



**HAL**  
open science

# Facteur de Parreau dans les systèmes dynamiques mesurés en théorie ergodique

Aguêmon Léon Tehungue

► **To cite this version:**

Aguêmon Léon Tehungue. Facteur de Parreau dans les systèmes dynamiques mesurés en théorie ergodique. Mathématiques [math]. 2024. dumas-04650267

**HAL Id: dumas-04650267**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-04650267v1>**

Submitted on 16 Jul 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

Laboratoire de Mathématiques Raphael Salem  
(LMRS)

**Université de Rouen Normandie**  
(URN)

## **Mémoire de Master II**

**Filière** : Mathématiques, Applications, Modélisation,  
et Mathématiques de l'information

**Spécialité** : **Théorie ergodique.**



**Thème**



***FACTEUR DE PARREAU DANS LES  
SYSTÈMES DYNAMIQUES MESURÉS  
EN THÉORIE ERGODIQUE***

**Encadrant** : Thierry DE LA RUE  
Université de Rouen Normandie

Rédigé par :  
Aguêmon Léon TEHUNGUE

Soutenu le 18 Juin 2024



---

# DÉDICACES

---

## À mon très cher papa

Tu m'as appris à rester dans la lumière et aussi dans l'obscurité. Que ce travail traduise ma gratitude et mon affection.

Que la terre te soit légère.

## À ma très chère maman

Aujourd'hui, quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit.

Tu as été tout pour moi. Ton affection m'a couvert, ta bienveillance me guidait et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les mauvais moments de la vie.

Que la terre te soit légère.



---

# REMERCIEMENTS

---

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude :

✓ à mon directeur de mémoire **Thierry DE LA RUE** qui a bien voulu m'accorder sa confiance en me permettant de travailler sur ce thème. Pour son dévouement, sa disponibilité et ses apports tout au long de ce travail. Il a su m'apporter ses connaissances en théorie ergodique avec patience et pédagogie. Ses remarques, suggestions et précieux conseils, m'ont permis d'améliorer la qualité de ce travail. Je tiens à lui dire qu'il a réussi par ses conseils et encouragements à développer en moi le plaisir de la recherche. Je lui suis infiniment reconnaissant. C'est un honneur pour moi de travailler avec lui et je ne peux qu'admirer son talent ;

✓ à **François Parreau**, dont l'article a servi de pierre angulaire à ce travail. Son travail novateur a posé les bases sur lesquelles cette étude a été construite, et ses contributions au domaine de la théorie ergodique sont véritablement louables ;

✓ à **Mariusz Lemańczyk** pour avoir suggéré le résultat central de ce travail. Son expertise a été une source d'inspiration inestimable, et c'est grâce à ses idées que j'ai pu mener à bien la démonstration présentée ici.



---

# RÉSUMÉ et ABSTRACT

---

## Résumé

Ce travail s'appuie sur l'article [1] de Parreau qui démontre l'existence d'un facteur non trivial dans un système dynamique non mélangeant, lequel est disjoint de tout système mélangeant, mais n'est pas défini de manière canonique. L'objectif de ce mémoire est de définir de manière canonique le **facteur de Parreau** dans tout système dynamique mesuré et disjoint des systèmes mélangeants. Nous présentons le théorème principal de ce mémoire, prouvant que le facteur étudié par Parreau possède une propriété encore plus forte : celle d'être un multiplicateur des systèmes disjoints des systèmes mélangeants. Cela nous permet de démontrer la non-trivialité du **facteur de Parreau** dans un système dynamique non mélangeant.

## Abstract

This work builds on Parreau's article [1], which demonstrates the existence of a non-trivial factor in a non-mixing dynamical system that is disjoint from any mixing system but is not defined in a canonical way. The objective of this thesis is to define the **Parreau factor** in a canonical manner within any measured dynamical system that is disjoint from mixing systems. We present the main theorem of this thesis, proving that the factor studied by Parreau has an even stronger property : being a multiplier of systems disjoint from mixing systems. This allows us to demonstrate the non-triviality of the **Parreau factor** in a non-mixing dynamical system.





---

# Table des matières

---

<b>Dédicace</b>	<b>i</b>
<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé et Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Outils préliminaires et la définition du facteur de Parreau</b>	<b>3</b>
1.1 Système dynamique, facteur et mélange . . . . .	3
1.2 Couplage et théorème de Parreau . . . . .	6
1.3 Classe caractéristique, multiplicateur et facteur de Parreau . .	18
<b>2 Facteur de Parreau dans des systèmes dynamiques non mélangés</b>	<b>21</b>
2.1 La non trivialité du facteur de Parreau dans un système non mélangeant . . . . .	21
2.2 Illustration à l'aide d'exemples . . . . .	33



---

# INTRODUCTION

---

## Introduction

La théorie ergodique, branche fondamentale de la théorie des systèmes dynamiques, explore les propriétés de transformation préservant une mesure, fournissant ainsi un cadre théorique puissant pour étudier les comportements à long terme des processus dynamiques. Dans ce contexte, les notions de facteurs et de couplages jouent un rôle crucial en permettant de caractériser et de comprendre la structure des systèmes dynamiques complexes.

Dans cette étude, nous allons explorer ces concepts fondamentaux et examiner leur rôle dans la théorie ergodique. Dans la première partie, nous introduisons les outils de théorie ergodique nécessaires pour comprendre les résultats de Parreau dans son article [1] et définir le **facteur de Parreau**.

Dans la deuxième partie, nous nous concentrons sur la partie essentielle de notre travail qui est la non trivialité du **facteur de Parreau** dans les systèmes dynamique non mélangeants, et nous l'illustrons à l'aide d'exemples concrets.



# OUTILS PRÉLIMINAIRES ET LA DÉFINITION DU FACTEUR DE PARREAU

## 1.1 Système dynamique, facteur et mélange

### 1.1.1 Système dynamique mesuré

On considère  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace de probabilité Borel standard et on s'intéresse à une transformation  $T$  de  $X$  possédant les propriétés suivantes :

- $T$  est inversible ;
- $T$  et  $T^{-1}$  sont mesurables ;
- pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(A) = \mu(TA) = \mu(T^{-1}A)$ .

On convient le plus souvent d'identifier deux telles transformations qui coïncident en dehors d'un ensemble négligeable, et on appelle automorphisme de l'espace de probabilité Borel standard  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  une classe d'équivalence de transformations vérifiant les propriétés ci-dessus et qui coïncident presque partout.

On note  $\text{Aut}(X, \mathcal{A}, \mu)$  le groupe des automorphismes de  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ .

#### Définition 1.1.1. *Système dynamique*

*On appelle ici système dynamique tout quadruplet  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  où  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  est un espace de probabilité Borel standard et  $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{A}, \mu)$ .*

### 1.1.2 Facteur et tribu facteur

#### Définition 1.1.2. *Facteur*

*On dit que le système  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  est un facteur du système  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  s'il*

existe une application mesurable  $\pi : X \rightarrow Y$  satisfaisant :

- $\pi_*(\mu) = \nu$  ;
- $\pi \circ T = S \circ \pi$ .

Une telle application est appelée un homomorphisme des deux systèmes dynamiques

**Remarque 1.1.3.** 1. L'existence de cette application peut être interprétée de la façon suivante : on peut voir le système  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  à l'intérieur de  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  en observant  $\pi(x)$ .

2. Lorsque  $\pi$  est inversible et bimesurable, on dit que les systèmes  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  sont isomorphes et que  $\pi$  est un isomorphisme des deux systèmes dynamiques.

**Définition 1.1.4. sous tribu Facteur**

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système et  $\mathcal{F}$  une sous tribu de  $\mathcal{A}$ . On dit que  $\mathcal{F}$  est une sous tribu facteur si elle est invariante par  $T$  c'est-à-dire  $T^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ .

**Exemple 1.1.5.** Si  $\pi : X \rightarrow Y$  homomorphisme des systèmes  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  alors  $\pi^{-1}(\mathcal{B})$  est une sous tribu facteur de  $\mathcal{A}$

**Remarque 1.1.6.** Réciproquement étant donné une sous tribu facteur  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{A}$

1. Il existe canoniquement un système dynamique noté  $(X_{/\mathcal{F}}, \mathcal{A}_{/\mathcal{F}}, \mu_{/\mathcal{F}}, T_{/\mathcal{F}})$  que nous allons appeler système quotient par la sous tribu facteur  $\mathcal{F}$  et un homomorphisme  $\pi_{\mathcal{F}} : X \rightarrow X_{/\mathcal{F}}$  des systèmes  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et  $(X_{/\mathcal{F}}, \mathcal{A}_{/\mathcal{F}}, \mu_{/\mathcal{F}}, T_{/\mathcal{F}})$  tels que  $\mathcal{F} = \pi_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{A}_{/\mathcal{F}})$ .
2. Observer le comportement du système facteur  $(X_{/\mathcal{F}}, \mathcal{A}_{/\mathcal{F}}, \mu_{/\mathcal{F}}, T_{/\mathcal{F}})$  revient à observer le comportement du système  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  mais sur la sous tribu facteur  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{A}$ .
3. S'il existe un système  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  et  $\pi : X \rightarrow Y$  un homomorphisme des systèmes  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  tels que  $\mathcal{F} = \pi^{-1}(\mathcal{B})$  alors les systèmes  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  et  $(X_{/\mathcal{F}}, \mathcal{A}_{/\mathcal{F}}, \mu_{/\mathcal{F}}, T_{/\mathcal{F}})$  sont isomorphes.

### 1.1.3 Système mélangeant

**Définition 1.1.7.** *Le système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  est dit mélangeant si pour tous  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$ ,*

$$\mu(A \cap T^{-j} B) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mu(A)\mu(B).$$

**Remarque 1.1.8.** *On note  $MIX$  la classe des systèmes mélangeants*

**Proposition 1.1.9.** *Le système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  est mélangeant si et seulement si pour tous  $f$  et  $g$  dans  $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, U_T^n g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle = \int f d\mu \int \bar{g} d\mu.$$

**Définition 1.1.10. rigidité**

*Le système  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  est rigide s'il existe une suite d'entiers  $(n_k)$  tendant vers  $+\infty$  telle que pour tout ensemble mesurable  $A$ ,*

$$\mu(A \Delta T^{n_k} A) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

**Exemple 1.1.11.** *Une rotation du cercle est toujours rigide.*

**Proposition 1.1.12.** *La rigidité empêche le mélange.*

*Démonstration.* Supposons que le système  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  est rigide.

Soit  $A$  une partie mesurable tel que  $0 < \mu(A) < 1$

Le système étant rigide, alors il existe une suite d'entiers qui  $(n_k)$  qui converge vers  $+\infty$  telle que pour tout ensemble mesurable  $A$ ,

$$\mu(A \Delta T^{n_k} A) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Or

$$\begin{aligned} \mu(A \Delta T^{n_k} A) &= \mu(A) + \mu(T^{n_k} A) - 2\mu(A \cap T^{n_k} A) \\ &= 2\mu(A) - 2\mu(A \cap T^{n_k} A) \end{aligned}$$

car  $\mu$  est invariant par  $T$

Par rigidité on a :

$$\mu(A \cap T^{n_k} A) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu(A).$$



Or si le système était mélangeant on aurait :

$$\mu(A \cap T^{n_k} A) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (\mu(A))^2,$$

et par l'unicité de la limite on aurait  $(\mu(A))^2 = \mu(A)$ , ce qui contredit le fait que  $0 < \mu(A) < 1$ .

D'où le système n'est pas mélangeant.  $\square$

**Corollaire 1.1.13.** *Une rotation du cercle n'est pas mélangeante.*

Dans son article [1], Parreau étudie les classes de systèmes mélangeants et non mélangeants afin de caractériser les propriétés distinctives entre ces classes. Pour mieux comprendre ses résultats, nous aborderons dans la section suivante des notions telles que le couplage, en particulier l'autocouplage limite de graphes de puissances, le facteur engendré par un couplage, ainsi que la disjonction de deux systèmes.

## 1.2 Couplage et théorème de Parreau

### 1.2.1 Notion de couplage

**Définition 1.2.1.** *Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  deux systèmes dynamiques. Un couplage de ces systèmes est une mesure de probabilité  $\lambda$  sur le produit cartésien  $X \times Y$ , dont les marginales sur  $X$  et  $Y$  sont respectivement  $\mu$  et  $\nu$ , et qui est invariante par la transformation produit  $T \times S : (x, y) \mapsto (Tx, Sy)$ .*

Cette définition peut être généralisée de manière évidente à la notion de couplage d'une famille finie ou dé

**Remarque 1.2.2.** 1. *L'ensemble des couplages de  $T$  et  $S$ , noté  $J(T, S)$ , n'est jamais vide : en effet, il contient toujours la mesure produit  $\mu \otimes \nu$ .*

2. *Chaque  $\lambda \in J(T, S)$  permet de définir un nouveau système dynamique  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \lambda, T \times S)$ , que nous noterons  $(T \times S)_\lambda$  pour éviter la confusion avec le produit direct  $T \times S$ .*

3. *Grâce au théorème de désintégration d'une probabilité dont la démonstration peut se trouver dans nombreux ouvrages de théorie de mesure ou*

des probabilités (par exemple [6], p.460), on peut avoir la désintégration de  $\lambda$  suivant chaque coordonnée, qui est unique presque sûrement.

La désintégration de  $\lambda$  suivant la première coordonnée est donnée comme suit :

pour  $\mu$ -presque tout  $x$ , il existe une mesure de probabilité  $\lambda^x$  sur  $(Y, \mathcal{B})$  telle que, pour tout  $A \in \mathcal{A}$  et tout  $B \in \mathcal{B}$ ,

$$\begin{aligned}\lambda(A \times B) &= \int_A \lambda^x(B) d\mu(x) \\ &= \int_X 1_A(x) \lambda^x(B) d\mu(x) \\ &= \int_X \delta_x(A) \lambda^x(B) d\mu(x)\end{aligned}$$

On a donc :

$$\lambda = \int_X \delta_x \otimes \lambda^x d\mu(x),$$

où pour  $\mu$ -presque tout,  $\lambda^x$  est une probabilité sur  $(Y, \mathcal{B})$ .

4. La désintégration de  $\lambda$  suivant la deuxième coordonnée est donnée comme suit :

$$\lambda = \int_Y \lambda_y \otimes \delta_y d\nu(y),$$

où pour  $\nu$ -presque tout,  $\lambda_y$  est une probabilité sur  $(X, \mathcal{A})$ .

## 1.2.2 Opérateur de Markov

### Définition 1.2.3. Opérateur

Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  deux systèmes dynamiques. On appelle opérateur de Markov tout opérateur  $P : L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow L^2(Y, \mathcal{B}, \nu)$  satisfaisant les propriétés suivantes :

- $P1_X = 1_Y$ ,
- $f \geq 0$  implique  $Pf \geq 0$ , et  $g \geq 0$  implique  $P^*g \geq 0$ , où  $P^*$  est l'opérateur adjoint de  $P$ .

Si de plus  $P$  vérifie :

- $PU_T = U_S P$ , où  $U_T$  et  $U_S$  sont respectivement les opérateurs unitaires sur  $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$  et  $L^2(Y, \mathcal{B}, \nu)$  associés respectivement à  $T$  et  $S$ , on dit qu'il est équivariant par  $T$  et  $S$

**Définition 1.2.4. Opérateur de Markov associé à un couplage**

Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  deux systèmes dynamiques et  $\lambda \in J(T, S)$ . On appelle opérateur de Markov associé à  $\lambda$  l'opérateur  $P_\lambda : L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow L^2(Y, \mathcal{B}, \nu)$  défini par

$$P_\lambda(f)(y) = \mathbb{E}_\lambda(f(x)|y).$$

Cet opérateur  $P_\lambda$  est équivariant par  $T$  et  $S$ .

Réciproquement, étant donné un opérateur de Markov  $P$  équivariant par  $T$  et  $S$ , la mesure  $\lambda_P$  définie sur  $X \times Y$  par

$$\lambda_P(A \times B) = \langle P1_A, 1_B \rangle_{L^2(Y, \nu)}$$

est un couplage de  $T$  et  $S$ .

**Remarque 1.2.5.** 1. L'opérateur  $P_\lambda$  est lié à la désintégration de  $\lambda$  par rapport à la deuxième coordonnée par :

$$P_\lambda(f)(y) = \int_X f(x) d\lambda_y(x).$$

2. Pour tous  $f \in L^2(X, \mu)$  et  $g \in L^2(Y, \nu)$  on a :

$$\int_{X \times Y} f(x)g(y) d\lambda(x, y) = \introduction
\int_Y P_\lambda f(y)g(y) d\nu(y)$$

et

$$\int_{X \times Y} f(x)g(y) d\lambda(x, y) = \int_X f(x)P_\lambda^*g(x) d\mu(x)$$

où  $P_\lambda^*$  est l'opérateur adjoint de  $P_\lambda$ .

**Définition 1.2.6. Tribu facteur engendrée par un couplage**

Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  deux systèmes dynamiques,  $\lambda \in J(T, S)$  et  $P_\lambda : L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow L^2(Y, \mathcal{B}, \nu)$  l'opérateur de Markov associé à  $\lambda$ . La tribu facteur engendré par le couplage  $\lambda$  est défini comme la sous-tribu  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{B}$  telle que

$$\mathcal{F} = \sigma(P_\lambda f : f \text{ bornée sur } X),$$

En d'autres termes,  $\mathcal{F}$  est la sous tribu  $\mathcal{B}$  la plus fine sur  $Y$  par rapport à laquelle toutes les fonctions bornées de la forme  $P_\lambda f$  sont mesurables.

**Remarque 1.2.7.** 1.  $\mathcal{F}$  est aussi la sous tribu engendrée par les applications  $y \mapsto \lambda_y$  (la désintégration par rapport à la deuxième coordonnée).

2. Grâce à  $P_\lambda U_T = U_S P_\lambda$ , on peut montrer que  $\mathcal{F}$  est bien une tribu facteur de  $\mathcal{B}$ .

En effet pour toute fonction mesurable bornée sur  $X$  et pour tout ensemble borélien  $A$  de  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} S^{-1}((P_\lambda f)^{-1}(A)) &= ((P_\lambda f)S)^{-1}(A) \\ &= (U_S P_\lambda f)^{-1}(A) \\ &= (P_\lambda(U_T f))^{-1}(A) \end{aligned}$$

On a donc le résultat car  $U_T f$  est aussi mesurable bornée sur  $X$ .

D'après la remarque 1.1.6, on donne la définition suivante.

**Définition 1.2.8. Facteur engendré par un couplage**

Le facteur engendré par le couplage  $\lambda$  est défini comme le système quotient  $(Y/\mathcal{F}, \mathcal{B}/\mathcal{F}, \nu/\mathcal{F}, S/\mathcal{F})$  par la sous tribu facteur  $\mathcal{F}$  engendrée par le couplage  $\lambda$ .

### 1.2.3 Disjonction de deux systèmes

**Définition 1.2.9.** Les systèmes dynamiques  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  sont disjoints si la mesure produit  $\mu \otimes \nu$  est l'unique couplage de  $T$  et  $S$ . On note dans ce cas  $T \perp S$ .

**Remarque 1.2.10.** Si  $C$  est une classe quelconque de systèmes dynamiques, alors on note  $C^\perp$  la classe des systèmes dynamiques disjoints de tout système de  $C$ .

Par exemple, on note  $MIX^\perp$  la classe des systèmes disjoints des systèmes mélangeants.

### 1.2.4 Couplage porté par des graphes

Supposons que  $S$  soit un facteur de  $T$ , et soit  $\pi : X \rightarrow Y$  un homomorphisme. Alors  $\pi$  permet de construire un couplage très particulier de  $T$  et  $S$ .

Considérons l'application

$$\Psi_\pi : x \in X \mapsto (x, \pi(x)) \in X \times Y,$$

et définissons la mesure de probabilité  $\Delta_\pi$  sur  $X \times Y$  par

$$\Delta_\pi := (\Psi_\pi)_*(\mu)$$

(mesure image de  $\mu$  par  $\Psi_\pi$ ). Autrement dit, pour tout ensemble mesurable  $C$  dans le produit cartésien  $X \times Y$ ,

$$\Delta_\pi(C) = \mu \{x \in X : (x, \pi(x)) \in C\}.$$

En particulier,  $\Delta_\pi$  est caractérisée par les valeurs qu'elle prend sur les pavés mesurables de  $X \times Y$  : pour tout  $A \in \mathcal{A}$  et tout  $B \in \mathcal{B}$ , on a :

$$\begin{aligned} \Delta_\pi(A \times B) &= \mu(\{x \in X : (x, \pi(x)) \in A \times B\}) \\ &= \mu(\{x \in X : x \in A, \pi(x) \in B\}) \\ &= \mu(\{x \in A, x \in \pi^{-1}(B)\}) \\ &= \mu(A \cap \pi^{-1}(B)) \end{aligned}$$

**Proposition 1.2.11.** *La mesure  $\Delta_\pi$  est un couplage de  $T$  et  $S$ .*

Le couplage  $\Delta_\pi$  est portée par le graphe de  $\pi$  c'est-à-dit que le graphe de  $\pi$  est de mesure 1 par  $\Delta_\pi$ .

**Remarque 1.2.12.** *Pour tous  $f \in L^2(X, \mu)$  et  $g \in L^2(Y, \nu)$  on a :*

$$\int_{X \times Y} f(x)g(y) d\Delta_\pi(x, y) = \int_X f(x)g(\pi x) d\mu(x).$$

### 1.2.5 Autocouplage

La définition de couplage qui peut être généralisée à la notion de couplage d'une famille finie ou dénombrable de systèmes dynamiques  $(T_i)_{i \in I}$ . Si tous les systèmes dynamiques  $T_i$  sont des copies d'un même système dynamique  $T$ , on parle d'autocouplages de  $T$ .

En particulier, pour tout  $k \geq 2$ , un couplage de  $k$  copies du système  $T$  est appelé autocouplage d'ordre  $k$  de  $T$ . L'ensemble des autocouplages d'ordre  $k$  de  $T$  est noté  $J_k(T)$ .

**Définition 1.2.13.** On appelle commutant de  $T$ , et on note  $C(T)$ , l'ensemble des commutateurs  $S$  de  $T$ . On a :

$$C(T) := \{S \in \text{Aut}(X, \mathcal{A}, \mu) : S \circ T = T \circ S\}.$$

Pour chaque  $S \in C(T)$ , notons  $\Delta_S$  l'autocouplage de  $T$  porté par le graphe de  $S$  : il est caractérisé par

$$\Delta_S(A \times B) = \mu(A \cap S^{-1}B).$$

**Remarque 1.2.14.** Pour tout système  $T$ , le commutant de  $T$  contient au moins les puissances  $T^n$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

De plus, chaque système  $(T \times T)_{\Delta_S}$  pour  $S \in C(T)$  est isomorphe à  $T$  (un isomorphisme est donné par  $x \mapsto (x, Sx)$ ).

**Proposition 1.2.15.** Pour tout  $S \in C(T)$ , l'opérateur markovien  $V_{\Delta_S}$  associé à l'autocouplage  $\Delta_S$  de  $T$  porté par le graphe de  $S$  est l'opérateur de Koopman  $U_{S^{-1}}$  associé à  $S^{-1}$  c'est-à-dire : pour tout  $f \in L^2(X, \mu)$  et pour tout  $x \in X$  on :

$$V_{\Delta_S}f(x) = U_{S^{-1}}f(x) = f(S^{-1}x)$$

*Démonstration.* Soient  $f, g \in L^2(X, \mu)$

En utilisant le fait que l'autocouplage  $\Delta_S$  de  $T$  porté par le graphe de  $S$  et l'invariance de  $\mu$  par  $S$  on a :

$$\begin{aligned} \int_{X \times X} f(x)g(y) d\Delta_S(x, y) &= \int_X f(x)g(Sx) d\mu(x) \\ &= \int_X f(S^{-1}x)g(x) d\mu(x) \\ &= \int_X U_{S^{-1}}f(x)g(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Et par définition de l'opérateur de Markov de  $\Delta_S$  on obtient :

$$\int_{X \times X} f(x)g(y) d\Delta_S(x, y) = \int_X V_{\Delta_S}f(x)g(x) d\mu(x).$$

Ainsi on a :

$$\int_X V_{\Delta_S}f(x)g(x) d\mu(x) = \int_X U_{S^{-1}}f(x)g(x) d\mu(x) \text{ pour tout } g \in L^2(X, \mu).$$

Et puisque  $L^2(X, \mu)$  est un espace de Hilbert alors on

$$V_{\Delta_S} f = U_{S^{-1}} f.$$

D'où  $f$  étant quelconque dans  $L^2(X, \mu)$  on a :

$$V_{\Delta_S} = U_{S^{-1}}$$

et donc le résultat. □

### 1.2.6 Couplage relativement indépendant au-dessus d'un facteur commun

Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  deux systèmes ayant comme facteur commun un troisième système  $(Z, \mathcal{C}, \rho, R)$ . Plus précisément, soit  $\pi_X : X \rightarrow Z$  un homomorphisme entre  $T$  et  $R$ , et  $\pi_Y : Y \rightarrow Z$  un homomorphisme entre  $S$  et  $R$ . On considère les couplages  $\Delta_{\pi_X}$  sur  $X \times Z$  et  $\Delta_{\pi_Y}$  sur  $Y \times Z$ , portés respectivement par les graphes de  $\pi_X$  et  $\pi_Y$ . Puis on désintègre ces deux mesures de probabilités par rapport à  $Z$  : pour presque tout  $z \in Z$ , il existe une mesure de probabilité  $\lambda_z^X$  sur  $X$  et une mesure de probabilité  $\lambda_z^Y$  sur  $Y$  satisfaisant, pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , tout  $B \in \mathcal{B}$  et tout  $C \in \mathcal{C}$  :

$$\Delta_{\pi_X}(A \times C) = \int_C \lambda_z^X(A) d\rho(z), \quad \text{et} \quad \Delta_{\pi_Y}(B \times C) = \int_C \lambda_z^Y(B) d\rho(z).$$

On peut alors définir une mesure de probabilité, notée  $\mu \otimes_Z \nu$  sur  $X \times Y$  en posant, pour tout  $D \subset X \times Y$  mesurable,

$$(\mu \otimes_Z \nu)(D) := \int_Z (\lambda_z^X \otimes \lambda_z^Y)(D) d\rho(z).$$

**Proposition 1.2.16.** *la mesure de probabilité  $\mu \otimes_Z \nu$  est bien un couplage de  $S$  et  $T$ .*

**Définition 1.2.17.** *On appelle couplage relativement indépendant de  $T$  et  $S$  au-dessus de leur facteur commun  $R$  le couplage  $\mu \otimes_Z \nu$  noté  $T \times_R S$ .*

**Remarque 1.2.18.** *1. Le couplage  $\mu \otimes_Z \nu$  dépend non seulement du facteur  $R$  mais aussi des homomorphismes  $\pi_X$  et  $\pi_Y$  choisis.*

2. Le couplage  $\mu \otimes_Z \nu$  est porté par :

$$\{(x, y) \in X \times Y : \pi_X(x) = \pi_Y(y)\}.$$

3. Conditionnellement à  $\pi_X(x) = z = \pi_Y(y)$   $x$  et  $y$  sont indépendantes de lois respectives  $\lambda_z^X$  et  $\lambda_z^Y$ .

4. Pour tous  $f \in L^2(X, \mu)$  et  $g \in L^2(Y, \nu)$  on a :

$$\int_{X \times Y} f(x)g(y) d(\mu \otimes_Z \nu) = \int_Z P_{\Delta_{\pi_X}} f(z) P_{\Delta_{\pi_Y}} g(z) d\rho(z)$$

où  $P_{\Delta_{\pi_X}} : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(Z, \rho)$  et  $P_{\Delta_{\pi_Y}} : L^2(Y, \nu) \rightarrow L^2(Z, \rho)$  sont les opérateurs markoviens associés respectivement à  $\Delta_{\pi_X}$  et  $\Delta_{\pi_Y}$ .

Cette définition de couplage relativement indépendant peut être généralisée de manière évidente à la notion de couplage relativement indépendant d'une famille finie ou dénombrable de systèmes dynamiques  $(T_i)_{i \in I}$  au-dessus de leur facteur commun  $R$ .

Par exemple, étant donné un couplage  $\lambda \in J(T, S)$ , évidemment,  $S$  est un facteur du système couplé  $(T \times S)_\lambda$  via l'homomorphisme donné par la projection sur  $Y$ .

Nous allons désintégrer la mesure de probabilité  $\lambda$  par rapport à  $Y$  et on obtient :

$$\lambda = \int_Y \lambda_y \otimes \delta_y d\nu(y).$$

La définition qui suit consiste à prendre une famille dénombrable de copies du système couplé  $(T \times S)_\lambda$ .

**Définition 1.2.19.** On appelle *Couplage relativement indépendant d'une infinité de copies de  $\lambda$  au-dessus de facteur commun  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$* , le couplage  $\lambda_\infty$  sur le produit cartésien  $Y \times X^\mathbb{N}$  défini par :

$$\lambda_\infty := \int_Y \delta_y \otimes \lambda_y^{\otimes \mathbb{N}} d\nu(y).$$

c'est-à-dire pour tout  $B \in \mathcal{B}$  et tout  $C$  mesurable dans  $X^\mathbb{N}$ ,

$$\lambda_\infty(B \times C) := \int_B \lambda_y^{\otimes \mathbb{N}}(C) d\nu(y).$$



**Remarque 1.2.20.** 1. La loi de  $(y, x_0, x_1, x_2, \dots) \in Y \times X^{\mathbb{N}}$  sous  $\lambda_{\infty}$  satisfait les propriétés suivantes :

- la coordonnée  $y$  est distribuée suivant  $\nu$ ,
- conditionnellement à  $y$ , les coordonnées  $x_k$  sont indépendantes et toutes distribuées suivant  $\lambda_y$ .

En particulier, pour chaque  $k$  le couple  $(y, x_k)$  est distribué suivant le couplage de départ  $\lambda$ .

2. La projection de  $\lambda_{\infty}$  sur  $Y \times X^n$  noté  $\lambda_n$  est le Couplage relativement indépendant de  $n$  copies d'un couplage au-dessus de  $Y$ . On a :

$$\lambda_n := \int_Y \delta_y \otimes \lambda_y^{\otimes n} d\nu(y).$$

En particulier

$$\lambda_1 = \int_Y \delta_y \otimes \lambda_y d\nu(y) = \lambda.$$

3. Soient  $n$  fonction(s) mesurable(s) bornée(s)  $f_1, \dots, f_n$  dans  $(X, \mu)$  et une fonction mesurable bornée  $g$  dans  $(Y, \nu)$ . On a :

$$\int_{Y \times X^n} (g \otimes (\otimes_{i=1}^n f_i))(y, x) d\lambda_n(y, x) = \int_Y g(y) \left( \prod_{i=1}^n P_{\lambda} f_i(y) \right) d\nu(y)$$

où  $P_{\lambda} : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(Y, \nu)$  est l'opérateur de Markov associé à  $\lambda$ .

### 1.2.7 Topologie sur l'ensemble des couplages et autocouplage limite de graphes de puissance

L'ensemble des couplages de  $T$  et  $S$  est équipé de la topologie définie par

$$\lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}, \lambda_n(A \times B) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda(A \times B).$$

Cette topologie est métrisable : Un exemple de distance la définissant est donné par

$$d(\lambda, \lambda_0) := \sum_{m, n \geq 0} \frac{1}{2^{m+n}} |\lambda(A_m \times B_n) - \lambda_0(A_m \times B_n)|,$$

où  $(A_m)_{m \geq 0}$  et  $(B_n)_{n \geq 0}$  sont des algèbres dénombrables séparant les points et générant respectivement les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ .

**Proposition 1.2.21.** *L'espace topologique métrique  $(J(T, S), d)$  est compact.*

Il est intéressant de noter que, lorsque  $X$  et  $Y$  sont des espaces métriques compacts, cette topologie coïncide avec la topologie faible  $*$  sur l'ensemble des couplages.

Toutes ces définitions peuvent être étendues de manière évidente à la notion de couplage d'une famille finie ou dénombrable de systèmes dynamiques  $(T_i)_{i \in I}$ .

**Proposition 1.2.22.** *Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système dynamique.  $T$  est mélangeant si et seulement si*

$$\Delta_{T^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu \otimes \mu.$$

**Proposition 1.2.23.** *Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système dynamique.  $T$  est rigide si et seulement s'il existe une suite d'entiers  $(n_k)$  tendant vers  $+\infty$  telle que*

$$\Delta_{T^{n_k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Delta_{Id}.$$

*Démonstration.* Le système étant une transformation rigide, il existe une suite d'entiers  $(k_j)$  tendant vers  $+\infty$  telle que pour tout ensemble mesurable  $A$ ,

$$\mu(A \Delta T^{k_j} A) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

c'est-à-dire que

$$\mu(A \Delta T^{k_j} A) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mu(A \Delta Id A).$$

Donc

$$\Delta_{T^{k_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \Delta_{Id}.$$

□

**Remarque 1.2.24.** *Puisque que cette topologie rend l'ensemble des autocouplages  $J_2(T)$  compact, alors il existe toujours une sous suite  $(\Delta_{T^{n_j}})$  de  $(\Delta_{T^n})$  et un autocouplage  $\lambda$  tels que :*

$$\Delta_{T^{n_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \lambda.$$

**Définition 1.2.25.** On appelle *autocouplage limite de graphes de puissance de  $T$*  la limite  $\lambda$  d'une sous suite  $(\Delta_{T^{n_j}})$  de  $(\Delta_{T^n})$ . C'est-à-dire :  $\forall A, B \in \mathcal{A}$ ,

$$\lambda(A \times B) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{-n_j} B).$$

**Remarque 1.2.26.** Un système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  est non mélangeant si et seulement si il existe une sous suite  $(\Delta_{T^{k_j}})$  de  $(\Delta_{T^k})$  qui converge vers  $\lambda \in J_2(T)$  non trivial, c'est-à-dire que  $\lambda$  est différent de  $\mu \otimes \mu$  :

$$\Delta_{T^{k_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \lambda.$$

Par la proposition suivante nous montrons la relation entre les opérateurs de Markov :

**Proposition 1.2.27.** Soient  $\lambda$  un couplage limite de  $\Delta_{T^{n_j}}$ ,  $V_j$  l'opérateur de Markov de  $\Delta_{T^{n_j}}$  et  $V$  celui de  $\lambda$ .

Pour tout  $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ ,  $V_j f$  converge faiblement vers  $V f$  dans  $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$

*Démonstration.* Soient  $f, g \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$

En utilisant la désintégration  $\Delta_{T^{k_j}}$  par rapport à  $X$  on obtient :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X V_j f(x) g(x) d\mu(y) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X \times X} f(x) g(y) d\Delta_{T^{k_j}}(x, y)$$

Par définition de  $\lambda$  on a :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X V_j f(x) g(x) d\mu(y) = \int_{X \times X} f(x) g(y) d\lambda(x, y)$$

Et par désintégration  $\lambda$  par rapport à  $X$  on obtient :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X V_j f(x) g(x) d\mu(y) = \int_X V f(x) g(x) d\lambda(x, y)$$

Ce qui exprime la convergence faible de  $V_j f$  vers  $V f$  dans  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  car  $g$  est quelconque dans  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  □

**Remarque 1.2.28.** Cette convergence définit la convergence de  $V_j$  vers  $V$  en tant qu'opérateur de Markov. (cf [2])

### 1.2.8 Théorème de Parreau

Dans son article [1] Parreau montre le résultat suivant :

#### **Théorème 1.1. (Parreau 2023)**

*Le facteur engendré par un autocouplage limite de graphes de puissances d'un système est disjoint de tout système mélangeant.*

Cela est démontré en utilisant des techniques de convergence faible, en exploitant la structure des espaces de probabilité standard et en utilisant les propriétés sur les désintégrations des couplages et des opérateurs de Markov qui leur sont associés. Nous verrons en chapitre 2 que les mêmes techniques permettent en fait de prouver un résultat plus fort (théorème 2.1). Une conséquence directe du théorème de Parreau est la suivante :

**Corollaire 1.2.29.** *Tout système non mélangeant a un facteur non trivial disjoint de tout système mélangeant.*

*Démonstration.* Supposons qu'un système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  est non mélangeant.

Le système étant non mélangeant alors par la proposition 1.2.22 il existe une sous suite  $(\Delta_{T^{k_j}})$  de  $(\Delta_{T^k})$  qui converge vers  $\lambda$  non trivial, c'est-à-dire que  $\lambda$  est différent de  $\mu \otimes \mu$  :

$$\Delta_{T^{k_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \lambda.$$

Le couplage  $\lambda$  n'étant pas trivial alors la tribu facteur  $\mathcal{F}$  engendrée par  $\lambda$  ne l'est pas non plus.

Alors le système quotient  $(X_{/\mathcal{F}}, \mathcal{A}_{/\mathcal{F}}, \mu_{/\mathcal{F}}, T_{/\mathcal{F}})$  est un facteur non trivial de  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  (cf 1.1.6). Or par l'application du théorème le système  $(X_{/\mathcal{F}}, \mathcal{A}_{/\mathcal{F}}, \mu_{/\mathcal{F}}, T_{/\mathcal{F}})$  est disjoint de tout système mélangeant. Ce qui veut dire que  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  possède un facteur (non trivial) disjoint de tout système mélangeant.  $\square$

**Remarque 1.2.30.** *La sous tribu facteur  $\mathcal{F}$  considérée par Parreau et le facteur  $(X_{/\mathcal{F}}, \mathcal{A}_{/\mathcal{F}}, \mu_{/\mathcal{F}}, T_{/\mathcal{F}})$  ne sont pas définis de façon canonique car ils dépendent de la suite  $(k_j)$ .*

L'un des objectifs de ce mémoire est d'identifier une tribu facteur définie de façon canonique et qui joue le même rôle qu'une tribu facteur engendrée par un autocouplage limite de graphes de puissances d'un système : c'est une des raisons qui ont conduit à la définition de **facteur de Parreau**.

Afin d'atteindre l'objectif fixé, nous allons montrer que le facteur dont parle Parreau dans son article [1] n'est pas seulement dans la classe  $MIX^\perp$  mais dans une sous classe particulière de  $MIX^\perp$  appelée la classe des multiplicateurs de  $MIX^\perp$ . Cette classe a l'avantage d'être une classe caractéristique, comme expliqué dans la section suivante.

### 1.3 Classe caractéristique, multiplicateur et facteur de Parreau

#### Définition 1.3.1. Classe caractéristique

*Soit  $C$  une classe quelconque de systèmes dynamiques.*

*On dit que la classe  $C$  est une classe caractéristique si :*

- *elle est stable par passage au facteur c'est-à-dire si  $(X, \mathcal{A}, \mu, T) \in C$  alors pour tout système  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  facteur de  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ , on a  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S) \in C$ .*
- *elle est stable par couplage d'un nombre fini et dénombrable de systèmes, c'est-à-dire si pour toute suite  $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i, T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $C$ , alors le système  $(\prod_{i=1}^\infty X_i, \otimes_{i=1}^\infty \mathcal{A}_i, \lambda, T)$  où  $T$  est la transformation produit et  $\lambda$  un couplage de cette famille, appartient également à  $C$ .*

**Remarque 1.3.2.** *toute classe stable par passage au facteur est stable par isomorphisme.*

Dans [3], les auteurs donnent une liste de nombreux exemples de telles classes. En particulier, ils ont prouvé que la classe  $ID$  constituée de toutes les identités des espaces de probabilité Borel standard est une classe caractéristique et est contenue dans chaque classe caractéristique non triviale.

Le résultat suivant est démontré dans [4].

**Proposition 1.3.3.** *Soient  $C$  une classe caractéristique de systèmes dynamiques et  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système dynamique quelconque. Alors il existe une plus grande (au sens de l'inclusion) sous tribu facteur  $\mathcal{A}_C \subset \mathcal{A}$  telle que le système quotient  $(X_{/\mathcal{A}_C}, \mathcal{A}_{/\mathcal{A}_C}, \mu_{/\mathcal{A}_C}, T_{/\mathcal{A}_C})$  soit dans la classe  $C$ .*

On dit abusivement que  $\mathcal{A}_C$  est le plus grand facteur du système dans la classe  $C$ .

**Corollaire 1.3.4.** *Soient  $C$  une classe caractéristique de systèmes dynamiques,  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système dynamique quelconque et  $\mathcal{F}$  une sous tribu facteur de  $\mathcal{A}$ . Si le système quotient  $(X_{/\mathcal{F}}, \mathcal{A}_{/\mathcal{F}}, \mu_{/\mathcal{F}}, T_{/\mathcal{F}})$  est dans la classe  $C$  alors  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_C$*

**Définition 1.3.5. multiplicateur d'une classe de systèmes**

*Soit  $C$  une classe quelconque de systèmes dynamiques.*

*Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système dynamique.*

*On dit que  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  est un multiplicateur de  $C$  si :*

- $(X, \mathcal{A}, \mu, T) \in C$ ,
- pour tout système  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S) \in C$  et pour tout coupage  $\lambda \in J(T, S)$  on a  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \lambda, T \times S) \in C$ .

*On note  $\mathcal{M}(C)$  la classe des multiplicateurs de  $C$ .*

**Remarque 1.3.6.** *Dans le cas où la classe  $C$  contient le système à un point, le point 2 de la définition implique le premier car tout système réduit à un point est un élément neutre par le couplage.*

Tout d'abord, nous donnons le résultat suivant qui est prouvé dans [5].

**Proposition 1.3.7.** *Soit  $C$  une classe quelconque de systèmes dynamiques. Alors  $\mathcal{M}(C^\perp)$  est une classe caractéristique*

**Corollaire 1.3.8.** *La classe  $\mathcal{P} := \mathcal{M}(MIX^\perp)$  est une classe caractéristique.*

En suivant la suggestion de Mariusz Lemańczyk, on donne la définition du **Facteur de Parreau** qui s'appuie sur la proposition 1.3.3 et le fait que  $\mathcal{P}$  est une classe caractéristique.

**Définition 1.3.9. Facteur de Parreau**

On appelle **facteur de Parreau** dans un système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ , la plus grande sous tribu facteur  $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{A}$  telle que le système quotient  $(X/\mathcal{A}_{\mathcal{P}}, \mathcal{A}/\mathcal{A}_{\mathcal{P}}, \mu/\mathcal{A}_{\mathcal{P}}, T/\mathcal{A}_{\mathcal{P}})$  soit dans  $\mathcal{P}$ .

**Remarque 1.3.10.** 1. Le **facteur de Parreau** est unique et est défini de façon canonique.

2. Le facteur dont parle Parreau est trivial dans tout système mélangeant. En effet, le seul autocouplage limite de graphes de puissances dans un système mélangeant est la mesure produit qui engendre un facteur trivial.

3. De même le **facteur de Parreau** est trivial dans tout système mélangeant, cela n'est pas direct comme le cas du facteur dont parle Parreau. Il suffit donc de montrer en général que tout facteur  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  d'un système mélangeant  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et qui est dans la classe  $MIX^{\perp}$  est trivial.

En effet,  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  étant facteur de  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  qui est mélangeant alors  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  est mélangeant.

Puisque  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  est dans  $MIX^{\perp}$ , alors il est disjoint de lui-même et par suite tout autocouplage de  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  est la mesure produit  $\nu \otimes \nu$ . En particulier, l'autocouplage  $\Delta_{Id}$  porté par le graphe de l'identité est la mesure  $\nu \otimes \nu$ .

Ainsi, on a pour tout  $B$  élément de  $\mathcal{B}$  :

$$\nu(B) = \nu(B) = \nu(B \cap B) = \nu(B \cap Id(B)) = \Delta_{Id}(B \times B) = \nu \otimes \nu(B \times B).$$

$$\text{Donc } \nu(B) = (\nu(B))^2.$$

$$\text{D'où } \nu(B) = 0 \text{ ou } \nu(B) = 1.$$

Alors la tribu  $\mathcal{B}$  est triviale et le système  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  l'est aussi.

Comme le corollaire 1.2.29 du théorème 1.1 indique la non trivialité de l'un des facteurs dont parle Parreau dans son article [1] dans tout système non mélangeant, le chapitre suivant a pour objectif de prouver la non trivialité du **facteur de Parreau** dans le cas des systèmes non mélangeants.

# FACTEUR DE PARREAU DANS DES SYSTÈMES DYNAMIQUES NON MÉLANGEANTS

## 2.1 La non trivialité du facteur de Parreau dans un système non mélangeant

Nous présentons ci-dessous un résultat central qui est une innovation inspirée par Mariusz Lemańczyk, démontrant que le facteur dont parle Parreau dans son article [1] est en réalité dans la classe caractéristique  $\mathcal{P}$ , ce qui permet de montrer la non trivialité du facteur de Parreau dans un système dynamique non mélangeant.

**Théorème 2.1.** *Le facteur engendré par un autocouplage limite de graphes de puissances d'un système dynamique est un multiplicateur de la classe  $MIX^\perp$ . Autrement dit, il est dans la classe caractéristique  $\mathcal{P}$*

**Remarque 2.1.1.** *Puisque le système à un point est disjoint de tout système alors la classe  $MIX^\perp$  contient le système à un point. D'après la remarque 1.3.6, il suffit donc de montrer le deuxième point de la définition 1.3.5 et ensuite le théorème de Parreau devient bien une conséquence du théorème 2.1.*

Pour démontrer ce résultat nous considérons un autocouplage  $\lambda$  d'un système  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  limite faible d'une suite de graphes de puissances  $T^{k_j}$  (où



$k_j$  tend vers l'infini), c'est-à-dire :

$$\Delta_{T^{k_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \lambda.$$

On désigne par  $V$  l'opérateur markovien associé à  $\lambda$ ,  $\mathcal{F}$  le facteur engendré par  $V$ , et par  $V_j$  l'opérateur markovien associé à  $\Delta_{T^{k_j}}$  ;  $V_j = U_{T^{-k_j}}$  (cf proposition 1.2.15).

Soit  $(Z, \mathcal{C}, \kappa, R)$  un système disjoint de tout système mélangeant. Soit  $\theta$  un couplage de  $T$  et  $R$ . On veut établir que  $(T \times R)_\theta$  est disjoint de tout système mélangeant. Soit  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  un système mélangeant. Soit  $\eta$  un couplage de  $(T \times R)_\theta$  avec  $S$  autrement dit un couplage de  $(X \times Z, \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}, \theta, T \times R)$  et  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$ .

Ce deuxième point de la définition 1.3.5 revient à montrer que  $\eta$  restreint à  $\mathcal{F} \times \mathcal{C} \times \mathcal{B}$  est trivial c'est-à-dire :

$$\eta_{/\mathcal{F} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{B}} = \theta_{/\mathcal{F} \otimes \mathcal{C}} \otimes \nu.$$

Soit  $\alpha \in J(R, S)$  la marginale de  $\eta$  sur  $Z \times Y$  puisque  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S) \in MIX$  et  $(Z, \mathcal{C}, \kappa, R) \in MIX^\perp$ , donc

$$\alpha = \kappa \otimes \nu.$$

La désintégration de  $\eta$  par rapport à  $X \times Z$  est :

$$\eta = \int_{X \times Z} \delta_{(x,z)} \otimes \eta_{x,z} d\theta(x, z) = \int_{X \times Z} \delta_x \otimes \delta_z \otimes \eta_{x,z} d\theta(x, z)$$

et en désintégrant  $\eta$  par rapport à  $Z \times Y$  on obtient :

$$\eta = \int_{Z \times Y} \eta^{z,y} \otimes \delta_z \otimes \delta_y d\alpha(z, y) = \int_{Z \times Y} \eta^{z,y} \otimes \delta_z \otimes \delta_y d\kappa(z) d\nu(y)$$

car :

$$\alpha = \kappa \otimes \nu.$$

La désintégration de  $\lambda$  par rapport à la deuxième coordonnée est :

$$\lambda = \int_X \lambda_x \otimes \delta_x d\mu(x) = \int_{X \times Z} \lambda_x \otimes \delta_x d\theta(x, z),$$

car  $\mu$  est la projection de  $\theta$  sur  $X$ .

Pour la démonstration, nous introduisons les couplages suivants pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

Soit  $m_n \in J(T \times T^{\times n}, R)$  le couplage défini par :

$$m_n = \int_{X \times Z} \delta_x \otimes (\lambda_x)^{\otimes n} \otimes \delta_z d\theta(x, z).$$

La projection  $\tilde{m}_n$  de  $m_n$  sur  $X^n \times Z$  est :

$$\tilde{m}_n = \int_{X \times Z} (\lambda_x)^{\otimes n} \otimes \delta_z d\theta(x, z).$$

Soit  $\rho_n \in J(T \times T^{\times n}, R, S)$  le couplage relativement indépendant de  $m_n$  et de  $\eta$  au-dessus du facteur commun  $X \times Z$ . Alors la désintégration de  $\rho_n$  est donnée par :

$$\rho_n = \int_{X \times Z} \delta_x \otimes (\lambda_x)^{\otimes n} \otimes \delta_z \otimes \eta_{x,z} d\theta(x, z).$$

La projection  $\tilde{\rho}_n$  de  $\rho_n$  sur  $X^n \times Z \times Y$  est :

$$\tilde{\rho}_n = \int_{X \times Z} (\lambda_x)^{\otimes n} \otimes \delta_z \otimes \eta_{x,z} d\theta(x, z).$$

La preuve du théorème 2.1 repose sur un résultat fondamental, donnant la relation entre la mesure  $\nu$  et les couplages  $\tilde{\rho}_n$  et  $\tilde{m}_n$ .

**Proposition 2.1.2.** *Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :*

$$\tilde{\rho}_n = \tilde{m}_n \otimes \nu.$$

Pour démontrer cette proposition, nous allons utiliser le raisonnement par récurrence sur  $n$

### 2.1.1 Preuve de la proposition 2.1.2 lorsque $n=1$

Soient  $f_1 \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $h \in L^2(Z, \mathcal{C}, \kappa)$  et  $g \in L^2(Y, \mathcal{B}, \nu)$  des fonctions bornées.

Posons :

$$A_1 = \int_{X \times Z \times Y} (f_1 \otimes h \otimes g)(x, z, y) d\tilde{\rho}_1(x, z, y).$$

Par désintégration de  $\tilde{\rho}_1$  par rapport à  $X \times Z$  on obtient :

$$A_1 = \int_{X \times Z} V f_1(x) h(z) J g(x, z) d\theta(x, z)$$

où  $J : L^2(Y, \nu) \rightarrow L^2(X \times Z, \theta)$  est l'opérateur markovien associé à  $\eta$ .

Puisque la limite de  $V_j$  est  $V$  (cf proposition 1.2.27) alors on a :

$$A_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X \times Z} V_j f_1(x) h(z) J g(x, z) d\theta(x, z)$$

Par la proposition 1.2.15 on a :

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X \times Z} U_{T^{-k_j}} f_1(x) h(z) J g(x, z) d\theta(x, z) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X \times Z} f_1(T^{-k_j} x) h(z) J g(x, z) d\theta(x, z). \end{aligned}$$

Par changement de variable ( $x' = T^{-k_j} x$ ;  $z' = R^{-k_j} z$ ) et le fait que  $\theta$  est  $T \times R$ -invariant on trouve :

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X \times Z} f_1(x) h(R^{k_j} z) J g(T^{k_j} x, R^{k_j} z) d\theta(x, z) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X \times Z} f_1(x) h(R^{k_j} z) U_{(T \times R)^{k_j}} J g(x, z) d\theta(x, z) \end{aligned}$$

Or  $U_{T \times R} J = J U_S$  donc  $U_{(T \times R)^{k_j}} J = J U_{S^{k_j}}$ , d'où :

$$A_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X \times Z} f_1(x) h(R^{k_j} z) J U_{S^{k_j}} g(x, z) d\theta(x, z).$$

On reconnaît la désintégration de  $\eta$  par rapport à  $X \times Z$  et par définition de  $J$  on a :

$$A_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X \times Z \times Y} f_1(x) h(R^{k_j} z) U_{S^{k_j}} g(y) d\eta(x, z, y).$$

Par désintégration de  $\eta$  par rapport à  $Z \times Y$  et le fait que la marginale de  $\eta$  sur  $Z \times Y$  est  $\kappa \otimes \nu$ , on obtient :

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{Z \times Y} P f_1(z, y) h(R^{k_j} z) U_{S^{k_j}} g(y) d\kappa(z) d\nu(y) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_Z \left( h(R^{k_j} z) \int_Y P f_1(z, y) U_{S^{k_j}} g(y) d\nu(y) \right) d\kappa(z) \end{aligned}$$

où  $P : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(Z \times Y, \alpha)$  est l'opérateur markovien associé à  $\eta$ .

Posons

$$B_j(z) = h(R^{k_j} z) \int_Y P f_1(z, y) U_{S^{k_j}} g(y) d\nu(y)$$

On a :

$$A_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_Z B_j(z) d\kappa(z)$$

Soit donc  $M$  un réel positif tel que : pour tout  $(z, y) \in Z \times Y$

$$|P f_1(z, y)| \leq M; |g(y)| \leq M \text{ et } |h(z)| \leq M$$

car les fonctions  $P f_1$ ,  $g$  et  $h$  sont bornées. Alors on a :

$$|B_j(z)| \leq M \left| \int_Y P f_1(z, y) U_{S^{k_j}} g(y) d\nu(y) \right| \text{ pour } \kappa\text{-presque tout } z \in Z$$

c'est-à-dire :

$$|B_j(z)| \leq M \left| \int_Y P f_1(z, y) g(S^{k_j} y) d\nu(y) \right| \text{ pour } \kappa\text{-presque tout } z \in Z.$$

En utilisant le fait que  $S$  est mélangeant alors pour tout  $z \in Z$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_Y P f_1(z, y) g(S^{k_j} y) d\nu(y) = \int_Y P f_1(z, y) d\nu(y) \int_Y g(y) d\nu(y)$$

Nous allons d'abord observer le cas où

$$\int_Y g(y) d\nu(y) = 0$$

donc :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_Y P f_1(z, y) g(S^{-k_j} y) d\nu(y) = 0$$

d'où

$$\lim_{j \rightarrow \infty} B_j(z) = 0 \text{ pour } \kappa\text{-presque tout } z \in Z.$$

En plus on a :

$$|B_j(z)| \leq M^3 \text{ pour } \kappa\text{-presque tout } z \in Z \text{ et pour tout } j$$

$\kappa$  étant une mesure de probabilité alors toute fonction constante est intégrable, et d'après le théorème de la convergence dominée :

$$A_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_Z B_j d\kappa(z) = 0,$$

d'où

$$A_1 = \int_{X \times Z} (f_1 \otimes h)(x, z) d\tilde{m}_1(x, z) \int_Y g d\nu$$

car

$$\int_Y g d\nu = 0$$

Considérons le cas où  $g$  est quelconque et posons :

$$g_0 = \int_Y g(y) d\nu(y) \quad \text{et} \quad \tilde{g} = g - g_0$$

$\nu$  étant une mesure de probabilité on a :

$$\int_Y \tilde{g}(y) d\nu(y) = 0$$

Alors en appliquant le **Cas 1** on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{X \times Z \times Y} (f_1 \otimes h \otimes \tilde{g})(x, z, y) d\tilde{\rho}_1(x, z, y) &= 0 \\ \int_{X \times Z \times Y} (f_1 \otimes h \otimes (g - g_0))(x, z, y) d\tilde{\rho}_1(x, z, y) &= 0 \\ A_1 - \int_{X \times Z \times Y} (f_1 \otimes h \otimes g_0)(x, z, y) d\tilde{\rho}_1(x, z, y) &= 0 \end{aligned}$$

$$A_1 - g_0 \int_{X \times Z \times Y} (f_1 \otimes h \otimes 1_Y)(x, z, y) d\tilde{\rho}_1(x, z, y) = 0$$

$$A_1 - g_0 \int_{X \times Z} (f_1 \otimes h)(x, z) d\tilde{m}_1(x, z) = 0$$

D'où

$$A_1 = \int_{X \times Z} (f_1 \otimes h)(x, z) d\tilde{m}_1(x, z) \int_Y g(y) d\nu(y)$$

car :

$$g_0 = \int_Y g(y) d\nu(y)$$

Ce qui exprime que :

$$\tilde{\rho}_1 = \tilde{m}_1 \otimes \nu.$$

La proposition est donc vraie pour  $n = 1$

### 2.1.2 Hérité de la propriété énoncée dans la proposition 2.1.2

Soit  $n \geq 1$  et supposons que la proposition est vraie pour  $n$  c'est-à-dire :

$$\tilde{\rho}_n = \tilde{m}_n \otimes \nu.$$

Maintenant on veut montrer que la proposition est vraie pour  $n + 1$  c'est-à-dire :

$$\tilde{\rho}_{n+1} = \tilde{m}_{n+1} \otimes \nu.$$

Soient  $n+1$  fonctions mesurables bornées  $f_1, \dots, f_n, f_{n+1}$  dans  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , une fonction mesurable bornée  $h$  dans  $(Z, \mathcal{C}, \kappa)$  et une fonction mesurable bornée  $g$  dans  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ .

Posons :

$$A_{n+1} = \int_{X^{n+1} \times Z \times Y} (\otimes_{i=1}^{n+1} f_i \otimes h \otimes g) d\tilde{\rho}_{n+1}.$$

Comme pour le cas  $n = 1$ , il suffit de montrer que  $A_{n+1} = 0$  pour  $g$  d'intégrale nulle.

Pour montrer ça, nous allons montrer d'abord la convergence faible dans  $L^2(X^n \times Z \times Y, \tilde{\rho}_n)$  suivante, grâce au théorème de la convergence dominée et le fait que la transformation  $S$  est mélangeante.

**Lemme 2.1.3.** Soient  $n$  un entier naturel non nul,  $n$  fonction(s) mesurable(s) et bornée(s)  $f_1, \dots, f_n$  sur  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , une fonction mesurable et bornée  $h$  sur  $(Z, \mathcal{C}, \kappa)$  et une fonction mesurable et bornée  $g$  sur  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  d'intégrale nulle. Si  $\tilde{\rho}_n = \tilde{m}_n \otimes \nu$  alors  $(\otimes_{i=1}^n U_{T^{k_j}} f_i) \otimes U_{R^{k_j}} h \otimes U_{S^{k_j}} g$  converge faiblement vers 0 dans  $L^2(X^n \times Z \times Y, \tilde{\rho}_n)$ .

*Démonstration.* Supposons  $\tilde{\rho}_n = \tilde{m}_n \otimes \nu$  et soit  $k \in L^2(X^n \times Z \times Y, \tilde{\rho}_n)$  et bornée.

Posons :

$$A_j = \int_{X^n \times Z \times Y} k(\bar{x}, z, y) \left( \otimes_{i=1}^n U_{T^{k_j}} f_i \otimes U_{R^{k_j}} h \otimes U_{S^{k_j}} g \right) (\bar{x}, z, y) d\tilde{\rho}_n(\bar{x}, z, y)$$

avec  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Alors

$$A_j = \int_{X^n \times Z \times Y} k(\bar{x}, z, y) \left( \otimes_{i=1}^n U_{T^{k_j}} f_i \right) (\bar{x}) U_{R^{k_j}} h(z) U_{S^{k_j}} g(y) d\tilde{\rho}_n(\bar{x}, z, y).$$

En utilisant l'hypothèse  $\tilde{\rho}_n = \tilde{m}_n \otimes \nu$  on a :

$$A_j = \int_{X^n \times Z \times Y} k(\bar{x}, z, y) \left( \otimes_{i=1}^n U_{T^{k_j}} f_i \right) (\bar{x}) U_{R^{k_j}} h(z) U_{S^{k_j}} g(y) d\tilde{m}_n(\bar{x}, z) d\nu(y)$$

Donc :

$$A_j = \int_{X^n \times Z} \left( \int \left( \otimes_{i=1}^n U_{T^{k_j}} f_i \right) (\bar{x}) U_{R^{k_j}} h(z) \int_Y k(\bar{x}, z, y) U_{S^{k_j}} g(y) d\nu(y) \right) d\tilde{m}_n(\bar{x}, z).$$

Posons

$$k_j(\bar{x}, z) = \left( \otimes_{i=1}^n U_{T^{k_j}} f_i \right) (\bar{x}) U_{R^{k_j}} h(z) \int_Y k(\bar{x}, z, y) U_{S^{k_j}} g(y) d\nu(y).$$

$$k_j(\bar{x}, z) = \left( \otimes_{i=1}^n U_{T^{k_j}} f_i \right) (\bar{x}) U_{R^{k_j}} h(z) \int_Y k(\bar{x}, z, y) g(S^{k_j} y) d\nu(y)$$

et on a :

$$A_j = \int_{X^n \times Z} k_j(\bar{x}, z) d\tilde{m}_n(\bar{x}, z).$$

Puisque les fonctions  $f_1, \dots, f_n, g, h$  et  $k$  sont bornées, soit  $M$  un réel positif tel que : pour tout  $(\bar{x}, z, y) \in X^n \times Z \times Y$  et pour  $i = 1, \dots, n$

$$|f_i(x_i)| \leq M; |g(y)| \leq M; |h(z)| \leq M \text{ et } |k(\bar{x}, z, y)| \leq M.$$

On a :

$$|k_j(\bar{x}, z)| \leq M^{n+1} \left| \int_Y k(\bar{x}, z, y) g(S^{k_j} y) d\nu(y) \right| \text{ pp } (\bar{x}, z) \in X^n \times Z$$

En utilisant le fait que  $S$  est mélangeant on obtient

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_Y k(\bar{x}, z, y) g(S^{k_j} y) d\nu(y) = \int_Y k(\bar{x}, z, y) d\nu(y) \int_Y g(y) d\nu(y)$$

Or

$$\int_Y g(y) d\nu(y) = 0,$$

donc :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_Y k(\bar{x}, z, y) g(S^{k_j} y) d\nu(y) = 0.$$

D'où

$$\lim_{j \rightarrow \infty} k_j(\bar{x}, z) = 0 \text{ pp } (\bar{x}, z) \in X^n \times Z.$$

En utilisant  $|g(y)| \leq M$  et  $|k(\bar{x}, z, y)| \leq M$  on a :

$$|k_j(\bar{x}, z)| \leq M^{n+3} \text{ pp } \bar{x} \in X^n$$

et toute fonction constante est intégrable car  $\tilde{m}_n$  est une mesure de probabilité.

Alors par le théorème de la convergence dominée on obtient :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} A_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X^n \times Z} k_j(\bar{x}, z) d\tilde{\lambda}_n(\bar{x}) = 0.$$

Et puisque  $k$  est quelconque dans  $L^2(X^n \times Z \times Y, \tilde{\rho}_n)$  alors cette égalité exprime la convergence faible de  $(\otimes_{i=1}^n U_{T^{k_j}} f_i) \otimes U_{R^{k_j}} h \otimes U_{S^{k_j}} g$  vers 0 dans  $L^2(X^n \times Z \times Y, \tilde{\rho}_n)$   $\square$



Suite de la démonstration de la proposition 2.1.2. :

Par désintégration de  $\tilde{\rho}_{n+1}$  par rapport à  $X \times Z$  on obtient :

$$A_{n+1} = \int_{X \times Z} V f_{n+1}(x) \left( \prod_{i=1}^n V f_i(x) \right) h(z) Jg(x, z) d\theta(x, z).$$

Puisque la limite de  $V_j$  est  $V$  (cf proposition 1.2.27) alors on a :

$$A_{n+1} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X \times Z} V_j f_{n+1}(x) \left( \prod_{i=1}^n V f_i(x) \right) h(z) Jg(x, z) d\theta(x, z).$$

En appliquant la proposition 1.2.15 ;  $U_{T^{-k_j}} = V_j$  on a :

$$A_{n+1} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X \times Z} U_{T^{-k_j}} f_{n+1}(x) \left( \prod_{i=1}^n V f_i(x) \right) h(z) Jg(x, z) d\theta(x, z)$$

$$A_{n+1} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X \times Z} f_{n+1}(T^{-k_j} x) \left( \prod_{i=1}^n V f_i(x) \right) h(z) Jg(x, z) d\theta(x, z).$$

Par changement de variable ( $x' = T^{-k_j} x$ ;  $z' = R^{-k_j} z$ ) et le fait que  $\theta$  est  $T \times R$ -invariant on trouve :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X \times Z} f_{n+1}(x) \left( \prod_{i=1}^n V f_i(T^{k_j} x) \right) h(R^{k_j} z) Jg(T^{k_j} x, R^{k_j} z) d\theta(x, z) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X \times Z} f_{n+1}(x) \left( \prod_{i=1}^n U_{T^{k_j}} V f_i(x) \right) h(R^{k_j} z) U_{(T \times R)^{k_j}} Jg(x, z) d\theta(x, z) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X \times Z} f_{n+1}(x) \left( \prod_{i=1}^n V U_{T^{k_j}} f_i(x) \right) U_{R^{k_j}} h(z) J U_{S^{k_j}} g(x, z) d\theta(x, z), \end{aligned}$$

car  $U_{T^{k_j}} V = V U_{T^{k_j}}$  et  $U_{(T \times R)^{k_j}} J = J U_{S^{k_j}}$ .

On reconnaît la désintégration de  $\rho_n$  par rapport à  $X \times Z$ , et on obtient :

$$A_{n+1} = \int_{X \times X^n \times Z \times Y} (f_{n+1} \otimes (\otimes_{i=1}^n U_{T^{k_j}} f_i) \otimes U_{R^{k_j}} h \otimes U_{S^{k_j}} g) d\rho_n.$$

Par la désintégration de  $\rho_n$  par rapport à  $X^n \times Z \times Y$  on a :

$$A_{n+1} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X^n \times Z \times Y} Q_n f_{n+1} \cdot \left( \left( \otimes_{i=1}^n U_{T^{k_j}} f_i \right) \otimes U_{R^{k_j}} h \otimes U_{S^{k_j}} g \right) d\tilde{\rho}_n$$

avec  $Q_n : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X^n \times Z \times Y, \tilde{\rho}_n)$  l'opérateur markovien associé à  $\rho_n$ .

En utilisant le fait que :

$$\tilde{\rho}_n = \tilde{m}_n \otimes \nu \quad \text{et} \quad \int_Y g(y) d\nu(y) = 0,$$

alors  $\left( \otimes_{i=1}^n U_{T^{k_j}} f_i \right) \otimes U_{R^{k_j}} h \otimes U_{S^{k_j}} g$  converge faiblement vers 0 dans  $L^2(X^n \times Z \times Y, \tilde{\rho}_n)$ , (cf proposition 2.1.3)

Ainsi on obtient :

$$A_{n+1} = 0$$

Ce qui implique que :

$$\tilde{\rho}_{n+1} = \tilde{m}_{n+1} \otimes \nu.$$

Donc la proposition est aussi vraie pour  $n + 1$ .

Et par conséquent, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :

$$\tilde{\rho}_n = \tilde{m}_n \otimes \nu.$$

□

### 2.1.3 Démonstration du théorème 2.1

. Le fait que  $\mathcal{F}$  est la tribu facteur engendré par l'image de  $V$  dans  $L^2(X, \mu)$  alors  $L^2(\mathcal{F}, \mu)$  est linéairement engendré par les produits  $\prod_{i=1}^n V f_i$  où  $f_1, \dots, f_n$  sont des fonctions mesurables bornées sur  $X$ .

Donc pour montrer que :

$$\eta_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{B}} = \theta_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{C}} \otimes \nu.$$

il suffit de montrer que pour tout  $n \geq 1$ , pour toute(s)  $n$  fonction(s) mesurable(s) bornée(s)  $f_1, \dots, f_n$  sur  $X$ , toute fonction mesurable bornée  $g$  sur  $Y$

et toute fonction mesurable bornée  $h$  sur  $Z$ ,

$$\int_{X \times Z \times Y} \left( \left( \prod_{i=1}^n V f_i \right) \otimes h \otimes g \right) d\eta = \int_{X \times Z} \left( \left( \prod_{i=1}^n V f_i \right) \otimes h \right) d\theta \int_Y g d\nu.$$

Soient  $n \geq 1$ ,  $n$  fonction(s) mesurable(s) bornée(s)  $f_1, \dots, f_n$  sur  $X$ , une fonction mesurable bornée  $g$  sur  $Y$  et une fonction mesurable bornée  $h$  sur  $Z$ .

Posons :

$$A = \int_{X \times Z} \left( \left( \prod_{i=1}^n V f_i \right) \otimes h \right) d\theta \int_Y g d\nu.$$

Ainsi :

On reconnaît la désintégration de  $\tilde{m}_n$  par rapport à  $X \times Z$  et on a :

$$A = \int_{X^n \times Z} (\otimes_{i=1}^n f_i \otimes h) d\tilde{m}_n \int_Y g d\nu.$$

En utilisant le fait que :

$$\tilde{\rho}_n = \tilde{m}_n \otimes \nu.$$

on a :

$$A = \int_{X^n \times Z \times Y} (\otimes_{i=1}^n f_i) \otimes h \otimes g d\tilde{\rho}_n.$$

Par désintégration de  $\tilde{\rho}_n$  par rapport à  $X \times Z$  on a :

$$A = \int_{X \times Z} \left( \prod_{i=1}^n V f_i(x) \right) \cdot h(z) \cdot Jg(x, z) d\theta(x, z).$$

On reconnaît la désintégration de  $\eta$  par rapport à  $X \times Z$  et on obtient :

$$A = \int_{X \times Z \times Y} \left( \prod_{i=1}^n V f_i \right) \otimes h \otimes g d\eta.$$

Ainsi

$$\int_{X \times Z \times Y} \left( \left( \prod_{i=1}^n V f_i \right) \otimes h \otimes g \right) d\eta = \int_{X \times Z} \left( \left( \prod_{i=1}^n V f_i \right) \otimes h \right) d\theta \int_Y g d\nu.$$

D'où

$$\eta_{/\mathcal{F} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{B}} = \theta_{/\mathcal{F} \otimes \mathcal{C}} \otimes \nu.$$

Ce qui achève la preuve du théorème par la remarque 1.3.6 □

Puisque  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$  est une tribu facteur et que le système quotient  $(X_{/\mathcal{F}}, \mathcal{A}_{/\mathcal{F}}, \mu_{/\mathcal{F}}, T_{/\mathcal{F}})$  est dans  $\mathcal{P}$  alors on a  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  (cf corollaire 1.3.4).

**Corollaire 2.1.4.** *Le Facteur de Parreau dans un système dynamique contient la tribu facteur engendrée par tout autocoupage limite de graphe de puissance de ce système.*

Ainsi si  $\mathcal{F}$  n'est pas trivial alors  $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  ne l'est pas non plus : le **facteur de Parreau** du système  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  n'est pas donc trivial.

**Corollaire 2.1.5.** *Le Facteur de Parreau dans un système dynamique non mélangeant est non trivial.*

**Corollaire 2.1.6.** *Le Facteur de Parreau dans un système dynamique est trivial si et seulement si le système est mélangeant.*

Afin de bien comprendre ces résultats, nous allons donner quelques exemples dans la section suivante.

## 2.2 Illustration à l'aide d'exemples

Dans cette section, nous illustrons le théorème 2.1 et sa conséquence à l'aide d'exemples concrets. Ces exemples permettent de mieux comprendre les concepts et les résultats présentés.

### Exemple 1 : Transformation de Chacon

Considérons le système dynamique standard  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  de Chacon. Alors  $T$  n'est pas mélangeant. D'après le corollaire 2.1.6, il existe donc un facteur non trivial de  $T$  qui est dans la classe caractéristique  $\mathcal{P}$ .

Or  $T$  étant la transformation de Chacon, le système  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  n'a pas un autre facteur non trivial autre que lui-même : cela découle de la propriété des autocouplages minimaux. Donc

$$(X, \mathcal{A}, \mu, T) \in \mathcal{P}.$$

## Exemple 2 : Les transformations rigides

Considérons le système dynamique standard  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et rigide. Alors par la proposition 1.1.12,  $T$  n'est pas mélangeant.

Or  $T$  étant une transformation rigide, il existe une suite d'entiers  $(k_j)$  tendant vers  $+\infty$  telle que

$$\Delta_{T^{k_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \Delta_{Id}.$$

Or l'autocouplage  $\Delta_{Id}$  engendre la tribu borélienne  $\mathcal{A}$ . Donc une application directe du théorème 2.1 permet de conclure que :

$$(X, \mathcal{A}, \mu, T) \in \mathcal{P}$$

En particulier d'après la proposition 1.1.11 toute rotation est rigide alors toute rotation est dans la classe caractéristique  $\mathcal{P}$ .

L'exemple qui suit nous donne un cas où le **Facteur de Parreau** contient strictement une sous tribu facteur non triviale engendré par un autocouplage limite de graphe de puissance d'un système dynamique.

## Exemple 3 : Autre exemple

On considère l'espace de Borel standard  $([0, 1], \mathcal{A}_0, \mu_0)$  où  $\mu_0$  est la mesure de Lebesgue. Sur cet espace l'article [7] prouve l'existence de deux automorphismes  $T_1$  et  $T_2$  et de deux suites d'entiers  $(k_j^1)$  et  $(k_j^2)$  tendant vers  $+\infty$  telles que

$$\Delta_{T_1^{k_j^1}} \longrightarrow \Delta_{Id} \neq \mu_0 \otimes \mu_0 \quad \text{et} \quad \Delta_{T_2^{k_j^2}} \longrightarrow \Delta_{Id} \neq \mu_0 \otimes \mu_0$$

mais

$$\Delta_{T_1^{k_j^2}} \longrightarrow \mu_0 \otimes \mu_0 \quad \text{et} \quad \Delta_{T_2^{k_j^1}} \longrightarrow \mu_0 \otimes \mu_0.$$

Considérons maintenant le système produit  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  des deux systèmes  $([0, 1], \mathcal{A}_0, \mu_0, T_1)$  et  $([0, 1], \mathcal{A}_0, \mu_0, T_2)$ , c'est-à-dire

$$X = [0, 1] \times [0, 1], \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{A}_0, \quad \mu = \mu_0 \otimes \mu_0, \quad \text{et} \quad T = T_1 \times T_2$$

Dans ce système nous avons deux tribus facteurs  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  donnés par les deux coordonnées (les deux systèmes sont des facteurs du système et par les

projections, on obtient les tribus facteurs). On a :  $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 = \mathcal{A}$

Par la compacité il existe une sous suite  $(k_{j_i}^1)$  de la suite  $(k_j^1)$  telle que

$$\Delta_{T^{k_{j_i}^1}} \longrightarrow \lambda$$

Cette sous suite est telle que le long de la première coordonnée est rigide tandis qu'elle est mélangeante le long de la deuxième coordonnée.

1. On considère la sous tribu facteur  $\mathcal{F}$  engendré par  $\lambda : (X_{/\mathcal{F}}, \mathcal{A}_{/\mathcal{F}}, \mu_{/\mathcal{F}}, T_{/\mathcal{F}}) \in \text{MIX}^\perp$  (théorème de Parreau)
2.  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$  car on a la rigidité le long de la sous suite  $(k_{j_i}^1)$  pour la première coordonnée.
3. Puisqu'on a le mélange le long de la deuxième coordonnée et d'après la démonstration du théorème de Parreau, on a  $\mathcal{F}_2 \perp \mathcal{F}$ . En effet dans la démonstration de Parreau, le facteur dont il parle est aussi disjoint de tout système mélangeant le long de la sous suite définissant l'autocouplage limite de puissance de graphe.
4. Des points 2 et 3 on a  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ . En effet pour toute fonction  $f$   $\mathcal{F}$ -mesurable. Alors on a :  $f = \mathbb{E}(f|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_1)$  d'après 3. Donc  $f$  est  $\mathcal{F}_1$ -mesurable, ainsi  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ . Et d'après 2 on a l'égalité.

Le **Facteur de Parreau**  $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  du gros système  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  vérifie

$$\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$$

Or  $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 = \mathcal{A}$  et puisque  $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{A}$  alors  $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \mathcal{A}$ .

$$(X, \mathcal{A}, \mu, T) \in \mathcal{P}.$$

Ces exemples illustrent comment le théorème peut être appliqué pour identifier des éléments non triviaux de la classe caractéristique  $\mathcal{P}$ .



---

# Bibliographie

---

- [1] F. Parreau, (2023), Facteurs disjoints des transformations mélangeantes.
- [2] V. V. Ryzhikov, (1994), Joinings, intertwining operators, factors and mixing properties of dynamical systems, Russian Acad. Sci. Izv. Math. 42, 91–114.
- [3] On arithmetic functions orthogonal to deterministic sequences. Adam Kanigowski, Joanna Kułaga-Przymus, Mariusz Lemańczyk et Thierry de la Rue. Advances in Mathematics 428, 109138, 2023.
- [4] Notes on Austin’s multiple ergodic theorem. Thierry de la Rue. 2009.
- [5] Joining properties of automorphisms disjoint with all ergodic systems. Przemysław Berk, Martyna Górska et Thierry de la Rue. 2023.
- [6] O. Kallenberg, Foundations of Modern Probability, Probability and its Applications, Springer-Verlag, 1997.
- [7] Z. Rigoberto, Mixing and rigidity along asymptotically linearly independent sequences, Department of Mathematics, The Ohio State University, Columbus, OH 43210, USA.