre quatre-cent-treize ?

Élève 4 : C'est quatre-cent-treize unités.

Enseignante : Oui c'est vrai, mais ce nombre là il a un nom.

Élève 3 : C'est le dividende !

Enseignante : Très bien ! Et le nombre trois, comment il s'appelle ?

Élève 2 : Le diviseur ?

Enseignante : C'est ça, c'est le diviseur.

Enseignante : Donc finalement, on connaît le dividende, on connaît le diviseur et on connaît quoi d'autre ?

Élève 5 : On connaît aussi le quotient et le reste.

Manipulation et introduction du tableau d'organisation des données :

Enseignante : Par quoi on commence pour partager quatre-cent-treize en trois ?

Élève 2 : On enlève trois centaines.

Enseignante : Qu'est-ce que je marque dans le tableau ?

Enseignante : C'est ici [montre l'endroit où est renseigné le quotient] que l'on voit la part de chacun.

Élève 1 : Chacun ils en ont une de centaine. Donc on marque un dans une case.

Enseignante : Où ça ?

Élève 1 : Sous le quatre. Parce que c'est les centaines.

Enseignante : Oui, mais c'est la valeur d'une part. Alors où est-ce que je le renseigne ?

Élève 1 : À droite.

Enseignante : Très bien. Et en tout, combien on a pu distribuer de centaines ?

Élève 6 : Trois.

Enseignante : On le marque où qu'on a enlevé trois centaines ?

Élève 1 : Sous le quatre.

Enseignante : Combien il nous reste ?

Élève 6 : Un.

Enseignante : Maintenant, grâce à notre tableau on voit qu'on avait quatre centaines, qu'on en a distribué une à chaque joueur, donc trois en tout. Puis, à la fin, il nous en reste une.

Enseignante : Qu'est-ce qu'elle devient la certaine qui reste ?

Élève 7 : Elle devient dix dizaines.

Enseignante : C'est ça. Comment je peux le montrer dans mon tableau que notre centaine est devenue dix dizaines ?

Les élèves ne répondent pas.

Enseignante : Regardez, on a quatre-cent-treize. On a enlevé trois centaines. Trois centaines, c'est combien d'unités ?

Élève 1 : C'est trois-cent.

Enseignante : Finalement, c'est comme si on faisait quatre-cent-treize moins trois cent. Combien il reste ?

Élève 2 : cent-treize.

Enseignante : Et dans cent-treize, il y a combien de dizaines ?

Élève 6 : Il y en a onze.

Enseignante : Tout à fait. La centaine restante est devenue dix dizaines, et on en avait une de plus, donc ça fait onze dizaines.

Élève 3 : Après on donne trois dizaines à chacun.

Enseignante : Je l'écris où ?

Élève 3 : Dans l'endroit où on marque la part de chacun.

Enseignante : Oui, je le mets sous le « 1 centaine ».

Enseignante : Qu'est-ce que je fais maintenant ?

Les élèves ne répondent pas.

Enseignante : On s'occupe des onze dizaines.

Enseignante : On a donné trois dizaines à trois joueurs. Combien on en a donné en tout ?

Élève 2 : Neuf.

Élève 1 : On fait onze moins neuf.

Élève 6 : On ne marque pas le zéro après le neuf ?

Enseignante : Si on peut le faire.

Enseignante : Cent-treize moins quatre-vingt-dix, combien ça fait ?

Élève 6 : Il reste vingt-trois.

Enseignante : Avec nos étiquettes, on convertit les deux étiquettes « 1 dizaine » en vingt unités.

Enseignante : Combien on peut en donner par joueurs ?

Élève 3 : Sept.

Enseignante : Où j'écris qu'un joueur à sept unités ?

Élève 6 : En bas du trois où l'on marque à chaque fois combien ont les joueurs.

Enseignante : Ça fait combien d'unités données en tout ?

Élève 1 : On fait vingt-trois moins vingt-un.

Élève 2 : Il nous en restera deux.

Enseignante : Finalement, quelle est la valeur d'une part ?

Élève 1 : C'est cent-trente-sept.

Mise en commun Séance 1 activité 3 :

Enseignante : Dans mon tableau, j'ai quatre-cent-treize à partager en trois. Qu'est-ce que je fais ?

Élève 8 : On fait quatre-cent-treize moins trois-cent.

Enseignante : Pourquoi moins trois-cent ?

Élève 8 : Parce que je fais quatre moins trois.

Élève 1 : Et que trois centaines c'est trois cents unités.

Enseignante : C'est ça. Donc quatre-cent-treize moins trois cents, combien ça fait ?

Élève 9 : Ça fait cent-treize.

Enseignante : Et combien on a donné de centaines par joueur ?

Élève 3 : On a donné une centaine.

Enseignante : Maintenant, on s'occupe de nos dizaines. Combien il y en a ?

Élève 6 : Il y en a onze.

Élève 2 : On donne trois dizaines donc après on écrit quatre-vingt-dix.

Enseignante : Dans la partie où l'on voit la part de chacun, j'écris trois dizaines. Puis ensuite, je fois cent-treize moins quatre-vingt-dix. Combien ça fait ça ?

Élève 3 : Vingt-trois.

Enseignante : On se retrouve avec vingt-trois unités à partager. Combien on en donne à chaque joueur ?

Élève 1 : On fait la table de trois et ça fait que chacun en aura sept. On le marque à droite. Puis ensuite ça fait vingt-et-un.

Enseignante : Tout à fait. On obtient quoi comme reste ?

Élève 9 : C'est deux le reste.

Annexe 8 - Verbatims séance 2

Mise en commun Séance 2 activité 1 :

Enseignante : Cette fois-ci, on devait partager cinq-cent-quatre-vingt-trois en quatre. Dans le tableau, où je marque les nombres ?

Élève 4: On marque cinq centaines au C, huit dizaines au D et trois unités au U. Puis le quatre on le marque à côté au-dessus de la ligne.

Enseignante : Très bien. Et pour les étiquettes, je fais comment ?

Élève 1 : On prend cinq étiquettes centaine, huit étiquettes dizaines et trois étiquettes unités. Après on fait quatre parties pour représenter les joueurs.

Enseignante : Absolument ! Maintenant qu'on a tout ça, qu'est-ce qu'on fait ?

Élève 3 : On donne une centaine à chaque joueur. Il reste une centaine. On l'échange avec dix dizaines.

Enseignante : Dans le tableau, qu'est qu'on marque ?

Élève 2 : Le un on peut l'écrire.

Enseignante : Je peux l'écrire où ?

Élève 2 : À l'endroit où l'on marque la part de chacun.

Enseignante : Ensuite.

Élève 6 : On écrit quatre-cents sous le cinq-cent-quatre-vingt-trois pour faire la soustraction. Ça fait cent-quatre-vingt-trois le résultat.

Enseignante : Maintenant qu'on a obtenu ça, on fait quoi ?

Élève 1 : On partage les dizaines.

Élève 8 : On donne quatre étiquettes de dizaines à chaque joueur.

Enseignante : Très bien. On va le noter dans le tableau.

Élève 6 : Du coup il faut faire moins cent-soixante.

Enseignante : Pourquoi ?

Élève 6 : Parce qu'on aura distribué seize dizaines.

Enseignante : Combien ça fait cent-soixante moins cent-quatre-vingt-trois ?

Élève 3 : Ça fait vingt-trois.

Enseignante : Combien on a donné de dizaines à chacun ?

Élève 8 : Quatre.

Enseignante : J'écris quoi ?

Élève 3 : Quatre dizaines en dessous d'une centaine.

Enseignante : Qu'est-ce que j'en fais des deux étiquettes « 1 dizaine » qu'on ne peut pas partager ?

Élève 3 : On les échange avec vingt unités.

Enseignante : Ensuite, combien je donne d'unités à chacun ?

Élève 6 : Cinq.

Enseignante : Dans le tableau maintenant.

Élève 1 : On en a donné cinq à chacun donc ça fait vingt. On marque moins vingt et il en reste trois.

Enseignante : Et pour la part de chacun ?

Élève 3 : On marque cinq unités.

Enseignante : Alors, quelle est la part de chacun ?

Les élèves ne répondent pas.

Enseignante : On a une centaine, quatre dizaines et cinq unités.

Élève 1 : Ça fait cent-quarante-cinq !

Enseignante : Et qu'est-ce qu'il reste ?

Élève 6 : Trois.

Institutionnalisation Séance 2 activité 1 :

Enseignante : Comment on l'appelle cinq-cent-quatre-vingt-trois ?

Élève 3 : C'est le dividende ?

Enseignante : Tout à fait.

Enseignante : Le quatre, comment on l'appelle ?

Élève 4 : Le diviseur.

Enseignante : La valeur de chaque joueur, elle s'appelle comment ?

Élève : Le quotient.

Enseignante : Et finalement, le trois ?

Élève 3 : Le reste.

Mise en commun Séance 2 activité 2 :

Enseignante : Comme toute à l'heure, on partage cinq-cent-quatre-vingt-trois en quatre.

Élève 1 : Une centaine chacun donc j'en distribue quatre. Ça fait quatre-cents. Donc cinq-cent-quatre-vingt-trois moins quatre-cents.

Enseignante : Tout à fait ! Mais on peut gagner du temps. Maintenant on va voir qu'on n'est pas obligés de marquer les zéros. On peut juste soustraire les unités de numération que l'on regarde. Donc là, je peux faire cinq centaines moins quatre centaines. Combien ça fait de centaines restantes ?

Élève 1 : Une centaine qui reste.

Enseignante : Oui ! Ensuite, on abaisse le chiffre des dizaines. Ça fait dix-huit dizaines. Qu'est-ce que je fais maintenant ?

Élève 3 : En dessous de dix-huit on marque cent-soixante.

Enseignante : On n'est plus obligé de mettre le zéro ensuite. Qu'est-ce que je peux marquer ?

Élève 3 : Juste seize alors.

Enseignante : Tout à fait. Combien ça fait dix-huit moins seize ?

Élève 1 : Deux.

Enseignante. C'est ça. Et combien chacun en a ?

Élève 3 : Quatre.

Enseignante : Où il faut le marquer ça ?

Élève 3 : En bas du une centaine qui est à droite. On marque plus quatre dizaines.

Enseignante : Qu'est-ce qu'il se passe ensuite ?

Élève 1 : On baisse le trois des unités.

Enseignante : Combien je peux soustraire ? Combien je peux en distribuer ?

Élève 1 : Cinq chacun. On l'écrit sous le trois dizaines dans l'endroit où on marque le quotient.

Enseignante : Et donc on soustrait combien à vingt-trois ?

Élève 2 : Vingt.

Enseignante : Il reste combien ?

Élève 2 : Trois.

Enseignante : Tout ça c'est très bien, et c'est juste. Mais est-ce que vous ne pensez pas qu'on peut simplifier quelque chose encore ? Pour gagner du temps.

Élève 1 : On enlève les mots centaine, dizaine, unité.

Enseignante : Exactement ! On peut marquer directement les chiffres trouvés à côté des uns et des autres. Comme ça on a notre quotient directement une fois qu'on a terminé la division.

Annexe 9 - Grilles d'analyses complétées

Groupe : Groupe 1

Séance 1 Activité 1

Moment de la séance / activité : Phase de recherche de l'activité 1 - les élèves sont en autonomie.

Procédures employées : Procédures anticipées ? OUI / ~~NON~~

4 ; 7 ; 9 (partiellement) ; 11

4. La disposition spatiale du matériel de manipulation permettant de représenter chacune des parts est effectuée en colonnes, en marquant une séparation évidente entre chacune des parts.

7. La valeur d'une part est déterminée par comptage des étiquettes de chacune des unités de numération.

9. Une procédure attendue des élèves est qu'ils procèdent au partage des étiquettes en débutant par la plus grande unité de numération disponible. Dès lors qu'un maximum d'étiquettes de la plus grande unité de numération a été distribuée équitablement entre les membres prenant part au partage, la procédure est répétée avec l'unité de numération inférieure la plus grande.

11. Une procédure attendue des élèves est le recours aux échanges d'étiquettes. En effet, les différents partages ne sont possibles que si les élèves réalisent des conversions d'étiquettes contre d'autres étiquettes représentant la même valeur. Ainsi, 1 centaine correspond à 10 dizaines, qui correspond à 100 unités (de même, 1 dizaine est égal à 10 unités). Seulement, nous attendons que les élèves aient recours aux conversions d'étiquettes dès lors qu'ils ont distribué autant d'étiquettes que possible de la plus grande unité de numération permise. Cela permet de réduire les conversions à opérer puis les groupements par dix d'unités de numération en cas de conversions superflus.

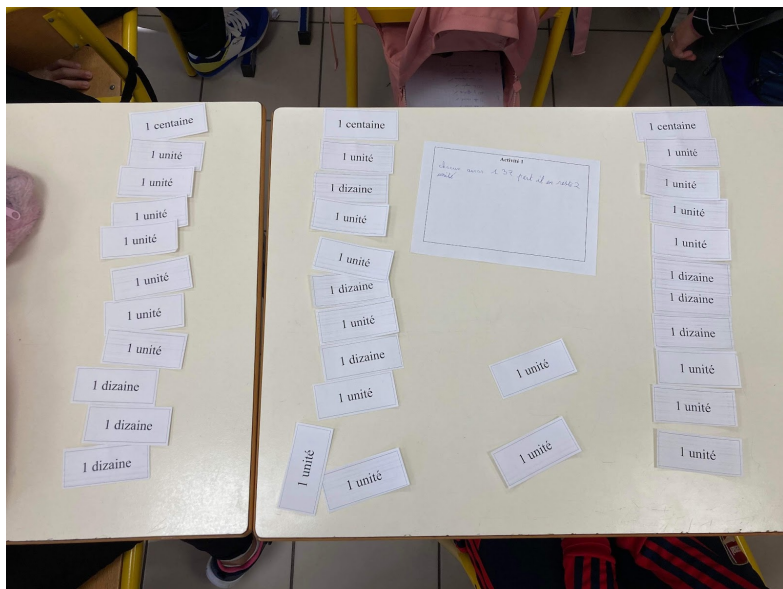
Utilisation de la technique de conversion :

Oui, les élèves du groupe ont eu recours à la technique de conversion. De plus, ils s'y sont référés seulement quand ils ne pouvaient plus partager la quantité relative à l'unité de numération la plus grande.

Explication orale des procédures employées :

∅

Organisation spatiale de la situation de partage :



Lien entre procédures employées et hypothèses :

Hypothèse 2 : Cette manipulation est au service du sens de la division posée car l'organisation spatiale traduit de la situation de partage. En effet, on voit apparaître trois colonnes correspondant au diviseur (3), deux étiquettes qui ne sont pas dans une colonne (le reste vaut 2). Enfin, si l'on dénombre la valeur totale d'une colonne, on identifie la valeur d'une part (le quotient). Toutefois, on observe qu'au sein d'une colonne, les étiquettes ne sont pas organisées par unité de numération, rendant la lecture spatiale plus complexe (une procédure de comptage est donc requise).

Hypothèse 3 : Les élèves du groupe ont eu recours aux conversions pour effectuer le partage. De plus, ils ont maîtrisé dans cette situation la technique de conversion. Toutefois, l'organisation des étiquettes au sein de chaque colonne témoigne d'une fragilité lors du choix de faire une conversion ou non. En effet, les élèves du groupe ont dans un premier temps distribué les centaines puis ont converti la centaine restante. Ils ont distribué les étiquettes « 1 dizaine » mais n'ont pas réalisé la conversion associée. Ils ont, pour finir, distribué les étiquettes « 1 unité ». Enfin, ils se sont souvenu de la contrainte relative au reste : « le reste doit être le plus petit possible ». Ils ont donc une nouvelle fois réalisé la conversion d'une dizaine en unités.

Moment de la séance / Activité : Phase de recherche de l'activité 1 - les élèves sont en autonomie.

Procédures employées : Procédures anticipées ? OUI / NON

4 ; 7 ; 9 ; 11

4. La disposition spatiale du matériel de manipulation permettant de représenter chacune des parts est effectuée en colonnes, en marquant une séparation évidente entre chacune des parts.

7. La valeur d'une part est déterminée par comptage des étiquettes de chacune des unités de numération.

9. Une procédure attendue des élèves est qu'ils procèdent au partage des étiquettes en débutant par la plus grande unité de numération disponible. Dès lors qu'un maximum d'étiquettes de la plus grande unité de numération a été distribuée équitablement entre les membres prenant part au partage, la procédure est répétée avec l'unité de numération inférieure la plus grande.

11. Une procédure attendue des élèves est le recours aux échanges d'étiquettes. En effet, les différents partages ne sont possibles que si les élèves réalisent des conversions d'étiquettes contre d'autres étiquettes représentant la même valeur. Ainsi, 1 centaine correspond à 10 dizaines, qui correspond à 100 unités (de même, 1 dizaine est égal à 10 unités). Seulement, nous attendons que les élèves aient recours aux conversions d'étiquettes dès lors qu'ils ont distribué autant d'étiquettes que possible de la plus grande unité de numération permise. Cela permet de réduire les conversions à opérer puis les groupements par dix d'unités de numération en cas de conversions superflus.

Procédure de vérification :

- Les élèves du groupe alignent les étiquettes de chaque colonne et les comparent pour vérifier que les parts de chaque joueur soient égales.

- Après chaque conversion, les élèves du groupe dénombrent (à l'aide d'une procédure de comptage) la valeur totale des étiquettes pour s'assurer de détenir le même nombre qu'au départ.

En effet, la phrase de conclusion illustre ce besoin de vérification. La phrase de conclusion est :

« On a trouver 3 centaine, 9 dizaine et 21 unité il nous reste 2 reste. Chacun a 137 points. »

En énumérant l'ensemble des étiquettes, ils s'assurent de la quantité totale pour ensuite donner la valeur d'une part.

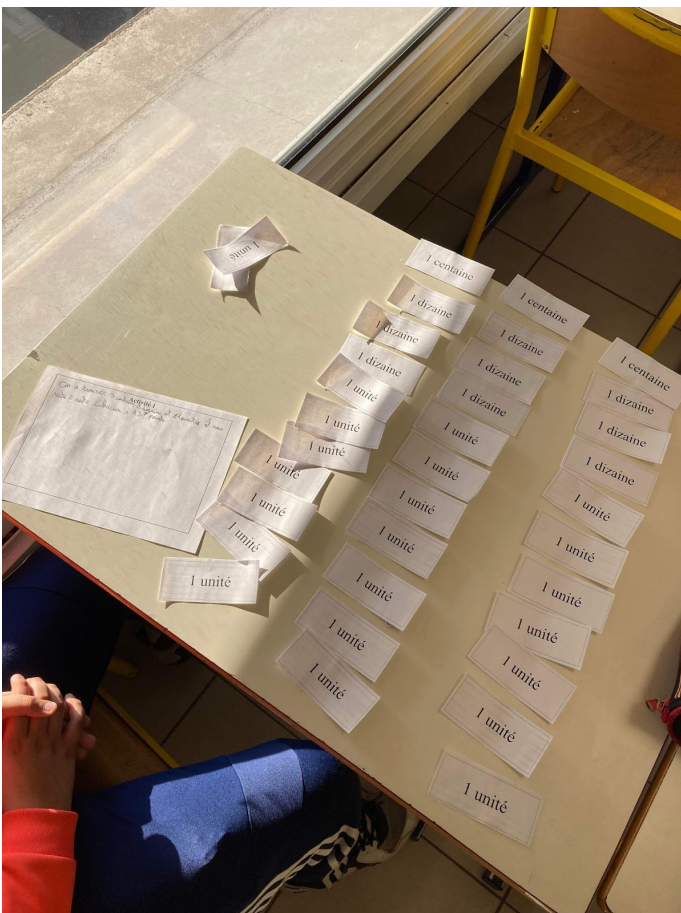
Utilisation de la technique de conversion :

Oui, les élèves du groupe ont recours à la technique de la conversion. Toutefois, un manque de souplesse est observé. En effet, les élèves se lèvent plusieurs fois pour une même conversion car il leur manque des étiquettes. Lorsque l'élève du groupe effectuant les conversions se rend à la table des conversions, il ne parle pas en unité de numération mais compte de 10 en 10. Il est donc nécessaire pour lui de traduire « une dizaine » en « dix ».

Explication orale des procédures employées :

L'élève explique qu'il dénombre la quantité de chaque unité de numération. Il cherche ensuite dans la table de 3 quel multiple se rapproche le plus du nombre trouvé : « 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, j'en ai 10. Si je donne encore trois unités à chacun ça fait 9 il en reste une ».

Organisation spatiale de la situation de partage :



Lien entre procédures employées et hypothèses :

Hypothèse 2 : Cette manipulation est au service du sens de la division posée car l'organisation spatiale traduit de la situation de partage. En effet, on voit apparaître trois colonnes correspondant au diviseur (3), deux étiquettes qui ne sont pas dans une colonne (le reste vaut 2). Enfin, si l'on dénombre la valeur totale d'une colonne, on identifie la valeur d'une part (le quotient). On observe également qu'au sein d'une colonne les étiquettes sont rangées de l'unité de numération la plus grande (en haut) à l'unité de numération la plus petite (en bas).

Hypothèse 3 : Les élèves du groupe ont eu recours aux conversions pour effectuer le partage. De plus, ils ont maîtrisé dans cette situation la technique de conversion. Toutefois, la maîtrise de la technique est fragile. Les élèves se lèvent plusieurs fois pour échanger des étiquettes, ils vérifient la conversion et se questionnent. La manipulation a donc aidé l'attribution de sens à la division car les conversions ont été correctement effectuées.

Moment de la séance / Activité : Phase de recherche de l'activité 1 - les élèves sont en autonomie.

Procédures employées : Procédures anticipées ? OUI / NON

4 ; 7 ; 9 ; 11

4. La disposition spatiale du matériel de manipulation permettant de représenter chacune des parts est effectuée en colonnes, en marquant une séparation évidente entre chacune des parts.

7. La valeur d'une part est déterminée par comptage des étiquettes de chacune des unités de numération.

9. Une procédure attendue des élèves est qu'ils procèdent au partage des étiquettes en débutant par la plus grande unité de numération disponible. Dès lors qu'un maximum d'étiquettes de la plus grande unité de numération a été distribuée équitablement entre les membres prenant part au partage, la procédure est répétée avec l'unité de numération inférieure la plus grande.

11. Une procédure attendue des élèves est le recours aux échanges d'étiquettes. En effet, les différents partages ne sont possibles que si les élèves réalisent des conversions d'étiquettes contre d'autres étiquettes représentant la même valeur. Ainsi, 1 centaine correspond à 10 dizaines, qui correspond à 100 unités (de même, 1 dizaine est égal à 10 unités). Seulement, nous attendons que les élèves aient recours aux conversions d'étiquettes dès lors qu'ils ont distribué autant d'étiquettes que possible de la plus grande unité de numération permise. Cela permet de réduire les conversions à opérer puis les groupements par dix d'unités de numération en cas de conversions superflus.

Remarque :

La procédure 11 est utilisée mais n'est pas maîtrisée. Les élèves ont effectué la distribution des étiquettes en commençant par la plus grande unité de numération, toutefois l'utilisation de la technique de conversion était requise pour poursuivre la distribution. Lorsque l'on observe la disposition finale des étiquettes ainsi que la phrase réponse, on identifie des erreurs de conversions. En effet, la somme totale des étiquettes à la fin de la manipulation est égale à 403 alors que le nombre de départ (le dividende) est 413.

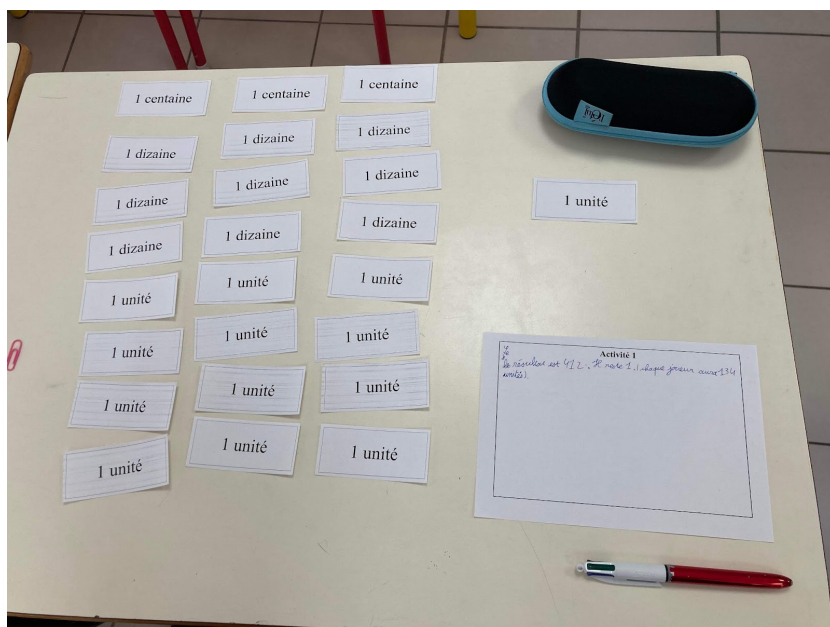
Utilisation de la technique de conversion :

La contrainte relative à la conservation de la valeur totale n'a pas été respectée. L'origine de cette erreur est issue d'une mauvaise maîtrise de la technique de conversion. En effet, lors de la mise en commun un élève du groupe a expliqué qu'il fallait ajouter 2 étiquettes sans les échanger. L'ajout d'étiquettes modifie donc la valeur initiale.

Explication orale des procédures employées :

Les élèves du groupe ajoutent des étiquettes pour chaque unité de numération afin d'obtenir un nombre d'étiquettes permettant le partage équitable.

Organisation spatiale de la situation de partage :



Lien entre procédures employées et hypothèses :

Hypothèse 2 : Cette manipulation est au service du sens de la division posée car l'organisation spatiale traduit de la situation de partage. En effet, on voit apparaître trois colonnes correspondant au diviseur (3), deux étiquettes qui ne sont pas dans une colonne (le reste vaut 2). Enfin, si l'on dénombre la valeur totale d'une colonne, on identifie la valeur d'une part (le quotient). On observe également qu'au sein d'une colonne les étiquettes sont rangées de l'unité de numération la plus grande (en haut) à l'unité de numération la plus petite (en bas).

Hypothèse 3 : Les élèves du groupe ont utilisé la manipulation pour traiter cette situation de partage. Toutefois, le manque de souplesse relative à la technique de conversion a pu faire obstacle

à l'exploitation de la manipulation. On observe donc que la manipulation et la maîtrise de la technique de conversion sont liées dans l'attribution du sens de la division posée à condition que les techniques associées soient maîtrisées.

Moment de la séance / Activité : Phase de recherche de l'activité 1 - les élèves sont en autonomie.

Procédures employées : Procédures anticipées ? OUI / NON

4 ; 7 ; 9 ; 11

4. La disposition spatiale du matériel de manipulation permettant de représenter chacune des parts est effectuée en colonnes, en marquant une séparation évidente entre chacune des parts.

7. La valeur d'une part est déterminée par comptage des étiquettes de chacune des unités de numération.

9. Une procédure attendue des élèves est qu'ils procèdent au partage des étiquettes en débutant par la plus grande unité de numération disponible. Dès lors qu'un maximum d'étiquettes de la plus grande unité de numération a été distribuée équitablement entre les membres prenant part au partage, la procédure est répétée avec l'unité de numération inférieure la plus grande.

11. Une procédure attendue des élèves est le recours aux échanges d'étiquettes. En effet, les différents partages ne sont possibles que si les élèves réalisent des conversions d'étiquettes contre d'autres étiquettes représentant la même valeur. Ainsi, 1 centaine correspond à 10 dizaines, qui correspond à 100 unités (de même, 1 dizaine est égal à 10 unités). Seulement, nous attendons que les élèves aient recours aux conversions d'étiquettes dès lors qu'ils ont distribué autant d'étiquettes que possible de la plus grande unité de numération permise. Cela permet de réduire les conversions à opérer puis les groupements par dix d'unités de numération en cas de conversions superflus.

Remarque :

L'erreur de conversion demande aux membres du groupe l'ajout d'étiquettes afin de retrouver le nombre initial : 413. Pour cela, un élève se rend aux barquettes et effectue un complément jusqu'à 413 à partir de 333. Il réalise ce complément en comptant de 10 en 10. Toutefois, un autre élève lui pose une question qui le distrait et lui fait perdre ses comptes. Il revient donc à sa place sans avoir terminé son complément.

L'élève réitère ce complément une seconde fois, seulement, il ne dépose pas l'étiquette qu'il voulait échanger, ce qui fausse une nouvelle fois la valeur totale qu'ils possèdent.

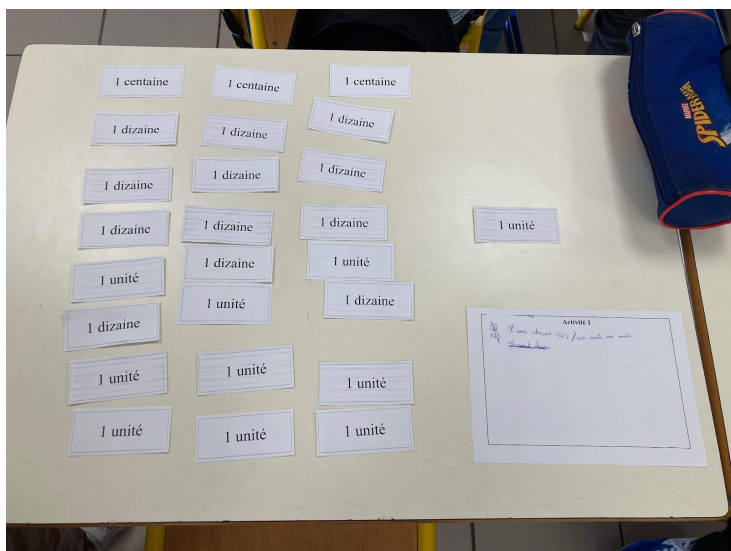
Utilisation de la technique de conversion :

Une procédure attendue s'appuie sur la maîtrise de la technique de conversion entre unités de numération. L'élève du groupe réalisant la conversion pose une étiquette « 1 centaine » mais prend seulement trois étiquettes « 1 dizaine ».

Explication orale des procédures employées :

∅

Organisation spatiale de la situation de partage :



Lien entre procédures employées et hypothèses :

Hypothèse 2 : Cette manipulation est au service du sens de la division posée car l'organisation spatiale traduit de la situation de partage. En effet, on voit apparaître trois colonnes correspondant au diviseur (3), deux étiquettes qui ne sont pas dans une colonne (le reste vaut 2). Enfin, si l'on dénombre la valeur totale d'une colonne, on identifie la valeur d'une part (le quotient). On observe également qu'au sein d'une colonne les étiquettes sont rangées de l'unité de numération la plus grande (en haut) à l'unité de numération la plus petite (en bas).

Hypothèse 3 : Les élèves du groupe ont utilisé la manipulation pour traiter cette situation de partage. Toutefois, la non maîtrise de la technique de conversion a fait obstacle à l'exploitation de la

manipulation. En effet, les élèves ont commis une erreur de conversion au début de la phase de recherche. Pour remédier à cela, ils ont effectué plusieurs échanges. Seulement, ces nombreux échanges ont complexifié les procédures rendant le partage difficile. La manipulation peut donc devenir un obstacle à la compréhension lorsqu'elle demande un grand nombre de manipulations.

Moment de la séance / Activité : Phase de recherche de l'activité 1 - les élèves sont en autonomie.

Procédures employées : Procédures anticipées ? OUI / NON

3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11

3. La disposition spatiale du matériel de manipulation permettant de représenter chacune des parts est effectuée en lignes, en marquant une séparation évidente entre chacune des parts.

5. Les élèves regroupent ensemble (disposition groupée d'étiquettes) les étiquettes de la même unité de numération.

7. La valeur d'une part est déterminée par comptage des étiquettes de chacune des unités de numération.

9. Une procédure attendue des élèves est qu'ils procèdent au partage des étiquettes en débutant par la plus grande unité de numération disponible. Dès lors qu'un maximum d'étiquettes de la plus grande unité de numération a été distribuée équitablement entre les membres prenant part au partage, la procédure est répétée avec l'unité de numération inférieure la plus grande.

11. Une procédure attendue des élèves est le recours aux échanges d'étiquettes. En effet, les différents partages ne sont possibles que si les élèves réalisent des conversions d'étiquettes contre d'autres étiquettes représentant la même valeur. Ainsi, 1 centaine correspond à 10 dizaines, qui correspond à 100 unités (de même, 1 dizaine est égal à 10 unités). Seulement, nous attendons que les élèves aient recours aux conversions d'étiquettes dès lors qu'ils ont distribué autant d'étiquettes que possible de la plus grande unité de numération permise. Cela permet de réduire les conversions à opérer puis les groupements par dix d'unités de numération en cas de conversions superflus.

Utilisation de la technique de conversion :

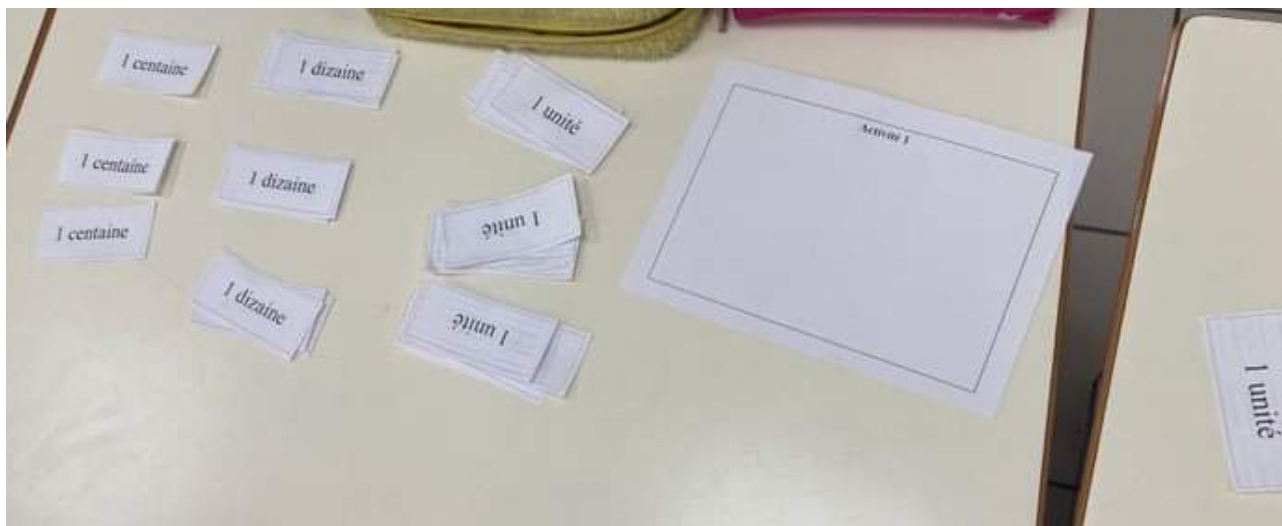
Une des procédures attendues s'appuie sur la maîtrise de la technique de conversion entre unités de numération. L'élève du groupe réalisant la conversion pose une étiquette « 1 centaine » et prend dix

étiquettes « 1 dizaine ». Lors de la conversion deux deux dizaines en unités, l'élève a pris seulement dix-neuf unités. Cette erreur a donc entraîné un reste incorrect.

Explication orale des procédures employées :

∅

Organisation spatiale de la situation de partage :



Lien entre procédures employées et hypothèses :

Hypothèse 2 : Cette manipulation est au service du sens de la division posée car l'organisation spatiale traduit de la situation de partage. En effet, on voit apparaître trois lignes correspondant au diviseur (3), deux étiquettes qui ne sont pas dans une colonne (le reste vaut 2). Enfin, si l'on dénombre la valeur totale d'une ligne, on identifie la valeur d'une part (le quotient). On observe également qu'au sein d'une ligne les étiquettes sont rangées en tas de l'unité de numération la plus grande (à gauche) à l'unité de numération la plus petite (à droite) à l'image de l'aspect positionnel de notre système de numération.

Hypothèse 3 : Les élèves du groupe ont eu recours aux conversions pour effectuer le partage. De plus, ils ont maîtrisé dans cette situation la technique de conversion. Toutefois, la maîtrise de la technique est fragile. Les élèves se lèvent plusieurs fois pour échanger des étiquettes, ce qui engendre une erreur dans la conversion des unités. En effet, l'élève a posé deux dizaines et a pris dix-neuf unités. La manipulation a donc aidé l'attribution de sens à la division bien qu'une erreur a été observée.

Moment de la séance / Activité : Phase de recherche de l'activité 1 - les élèves sont en autonomie.

Procédures employées : Procédures anticipées ? OUI / NON

4 ; 6 ; 11

4. La disposition spatiale du matériel de manipulation permettant de représenter chacune des parts est effectuée en colonnes, en marquant une séparation évidente entre chacune des parts.

6. Les élèves effectuent des groupements d'étiquettes par paquets de dix étiquettes d'une même unité de numération.

11. Une procédure attendue des élèves est le recours aux échanges d'étiquettes. En effet, les différents partages ne sont possibles que si les élèves réalisent des conversions d'étiquettes contre d'autres étiquettes représentant la même valeur. Ainsi, 1 centaine correspond à 10 dizaines, qui correspond à 100 unités (de même, 1 dizaine est égal à 10 unités). Seulement, nous attendons que les élèves aient recours aux conversions d'étiquettes dès lors qu'ils ont distribué autant d'étiquettes que possible de la plus grande unité de numération permise. Cela permet de réduire les conversions à opérer puis les groupements par dix d'unités de numération en cas de conversions superflus.

Remarque :

Les erreurs relatives à l'attribution de sens de chaque terme de la situation de partage créent des difficultés pour le reste du partage. En effet, le nombre de colonnes ne traduisant pas le diviseur les élèves ont dû réaliser des conversions non anticipées.

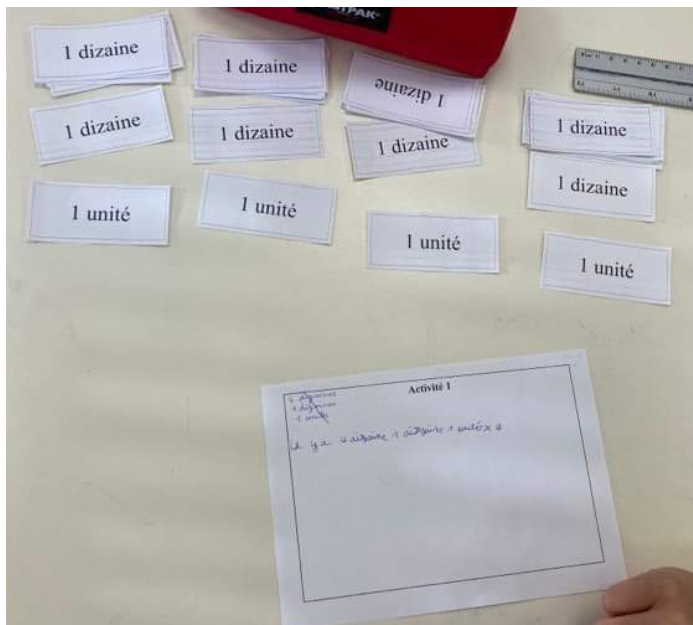
Utilisation de la technique de conversion :

Une procédure attendue s'appuie sur la maîtrise de la technique de conversion entre unités de numération. L'élève du groupe échange les quatre étiquettes « centaine » contre quatre étiquettes « dizaine ». Pour ce groupe, la valeur d'une étiquette est déterminée par l'objet-étiquette et non par l'unité de numération écrite.

Explication orale des procédures employées :

∅

Organisation spatiale de la situation de partage :



Lien entre procédures employées et hypothèses :

Hypothèse 2 : Cette manipulation n'est pas au service du sens de la division posée car l'organisation spatiale ne traduit de la situation de partage. En effet, on voit apparaître quatre colonnes alors que le diviseur est 3. Toutefois, malgré les erreurs de conversions, la valeur totale d'une colonne correspond par dénombrement, pour les élèves, à la valeur d'une part (le quotient).

Hypothèse 3 : Les élèves du groupe ont utilisé la manipulation pour traiter cette situation de partage. Toutefois, la non maîtrise de la technique de conversion a fait obstacle à l'exploitation de la manipulation. En effet, les élèves ont commis une erreur de conversion au début de la phase de recherche. La manipulation peut donc devenir un obstacle à la compréhension lorsqu'elle demande un grand nombre de manipulations.

Moment de la séance / Activité : Phase de recherche de l'activité 2 - les élèves sont en autonomie.

Procédures employées :

Procédures anticipées ? OUI / NON

4 ; 7 ; 9 ; 11

4. La disposition spatiale du matériel de manipulation permettant de représenter chacune des parts est effectuée en colonnes, en marquant une séparation évidente entre chacune des parts.

7. La valeur d'une part est déterminée par comptage des étiquettes de chacune des unités de numération.

9. Une procédure attendue des élèves est qu'ils procèdent au partage des étiquettes en débutant par la plus grande unité de numération disponible. Dès lors qu'un maximum d'étiquettes de la plus grande unité de numération a été distribuée équitablement entre les membres prenant part au partage, la procédure est répétée avec l'unité de numération inférieure la plus grande.

11. Une procédure attendue des élèves est le recours aux échanges d'étiquettes. En effet, les différents partages ne sont possibles que si les élèves réalisent des conversions d'étiquettes contre d'autres étiquettes représentant la même valeur. Ainsi, 1 centaine correspond à 10 dizaines, qui correspond à 100 unités (de même, 1 dizaine est égal à 10 unités). Seulement, nous attendons que les élèves aient recours aux conversions d'étiquettes dès lors qu'ils ont distribué autant d'étiquettes que possible de la plus grande unité de numération permise. Cela permet de réduire les conversions à opérer puis les groupements par dix d'unités de numération en cas de conversions superflus.

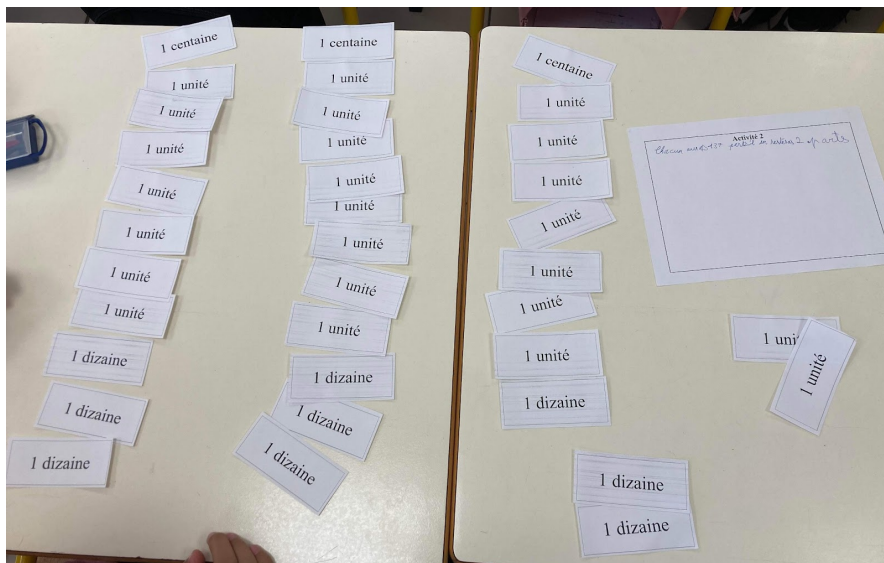
Utilisation de la technique de conversion :

Oui, maîtrise de la méthode de conversion après explication durant la mise en commun de l'activité 1.

Explication orale des procédures employées :

∅

Organisation spatiale de la situation de partage :



Les étiquettes sont regroupées par unités de numération. En revanche, les unités de numération ne sont pas organisées de la plus grande (centaine) à la plus petite (unité).

Lien entre procédures employées et hypothèses :

Hypothèse 2 : La disposition spatiale des étiquettes traduit la situation de partage en laissant apparaître trois colonnes correspondant au diviseur (3), deux étiquettes (2 unités) comme reste et la valeur de chaque part (diviseur). Toutefois, les unités de numération n'étant pas organisées de manière similaire à l'aspect positionnel de la numération, la lecture n'est pas immédiate.

Hypothèse 3 : Les élèves du groupe ont eu recours aux conversions pour effectuer le partage. De plus, ils ont maîtrisé dans cette situation la technique de conversion.

Moment de la séance / Activité : Phase de recherche de l'activité 2 - les élèves sont en autonomie.

Procédures employées : Procédures anticipées ? OUI / NON

4 ; 7 ; 9 ; 11

4. La disposition spatiale du matériel de manipulation permettant de représenter chacune des parts est effectuée en colonnes, en marquant une séparation évidente entre chacune des parts.

7. La valeur d'une part est déterminée par comptage des étiquettes de chacune des unités de numération.

9. Une procédure attendue des élèves est qu'ils procèdent au partage des étiquettes en débutant par la plus grande unité de numération disponible. Dès lors qu'un maximum d'étiquettes de la plus grande unité de numération a été distribuée équitablement entre les membres prenant part au partage, la procédure est répétée avec l'unité de numération inférieure la plus grande.

11. Une procédure attendue des élèves est le recours aux échanges d'étiquettes. En effet, les différents partages ne sont possibles que si les élèves réalisent des conversions d'étiquettes contre d'autres étiquettes représentant la même valeur. Ainsi, 1 centaine correspond à 10 dizaines, qui correspond à 100 unités (de même, 1 dizaine est égal à 10 unités). Seulement, nous attendons que les élèves aient recours aux conversions d'étiquettes dès lors qu'ils ont distribué autant d'étiquettes que possible de la plus grande unité de numération permise. Cela permet de réduire les conversions à opérer puis les groupements par dix d'unités de numération en cas de conversions superflus.

Vérification :

Sur l'ardoise les élèves du groupe ont utilisé une addition (technique opératoire connue des élèves) afin de vérifier l'exactitude du partage. En effet, cette procédure permet aux élèves de vérifier l'exactitude des conversions effectuées en calculant la valeur totale.

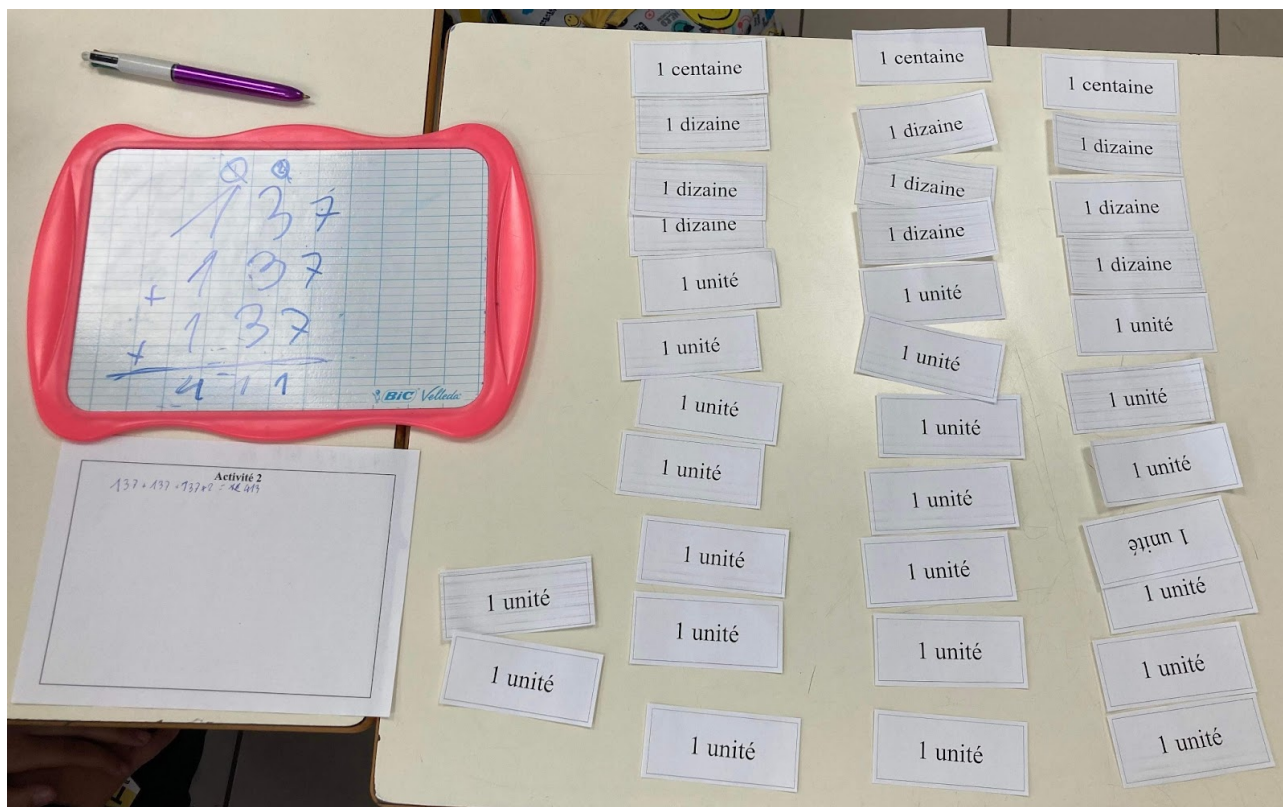
Utilisation de la technique de conversion :

La technique de la conversion est maîtrisée.

Explication orale des procédures employées :

∅

Organisation spatiale de la situation de partage :



Lien entre procédures employées et hypothèses :

Hypothèse 2 : Cette manipulation est au service du sens de la division posée car l'organisation spatiale traduit de la situation de partage. En effet, on voit apparaître trois colonnes correspondant au diviseur (3), deux étiquettes qui ne sont pas dans une colonne (le reste vaut 2). Enfin, si l'on dénombre la valeur totale d'une colonne, on identifie la valeur d'une part (le quotient). On observe également qu'au sein d'une colonne les étiquettes sont rangées de l'unité de numération la plus grande (en haut) à l'unité de numération la plus petite (en bas).

Hypothèse 3 : Les élèves du groupe ont eu recours aux conversions pour effectuer le partage. De plus, ils ont maîtrisé dans cette situation la technique de conversion. Par ailleurs, la maîtrise de la technique est fragile. Les élèves se lèvent plusieurs fois pour échanger des étiquettes, ils vérifient la conversion et se questionnent. La manipulation a donc aidé l'attribution de sens à la division car les conversions ont été correctement effectuées.

Moment de la séance / Activité : Phase de recherche de l'activité 2 - les élèves sont en autonomie.

Procédures employées : Procédures anticipées ? OUI / NON

3 ; 9 ; 11

3. La disposition spatiale du matériel de manipulation permettant de représenter chacune des parts est effectuée en lignes, en marquant une séparation évidente entre chacune des parts.

9. Une procédure attendue des élèves est qu'ils procèdent au partage des étiquettes en débutant par la plus grande unité de numération disponible. Dès lors qu'un maximum d'étiquettes de la plus grande unité de numération a été distribuée équitablement entre les membres prenant part au partage, la procédure est répétée avec l'unité de numération inférieure la plus grande.

11. Une procédure attendue des élèves est le recours aux échanges d'étiquettes. En effet, les différents partages ne sont possibles que si les élèves réalisent des conversions d'étiquettes contre d'autres étiquettes représentant la même valeur. Ainsi, 1 centaine correspond à 10 dizaines, qui correspond à 100 unités (de même, 1 dizaine est égal à 10 unités). Seulement, nous attendons que les élèves aient recours aux conversions d'étiquettes dès lors qu'ils ont distribué autant d'étiquettes que possible de la plus grande unité de numération permise. Cela permet de réduire les conversions à opérer puis les groupements par dix d'unités de numération en cas de conversions superflus.

Remarque :

Les élèves ont disposé les étiquettes en ligne. Chaque ligne correspond à une part. Nous pouvons observer que les valeurs des parts ne sont pas égales. Cette contrainte n'ayant pas été respectée, les conversions ainsi que les procédures de distribution peuvent être un obstacle.

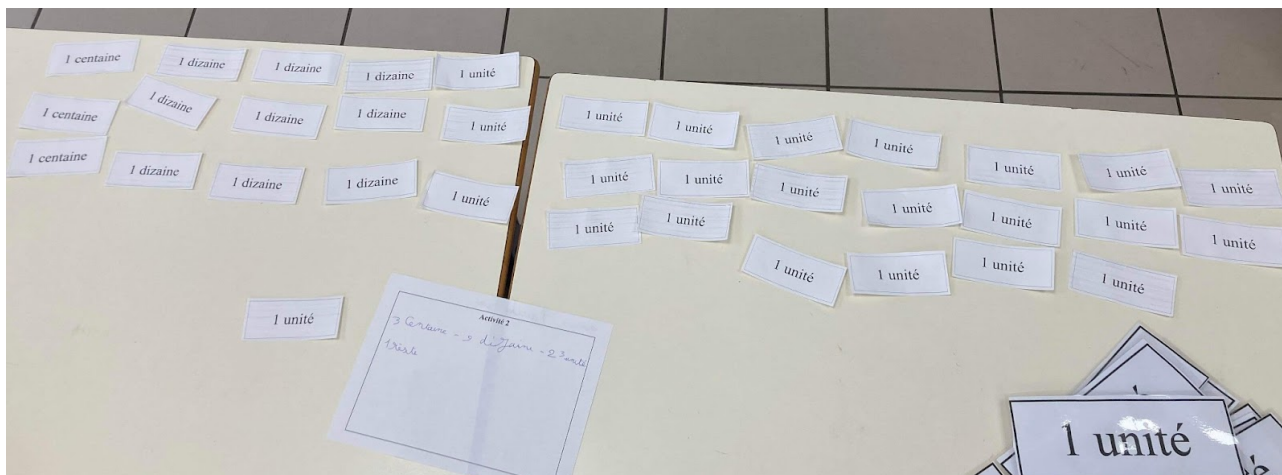
Utilisation de la technique de conversion :

La conversion des centaines en dizaines a été correctement réalisée. En revanche, la conversion des dizaines en unités n'est pas exacte. Cette approximation de la maîtrise de la technique de conversion crée un obstacle dans la résolution de la tâche.

Explication orale des procédures employées :

∅

Organisation spatiale :



Lien entre procédures employées et hypothèses :

Hypothèse 2 : Cette manipulation est au service du sens de la division posée car l'organisation spatiale traduit de la situation de partage. En effet, on voit apparaître trois lignes correspondant au diviseur (3), deux étiquettes qui ne sont pas dans une colonne (le reste vaut 2). Enfin, si l'on dénombre la valeur totale d'une colonne, on identifie la valeur d'une part (le quotient). On observe également qu'au sein d'une ligne les étiquettes sont rangées de l'unité de numération la plus grande (en haut) à l'unité de numération la plus petite (en bas).

Hypothèse 3 : Les élèves du groupe ont eu recours aux conversions pour effectuer le partage. On observe malgré tout des hésitations dans les techniques de conversion. Les erreurs liées à la fragilité de ces connaissances entraînent des erreurs dans les réponses, bien que les procédures utilisées soient pertinentes.

Moment de la séance / Activité : Phase de recherche de l'activité 3 - les élèves sont en autonomie, ils doivent compléter le tableau et peuvent utiliser si besoin les étiquettes (résolution par la manipulation).

Procédures employées : Procédures anticipées ? ~~OUI~~ / NON

∅

Le partage de cette activité étant identique aux activités 1 et 2, les élèves se souviennent des manipulations et donc des conversions associées. Les élèves de ce groupe notent sur le tableau « valeur d'une part » afin d'identifier la case qui correspond au quotient. Les membres du groupe savent qu'ils distribuent une centaine à chaque joueur, alors ils écrivent « 1 centaine » dans la case (quotient) et soustraient 300 au dividende. Ils justifient cette soustraction en disant qu'il y a 3 joueurs et donc puisqu'une centaine est donnée à chacun, ils ont distribué 300 au total. Cette procédure est réitérée jusqu'à avoir le reste égale à deux. Les élèves identifient le reste à « 2 » puisqu'ils se réfèrent aux situations des activités 1 et 2. Toutefois, il n'est pas mentionné que les boucles s'arrêtent lorsque le reste est inférieur au diviseur.

Lien avec la technique de conversion :

Les élèves identifient « 3 centaines » comme 300, soit « 300 unités ». On peut donc observer que les membres du groupe maîtrisent les relations entre unités de numération (qu'elles se suivent ou non).

Lien entre procédures employées et hypothèses :

Hypothèse 1 : Les manipulations permettant de représenter chacune des boucles de l'algorithme de la division posée aident l'attribution du sens à la technique usuelle de calcul. Les élèves ont pu retranscrire à l'écrit chaque étape réalisée lors des activités de manipulation, c'est-à-dire les étapes relatives aux conversions mais également à la distribution.

Hypothèse 4 : L'hypothèse relative à la relation entre le discours accompagnant la manipulation et l'algorithme de la division posée peut être analysée dans cette situation. En effet, nous remarquons que les élèves de ce groupe n'utilisent pas la manipulation afin de compléter le tableau. Toutefois il

se réfère, à l'oral, aux activités précédentes soit aux manipulations associées. En outre, les élèves ont créé une relation entre le discours attribué dans une situation de manipulation et la phase écrite de l'algorithme de la division posée. Cependant, nous pouvons observer sur leur fiche de recherche que le vocabulaire associé aux nombres de la situation de partage est encore fragile.

C	D	U	
4	1	3	3
			<i>valleur de une part</i> 1 centaine 3 dizaines 7 unité
3	0	0	
1	1	3	
	9	0	
	0	3	
	0	7	
		2	137

Activité 3

$ \begin{array}{r} 300 \\ - 113 \\ \hline 90 \\ - 23 \\ \hline 21 \\ - 21 \\ \hline 0 \end{array} $	<div style="margin-bottom: 10px;">dividende 413</div> <div style="margin-bottom: 10px;">diviseur 3</div> <div style="margin-bottom: 10px;">quotient 137</div> <div>reste 137</div>
--	--

Moment de la séance / Activité : Phase de recherche de l'activité 3 - les élèves sont en autonomie, ils doivent compléter le tableau et peuvent utiliser si besoin les étiquettes (résolution par la manipulation).

Procédures employées : Procédures anticipées ? ~~OUI~~ / NON

∅

Le partage de cette activité étant identique aux activités 1 et 2, les élèves se souviennent des manipulations et donc des conversions associées. Les élèves de ce groupe notent sur le tableau « → reste 2 » afin d'identifier la case qui correspond au reste. Les membres du groupe savent qu'ils distribuent trois centaines au total alors ils soustraient 300 au dividende. Toutefois, ils écrivent également « 3 centaine » dans la case destinée au quotient. Cette étape de leur procédure est donc un amalgame entre la valeur distribuée au total et la valeur distribuée à chacun, bien que les autres parties du quotient soient justes. Cependant, les élèves considèrent que l'écriture du quotient sous la forme d'une liste de valeurs d'unités de numération est suffisante à la lecture du quotient. Les élèves identifient le reste à « 2 » puisqu'ils se réfèrent aux situations des activités 1 et 2. Par contre, il n'est pas mentionné que les boucles s'arrêtent lorsque le reste est inférieur au diviseur.

Lien avec la technique de conversion :

Les élèves identifient « 3 centaines » comme 300, soit « 300 unités ». On peut donc observer que les membres du groupe maîtrisent les relations entre unités de numération (qu'elles se suivent ou non). De plus, lors des conversions de chaque unité de numération restante, ils formulent oralement la conversion.

Lien entre procédures employées et hypothèses :

Hypothèse 1 : Les manipulations permettant de représenter chacune des boucles de l'algorithme de la division posée aident l'attribution du sens à la technique usuelle de calcul. Les élèves ont pu retranscrire à l'écrit chaque étape réalisée lors des activités de manipulation, c'est-à-dire les étapes relatives aux conversions mais également à la distribution.

Hypothèse 4 : L'hypothèse relative à la relation entre le discours accompagnant la manipulation et l'algorithme de la division posée peut être analysée dans cette situation. En effet, nous remarquons que les élèves de ce groupe n'utilisent pas la manipulation afin de compléter le tableau. Toutefois il se réfère, à l'oral, aux activités précédentes soit aux manipulations associées. En outre, les élèves ont créé une relation entre le discours attribué dans une situation de manipulation et la phase écrite de l'algorithme de la division posée. Cependant, nous pouvons observer sur leur fiche de recherche que le vocabulaire associé aux nombres de la situation de partage est encore fragile.

Activité 3
 les joueurs on tous 137 part 2 et le reste 3 et le diviseur 30 dizaine et dividende 137 et le quotient

C	D	U	
4	1	3	3
3	0	0	3 centaine 4 dizaine 4 unité
1	1	3	
	9	0	
	2	3	
	2	1	
		2	→ reste 2

« Les joueurs ont tous 137 part 2 et le reste 3 et le diviseur 30 dizaine et dividende 137 et le quotient »

Moment de la séance / Activité : Phase de recherche de l'activité 3 - les élèves sont en autonomie, ils doivent compléter le tableau et peuvent utiliser si besoin les étiquettes (résolution par la manipulation).

Procédures employées : Procédures anticipées ? ~~OUI~~ / NON

∅

Le partage de cette activité étant identique aux activités 1 et 2, les élèves se souviennent des manipulations et donc des conversions associées. Par ailleurs, tant dans le complément du tableau que dans la connaissance du vocabulaire, les élèves ont su retranscrire les apprentissages du début de séance. Ils ont respecté les étapes de l'écriture de l'algorithme de la division posée.

Lien avec la technique de conversion :

Les élèves identifient « 3 centaines » comme 300, soit « 300 unités ». On peut donc observer que les membres du groupe maîtrisent les relations entre unités de numération (qu'elles se suivent ou non). De plus, lors des conversions de chaque unité de numération restante, ils forment oralement la conversion.

Lien entre procédures employées et hypothèses :

Hypothèse 1 : Les manipulations permettant de représenter chacune des boucles de l'algorithme de la division posée aident l'attribution du sens à la technique usuelle de calcul. Les élèves ont pu retranscrire à l'écrit chaque étape réalisée lors des activités de manipulation, c'est-à-dire les étapes relatives aux conversions mais également à la distribution.

Hypothèse 4 : L'hypothèse relative à la relation entre le discours accompagnant la manipulation et l'algorithme de la division posée peut être analysée dans cette situation. En effet, nous remarquons que les élèves de ce groupe n'utilisent pas la manipulation afin de compléter le tableau. Toutefois il se réfère, à l'oral, aux activités précédentes soit aux manipulations associées. En outre, les élèves ont créé une relation entre le discours attribué dans une situation de manipulation et la phase écrite de l'algorithme de la division posée. De plus, ils ont su réinvestir le vocabulaire associé à la division en contexte afin de commenter les étapes de l'algorithme.

Activité 3

Chacun aura 137 part.
413 est le dividende
3 est le diviseur
137 est le quotient
2 est le reste

C	D	U	
4	1	3	3
3	0	0	
-	1	1	3
-		8	0
-	2	3	
-	2	1	
		2	137

1 centaine
3 dizaine
7 unité

« Chacun aura 137 part.

413 est le dividende

3 est le diviseur

137 est le quotient

2 est le reste. »

Moment de la séance / Activité : Phase de recherche de l'activité 1 - les élèves sont en autonomie, ils doivent compléter le tableau et peuvent utiliser si besoin les étiquettes (résolution par la manipulation).

Procédures employées : Procédures anticipées ? OUI / ~~NON~~

4 ; 7 ; 9 ; 11 ; 12

4. La disposition spatiale du matériel de manipulation permettant de représenter chacune des parts est effectuée en colonnes, en marquant une séparation évidente entre chacune des parts.

7. La valeur d'une part est déterminée par comptage des étiquettes de chacune des unités de numération.

9. Une procédure attendue des élèves est qu'ils procèdent au partage des étiquettes en débutant par la plus grande unité de numération disponible. Dès lors qu'un maximum d'étiquettes de la plus grande unité de numération a été distribuée équitablement entre les membres prenant part au partage, la procédure est répétée avec l'unité de numération inférieure la plus grande.

11. Une procédure attendue des élèves est le recours aux échanges d'étiquettes. En effet, les différents partages ne sont possibles que si les élèves réalisent des conversions d'étiquettes contre d'autres étiquettes représentant la même valeur. Ainsi, 1 centaine correspond à 10 dizaines, qui correspond à 100 unités (de même, 1 dizaine est égal à 10 unités). Seulement, nous attendons que les élèves aient recours aux conversions d'étiquettes dès lors qu'ils ont distribué autant d'étiquettes que possible de la plus grande unité de numération permise. Cela permet de réduire les conversions à opérer puis les groupements par dix d'unités de numération en cas de conversions superflus.

12. Les complétions des tableaux sont effectuées parallèlement aux manipulations des étiquettes. Ainsi, à une manipulation correspond un renseignement dans les tableaux d'organisation des données.

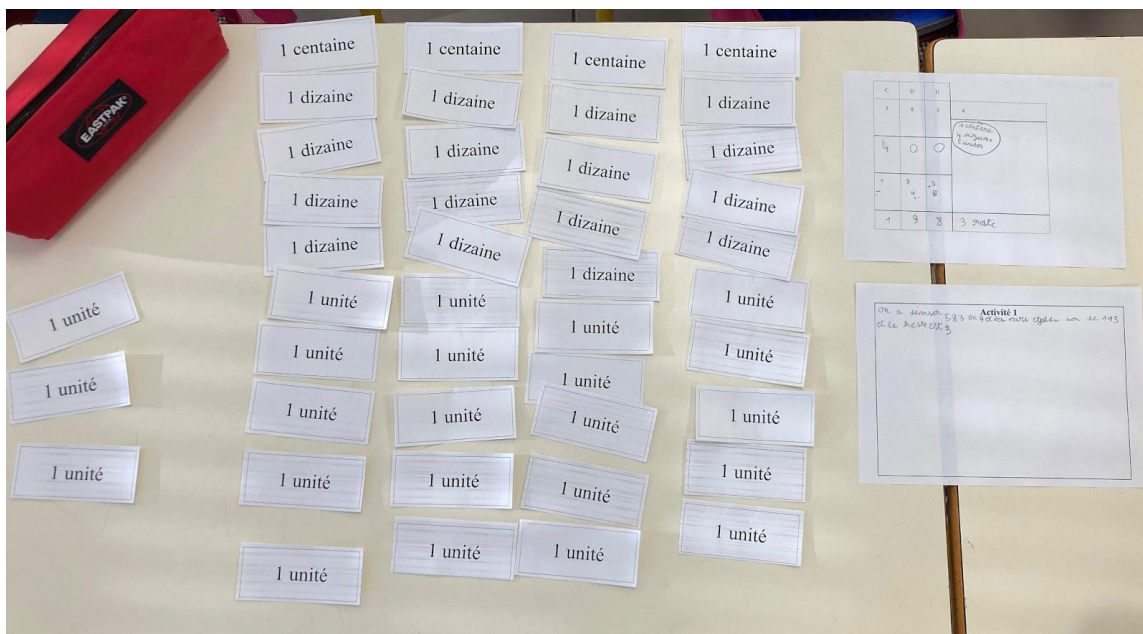
Lien avec la technique de conversion :

Les élèves identifient « 4 centaines » comme 400, soit « 400 unités ». On peut donc observer que les membres du groupe maîtrisent les relations entre unités de numération (qu'elles se suivent ou non). De plus, lors des conversions de chaque unité de numération restante, ils forment oralement la conversion.

Lien entre procédures employées et hypothèses :

Hypothèse 1 : Les manipulations permettant de représenter chacune des boucles de l'algorithme de la division posée aident l'attribution du sens à la technique usuelle de calcul. Les élèves ont pu retranscrire à l'écrit chaque étape réalisée lors des activités de manipulation, c'est-à-dire les étapes relatives aux conversions mais également à la distribution.

Hypothèse 4 : L'hypothèse relative à la relation entre le discours accompagnant la manipulation et l'algorithme de la division posée peut être analysée dans cette situation. En effet, nous remarquons que les élèves de ce groupe utilisent la manipulation afin de compléter le tableau. Toutefois il se réfère, à l'oral, à la précédente séance. En outre, les élèves ont créé une relation entre le discours attribué dans une situation de manipulation et la phase écrite de l'algorithme de la division posée. De plus, ils ont su réinvestir le vocabulaire associé à la division en contexte afin de commenter les étapes de l'algorithme.



Moment de la séance / Activité : Phase de recherche de l'activité 1 - les élèves sont en autonomie, ils doivent compléter le tableau et peuvent utiliser si besoin les étiquettes (résolution par la manipulation).

Procédures employées : Procédures anticipées ? OUI / ~~NON~~

13. Les élèves réalisent le partage des étiquettes dans un premier temps, puis complètent les tableaux.

Les élèves réalisent le partage à l'aide des étiquettes. Ils complètent donc le tableau en s'appuyant sur le partage terminé. Seulement, on observe que des lacunes du champ multiplicatif engendrent des erreurs de calcul. En effet ce groupe écrit que 4 fois 4 vaut 20, ce qui est faux.

Lien avec la technique de conversion :

Les élèves identifient « 4 centaines » comme 400, soit « 400 unités ». On peut donc observer que les membres du groupe maîtrisent les relations entre unités de numération (qu'elles se suivent ou non). De plus, lors des conversions de chaque unité de numération restante, ils forment oralement la conversion.

C	D	U	
5	8	3	4
-4	0	0	2 centaine 4 dizaines 4 unité
-2	8	3	
-2	0	0	
2	2	3	
-	2	0	
2	2	3	reste 3

Lien entre procédures employées et hypothèses :

Hypothèse 1 : Les manipulations permettant de représenter chacune des boucles de l'algorithme de la division posée aident l'attribution du sens à la technique usuelle de calcul. Les élèves ont pu retranscrire à l'écrit chaque étape réalisée lors des activités de manipulation, c'est-à-dire les étapes relatives aux conversions mais également à la distribution.

Hypothèse 4 : L'hypothèse relative à la relation entre le discours accompagnant la manipulation et l'algorithme de la division posée peut être analysée dans cette situation. En effet, nous remarquons que les élèves de ce groupe réalisent la manipulation pour ensuite compléter le tableau. En outre, les élèves ont créé une relation entre le discours attribué dans une situation de manipulation et la phase écrite de l'algorithme de la division posée.