



HAL
open science

La découverte des nombres décimaux au CM1

Juliette Cadars

► **To cite this version:**

| Juliette Cadars. La découverte des nombres décimaux au CM1. Education. 2016. dumas-01699583

HAL Id: dumas-01699583

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01699583v1>

Submitted on 2 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Présenté et soutenu par
Juliette CADARS

TITRE DU MEMOIRE

La découverte des nombres décimaux au CM1

ENCADREMENT

Éric LAGUERRE, encadrant principal

Marc CAILHOL, co-encadrant

DOMAINE DE RECHERCHE

SCIENCES

Centre Départemental de l'Aveyron

Sommaire

Introduction	2
I. Le cadre théorique.....	4
1. Le concept d'obstacle.....	4
2. La théorie Anthropologique du Didactique (TAD) de Y.Chevallard.....	6
II. La problématique.....	8
III. La méthodologie.....	10
IV. Le recueil et l'analyse des données.....	12
1. Qu'est-ce qu'un nombre décimal ?.....	12
2. La conception historique des nombres décimaux.....	12
3. Les nombres décimaux dans les programmes.....	13
4. La progression proposée par les quatre manuels avant l'introduction du passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale.....	14
5. Le sens donné à ces nouveaux nombres.....	16
a. Selon la recherche.....	16
b. Dans les manuels scolaires.....	17
6. L'analyse des séquences consacrées à l'introduction de l'écriture décimale dans les trois manuels.....	21
a. L'organisation générale des pages de manuels.....	21
b. L'analyse des tâches proposées selon la TAD.....	23
i. Identification et description des types de tâches.....	23
ii. Les constats suite à l'analyse des pages de manuel selon la TAD..	39
c. L'analyse des « traces écrites » faisant office d'institutionnalisation proposées par chaque manuel.....	41
Conclusion	44
Bibliographie.....	47
Annexes.....	49

Introduction

La réalisation du mémoire suivant s'inscrit dans le cadre du master MEEF premier degré : Métiers de l'Éducation, de l'Enseignement et de la Formation. Ayant obtenu le concours de professeur des écoles à la fin de la première année de master, je suis actuellement professeur des écoles stagiaire. La réalisation de ce mémoire doit alors être l'occasion de se pencher de manière approfondie sur une question liée à l'enseignement. Il s'agit d'une part d'un travail délicat, quand, en tant que « tout nouveau professeur des écoles », nous n'avons aucune expérience ni aucun recul par rapport à ces questions d'enseignement. D'autre part, c'est une manière justement de réfléchir, avant d'y être confronté, à la question, dans l'optique de se préparer au mieux à cet enseignement auquel nous serons sans doute confrontés à un moment de notre carrière.

Dans ce contexte, j'ai choisi le domaine des mathématiques, en lien avec ma formation initiale, pour me pencher davantage sur la question de l'enseignement et l'apprentissage des nombres décimaux au cycle 3. Au cours de la première année de master, j'ai compris, en consultant notamment sur le document *Ressources pour faire la classe : le nombre au cycle 3* (MEN, 2012), que l'introduction de cette notion était délicate tout en constituant un apprentissage majeur du domaine mathématique au cycle 3. Pour les élèves d'une part, la manipulation et la compréhension des nombres décimaux posent des difficultés apparentes. Les décimaux apparaissent en effet comme de nouveaux nombres qui se heurtent au modèle des nombres entiers qui est alors le seul modèle connu. Si la notion est difficile pour les élèves, elle ne l'est pas moins du côté de l'enseignant qui a alors la « responsabilité » de guider les élèves au mieux pour qu'ils dépassent les obstacles liés à cet apprentissage. La complexité de l'enseignement des nombres décimaux est mise d'ailleurs en évidence au niveau historique. En effet, cet enseignement a subi d'importants bouleversements au cours de l'histoire, qui illustrent toute la difficulté de cet enseignement autant que de l'apprentissage qui en découle.

C'est tout à la fois la richesse et la complexité de ce sujet qui m'ont poussée à développer et approfondir des recherches sur celui-ci dans le mémoire qui suit. Il s'agit par ailleurs d'un sujet « utile » qui me permettra de mieux appréhender à l'avenir l'enseignement de ces nombres au cycle 3.

Mieux comprendre les erreurs les plus fréquentes commises par les élèves dans le cas des nombres décimaux : leurs origines, leurs natures ; essayer de mettre en évidence des choix d'enseignement plus adaptés, plus opportuns que d'autres : voilà l'intérêt que je porte à la réalisation de ce mémoire dans l'objectif d'être mieux préparée, mieux

renseignée sur le sujet pour le jour où, dans ma carrière, je ferai face à des élèves de CM1 qui découvrent pour la première fois les nombres décimaux.

I. Le cadre théorique

1. Le concept d'obstacle

Selon le dictionnaire Larousse, un obstacle est « ce qui empêche ou retarde une action, une progression ». La notion d'obstacle en mathématiques a été introduite par G.Brousseau en 1976. Ce dernier distingue trois origines fondamentales aux obstacles rencontrés dans l'enseignement des mathématiques : une origine ontogénétique ou cognitive, une origine épistémologique et une origine didactique.

Les obstacles d'origine ontogénétique sont liés à une limitation des capacités cognitives de l'individu à un moment de son développement. En effet, il peut se heurter à un moment à des connaissances inappropriées à son développement intellectuel du fait de son âge et des capacités dont il peut faire preuve à ce moment là.

Les obstacles d'origine didactique sont, contrairement aux précédents, extérieurs à l'individu. Ils ne dépendent effectivement que d'un choix du système d'enseignement. Ces obstacles peuvent être causés par un choix général du système éducatif (les programmes par exemple) ou de façon plus étroite et « locale » par les choix didactiques d'un enseignant par exemple.

Par exemple, pendant longtemps, les instructions officielles recommandaient l'introduction de la notion de nombres décimaux à l'école élémentaire par la mesure. En effet, ils étaient enseignés comme résultant du recodage d'une mesure par un changement d'unité. Il a été prouvé par la suite que ce choix didactique du système éducatif constituait un obstacle pour les élèves dans l'acquisition de la notion. En omettant l'étude préalable du fractionnement de l'unité, on mettait effectivement de côté le fait que le nombre décimal est la réponse à la question de l'insuffisance des nombres entiers.

Enfin, les obstacles d'origine épistémologique sont liés à la résistance de connaissances antérieures qui avaient leurs intérêts, leurs succès dans un certain contexte mais qui se révèlent fausses ou inadaptées dans un nouveau contexte. L'élève se heurte ainsi à cet obstacle lorsqu'il continue à appliquer ses connaissances dans un contexte dans lequel elles ne peuvent plus s'appliquer. Cet obstacle est ainsi lié au vécu de l'élève. La confrontation des élèves à ce type d'obstacle est quasiment indispensable au cours de leur scolarité. En effet, au fur et à mesure de l'apparition de nouveaux apprentissages, les élèves sont amenés à discuter des connaissances antérieures, pour les modifier, les compléter ou parfois même les rejeter. C'est le cas particulièrement lorsque les élèves découvrent la notion de nombres décimaux. Les obstacles

épistémologiques sont effectivement les principaux obstacles auxquels se heurtent les élèves dans le cadre de ces nouveaux nombres. En effet, alors qu'ils n'ont jusque là rencontré que des nombres entiers, ils sont tentés d'appliquer aux nombres décimaux, les règles et axiomes valables pour les entiers alors que le contexte est désormais différent. Par exemple, dans le cadre des nombres entiers, pour ordonner deux nombres, l'élève peut utiliser la règle suivante : « le nombre qui contient le plus de chiffres est le plus grand ». La persistance de cette connaissance antérieure dans le cadre des nombres décimaux va alors constituer un obstacle d'ordre épistémologique pour les élèves. En guise d'exemple, certains élèves affirmeront que 1,436 est supérieur à 3 car 1,436 contient quatre chiffres alors que 3 n'en contient qu'un, ce qui se révèle être une réponse fautive.

Un obstacle se manifeste nécessairement par des erreurs mais ces erreurs ne sont pas dues au hasard. Elles sont en effet en lien avec des connaissances. En ce sens, il est important de différencier « obstacle » et « difficulté ». À la différence de la difficulté, l'obstacle est une connaissance. A.Duroux (1982) définit justement certaines conditions que doit satisfaire une connaissance pour être déclarée un obstacle : un obstacle est une connaissance qui a « un domaine d'efficacité », c'est-à-dire qu'elle est valable et adaptée dans un certain contexte ; cette connaissance engendre des erreurs lorsqu'elle est appliquée dans un contexte dans lequel elle n'est plus valable ; « l'obstacle est une connaissance stable » et résistante, c'est-à-dire qu'elle perdure longtemps et l'élève met du temps à la rejeter malgré la prise de conscience de son inexactitude. G.Brousseau (1976) précise de ce fait l'importance en didactique de proposer une multitude de situations diverses dans lesquelles la connaissance antérieure de l'élève est mise en défaut ou bien insuffisante pour résoudre le problème posé. Il s'agit finalement de confronter l'élève à l'inefficacité d'une connaissance antérieure dans une certaine situation pour qu'il envisage de la questionner. C'est ainsi qu'il doit parvenir à surmonter l'obstacle. Dans le cadre des nombres décimaux, les obstacles épistémologiques auxquels se heurtent les élèves entraînent nécessairement des erreurs. Celles-ci sont les mêmes depuis de nombreuses années bien que le système scolaire ait fait évoluer l'enseignement des nombres décimaux. En 1979, C.Comiti et R.Neyret exposaient « quelques types d'erreurs relevées dans l'usage des décimaux ». Pour comparer deux nombres décimaux par exemple, certains élèves appliquent la même règle que pour les nombres entiers, c'est-à-dire qu'ils considèrent que le plus grand nombre est celui qui a le plus de chiffres. Ou encore, à partie entière égale, certains comparent alors les parties décimales comme s'il s'agissait de deux entiers. D'autres types d'erreurs apparaissent

lorsqu'il s'agit d'intercaler un nombre entre deux nombres décimaux : de nombreux élèves pensent que 5,3 est le successeur de 5,2 et n'envisagent donc pas la possibilité d'intercaler un nombre entre ces deux.

Ces erreurs témoignent donc d'une persistance du modèle des entiers naturels auquel les élèves cherchent à se ramener dans tous les cas. Les obstacles épistémologiques qui sont à l'origine de ces erreurs sont alors les suivants : certains critères de comparaison valables pour les entiers ne sont plus valables pour les décimaux ; l'intercalation entre deux décimaux est toujours possible à la différence des entiers naturels, les termes de successeur et prédécesseur n'ont donc plus de sens dans le cadre des nombres décimaux ; la comparaison de deux nombres décimaux fait intervenir deux stratégies différentes : une pour la partie entière, et une autre pour la partie décimale.

Un autre obstacle peut être à l'origine d'erreurs, mais celui-ci n'est pas un obstacle épistémologique. Il est en effet lié à une « oralisation abusive ». Par exemple, le fait de prononcer le nombre 1,9 de la manière suivante « un virgule neuf » tend à faire percevoir le nombre décimal comme la juxtaposition de deux entiers naturels.

2. La théorie Anthropologique du Didactique (TAD) de Y.Chevallard

La théorie anthropologique du didactique a été introduite par Y.Chevallard dans les années 1980. Ses travaux débutent en réalité avec l'étude de la notion de transposition didactique. Dans le processus de transposition didactique, au moins trois types de savoir sont à distinguer : le savoir savant, le savoir à enseigner et le savoir enseigné. Le savoir savant d'une part est celui de la communauté scientifique, il constitue la référence du savoir à enseigner. Ce dernier justement est l'adaptation du savoir savant par l'institution dans laquelle il est voué à être enseigné. Dans l'institution scolaire, ce savoir est consigné dans les programmes officiels. Enfin, le savoir enseigné est, comme son nom l'indique, celui qui est enseigné aux élèves par les professeurs. La transposition didactique a alors pour objet l'étude de l'écart qui existe entre le savoir savant et le savoir réellement enseigné dans une institution. Le savoir savant subit en effet des adaptations avant d'entrer dans une institution, et, d'une institution à l'autre, les adaptations sont différentes : elles dépendent du public visé et des besoins de celui-ci quant au savoir en jeu. « Le « travail » qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé transposition didactique. » (Y.Chevallard, 1991).

Plus spécifiquement, lorsqu'il est question d'apprendre ou d'enseigner des savoirs, Y.Chevallard parle alors « d'anthropologie du didactique » et il a proposé une modélisation de ces activités humaines au sein de la « théorie anthropologique du

didactique ».

Cette théorie rassemble plusieurs concepts dont celui des « praxéologies » (Y.Chevallard, 1998). Selon Y.Chevallard, toute action humaine peut s'analyser en un système qu'on nomme « organisation praxéologique ». Celle-ci s'étudie selon quatre axes. Il s'agit dans un premier temps de repérer les types de tâches qui s'expriment généralement par un verbe précisé par un complément (par exemple « diviser un nombre décimal par une puissance de 10 »). Les types de tâches constituent des données artificielles, créées par l'institution concernée. Ensuite, pour traiter ce type de tâches, l'individu va adopter, mettre en œuvre, une technique qui constitue une manière de réaliser la tâche. Les techniques peuvent être diverses, mais en général, selon l'institution dans laquelle on se trouve, il y a un nombre de techniques reconnues restreint. L'ensemble « type de tâches - technique » constitue selon Y.Chevallard le bloc « pratico-technique » que l'on nomme plus couramment un savoir-faire. Des technologies accompagnent ensuite les techniques : celles-ci ont pour objet la justification des techniques par un discours rationnel pour assurer que leur mise en œuvre permet bien de répondre aux types de tâches proposés. Enfin, les technologies sont suivies par les théories qui constituent le discours théorique reposant sur des axiomes, des lois, etc, exposés dans le cadre général. L'ensemble « technologie - théorie », qui peut parfois être confondu, constitue alors le bloc « technologico-théorique », c'est-à-dire, le savoir.

II. La problématique

La découverte des nombres décimaux au cycle 3, au CM1 plus précisément, est une étape en général difficile pour les élèves. Il s'agit en effet de rencontrer et de comprendre de nouveaux nombres, alors que seuls les nombres entiers leur sont jusque là familiers. Les obstacles épistémologiques auxquels se heurtent les élèves sont alors nombreux et ils sont source de certaines erreurs. Ces dernières sont justement dues à la persistance du modèle des nombres entiers naturels qui n'est pas toujours transférable dans le cas des nombres décimaux. Ces obstacles ont été évoqués plus tôt dans le cadre théorique.

Il a été mis en évidence suite à de nombreuses recherches autour des années 60 que l'apprentissage des nombres décimaux à partir de la mesure avait tendance à favoriser la mise en place chez les élèves de conceptions erronées à propos de ces nouveaux nombres. Le système scolaire propose alors la mise en place progressive du concept des nombres décimaux à partir des fractions décimales. Aujourd'hui, il semble que l'établissement en classe du lien entre fractions décimales et nombres décimaux revêt une importance essentielle dans la mise en place du concept de nombres décimaux chez les élèves. Ceci est d'ailleurs précisé dans le rapport du ministère de l'éducation nationale, *Ressources pour faire la classe : Le nombre au cycle 3* (2012) : en effet, « [l'enseignement] doit veiller à explorer et à revenir souvent sur les liens entre nombres décimaux et fractions. La seule connaissance de leurs emplois dans la vie courante enferme dans un cloisonnement qui peut parfois être constaté : les fractions d'un côté, les nombres décimaux de l'autre sans lien significatif ».

Malgré ce changement de méthode pour introduire les nombres décimaux, on peut constater dans les classes que des erreurs persistent encore aujourd'hui et sont plus ou moins dues à des représentations erronées. La question à laquelle j'aimerais essayer de répondre à travers la réalisation de ce mémoire est alors la suivante : « *Comment la façon d'introduire l'écriture décimale (la désignation d'un nombre décimal) proposée par des manuels scolaires de CM1 pourrait-elle renforcer la mise en place de représentations erronées sur les nombres décimaux ou au contraire aider à surmonter les obstacles auxquels se heurtent les élèves face à ces nouveaux nombres ?* ». L'hypothèse qui est faite ici est alors la suivante : selon les manuels scolaires, les démarches proposées pour introduire le passage entre fractions décimales et nombres décimaux sont relativement proches. Cependant, il semblerait que certains manuels proposent des types de tâches plus à même de permettre aux élèves de surmonter les obstacles évoqués plus tôt.

Autour de cette question centrale, d'autres interrogations se greffent. Il sera intéressant d'y répondre afin de mieux comprendre le système d'enseignement et d'apprentissage actuel des nombres décimaux. Les réponses à ces questions subsidiaires permettront en outre une comparaison plus approfondie des manuels scolaires analysés. Avant tout, il s'agira de donner la définition d'un nombre décimal. Dans ce prolongement, la question de la conception historique de ces nombres sera intéressante à traiter. Ensuite, avant de cibler le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale dans chaque manuel, il sera intéressant de se pencher en amont sur la manière dont chacun introduit les nombres décimaux, c'est-à-dire, comment il justifie auprès des élèves l'utilisation (la nécessité) de ces nouveaux nombres. En somme, quel sens les manuels donnent-ils aux nombres décimaux ?

III. La méthodologie

Pour tenter de répondre à la problématique, je vais réaliser l'analyse de quatre manuels scolaires de mathématiques actuels de CM1 (conformes aux programmes de 2008) : *La tribu des maths*, *J'apprends les maths*, *Outils pour les maths* et *Euro Maths*.

Cette analyse portera précisément sur la page ou double page que chaque manuel consacre à l'introduction des nombres décimaux en tant qu'écriture décimale. L'étude prendra appui sur la base de la théorie anthropologique du didactique de Chevallard. En effet, dans chaque manuel, toutes les activités proposées seront analysées en terme de type de tâches, technique, technologie et théorie. La technologie et la théorie seront regroupées en un bloc. Par la suite, les analyses seront comparées. Par ailleurs, les traces écrites faisant office de structuration en lien avec ces mêmes pages ou doubles pages seront étudiées. Il s'agira de les analyser et de les comparer selon trois axes : la façon dont les manuels décrivent, définissent, le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale pour les élèves, les outils ou représentations symboliques privilégiés pour représenter les nombres décimaux et enfin le langage, le vocabulaire, utilisés pour expliquer ces nouveaux nombres.

L'analyse et la comparaison de ces manuels pourront alors permettre d'induire des résultats à même d'apporter une réponse à la problématique. Il est évident que les constats et éventuelles conclusions apportés à propos de quatre manuels scolaires n'apporteront pas de réponses « universelles » ni forcément généralisables. Cependant, ils permettront de cerner et de mieux identifier l'état actuel de l'enseignement et de l'apprentissage des nombres décimaux au CM1.

Avant de mener l'analyse ciblée des pages de manuels, le recueil des données sera alimenté des réponses aux questions annexes évoquées dans la problématique.

Je commencerai par donner la définition « officielle » d'un nombre décimal en abordant en outre rapidement les différentes propriétés qui en découlent.

Concernant ensuite la conception historique des nombres décimaux, précisons d'abord que le mémoire qui suit n'a pas pour objet de travailler spécifiquement sur ce thème. Il s'agira alors simplement d'évoquer les grandes étapes de l'Histoire à propos de l'apparition des nombres décimaux.

Enfin, la question du sens donné aux nombres décimaux à l'école sera abordée en deux temps. Tout d'abord, je me pencherai sur les travaux de recherche menés à ce propos. Dans un second temps, l'analyse de la question du sens se fera à travers les quatre manuels scolaires : il s'agira de comparer la façon dont chacun d'entre eux justifie

l'introduction des nombres décimaux auprès des élèves. Avant cela, la progression proposée par chaque manuel pour introduire la notion de nombres décimaux sera étudiée et mise en relief avec les programmes en vigueur, à savoir les programmes de 2008.

IV. Le recueil et l'analyse des données

1. Qu'est-ce qu'un nombre décimal ?

Il me paraît important pour commencer de donner l'ensemble des définitions d'un nombre décimal. En effet, trop d'erreurs proviennent encore aujourd'hui, même chez les adultes, d'une mauvaise définition de ces nombres, souvent perçus comme des « nombres à virgule ». On peut d'ailleurs comprendre l'origine de cette représentation erronée en se penchant davantage sur des programmes scolaires antérieurs. Les programmes de 1923 et 1945 par exemple donnaient du nombre décimal la même « définition » : « Un nombre décimal est un nombre entier écrit avec une virgule dans la numération décimale, ce nombre exprimant une mesure dans un système décimal d'unités. ». Une telle définition, qui certes ne date pas d'hier, en arrive à confondre un nombre avec une de ses écritures. Cela peut en partie justifier peut-être les mauvaises représentations qui persistent.

Voici comment le nombre décimal est aujourd'hui défini : un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, c'est-à-dire une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10. Deux caractérisations s'en suivent, l'une par l'écriture décimale, l'autre en tant que rationnel particulier. La première définit le nombre décimal comme un nombre dont l'écriture décimale réduite est limitée. La deuxième caractérise le nombre décimal en tant que nombre rationnel qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible dont la décomposition en un produit de facteurs premiers du dénominateur ne comporte que des puissances de 2 et/ou de 5. Comme on peut le remarquer à travers les définitions ci-dessus, fractions et décimaux sont étroitement liés, et plus précisément, il ont la même fonction. Ceci conforte alors le fait que les décimaux découlent d'un enseignement préalable essentiel des fractions, et plus particulièrement des fractions décimales.

2. La conception historique des nombres décimaux

Les nombres décimaux en tant que tel sont apparus relativement récemment. Avant leur introduction, les Hommes utilisaient les fractions. Celles-ci sont par contre apparues très tôt pour palier l'insuffisance des nombres entiers dans certains problèmes de la vie courante, notamment les problèmes de partage. Les premières représentations fractionnaires apparaissent donc chez les Egyptiens et les Babyloniens. Ce n'est qu'en 1585 que sont introduits les nombres décimaux par le belge S.Stevin. En

effet, ces derniers apparaissent avec une écriture particulière et des règles de calculs simples qu'il détaille dans l'ouvrage de référence « La disme ». S.Stevin propose d'utiliser un système déjà bien maîtrisé pour les nombres entiers, le système décimal. Pour cela, il introduit des signes pour nommer les différentes unités décimales. Tout nombre entier proposé se dit « commencement » et son signe est ①. Le dixième du commencement s'appellerait la « prime » et se noterait ①. Le dixième de la prime s'appellerait la « seconde » et se noterait ②. Le dixième de la seconde se nommerait la « tierce » et se noterait ③. Et ainsi de suite.... À titre d'exemple, le nombre décimal que l'on note aujourd'hui 34,56 se noterait 34①5①6② et se lirait trente quatre commencement, cinq primes et six secondes.

En 1592, un italien, Giovanni Antonio Magini (1555 ; 1617), propose une notation proche de la notre et qui est encore utilisée dans les pays anglo-saxons : le point pour séparer la partie entière de la partie fractionnaire lorsque les nombres ont des décimales (exemple : 89.532). Comme il l'explique clairement dans son ouvrage, l'avantage de cette écriture est d'éviter les calculs lourds de fractions pour se ramener aux règles opératoires d'arithmétique utilisées sur les entiers. La virgule n'apparaîtra dans l'écriture des nombres décimaux qu'au début du XVII^{ème} siècle avec le néerlandais Willebrord van Roijen Snell et l'écossais John Napier.

Cette brève exposition historique permet de percevoir la difficulté que les hommes ont eu à travers l'Histoire à mettre au point et à appréhender les nombres décimaux. En effet, bien que d'un usage « courant », ils sont le fruit d'une longue quête des mathématiciens. Même s'ils nous paraissent familiers, ils sont d'un abord difficile. Cela peut en partie déjà expliquer et justifier les difficultés auxquelles se heurtent les élèves face à ces nouveaux nombres. On comprend que le rôle de l'enseignant sera alors d'explicitier très soigneusement aux élèves le fonctionnement des nombres décimaux et de leurs écritures, et surtout d'accepter de donner beaucoup de temps pour la construction progressive des savoirs.

3. Les nombres décimaux dans les programmes

Dans les programmes de 2008, les nombres décimaux apparaissent pour la première fois au cycle 3, cycles des approfondissements. On les retrouve dans le domaine « nombres et calcul », à travers la rubrique « les nombres décimaux et les fractions ». On remarque alors à travers cet intitulé le lien essentiel qui est fait entre les fractions et les nombres décimaux.

Dans les progressions proposées en mathématiques pour le cycle 3, les fractions

et les nombres décimaux apparaissent au CM1. On peut cependant constater que les fractions sont abordées de manière indirecte plus tôt : dès le CE2 notamment, on peut lire la compétence suivante : « connaître et utiliser des expressions telles que : (...), moitié ou demi, (...), quart d'un nombre entier ». C'est donc à partir du CM1 que le travail sur les fractions est concrètement abordé avant d'entamer celui sur les nombres décimaux. Il est précisé que les fractions doivent être utilisées dans « des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs ». Concernant les nombres décimaux, les élèves doivent être capables de « connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position » : cette compétence implique la nécessité pour les élèves de maîtriser les fractions décimales et justifie que l'enseignement des fractions précède celui des nombres décimaux.

Les progressions précisent que les élèves vont ensuite être amenés progressivement à manipuler ces nouveaux nombres : « les repérer, les placer sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer par deux nombres entiers consécutifs, passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement ». Le lien fractions décimales / nombres décimaux est encore renforcé ici.

Enfin, en portant un regard plus large sur les progressions, on peut remarquer que le travail sur les fractions et les nombres décimaux est largement poursuivi au CM2. Il l'est également au collège.

4. La progression proposée par les quatre manuels avant l'introduction du passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale

Dans le manuel *Outils pour les maths*, le travail sur les fractions débute en période 3 par l'utilisation des fractions simples dans des situations de partage et de mesure. Les élèves apprennent également à placer les fractions simples sur une droite graduée. Au cours de cette période, quatre doubles-pages sont consacrées à ces fractions. Les fractions décimales sont abordées au début de la période 4 qui se poursuit par l'introduction du passage de l'écriture fractionnaire aux nombres décimaux. Le manuel traite cela en deux doubles-pages.

Dans le manuel *J'apprends les maths*, le travail sur les fractions débute également en période 3 mais à la différence des trois autres manuels, c'est le sens « division » d'une fraction a/b qui est rencontré le premier. Les auteurs du manuel justifient ce choix dans la partie « Présentation » du livre du maître. Ils partent du constat qu'en partant du sens $ab^{\text{ième}}$ des fractions, comme le fait la plupart des manuels, « les élèves comprennent mal

que a/b puisse se lire aussi bien a divisé par b que a fois un $b^{\text{ième}}$. (...) Il est alors normal qu'ils comprennent mal pourquoi, par exemple, $3 \div 10 = 3/10$ (ou 0,3). Pourtant il n'y a pas de vraie compréhension des décimaux s'il n'y a pas de compréhension du fondement de telles égalités ». Ainsi, les auteurs ont fait le choix de commencer par familiariser les élèves au sens des fractions le moins « naturel », c'est-à-dire le sens « a divisé par b » pour ensuite passer au sens $ab^{\text{ième}}$. Ils estiment que cela « aide d'une part, à l'appropriation de l'équivalence fondamentale qui fonde la notion de fraction, et, d'autre part, à comprendre que les décimaux permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut la mesure d'une grandeur continue. En résumé, ce choix aide doublement à la conceptualisation des décimaux ».

Les fractions décimales commencent à être abordées au cours de la période 3 avec « la somme de fractions décimales ». Les écritures décimales n'apparaissent quant à elles qu'au début de la période 4. Dans ce manuel, on remarque que le travail sur les différentes notions citées est très dense. En effet, sept pages sont consacrées aux fractions simples, six pages aux fractions décimales et deux pages à l'introduction des écritures décimales.

Le manuel *La tribu des maths* propose quant à lui un premier travail sur les fractions simples dès la deuxième période, en lien avec la mesure (longueur et heure) sur trois doubles-pages. Trois doubles-pages encore sont consacrées aux fractions simples en période 3. Les fractions décimales sont introduites en période 4 avec deux doubles-pages. Les « fractions et nombres décimaux » apparaissent en suivant au cours de cette même période, deux doubles-pages y sont alors consacrées.

Enfin, selon le manuel *Euro Maths*, c'est en période 4 que les auteurs ont choisi de débiter le travail sur les fractions. On remarque que les activités proposées sur les fractions simples sont nombreuses avant l'introduction des fractions décimales. En effet, une première double-page est consacrée aux « fractions au quotidien ». Ensuite, un travail est mené sur l'utilisation des fractions dans des situations de mesures, d'abord de longueurs puis d'aires. Au cours de celui-ci, une situation spécifique de communication dans laquelle il s'agit de mesurer un segment avec une unité arbitraire commune à tous les élèves est mise en place pour permettre aux élèves de prendre conscience que les nombres entiers ne suffisent pas toujours. Cette progression est justifiée par les auteurs du manuel dans le livre du maître : elle doit amener les élèves à donner du sens à l'introduction des fractions puis des nombres décimaux. Mais ceci sera traité ultérieurement plus en détail dans la partie « Le sens donné à ces nouveaux nombres » (cf IV.5). Les auteurs du manuel accordent également une grande importance au lien

entre « fractions et graduations » dans l'objectif que les élèves soient capables d'associer une fraction à une distance ou une position sur la droite. Finalement, deux pages sont consacrées aux fractions décimales avant de passer dès la période 4 aux « fractions décimales et nombres décimaux ».

On remarque que les quatre manuels proposent une progression similaire et en accord avec les recommandations des programmes officiels : fractions simples puis fractions décimales et enfin nombres décimaux. Par ailleurs, les auteurs des manuels *J'apprends les maths* et *Euro Maths* précisent clairement au début du livre du maître (Partie « présentation dans *J'apprends les maths* et « Partie 1 : Enseigner les mathématiques au CM1 » dans *Euro Maths*) la nécessité, reconnue aujourd'hui, de suivre cette progression qui n'a pas toujours été celle-ci. En effet, « [les] nombres décimaux ont été longtemps enseignés comme résultant du recodage d'une mesure par un changement d'unité (...). Mais en faisant l'économie de l'étude préalable du fractionnement de l'unité, on mettait de côté le fait que le nombre décimal est la réponse à une question, celle de l'insuffisance des nombres entiers pour effectuer un mesurage précis. » (auteurs du livre du maître *Euro Maths*). En outre, nous constatons que les auteurs du manuel *J'apprends les maths*, ont fait un choix distinct de celui des autres manuels puisqu'ils introduisent d'abord les fractions par le sens de la division avant d'introduire le sens du fractionnement de l'unité.

Dans les quatre manuels, l'enseignement des fractions n'apparaît pas avant la deuxième période (pas avant la troisième pour les deux premiers et pas avant la quatrième pour le dernier). Le travail sur les fractions est très condensé dans le manuel *Euro Maths* puisqu'il est entièrement traité en période 4.

On peut cependant constater une grande hétérogénéité au niveau de la quantité de contenu pour chaque notion abordée. Le manuel *Outils pour les maths* est beaucoup moins dense que les trois autres. *J'apprends les maths*, *La tribu des maths* et *Euro Maths* proposent des avancées beaucoup plus progressives et souvent, plusieurs « séquences » de manuel sont proposées pour une même notion, ce qui n'est pas le cas du premier manuel cité.

5. Le sens donné à ces nouveaux nombres

a. Selon la recherche

Selon les différentes études menées à propos des nombres décimaux, il apparaît essentiel de donner du sens à l'introduction de ces nouveaux nombres.

R.Brissiaud (1999) donne une première justification de leur utilisation : « Les décimaux

sont des fractions qui permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut la mesure d'une grandeur continue quelconque ». C'est aussi la justification historique qui a amené l'apparition des nombres décimaux. C.Comiti et R.Neyret (1979) précisait de même qu'une des fonctions importantes des nombres décimaux est de permettre une approche des nombres réels. En effet, les nombres décimaux permettent de donner une approximation décimale de tout nombre réel non rationnel difficile à appréhender et à utiliser. Au-delà de ça, ils apparaissent selon eux comme « un outil dans toutes les activités humaines en particulier celles qui font intervenir les mesures ».

Pour les élèves de Cours Moyen qui découvrent les nombres décimaux, il est alors primordial qu'ils perçoivent eux aussi la nécessité de l'introduction de ces nouveaux nombres pour pouvoir leur donner du sens. Il faut en effet qu'ils puissent obtenir les réponses à la question « pourquoi les nombres décimaux ? ». C'est également ce que précisent les auteurs du document ressource publié sur Eduscol *Le nombre au cycle 3* (B.Barilly et G.Le Poche, 2012) : « Pour permettre aux élèves de donner du sens à ces nouveaux nombres, et justifier leur introduction, il est nécessaire de proposer des activités qui leur permettent de prendre conscience que : – les nombres décimaux, et plus généralement les fractions, permettent de résoudre de nouveaux problèmes ; [...] ». Ainsi, à l'école primaire, les nombres décimaux doivent apparaître comme de nouveaux nombres utiles et nécessaires pour résoudre des problèmes que les nombres entiers ne permettent pas de résoudre. On comprend alors qu'il faut les amener à prendre conscience de l'insuffisance des nombres entiers dans certaines situations.

« Les situations d'apprentissage qui permettent d'introduire et de donner du sens aux fractions et aux nombres décimaux sont variées, en lien avec les possibilités que ces nombres offrent :

- exprimer le résultat d'un mesurage (masse, longueur, aire, capacité...);
- graduer plus finement la droite numérique ;
- résoudre des problèmes de partage ainsi que des problèmes de calcul de quotients. » (B.Barilly et G.Le Poche, 2012).

b. Dans les manuels scolaires

Voyons maintenant si dans les trois manuels scolaires, les auteurs mettent en place des situations permettant cette construction de sens lors de l'introduction des nombres décimaux. Si c'est le cas, il s'agira de se pencher sur la manière dont cette dernière est mise en œuvre.

- ***Outils pour les maths***

Pour la première double-page du manuel consacrée aux fractions « Lire, écrire et

représenter des fractions simples », les auteurs précisent dans le livre du maître que « [les] fractions sont de nouveaux nombres. Les élèves doivent comprendre qu'une fraction représente une partie de l'unité partagée en parts égales. ». On pourrait alors s'attendre à ce que les auteurs proposent une situation de découverte qui va amener les élèves à prendre conscience de l'insuffisance des nombres entiers lorsque l'on veut partager l'unité et donc donner du sens à l'introduction des fractions. Cependant, la situation de découverte intitulé « Cherchons » (Cf Annexe 1) est plus orientée vers l'introduction du vocabulaire lié aux fractions et de l'écriture des fractions plutôt que vers le sens des fractions. On perçoit effectivement le partage de l'unité, grâce aux représentations symboliques des pizzas partagées en 2, en 3 ou en 4, mais les fractions ne sont pas introduites progressivement dans la situation. En effet, elles sont données aux élèves dès le départ sans recherche préalable pour les introduire : dans la situation, les personnages demandent un quart de pizza ou bien une demie pizza. Ainsi, les élèves ne sont pas forcément amenés à prendre conscience qu'avec les seuls nombres entiers, on ne pourrait pas exprimer le partage de l'unité. Cependant, on peut remarquer à travers les recommandations du livre du maître pour la mise en place de la situation de découverte l'importance que les auteurs accordent à l'utilisation du vocabulaire associé à chaque représentation : « Introduire ici le mot « unité » : c'est une quantité entière (ici une pizza). La pizza 4 fromages représente une unité (c'est-à-dire une pizza entière) partagée en trois parts égales ; la pizza Reine représente une unité partagée en deux parts égales et la pizza Margherita une unité partagée en quatre parts égales. ». Ainsi, le lien important fait entre le vocabulaire (unité, part) et les représentations symboliques doit permettre aux élèves de bien percevoir que les fractions permettent de représenter une partie de l'unité partagée en parts égales.

- La tribu des maths

La situation de recherche proposée dans la séquence 23 (Les fractions (1)) (cf Annexe 2) en lien avec la mesure de longueurs pourrait à première vue laisser penser que les auteurs souhaitent amener les élèves à prendre conscience de la nécessité d'introduire des nombres décimaux (pas encore sous cette forme, mais sous la forme de fractions) en les confrontant à une situation problème de mesurage de bandes qui ne mesurent pas un nombre entier de fois l'unité. Mais lorsque l'on s'intéresse de plus près à la situation proposée, on comprend que l'objectif est autre. En effet, on suppose que les élèves ont déjà pris conscience de cette nécessité et ils vont alors être amenés à percevoir l'équivalence de deux formes d'écriture fractionnaire $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$. Si l'on regarde pourtant la première séquence du manuel consacrée aux fractions (« Les fractions au quotidien »),

on s'aperçoit qu'aucune situation ne permet de justifier l'utilisation des fractions. Et comme pour le manuel *Outils pour les maths*, si la situation de recherche peut permettre de visualiser des cas courants d'utilisation des fractions, ce n'est pas l'objet de la situation que d'amener l'élève à prendre conscience de la nécessité de les utiliser. Les auteurs le précisent dans le livre du maître, l'objectif de cette première séquence est que « les élèves rencontrent des situations de la vie courante dans lesquelles le langage utilise le vocabulaire des fractions ». C'est, comme dans le manuel précédent, une manière de familiariser les élèves au langage et à l'écriture des fractions sans pour autant leur en justifier clairement l'utilisation.

- *J'apprends les maths*

Dans ce manuel, les fractions sont introduites par le sens de la division et non par le sens le plus courant privilégié dans les manuels qui est le sens « ab^{ième} ». Avec la situation de découverte de la séquence 58 (cf Annexe 3), bien qu'elle ne soit pas une situation problème, les élèves vont être amenés à comprendre comment on peut répartir une quantité restante suite à un partage équitable tout en conservant cette équité. Les élèves comprennent alors que l'outil pour cela est l'introduction des fractions. Dans la situation proposée, partager 7 verres de jus d'orange entre 3 enfants, c'est en donner 2 à chacun et en partager 1 dernier en 3 parts égales et cela se note $1/3$ (à oraliser ici de la manière suivante : « 1 divisé par 3 »). Les élèves sont alors amenés à donner du sens à l'écriture $2+1/3$, et surtout l'apparition et l'utilisation des fractions leur sont justifiées. Cependant ceci n'est pas toujours possible, en effet, lorsque la quantité restante est insécable, l'utilisation de la fraction pour diviser le reste et le partager n'a plus de sens. Mais le manuel propose les deux cas de figure à travers les diverses situations de la séquence 58. Au passage, cela permettra à l'élève de distinguer la division euclidienne de la division-fraction.

- *Euro Maths*

Le manuel propose à l'étape 54, intitulée « Fractions et partages de longueurs », une réelle situation problème dont le but est de permettre aux élèves de prendre conscience de l'insuffisance des nombres entiers (cf Annexe 4). Cet objectif est clairement établi par les auteurs dans le livre du maître qui précisent qu'« [il] s'agit de proposer aux élèves une situation permettant : - la prise de conscience de l'insuffisance des nombres entiers dans certaines situations ; - l'appropriation du codage fractionnaire lors de partages équitables d'une unité de longueur par pliage ; - l'utilisation de ces codages pour décrire la longueur de divers segments et pour construire des segments de longueur donnée ».

Pour cette situation, les élèves sont par deux. Chacun doit d'abord tracer un segment [AB]

sur une feuille unie. Ensuite, l'enseignant munit les élèves d'une bande unité identique pour tous. Le but de l'exercice est que chaque enfant écrive un message à un camarade pour qu'il construise un segment exactement de la même longueur que le sien. Ils n'ont le droit d'utiliser pour cela que la bande unité fournie. Les élèves échangent ensuite leur message et construisent le segment selon les informations indiquées sur celui-ci. Enfin, ils se réunissent par paire et comparent les segments construits avec les segments préalablement tracés. La mise en commun va permettre de constater que dans la majorité des cas, les deux segments comparés ne sont pas superposables. Il s'agit ensuite alors d'examiner les messages émis et de constater finalement leur imprécision « mon segment mesure un peu plus de 2 unités » ou « entre 3 et 4 unités ». La situation permet ainsi d'amener les élèves à prendre conscience que généralement, les seuls nombres entiers ne permettent pas de décrire la longueur d'un segment. Telle qu'elle est menée, cette activité donne du sens à l'introduction des fractions en confrontant directement les élèves à une insuffisance et donc à la nécessité d'introduire de nouveaux nombres.

Pour conclure, seuls les manuels *J'apprends les maths* et *Euro Maths* mettent en place des situations ou présentent des exemples qui donnent réellement du sens à l'introduction de nouveaux nombres. Dans *Euro Maths*, les élèves sont confrontés à l'insuffisance des nombres entiers dans une situation de mesurage d'un segment. Dans *J'apprends les maths*, ils constatent que dans certaines situations, on peut encore partager un reste inférieur au diviseur et ceci grâce aux fractions. On peut mettre en évidence cependant que le manuel *Euro Maths* propose une situation problème qui va rendre l'élève acteur du constat alors que le manuel *J'apprends les maths* propose un exemple dans lequel l'élève est « spectateur » du phénomène. On peut alors penser que la portée de la prise de conscience du sens des fractions sera « moindre » avec le manuel *J'apprends les maths*.

Dans les deux autres manuels, les situations proposées en lien avec les fractions n'ont pas pour objet la justification de l'introduction des fractions afin de transmettre du sens aux élèves. En effet, les fractions sont introduites et utilisées directement dans des situations concrètes qui, certes, ne pourraient pas être traitées qu'avec les entiers, mais les élèves ne sont jamais amenés à faire ce constat.

6. L'analyse des séquences consacrées à l'introduction de l'écriture décimale dans les trois manuels

a. L'organisation générale des pages de manuels

- Outils pour les maths

Dans ce manuel, l'intitulé de la double-page est le suivant : « Passer de l'écriture fractionnaire aux nombres décimaux » (cf Annexe 5). Pour commencer, une rubrique « Cherchons » est proposée. Celle-ci prend appui sur une situation contextualisée en lien avec la mesure de longueurs. Les résultats en saut en longueur de trois athlètes sont recensés sur une droite graduée.

Cette rubrique est suivie d'un encadré de structuration qui prend appui sur la droite graduée, le tableau de numération et la décomposition d'une fraction décimale pour obtenir un nombre décimal et réciproquement.

Une série de sept exercices est ensuite proposée sur la double-page : les trois premiers reprennent le placement de fractions décimales puis de nombres décimaux sur la droite graduée. Les quatre autres exercices de la page visent l'écriture d'un nombre décimal à partir d'une fraction décimale. L'exercice 6 impose l'utilisation du tableau numérique pour effectuer le changement d'écriture.

La double-page se clôture par un « défi », un exercice complexe, pour aller plus loin, dans lequel il s'agit de convertir des unités de mesure.

- La tribu des maths

Le manuel consacre deux doubles-pages à l'intitulé « Fractions et nombres décimaux » : la première est axée sur la découverte de nouveaux nombres (Cf Annexe 6.a) et la deuxième sur la transformation des fractions décimales en nombres décimaux (cf Annexe 6.b). Les deux doubles-pages sont globalement organisées autour de la même structure. La première activité proposée, « Avant de commencer », permet de rappeler ce qui a été vu précédemment en lien avec la notion abordée. Dans la première double-page, la rubrique permet de réaliser un rappel sur les fractions décimales et leur placement sur la droite graduée en dixièmes. Pour poursuivre, une phase de recherche est proposée en lien avec une situation contextualisée, comme dans le cas du premier manuel. Il s'agit de comparer des temps de course donnés sous forme d'un entier en seconde et d'une fraction décimale pour exprimer les dixièmes ou centièmes de seconde. Dans la deuxième double-page, la partie recherche consiste à placer des fractions décimales et des nombres décimaux sur une droite graduée : cette activité se rapproche davantage de celle du premier manuel bien qu'elle soit ici dé-contextualisée.

Sur chaque double-page apparaissent ensuite une phase d'application contenant un exercice puis une phase d'entraînement avec cinq exercices.

Enfin, comme dans le premier manuel, un dernier exercice est proposé pour aller plus loin : « Labo Maths ».

On remarque dans ce manuel, l'absence d'une phase de structuration. Cependant, lors de la mise en commun après la phase de recherche de la première double-page, le guide du maître propose que les élèves se rendent dans le « mémento » présent à la fin du manuel pour comprendre ce qu'est un nombre décimal. On peut donc penser que ce mémento fait office de structuration après la phase de recherche.

Le guide du maître est particulièrement détaillé et conseille de diviser chacune des deux doubles-pages en deux séances : la première d'une heure comprenant les rubriques « Avant de commencer », « Recherche » et « Application », la deuxième de 45 minutes visant l'entraînement.

- *J'apprends les maths*

Le manuel propose deux pages pour aborder progressivement le passage des écritures fractionnaires aux nombres décimaux (cf Annexe 7). La première permet un premier contact avec la notion en n'abordant que les dixièmes. La deuxième va plus loin en s'intéressant aux dixièmes et aux centièmes.

Une première phase dans le même ordre d'idée que les manuels précédents intitulée « Je découvre » permet une première manipulation de la notion. Contrairement aux deux précédents manuels, celui-ci propose une manipulation de la calculatrice pour introduire les écritures décimales. Une phase de structuration apparaît ensuite : « J'ai appris ». Celle-ci reprend le lien avec la calculatrice évoqué en phase de découverte. Six exercices d'entraînement sont ensuite proposés sur la première page et dix sur l'autre dont un problème. Sur les deux pages, les premiers exercices sont similaires (consignes identiques). Dès la deuxième séquence, les exercices visent la comparaison des nombres décimaux. Le manuel ne propose pas de représentation des nombres décimaux sur la droite graduée contrairement aux deux premiers manuels.

- *Euro Maths*

Le manuel traite le passage des fractions décimales aux nombres décimaux en une page avec pour objectif de « se familiariser avec la convention d'écriture des nombres décimaux » (cf Annexe 8).

Une phase de découverte permet dans un premier temps d'introduire cette convention d'écriture en présentant et en justifiant son invention par le mathématicien Stevin de Bruges. Deux exercices sont ensuite proposés pour manipuler cette nouvelle écriture : un

faisant utiliser le tableau de numération, l'autre faisant intervenir les équivalences entre deux fractions.

On constate que, par rapport aux autres manuels, très peu d'exercices sont proposés. En effet, les auteurs ont choisi de ne proposer ici, comme annoncé dans l'objectif de la page, que des exercices de manipulation directe de la transformation d'écriture. Toutes les tâches visant l'utilisation et la manipulation des nombres décimaux (comparaison, addition,...) sont traitées ultérieurement.

De plus, comme dans le manuel *La tribu des maths*, la page ne présente pas d'encadré visant l'institutionnalisation. Si l'on se réfère au livre du maître, il est indiqué que la conclusion de la phase de découverte « pourra revêtir la forme d'un exemple détaillé » en guise de structuration. Par ailleurs, un aide-mémoire, prenant la forme d'un petit livret, vient en complément du manuel. Celui-ci rassemble toutes les « leçons », on peut notamment trouver un chapitre intitulé « Fractions et nombres décimaux » et un sous chapitre « Fractions décimales et nombres décimaux ». Ce dernier correspond alors à l'institutionnalisation de la page étudiée, « Fractions décimales et nombres décimaux », bien qu'à aucun moment dans le manuel ou même le livre du maître, il n'y soit fait référence.

b. L'analyse des tâches proposées selon la TAD

i. Identification et description des types de tâches

L'ensemble des pages présentées rapidement ci-dessus va maintenant être analysé de façon plus détaillée selon la Théorie Anthropologique du Didactique de Y. Chevallard. Ainsi, il sera utile pour cette partie de se référer aux annexes 5 à 8, évoquées précédemment, correspondant aux pages des manuels analysées.

Les types de tâches seront présentés selon l'ordre décroissant de leur nombre d'apparitions dans les activités du manuel. Cela permettra déjà de mettre en évidence les types de tâches les plus travaillés. Les activités courtes effectuées en début de séance qui se font à l'oral et/ou sur ardoise (activités d'« échauffement ») ne seront pas prises en compte dans l'analyse. Ces activités participent souvent à un travail de la technique. De même, l'analyse des techniques et technologies en jeu portera essentiellement sur les exercices. En effet, la partie recherche est une phase de découverte, elle ne suppose donc pas la mise en pratique de techniques particulières. Leur déroulement et leur mise en place pourront cependant donner des indices dans l'analyse de techniques dans des exercices ultérieurs. Les parties de « structuration » (visant l'institutionnalisation) seront comparées plus tard au niveau de leur contenu (cf IV.6.c). Ces dernières interviendront

cependant indirectement dans l'analyse des techniques en jeu dans les exercices puisqu'elles supposent la mise en application de techniques orientées par les auteurs des manuels. Par ailleurs, les techniques et technologies en jeu seront reconstituées en s'appuyant notamment sur les livres du maître de ces manuels.

- Outils pour les maths

Voici la chronologie des types de tâches proposés dans le manuel *Outils pour les maths* sur la passage de l'écriture fractionnaire aux nombres décimaux :

- Situer des nombres décimaux et des fractions décimales sur une droite graduée (3)
- Écrire un nombre décimal à partir d'une fraction décimale ou, sous des termes plus génériques, « Décomposer / Recomposer » (6)

De manière générale, il y a deux types de tâches principaux : « situer des nombres décimaux et des fractions décimales sur une droite graduée » et « écrire un nombre décimal à partir d'une fraction décimale », soit « décomposer / recomposer ». Le deuxième est le plus présent dans la double page puisqu'il apparaît dans la phase de recherche puis dans six exercices sur les sept proposés. En effet, dans les deux premiers exercices, la question b demande d'écrire les fractions sous la forme d'un nombre décimal. Les quatre derniers exercices quant à eux sont exclusivement consacrés à ce type de tâches. Le premier type de tâche n'apparaît que dans les trois premiers exercices.

→ **Type de tâches : Placer des fractions et des nombres décimaux sur une droite graduée**

Les trois premiers exercices de la double-page sont consacrés à ce type de tâche.

Comme cela est précisé dans le livre du maître, les auteurs du manuel privilégient l'utilisation de la droite graduée « car elle permet de visualiser la décomposition du nombre décimal ». Dans cette logique, il semble que les deux premiers exercices servent à renforcer ce lien avec la droite graduée mis en évidence dans la partie « cherchons ». Dans ces deux exercices, il s'agit de placer des fractions décimales sur la droite graduée en dixièmes pour l'exercice 1 et en centièmes pour l'exercice 2. Ici, il apparaît clairement que la question a) est une étape intermédiaire qui va donner à l'élève une technique pour répondre à la question b) en lien avec le second type de tâches évoqué.

On peut alors se référer à la démarche décrite dans le livre du maître pour la partie « cherchons » puisqu'il semblerait que ce soit celle attendue pour les deux premiers

exercices. Dans l'exercice 1, l'élève doit placer la fraction sur la droite en se demandant sur quel repère en dixièmes elle va se placer (les élèves ont déjà eu l'occasion de réaliser cette tâche plus tôt au cours des séances précédentes). Grâce aux graduations, l'élève n'a plus qu'à lire le nombre de manière décomposée (exemple : la partie entière → 1 unité et la partie décimale → 7 dixièmes) pour enfin l'écrire sous la forme d'un nombre décimal (exemple : 1,7).

Concernant l'exercice 2, la technique envisagée est la même. L'exercice est cependant un peu plus complexe car il fait intervenir les centièmes.

Dans l'exercice 3, l'élève doit placer sur une droite graduée qu'il a lui-même reproduite sur papier millimétré, des fractions et des nombres décimaux.

Dans ces trois exercices, la technique repose sur la technologie suivante : une fraction ou un nombre décimal se décomposent selon le principe de la numération de position et de la numération décimale. La droite graduée fait en outre intervenir le principe d'intercalation, à savoir que l'on peut toujours trouver un nombre entre deux nombres décimaux, puisque l'on comprend que chaque unité peut se diviser en sous-unités. Enfin, la droite graduée met également en évidence l'équivalence entre deux nombres qui se présentent sous des écritures différentes.

→ **Type de tâches : Décomposer / Recomposer**

Ce type de tâches est d'abord présent dans les deux premiers exercices, dont on vient d'évoquer la technique, par l'intermédiaire de l'écriture fractionnaire et de la droite graduée. De manière plus particulière, c'est le type de tâches auquel se consacrent les exercices 4 à 7 de la double-page.

Dans les exercices 4 et 5, la technique est induite dans la consigne telle qu'elle est donnée et à travers les exemples proposés. Il est indiqué que les élèves doivent passer par la décomposition additive de la fraction selon les différentes unités de la numération pour retrouver l'écriture décimale du nombre. Dans l'exercice 4, c'est à l'élève de produire cette décomposition alors que dans l'exercice 5, la fraction est déjà décomposée sous la forme d'une somme et l'élève doit l'écrire sous la forme d'un nombre décimal.

L'exercice 7 repose sur une technique similaire qui s'appuie donc sur la décomposition additive. Cependant la tâche de l'élève est plus complexe puisqu'il doit être capable d'opérer les tâches « réciproques » : décomposer un nombre décimal sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction décimale pour retrouver la fraction décimale correspondante, ou parfois, retrouver à partir de la décomposition additive les deux écritures du nombre : fraction décimale et nombre décimal.

La théorie sur laquelle se base cette technique est toujours celle du principe de la numération de position pour le passage de l'écriture décimale à l'écriture fractionnaire et la numération décimale pour le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale.

Concernant l'exercice 6, les auteurs semblent mettre en évidence une technique différente, présentée dans l'encadré de la leçon : l'utilisation du tableau de numération faisant apparaître les différentes unités : dizaines, unités, dixièmes et centièmes. Cette technique repose également sur le principe de la numération de position.

Il apparaît clairement que les auteurs du manuel ont privilégié le sens « a b^{ème} » de la fraction a/b. Leur but semble être que la décomposition canonique, en lien avec le tableau de numération, permette ensuite de mieux comprendre le nouveau codage.

- La tribu des maths

Ci-dessous se trouve le schéma de la chronologie des types de tâches proposés dans chacune des deux doubles-pages consacrées au passage des fractions décimales aux nombres décimaux.

<i>Première double-page : « Fractions et nombres décimaux (1) »</i>	<i>Deuxième double-page : « Fractions et nombres décimaux (2) »</i>
<ul style="list-style-type: none"> - Comparer des fractions décimales - Additionner des fractions décimales - Écrire les fractions décimales sous forme de nombres décimaux - Comparer des nombres décimaux - Écrire la décomposition canonique (somme d'un entier et d'une fraction décimale) d'un nombre décimal - Additionner des nombres décimaux - Lire la position d'un point sur une droite graduée en dixièmes et l'écrire sous forme d'une décomposition additive (soit de deux fractions décimales, soit d'un entier et d'une fraction décimale) - Décomposer un nombre décimal donné (avec pièces de monnaie) - Repérer le nombre de dixièmes et de centièmes dans un nombre décimal 	<ul style="list-style-type: none"> - Placer des fractions décimales sur une droite graduée - Recomposer un nombre décimal à partir de sa décomposition canonique - Placer des fractions décimales et des nombres décimaux sur une droite graduée - Écrire la fraction décimale correspondante à un nombre décimal donné - Écrire le nombre décimal correspondant à une fraction décimale donnée - Trouver, grâce à la calculatrice, la division à effectuer pour trouver le nombre décimal indiqué - Placer des fractions et des nombres décimaux sur une droite graduée - Associer un nombre décimal à la décomposition canonique équivalente - Décomposer / recomposer des nombres

- Recomposer des nombres décimaux à partir de mesures de longueurs	décimaux
- Ranger des nombres décimaux par ordre croissant	- Écrire le nombre décimal correspondant à une fraction décimale donnée (ou à une décomposition canonique)

Les différents types de tâches présents dans le manuel *La tribu des maths* ont été cités de manière précise dans le tableau ci-dessus. Il semble cependant intéressant, pour réaliser l'analyse en terme de techniques et technologie/théorie, d'associer certains de ces types de tâches sous des termes plus génériques. Voici alors les termes qui ont été retenus. Ces derniers sont évoqués dans l'ordre décroissant de leur fréquence d'apparition à travers les deux doubles-pages du manuel :

- Repérer le nombre de dixièmes et de centièmes dans un nombre décimal (1)
- Trouver, grâce à la calculatrice, la division à effectuer pour trouver le nombre décimal indiqué (1)
- Additionner (2)
- Comparer / Ranger (3)
- Lire / Placer (Situer) (4)
- Recomposer / Décomposer (10)

→ **Type de tâches : Repérer le nombre de dixièmes et de centièmes dans un nombre décimal**

Ce type de tâches apparaît de façon spécifique dans l'exercice 4 de la première double-page. En effet, plusieurs nombres décimaux sont donnés aux élèves, ces derniers doivent identifier quel nombre possède tant de centièmes ou tant de dixièmes. La technique de réalisation « attendue » n'est pas précisée dans le livre du maître. Cependant, dans le mémento de la page 157 faisant office le leçon, que les élèves sont amenés à consulter au cours de la phase de recherche, il est précisé que « pour bien comprendre la valeur de chaque chiffre dans un nombre décimal, [on peut utiliser un tableau de numération, un abaque décimal] ». Il semble alors que pour l'exercice en question, les élèves puissent utiliser ce tableau dans lequel ils placeraient chaque nombre décimal. Cette utilisation peut cependant amener une légère difficulté dans le sens où l'exercice s'intéresse au nombre de dixièmes et de centièmes alors que le tableau oriente plutôt vers le repérage du chiffre des dixièmes ou des centièmes. Les élèves ont cependant déjà été familiarisés à cette distinction dans le cas des nombres entiers. La technique repose ici sur le principe de la numération de position et numération décimale.

Le type de tâches présenté ici n'apparaît de manière particulière que dans un seul exercice. Mais il intervient indirectement dans de nombreux autres exercices des deux doubles-pages. Il se présente comme un pré-requis.

→ **Type de tâches : Trouver, grâce à la calculatrice, la division à effectuer pour retrouver le nombre décimal indiqué**

Ce type de tâches assez particulier n'est présent que dans un seul exercice, et, à l'inverse du précédent, repose sur un sens particulier de la fraction a/b qui n'est mis en évidence dans aucun autre exercice. En effet, le nombre rationnel a/b est vu ici comme « a divisé par b ». Alors que dans tous les autres exercices, les auteurs du manuel ont privilégié le sens « a b^{ème} » de la fraction a/b .

L'exercice, tel qu'il se présente, apparaît davantage comme une manière de visualiser l'équivalence entre deux écritures : l'écriture fractionnaire d'un nombre et son écriture décimale. En effet, la calculatrice permet facilement ce repérage. Les auteurs précisent en outre dans le livre du maître qu'« il s'agit d'abord de réaliser une première approche de la division par 10 ou par 100 » sans la généraliser. Concernant la technique, les auteurs n'attendent pas une procédure experte mais au contraire un fonctionnement par « implicite », par tâtonnement, en s'aidant du travail réalisé précédemment. L'élément technologique justifiant la technique est alors difficile à mettre en évidence. Il pourrait être le suivant : la division par 10 d'un nombre décimal provoque un décalage du nombre vers la droite dans le tableau de numération, ce qu'un langage courant traduit improprement par un décalage de la virgule vers la gauche. Dans l'exercice tel qu'il est présenté, c'est davantage le constat du « décalage de la virgule vers la gauche » qui apparaît.

→ **Type de tâches : Additionner**

L'addition de fractions ou de nombres décimaux apparaît dans les premiers exercices de la première double-page. On rencontre ce type de tâches une première fois dès la phase de recherche, puis on le retrouve dans la partie « Application », à travers la question b. Dans les deux cas, la technique mise en évidence par les auteurs est la même.

Dans l'exercice de la phase « application », les élèves auront dans un premier temps exprimé les nombres décimaux en utilisant des fractions décimales, par exemple, 14,1 kg sera présenté sous la forme $14 \text{ kg} + \frac{1}{10} \text{ de kg}$. Dans la deuxième question, il leur est alors demandé de calculer la masse totale des sacs à dos pour savoir si les deux étudiantes auront à payer un supplément sachant que le supplément n'intervient que si la masse totale dépasse les 32kg. La technique exposée dans le livre du maître est alors la

suiuante : les élèves n'ont qu'à s'intéresser aux parties entières qu'ils additionnent entre elles. Le total de cette somme étant supérieur à la limite de 32 kg, ils peuvent alors conclure sans se préoccuper des parties fractionnaires. La question telle qu'elle est posée est cependant ambiguë puisqu'elle demande de « calculer la masse totale » alors que la technique exposée permet de donner un ordre de grandeur de cette masse uniquement. Les élèves auront alors tendance à vouloir additionner également les parties fractionnaires entre elles. Ceci peut être à l'origine d'erreurs et provoquer la mise en place de mauvaises représentations d'autant plus qu'il est précisé dans le livre du maître qu'aucune institutionnalisation sur l'addition des fractions ne doit être effectuée. Ceci est d'autant plus problématique que dans la phase de recherche, l'addition des différents scores des équipes pour pouvoir ensuite les comparer nécessite d'additionner les parties fractionnaires. En effet, donner un ordre de grandeur du score en n'additionnant que les parties entières ne permet pas de conclure dans ce cas. De plus, pour deux équipes, les scores indiqués font à la fois intervenir des dixièmes et des centièmes : cela risque d'amener les élèves à additionner entre elles des valeurs d'unités différentes sans leur donner du sens.

→ **Type de tâches : Comparer / Ranger**

La comparaison est le premier type de tâches proposé dans la phase de recherche de la première double-page consacrée aux fractions et nombres décimaux du manuel. Il s'agit en effet dans un premier temps, de comparer des temps, écrits sous la forme d'un entier et d'une fraction décimale, avec un nombre entier. La technique envisageable ici n'est pas précisée dans le livre du maître. Cependant, la phase de recherche se conclut par la question suivante « Comment comparer ces nombres ? » : il s'agit ici de mettre en évidence une technique pour comparer des nombres décimaux. Les auteurs proposent d'abord une technique de comparaison générale, c'est-à-dire non spécifique aux nombres décimaux : « commencer par une comparaison deux à deux ». Le mémento de la page 158 propose ensuite une technique très orientée et spécifique à la comparaison de nombres décimaux. Celle-ci se divise en deux points. Elle invite dans un premier temps à comparer les parties entières des deux nombres : si celles-ci sont différentes, cela suffit pour ranger les nombres. Le cas des parties entières égales est ensuite évoqué : dans ce cas, la « règle » invite à comparer entre elles les parties décimales des deux nombres, « chiffre par chiffre, en lisant de gauche à droite » jusqu'à trouver une différence entre les chiffres. Un exemple est ensuite présenté. La règle est clairement exposée ici comme une technique sans réelle intention d'y donner du sens. Il est indiqué qu'il faut comparer les

chiffres de la partie décimale mais il n'est jamais précisé qu'il s'agit de comparer les unités de même rang : les dixièmes, les centièmes... Le principe de position apparaît bien ici comme élément technologique.

Bien que cela ne soit pas précisé, il semble évident que la technique à mettre en œuvre dans l'exercice 5 de la première double page pour ranger les nombres décimaux dans l'ordre croissant est celle évoquée ci-dessus.

→ **Types de tâches : Lire / Placer (Situer) des nombres sur la droite graduée**

Les types de tâches suivants concernent tous l'utilisation de la droite graduée. Celle-ci doit permettre de visualiser l'équivalence entre un nombre décimal et sa décomposition canonique. En effet, un même nombre peut se présenter sous des écritures différentes. Dans la phase de recherche, la droite invite à repérer cette équivalence avec plusieurs exemples. Mais elle doit surtout permettre de mettre en évidence une logique, des relations entre la décomposition canonique d'un nombre et son écriture décimale. Le but est d'institutionnaliser le passage de l'écriture fractionnaire d'un nombre à son écriture décimale. Les quatre premiers exemples de la forme $b + a/10$, avec b entier naturel et a entier naturel compris entre 1 et 9, pourraient laisser s'installer de mauvaises représentations chez les élèves. Ils pourraient effectivement associer le nombre décimal « b,a » à la décomposition ci-dessus et généraliser cette équivalence. Cependant, le dernier exemple proposé, $1 + 17/10$, vient à juste titre remettre en cause ceci. En effet, le nombre décimal associé n'est pas ici 1,17, et le positionnement du nombre sur la droite graduée laisse bien percevoir cela. Pour situer ce nombre sur la droite graduée, j'avance jusqu'à l'unité 1 puis j'avance ensuite de 17 dixièmes. Je peux alors remarquer que $17/10$ c'est aussi 1 unité et $7/10$, le nombre décimal correspondant est alors $2 + 7/10$ soit, 2,7. La droite graduée permet de donner une représentation concrète du nombre et de lutter plus facilement contre les représentations erronées. La technique consiste ici en l'utilisation des graduations de la droite à condition de bien repérer la valeur de ces différentes graduations : unités, dixièmes. La technologie en jeu repose sur le principe de la numération décimale : 1 unité se divise en 10 dixièmes.

L'exercice 2 de la phase d'entraînement (de la deuxième double-page) vise à mettre en application les principes mis en évidence dans la phase de recherche en continuant de s'appuyer sur l'outil de la droite graduée.

→ Types de tâches : Recomposer / Décomposer

Ce type de tâche est le plus présent dans le manuel *La tribu des maths* comme dans le précédent manuel. Cela se justifie par le fait que c'est l'objet même de la séquence : le passage des écritures fractionnaires aux écritures décimales. Dans l'ensemble des exercices concernés par ce type de tâches, il s'agit soit de recomposer un nombre décimal à partir d'une décomposition fractionnaire de ce nombre soit de décomposer un nombre décimal.

Trois types de décompositions / recompositions apparaissent. Les deux plus présents sont les suivants. La décomposition canonique d'abord consiste à décomposer le nombre sous la forme d'une somme d'un entier et de plusieurs ou d'une seule fraction(s) décimale(s). L'autre consiste en une décomposition selon les différentes unités du tableau de numération : centaines, dizaines, unités, dixièmes et centièmes. Ces deux types de décomposition sont étroitement liés. Enfin, une autre forme de décomposition, plus éloignée des deux premières, est proposée dans la première double-page, à travers les exercices 2 et 3 de la phase d'entraînement. Il s'agit de décomposer un nombre décimal donné, correspondant à une somme d'argent, avec différentes pièces de monnaie. Cette situation contextualisée a pour but de donner du sens aux nouveaux nombres que sont les nombres décimaux.

Commençons par ce troisième type de décomposition. Dans les exercices 2 et 3 de la première double-page, les élèves doivent indiquer le nombre de pièces de 1 € et de 10 centimes qu'ils devraient utiliser pour reconstituer la somme indiquée. Il leur est également demandé de préciser la somme que leur rendrait la caissière dans certains cas. Dans le livre du maître, les auteurs précisent que la manipulation de pièces et de billets pour commencer peut être envisagée. Dans ce cas, lorsqu'il s'agit d'utiliser les pièces de 1€ uniquement, l'élève n'a qu'à réunir les pièces nécessaires pour au moins atteindre la somme puis les compter ensuite. Dans le cas où la somme doit être reconstituée qu'avec des pièces de 10 centimes, la seule manipulation risque d'être fastidieuse et le nombre de pièces insuffisant, surtout pour des sommes relativement élevées. Ainsi, cela va permettre de mettre en jeu des conversions. Par exemple, pour trouver le nombre de pièces de 10 centimes nécessaires pour payer la somme de 18 euros 50 centimes, l'élève pourra commencer par manipuler mais devra vite passer au calcul. Pour cela, il devra raisonner ainsi : pour faire 1 euro, il faut 10 pièces de 10 centimes et donc pour 18 euros, il en faut 18×10 soit 180 pièces de 10 centimes. Dans tous les cas, il semble que la quantité de pièces mise à disposition des élèves soit une variable didactique intéressante à exploiter pour les amener à manipuler les conversions

par le calcul.

La décomposition / recombinaison selon les différentes unités se retrouve essentiellement dans les deux derniers exercices de la deuxième double-page. Il s'agit en effet de recomposer un nombre décimal à partir de la position des chiffres dans le tableau de numération ou bien inversement, de décomposer le nombre en plaçant chaque chiffre au bon endroit dans le tableau selon sa valeur. Les deux types de tâches sont parfois combinés. Le tableau de numération proposé induit la technique à mettre en œuvre. Le principe de la numération de position apparaît clairement comme l'élément technologique. On peut cependant évoquer le principe de la numération décimale qui intervient pour certains exemples. Par exemple, lorsqu'il s'agit de placer le nombre $427/100$ dans le tableau de numération pour ensuite l'exprimer sous sa forme décimale, l'élève doit maîtriser l'équivalence entre 427 centièmes et 4 unités, 2 dixièmes et 7 centièmes.

Enfin, le type de décomposition le plus présent à travers les deux doubles-pages du manuel est la décomposition canonique. Pourtant, le mémento des pages 156 et 157 ne fait aucune allusion à cette décomposition. Sur la première double-page, l'exercice d'application ainsi que l'exercice 5 d'entraînement y sont consacrés. Dans la deuxième double-page, la phase de recherche et l'exercice 3 de la partie entraînement sont en lien avec la décomposition canonique. Dans l'exercice 3, les élèves doivent associer chaque nombre décimal à la décomposition canonique qui lui correspond. Les décompositions telles qu'elles sont données n'entraînent pas de difficultés particulières excepté $9+10/10$, ce qui permet de mettre en jeu les conversions. Dans l'exercice d'application de la première double-page, il s'agit de décomposer le nombre, c'est-à-dire de réaliser la décomposition canonique. À l'inverse, dans la phase de recherche de la deuxième double-page, l'élève doit trouver l'écriture décimale du nombre dont on connaît la décomposition canonique. Dans cette dernière, la droite graduée apparaît comme élément de technique. Cette décomposition fait clairement intervenir le principe de numération de position et parfois de numération décimale (bien qu'assez peu) lorsqu'il est nécessaire d'avoir recourt aux conversions.

- *J'apprends les maths*

Ci-dessous se trouve le schéma de la chronologie des types de tâches proposés dans chacune des deux doubles-pages consacrées au passage des fractions décimales aux nombres décimaux.

<p><i>Première double-page : séquences 93/94</i> → « <i>Écritures décimales : les dixièmes</i> »</p>	<p><i>Deuxième double-page : séquences 95/96</i> → « <i>Écritures décimales : dixièmes et centièmes</i> »</p>
<ul style="list-style-type: none"> - Réaliser la division-fraction de deux nombres et comparer le résultat de la division-fraction et le résultat affiché par la calculatrice - Décomposer une fraction décimale pour recomposer le nombre décimal - Tracer, grâce à une règle graduée, des segments de longueur donnée sous la forme d'un nombre décimal - Recomposer un nombre décimal à partir d'une décomposition « symbolique » (représentation symbolique) de ce nombre - Ranger des nombres décimaux dans l'ordre croissant - Comparer des nombres décimaux 	<ul style="list-style-type: none"> - Réaliser la division-fraction de deux nombres et comparer le résultat de la division-fraction et le résultat affiché par la calculatrice - Décomposer une fraction décimale pour recomposer le nombre décimal - Tracer, grâce à une règle graduée, des segments de longueur donnée sous la forme d'un nombre décimal - Recomposer un nombre décimal à partir d'une décomposition « symbolique » (représentation symbolique) de ce nombre - Ranger des nombres décimaux dans l'ordre croissant - Comparer un nombre décimal à un nombre écrit comme somme d'un entier et d'une fraction - Comparer des nombres décimaux - Résoudre des problèmes de division-partage

On remarque que les types de tâches proposés sont assez proches d'une double-page à l'autre. Les séquences 93/94 proposent une première découverte des nouveaux nombres en n'introduisant que les dixièmes alors que les centièmes apparaissent en outre dans les séquences 95/96.

Il est important de préciser que pour introduire le passage des fractions décimales aux nombres décimaux, les auteurs du manuel privilégient le lien avec la division-fraction travaillée plus tôt dans le manuel (séquence 58).

On peut regrouper les types de tâches listés de la manière suivante, classés dans l'ordre décroissant de leur fréquence d'apparitions à travers les deux doubles-pages du manuel :

- Tracer, grâce à une règle graduée, des segments de longueur donnée sous la forme d'un nombre décimal (2)

- Résoudre des problèmes de division-partage (3 problèmes)
- Comparer / Ranger (5)
- Décomposer / Recomposer (6)

Ces quatre types de tâches vont maintenant être analysés précisément selon la Théorie Anthropologique du Didactique.

→ **Type de tâches : Tracer, grâce à une règle graduée, des segments de longueur donnée sous la forme d'un nombre décimal**

Ce type de tâches apparaît dans un exercice de chaque double-page. Cet exercice est semblable d'une double-page à l'autre à la seule différence que dans les séquences 95-96, l'exercice fait intervenir en outre les centièmes. Ils proposent l'utilisation d'une droite graduée particulière qui est un outil fourni par le manuel : droite graduée en stylo et 1/10 de stylo pour l'un et en stylo et 1/100 de stylo pour l'autre. Ainsi, les mesures de longueur des segments à tracer sont données dans l'unité « stylo ». En se penchant sur le livre du maître, on peut lire que les élèves ont déjà utilisé ce matériel lors de séquences précédentes sur les fractions décimales. Le type de tâches proposé à travers ces deux exercices se rapproche du type de tâches « décomposer ». En effet, il s'agit pour l'élève de décomposer la mesure de longueur du segment, donnée sous la forme d'un nombre décimal, selon les unités « stylo » et « 1/10 de stylo » ou « 1/100 de stylo » pour pouvoir tracer le segment correspondant. C'est effectivement la technique proposée par les auteurs du manuel dans le livre du maître. « En demandant aux élèves de tracer des segments de 1,3 stylo par exemple, ils sont donc amenés à traduire cette écriture en « 1 plus 3 dixièmes ». » La technique exposée consiste en fait pour l'élève à décomposer le nombre décimal sous la forme d'une décomposition canonique. Celle-ci est d'ailleurs présentée dans l'encadré « J'ai appris » : « 13,6 signifie $13 + 6/10$ » ou encore « 23,67 signifie $23 + 6/10 + 7/100$ ». Cette technique repose essentiellement sur le principe de la numération de position c'est-à-dire la connaissance de la valeur de chaque nombre selon sa position, ce qui en fait le principal élément technologique.

→ **Type de tâches : Résoudre des problèmes de division-partage**

Trois problèmes de division-partage sont proposés dans la dernière activité (activité 10) des séquences 95/96. Ce sont des problèmes que les élèves savent résoudre car ils ont déjà travaillé le calcul de divisions-fractions au cours de la période 3, dans la séquence 58. Dans les problèmes proposés ici, il s'agit alors dans un premier temps de réaliser la division-fraction qui convient pour résoudre le problème. Dans un second temps, le but

est que les élèves soient capables d'écrire le résultat, obtenu sous forme fractionnaire au départ, sous sa forme décimale ensuite. Dans le livre du maître, les auteurs précisent que cela doit également permettre aux élèves de constater que les deux écritures sont équivalentes. Pour reprendre la technique exposée dans le livre du maître pour le calcul de divisions-fractions, il faut se pencher sur les activités de la séquence 58. Les auteurs précisent que dans certains cas, les calculs peuvent s'effectuer « de tête » : par exemple, 11 divisé par 4 est égal à 2 + le reste/4 c'est-à-dire : $2 + \frac{3}{4}$. Cependant, dans le cas de plus grands nombres, le passage par la division euclidienne est indispensable pour trouver le quotient de la division avec reste puis partager le reste. Dans les trois problèmes proposés dans les séquences 95/96, il ne semble pas que le recourt à la division euclidienne soit nécessaire. Concernant ensuite le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale, on peut reprendre les explications du livre du maître à propos des activités 1 et 2 (séquences 95/96) pour envisager la technique utilisée. Après le calcul de la division-fraction, les élèves ont un résultat sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction. Dans les cas « simples » où la fraction est une fraction décimale, la décomposition correspond en fait à la décomposition canonique du nombre. Sa forme décimale est alors facile à trouver à condition de maîtriser le principe de la numération de position. C'est le cas pour le premier problème où la division fraction donne le résultat suivant : $1 + \frac{30}{100}$. Par contre, dans les cas où la fraction n'est pas décimale, le passage à l'écriture décimale est alors plus délicat. Dans ce cas, les auteurs partent du principe dans le livre du maître que les élèves connaissent de nombreuses équivalences comme par exemple $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$ ou encore $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$. Ainsi, après cette transformation d'écriture, on se ramène aux cas « simples ». Cette technique suppose cependant que les élèves maîtrisent ces équivalences ce qui ne paraît pas évident.

→ Types de tâches : Comparer / Ranger

Ces deux types de tâches sont très présents à travers les deux doubles-pages du manuel : on les retrouve dans les exercices 5 et 6 des séquences 93/94 et dans les exercices 6 à 9 des séquences 95/96.

Les tâches proposées dans le manuel sont les suivantes : ranger des nombres décimaux dans l'ordre croissant, comparer deux nombres en utilisant les signes $<$, $>$ ou $=$ (parfois un des deux nombres est donné sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction) et choisir parmi deux nombres donnés celui qui est le plus proche d'un entier donné.

Concernant les techniques en jeu, nous n'évoquerons pas celles envisagées pour réaliser le rangement dans l'ordre croissant (comparaison des nombres deux à deux,...). Nous

allons effectivement nous centrer sur les techniques permettant la comparaison de deux nombres décimaux entre eux. Les auteurs du manuel prennent le temps de bien détailler dans le livre du maître les techniques qu'il faut privilégier et celles qui sont à éviter. Il est précisé que les élèves utiliseront pour comparer deux nombres décimaux tels que 19,3 et 19,25 « (...) deux stratégies : concevoir que les 3 dixièmes de 19,3 équivalent à 30 centièmes ou lire 19,25 comme « 19 virgule 2 dixièmes et 5 centièmes » ». Ainsi, il s'agira, dans ce cas où les parties entières sont égales, de comparer 30 centièmes et 25 centièmes ou bien de comparer 3 dixièmes et 2 dixièmes. Le principal élément technologique en jeu est la numération décimale.

Les auteurs mettent en garde les enseignants à propos de deux techniques qui pourraient être utilisées (dans le sens où elles sont efficaces pour comparer deux nombres décimaux) mais qui sont dénuées de sens et surtout qui vont favoriser chez les élèves la construction de représentations erronées sur les nombres décimaux. Celles-ci pourraient les amener par la suite à produire des erreurs. La première consiste à conseiller aux élèves de compléter l'écriture 19,3 avec un zéro pour se ramener à la comparaison « 19,30 19,25 ». « Apparemment, c'est la même stratégie que celle qui consiste à concevoir que 3 dixièmes de 19,3 équivalent à 30 centièmes. En réalité, elle peut fonctionner très différemment. En effet, on observe alors des élèves qui font l'économie d'une traduction mentale des dixièmes en centièmes et se contentent de comparer 30 et 25 comme s'il s'agissait d'entiers. ». Cette technique est déconseillée par les auteurs puisqu'elle détourne la compréhension des décimaux. Une deuxième technique ou plutôt « règle » est également peu recommandée pour les mêmes raisons par les auteurs : « pour comparer deux « nombres à virgule », on les aligne sur la virgule et on les compare de gauche à droite, en commençant par les chiffres à gauche de la virgule, puis en continuant, chiffre après chiffre, par ceux qui sont à droite de la virgule ».

Le choix de la technique appliquée par les élèves dépendra beaucoup de la rigueur que l'enseignant aura porté à la façon d'oraliser les nombres décimaux. Ce point est également abordé par les auteurs dans le livre du maître. « Il est fondamental de faire dire 7,4 sous la forme « 7 virgule 4 dixièmes » ou encore « 7 plus 4 dixièmes » et non « 7 virgule 4 ». En effet, c'est grâce au fait que les élèves oralisent ces deux écritures, 7,4 et $7+4/10$, de la même façon (respectivement « 7 virgule 4 dixièmes » et « 7 plus 4 dixièmes »), qu'ils peuvent mobiliser sur l'écriture 7,4 les connaissances et savoir-faire construits sur $7+4/10$. »

→ Types de tâches : Décomposer / Recomposer

Les tâches de décomposition et recombinaison sont les plus présentes à travers les pages du manuel mais les techniques suggérées pour les traiter ne sont pas toujours identiques selon les exercices.

Dans les exercices 2 de la page 128 et 2 et 3 de la page 130, les élèves doivent écrire des fractions sous la forme d'un nombre décimal. Pour y parvenir, la consigne donnée suggère la technique à mettre en œuvre : « Calcule ces divisions-fractions. Écris le résultat en utilisant le système de la virgule, puis vérifie avec ta calculatrice. ». Ainsi, l'élève est amené à décomposer la fraction en calculant la division qu'elle représente. Une fois cette décomposition produite, soit par la réalisation de la division euclidienne, soit de tête, l'élève doit ramener cette décomposition à la décomposition canonique, comme exposé dans le type de tâches précédent, pour enfin écrire le nombre sous sa forme décimale. La calculatrice intervient comme outil de vérification. Précisons à ce propos que, dans la situation de découverte, la calculatrice tient une autre fonction : en effet, une fois que les élèves ont obtenu la décomposition par le calcul de la division, ils comparent ce résultat à celui affiché sur la calculatrice pour essayer d'établir des liens entre les deux écritures. Ainsi, cette comparaison les amène à interpréter et à comprendre le passage d'une écriture à l'autre.

Comme évoqué pour le type de tâches précédent, cette technique repose d'une part sur la connaissance des équivalences entre les fractions simples et les fractions décimales. Elle requiert également la maîtrise des tables de multiplication. C'est finalement le principe de la numération décimale qui est en jeu ici.

Dans les exercices 4 des séquences 93/94 et 5 des séquences 95/96, la tâche de recombinaison est différente. Il s'agit d'écrire le nombre décimal correspondant à une représentation symbolique donnée. Les élèves voient des carrés partagés en dixièmes pour le premier exercice ou en centièmes pour le deuxième. Ils doivent exprimer sous la forme d'un nombre décimal la partie colorée dans chaque cas. Pour cela, les élèves doivent maîtriser le principe de la numération décimale, c'est-à-dire les équivalences entre les différentes unités de numération pour réaliser les conversions adéquates. Le raisonnement est le suivant : si les 10 bandes sont colorées sur le carré, cela signifie que les 10 dixièmes sont colorés et ceci représente 1. Si dans un deuxième carré, seules 3 bandes sur 10 sont colorées, cela représente 3 dixièmes. L'élève doit ensuite être capable de recomposer la forme $1 + 3/10$ pour obtenir le nombre décimal correspondant.

On pourrait ajouter ici les deux exercices évoqués dans le type de tâches « Tracer, grâce à une règle graduée, des segments de longueur donnée sous la forme d'un nombre

décimal » (3 p.128 et 4 p.130). S'il ne s'agit pas à première vue d'une tâche de décomposition, c'est comme cela que la présentent les auteurs du manuel dans le livre du maître : « (...) les élèves passent de la notation avec virgule à l'expression fractionnaire », c'est le chemin inverse de celui adopté dans les exercices précédents.

- Euro Maths

Le seul type de tâches que l'on trouve à travers la page « fractions décimales et nombres décimaux » du manuel *Euro Maths* est « décomposer / recomposer ». Il s'agit maintenant de l'analyser précisément selon la Théorie Anthropologique du Didactique.

Les deux exercices d'entraînement proposés visent un travail autour de ce type de tâches. Cependant ils ne présentent pas les mêmes façons de procéder.

Dans le premier exercice, les élèves doivent, soit décomposer un nombre décimal donné en plaçant correctement chaque chiffre dans la bonne colonne du tableau de numération, soit retrouver et écrire le nombre décimal en fonction de la position de chaque chiffre dans le tableau. Cet exercice vise l'« entraînement aux équivalences entre écriture fractionnaire et écriture à virgule ». Les élèves sont alors amenés à repérer la valeur de chaque chiffre selon sa position dans le nombre. Dans le cas de la tâche de décomposition du nombre, on peut envisager une première technique. On suppose que les élèves savent effectivement placer la partie entière du nombre dans un tableau de numération comme ils savent le faire pour les entiers en identifiant le chiffre des centaines, celui des dizaines et celui des unités. Une fois la partie entière placée dans le tableau, ils n'ont plus qu'à placer les autres chiffres à la suite sans nécessairement réfléchir à leur valeur. La deuxième technique possible est la suivante : les élèves identifient dans le nombre décimal la valeur de chaque chiffre en fonction de la position de la virgule et les placent ainsi chacun dans la colonne correspondante.

Pour la tâche de recomposition, il s'agit de positionner la virgule au bon endroit en sachant qu'elle sépare les parties entière et décimale. Le principal élément technologique en jeu ici est ici le principe de la numération de position.

Dans le deuxième exercice, les élèves doivent trouver le nombre décimal égal à une fraction donnée. Pour cela, il est précisé dans la consigne qu'ils doivent d'abord trouver une fraction décimale équivalente à la fraction donnée. Pour cette première étape, la technique à mettre en œuvre est présentée dans le livre du maître. Les élèves doivent dans un premier temps lire la fraction donnée, par exemple $\frac{3}{2}$, comme étant « la moitié de 3 » et « 3 c'est $\frac{30}{10}$ donc $\frac{3}{2}$ c'est $\frac{15}{10}$ ». Les auteurs indiquent que « [le] recours à la droite numérique peut être utile » pour trouver ces équivalences. Ils nous renvoient

alors à l'étape 65 consacrées aux fractions décimales dans laquelle, par un partage successif de l'unité en 10 segments de longueur identique puis de chaque segment de longueur $1/10$ en 10 segments identiques et ainsi de suite, on perçoit clairement les équivalences entre différentes fractions. Une fois la fraction décimale obtenue, il s'agit de la décomposer pour obtenir l'écriture décimale correspondante. Pour cela, d'après la façon dont les auteurs ont institutionnalisé le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale après la phase de découverte, on imagine aisément le passage par la décomposition canonique pour recomposer ensuite le nombre décimal. La technologie en jeu dépasse alors la numération de position et met en jeu le principe de la numération décimale.

ii. Les constats suite à l'analyse des pages de manuel selon la TAD

Après avoir réalisé l'analyse des pages ou doubles-pages proposées par chacun des quatre manuels pour introduire l'écriture conventionnelle des décimaux, voici les constats que l'on peut mettre en relief.

On remarque tout d'abord que le nombre de types de tâches différents est très variable d'un manuel à l'autre : certains manuels, comme *La tribu des maths* en particulier, multiplient les types de tâches alors que pour d'autres comme *Outils pour les maths* ou *Euro Maths*, la diversité des types de tâches est restreinte. Le type de tâches « décomposer/recomposer » est logiquement présent dans tous les manuels et légitimement celui que l'on rencontre le plus fréquemment dans les quatre manuels. En effet, ce type de tâches est l'objet même d'apprentissage des « séquences » analysées. C'est même le seul que l'on trouve dans le manuel *Euro Maths*. En effet, contrairement aux manuels *La tribu des maths* et *J'apprends les maths* qui proposent des types de tâches très nombreux et diversifiés, les auteurs des manuels *Euro Maths* et *Outils pour les maths* ont préféré cibler le type de tâches qui fait l'objet d'apprentissage de la séance et prévoir par la suite des temps d'apprentissage spécifiques liés aux autres types de tâches. Ce choix se justifie effectivement dans le sens où il s'agit d'une première rencontre, pour les élèves, avec les nombres décimaux en tant qu'écriture décimale. De plus, certains types de tâches proposés trop tôt, alors que les élèves ont encore une maîtrise fragile de l'écriture décimale, peuvent provoquer la mise en place de techniques dénuées de sens et surtout incorrectes. C'est ce que l'on peut craindre par exemple dans le manuel *La tribu des maths* qui propose des situations d'addition de nombres décimaux dès la phase de découverte, sans l'avoir institutionnalisé. De la même façon, la comparaison de nombres décimaux est une tâche délicate pour les élèves, pourtant c'est le deuxième type de tâches le plus présent dans le manuel *J'apprends les maths*.

En outre, dans le manuel *La tribu des maths*, de nombreux exercices sont en lien avec des contextes de mesure divers (monnaie, temps, longueurs, masses...) : ceci à l'avantage de donner du sens à l'utilisation des nombres décimaux dans des contextes concrets mais peut aussi perdre un peu les élèves surtout pour une première introduction de l'écriture décimale. Par exemple dans le contexte de la monnaie, aucun lien n'est fait entre les différentes unités : « unités », « dixièmes », « centièmes » et « euros » et « centimes d'euros ». De même, dans un exercice en lien avec la mesure de longueur, les élèves doivent être capables d'associer 1 mètre 37 centimètres à 1 unité et 37 centièmes ce qui ne paraît pas évident pour une première manipulation. Pour pallier ces difficultés, le manuel *Euro Maths* consacre par exemple une double page par la suite à l'intitulé « Nombres décimaux et mesure de longueurs », puis plus tard « Nombres décimaux au quotidien » où les contextes de monnaie sont notamment introduits.

Concernant les techniques mises en avant dans chaque manuel pour effectuer les changements d'écriture, de manière générale, le passage par la décomposition canonique est la technique privilégiée et mise en évidence dans les quatre manuels. Cependant, comme on a déjà pu l'évoquer auparavant, le manuel *J'apprends les maths* est le seul à mettre en avant une décomposition qui, avant d'amener la décomposition canonique, est produite par le sens de la division-fraction alors que les trois autres manuels n'abordent que le sens a b^{ième} des fractions. Ceci a l'avantage, selon les auteurs de ce manuel, de familiariser les élèves, dès le départ, avec deux sens différents des fractions. Toujours d'après les auteurs, le fait alors de percevoir ces deux sens favorisera une meilleure compréhension des nombres décimaux, notamment pour certaines équivalences d'écriture. On peut cependant préciser que c'est un sens qui est abordé généralement à partir du collège, car, avant, les élèves n'ont pas tous les éléments technologiques pour le justifier. De plus, *J'apprends les maths* est le seul manuel qui propose l'introduction des écritures décimales dans la résolution de problèmes, qui sont des problèmes de division partition.

À propos maintenant de la place accordée à la droite graduée, on peut voir qu'elle est présente dans tous les manuels mais de manière plus ou moins fréquente. Elle est particulièrement mise en avant par les auteurs du manuel *Outils pour les maths*. Elle est évoquée comme un outil possible dans *Euro Maths* pour aider les élèves à visualiser l'équivalence entre différentes écritures d'un nombre. Mais si l'on fait un retour en arrière sur le travail mené dans ce manuel sur les fractions, on peut voir que la représentation des fractions sur la droite graduée a été très largement traitée et mise en avant. Dans le manuel *La tribu des maths*, le recours à la droite graduée pour situer ou repérer des

décimaux est présent et permet là encore de constater l'équivalence entre deux écritures d'un même nombre. Le travail sur la droite graduée est intéressant pour la raison que nous venons d'évoquer mais il le sera également plus tard pour mieux percevoir le principe d'intercalation qui pose souvent problème.

c. L'analyse des « traces écrites » faisant office d'institutionnalisation proposées par chaque manuel

Comme évoqué précédemment dans la description générale des pages ou doubles-pages de manuels consacrées au passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale, les quatre manuels proposent une phase d'institutionnalisation. Dans les manuels *Outils pour les maths* et *J'apprends les maths*, cette phase de structuration prend la forme d'un encadré présent sur la page ou double-page (cf respectivement Annexe 9 et Annexe 10). Par contre, ce n'est pas le cas pour les manuels *La tribu des maths* et *Euro Maths*. Pour ces deux manuels, toutes les leçons en lien avec chaque notion mathématique sont regroupées et organisées dans une partie annexe du manuel. Dans le manuel *La tribu des maths*, les élèves doivent se référer au mémento situé à la fin du livre (cf Annexe 11). Dans le cas du manuel *Euro Maths*, toutes les « leçons » sont rassemblées dans un petit livret intitulé « aide-mémoire » (cf Annexe 12).

Ces différentes « leçons » vont être comparées et analysées selon les trois axes suivants : la façon dont les manuels décrivent, définissent, le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale ; les outils ou représentations symboliques privilégiés pour représenter les nombres décimaux et enfin le vocabulaire employé pour expliquer ces nouveaux nombres.

Dans les manuels *Outils pour les maths*, *J'apprends les maths* et *Euro Maths*, le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale est présenté à travers la décomposition canonique. Dans le mémento du manuel *La tribu des maths*, la décomposition canonique n'est pas du tout présente, ni même aucun autre type de décomposition. Le nombre décimal est défini à travers le tableau de numération où la valeur de chaque chiffre est donnée en fonction de sa place dans le tableau et donc dans le nombre. Dans ce manuel, le lien entre les fractions décimales et les nombres décimaux est peu présent. Pourtant, le document ressource *Le nombre au cycle 3* (MEN, 2012) insiste sur le fait que « [les] décompositions additives usuelles des nombres décimaux (somme de fractions décimales ou somme d'une partie entière et d'une partie décimale éventuellement décomposée) sont à systématiser ».

À propos des outils et représentations utilisés pour « illustrer » les nombres décimaux, on remarque que le manuel *Outils pour les maths* privilégie la droite graduée.

Grâce à celle-ci, les auteurs insistent sur le fait qu'un même nombre peut s'écrire de différentes manières. Dans le manuel *Euro Maths*, les auteurs accordent également de l'importance à ces égalités mais ils ne l'illustrent pas du tout au travers de la droite graduée. Enfin, les auteurs du manuel *La tribu des maths* utilisent la droite graduée pour illustrer les dixièmes en découpant le segment unité en dix segments de longueur identique.

On remarque alors que seul un manuel utilise réellement la droite graduée pour permettre une représentation concrète d'un nombre décimal. Cet outil est pourtant mentionné dans le document ressource *Le nombre au cycle 3* (MEN, 2012) comme un outil à privilégier pour aider les élèves à « fixer des repères » : « L'usage des droites graduées doit être poursuivi tout le long de la scolarité primaire pour mettre en évidence des écritures équivalentes et de nouveaux nombres. »

En outre, les trois manuels *Euro Maths*, *La tribu des maths* et *Outils pour les maths* utilisent le tableau de numération pour décrire le nombre décimal et permettre aux élèves de visualiser la valeur de chaque chiffre dans le nombre.

Dans le court encadré de structuration du manuel *J'apprends les maths*, aucune représentation symbolique des nombres décimaux n'apparaît. Cependant, c'est le seul manuel qui introduit un lien avec l'affichage que peut fournir la calculatrice.

Enfin, nous pouvons nous intéresser au langage et vocabulaire employés à propos des nombres décimaux. Dans le mémento du manuel *La tribu des maths*, les nombres décimaux sont clairement définis comme étant des « nombres à virgule ». Ceci pose problème au niveau mathématique puisque les nombres entiers ne sont pas des nombres à virgule et pourtant, ce sont également des nombres décimaux. Dans le manuel *Outils pour les maths*, les auteurs définissent également le nombre décimal de cette façon : « On peut écrire une fraction décimale sous la forme d'un nombre à virgule : c'est un nombre décimal. ». Cependant, cet abus de langage est atténué par les exemples qui suivent puisque la fraction décimale $10/10$ est associée au nombre 1. Dans les deux autres manuels, cette ambiguïté n'est pas présente. Par contre, tous les exemples sont donnés à partir de nombres à virgule, ce qui est effectivement légitime dans le sens où les nombres entiers n'ont pas intérêt à être étudiés ici.

En outre, on peut s'intéresser aux indications des auteurs quant à la façon d'oraliser un nombre décimal. Dans le manuel *La tribu des maths*, les auteurs vont malheureusement amener les élèves à se heurter à l'un des obstacles évoqués dans le cadre théorique lié à une oralisation abusive. En effet, voici ce qu'ils précisent : « Le nombre écrit dans le tableau se lit « 2 mille 157 virgule 834 » ». Cette manière d'oraliser le nombre peut

pousser l'élève à voir le nombre 2157,834 comme deux entiers (2157 et 834) séparés par une virgule. Cette mauvaise représentation du nombre décimal est renforcée par la manière dont les auteurs présentent le nombre 15,67 : ils distinguent une partie entière qu'ils écrivent « 15 » en bleu (que les élèves seront amenés à lire « quinze ») d'une partie décimale, écrite « 67 » en rouge (que les élèves seront amenés à lire « soixante-sept »). À l'inverse, les auteurs des manuels *J'apprends les maths* et *Euro Maths* insistent sur une oralisation qui met bien en évidence la valeur des différentes unités dans le nombre pour éviter justement que les élèves se heurtent à l'obstacle cité précédemment. Par exemple, dans l'aide mémoire du manuel *Euro maths*, il est précisé que le nombre 4,86 peut se lire « quatre unités et quatre-vingt-six centièmes » ou bien « quatre virgule quatre-vingt-six centièmes ». Les auteurs des deux manuels accordent une grande importance à cette oralisation, ils y consacrent d'ailleurs au moins un paragraphe dans les livres du maître pour bien mettre en garde les enseignants. Le manuel *Outils pour les maths* quant à lui ne traite pas la manière d'oraliser un nombre décimal.

Conclusion

L'Histoire de l'introduction du système des fractions et des nombres décimaux montre à quel point cette notion s'est révélée difficile pour les Hommes. On peut alors imaginer qu'elle va l'être également pour des élèves de CM1 qui rencontrent pour la première fois ces nouveaux nombres.

L'analyse des quatre manuels scolaires a d'abord permis de mettre en évidence des points de similitude qui montrent une certaine orientation commune et actuelle dans la manière d'enseigner et d'apprendre les nombres décimaux. Cependant, en se penchant davantage sur le contenu précis de chacun de ces ouvrages, on peut remarquer des différences, des faiblesses ou des points positifs, qui vont plus ou moins faciliter la compréhension des décimaux chez les élèves.

On remarque d'abord que la démarche générale adoptée par les quatre manuels pour introduire les nombres décimaux est similaire. Ils proposent en effet tous les quatre, en accord avec les programmes officiels et les constats historiques, une progression identique pour introduire ces nouveaux nombres en partant d'abord des fractions simples pour aller vers l'étude des fractions décimales puis des décimaux. De la même façon, les auteurs des quatre manuels proposent des situations proches dans lesquelles ces nombres prennent du sens, particulièrement des situations de mesure. Enfin, dans les quatre manuels, les techniques et les « modèles » mis en évidence sont très proches et vont dans le sens d'orientation de la recherche notamment l'utilisation de la droite graduée et la manipulation de décompositions additives des nombres.

Cependant, l'analyse a parfois montré des maladresses ou un manque de rigueur visibles dans certains manuels et au contraire d'autres font preuve d'une progression et d'une précision qui vont favoriser la compréhension.

On peut noter tout d'abord que les quatre manuels ne s'attardent pas autant sur le travail des fractions et fractions décimales. Pourtant, on comprend bien qu'une bonne compréhension des fractions conditionne la compréhension des nombres décimaux en tant qu'écriture décimale qui apparaît alors comme une convention d'écriture. De la même façon, dès l'introduction du passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale, certains manuels multiplient les types de tâches qui mettent en jeu les nombres décimaux : addition, comparaison, rangement,.... Ces derniers sont, certes, importants, mais il faut prendre le temps de les introduire pour éviter que les élèves soient trop vite tentés de mettre en œuvre des techniques qui ne fonctionnent pas avec ces nouveaux nombres et qui vont fixer des représentations erronées. On a pu se rendre compte de ces dérives

dans un manuel en particulier. En effet, il est nécessaire de progresser par étapes pour laisser le temps à l'élève de s'appropriier les notions et surtout de leur donner du sens, et c'est ce que font certains manuels parmi les quatre analysés. « Donner du sens », c'est justement une étape essentielle que certains manuels ont omise au moment de l'introduction même des nouveaux nombres. L'élève entrera effectivement d'autant mieux dans le processus de compréhension de ces nombres dès lors qu'on lui en aura justifié l'introduction. Deux des manuels analysés confrontent les élèves à cette question du sens en les amenant à prendre conscience de l'insuffisance des nombres entiers ou aux possibilités nouvelles qu'offrent ces nouveaux nombres. Les deux autres manuels ont alors oublié de justifier cette introduction en donnant directement des situations dans lesquelles l'élève manipule les fractions sans avoir pris le temps de se demander pourquoi.

Enfin, il est essentiel de terminer sur un point qui pourrait paraître futile, mais qui, dans le cas des décimaux, prend toute son importance. Il s'agit du vocabulaire, des mots utilisés pour définir et expliquer les nombres décimaux. Ceux-ci ont été étudiés dans les parties d'institutionnalisation des quatre manuels qui ont donc pour but d'être retenues par les élèves. Un manuel en particulier s'est avéré approximatif à ce propos. Les nombres décimaux y sont d'abord définis comme « nombres à virgule ». Par ailleurs, plusieurs manières de décrire les décimaux vont à l'encontre des préconisations de la recherche en didactique. Elles amènent en effet les élèves à se heurter à certains obstacles évoqués dans le cadre théorique. À l'inverse, deux manuels parmi ceux analysés sont particulièrement vigilants à cela dans le but d'aider les élèves à surmonter ces obstacles.

Finalement, l'apprentissage des décimaux au CM1 est une étape importante et majeure dans la construction de savoirs mathématiques. On comprend, suite à l'étude menée, que la première rencontre avec ces nouveaux nombres au CM1 est primordiale puisqu'elle elle doit faire entrer les élèves dans une compréhension de ces derniers. Ainsi, le choix du manuel scolaire par l'enseignant est tout aussi primordial et ne doit pas se faire au hasard. Il faut qu'il amène l'élève par étapes successives à saisir le sens de ces nouveaux nombres : au moment de les introduire d'abord puis à chaque moment de l'apprentissage. Pour cela, rien ne doit être négligé, surtout pas le vocabulaire, les mots, que l'on emploie à propos des décimaux qui peuvent être constitutifs de représentations erronées s'ils ne sont pas assez précis. De même, les techniques enseignées doivent prendre tout leur sens aux yeux des élèves. On perçoit assez facilement que parmi les quatre manuels analysés, certains répondent davantage à ces critères là, vecteurs d'une meilleure compréhension.

La réalisation du mémoire suivant m'aura permis entre autre de porter un regard critique sur les manuels scolaires. Les comparer entre eux, les confronter aux résultats de la recherche en didactique peut aider à faire des choix et à percevoir des insuffisances qui ne paraissent pas essentielles à l'enseignant au premier abord. Mais il faut qu'il soit capable d'envisager le processus d'apprentissage des élèves qui découvrent « l'existence » des décimaux. En effet, grâce à ce travail de recherche et d'analyse, bien que modeste, je me sens plus à même d'identifier et donc d'anticiper les besoins et probables difficultés des élèves. Il m'a permis de repérer des étapes essentielles à ne pas omettre dans la construction d'une progression dans l'enseignement des décimaux. Mais j'ai également pris conscience de certains points « de dérive » qu'il faut éviter pour favoriser une meilleure compréhension pour les élèves.

Bibliographie

- BRISSIAUD, R. (1999) Les fractions et les décimaux au CM1 : une nouvelle approche, in Actes du 15ème colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres, Loctudy du 11 au 13 mai 1998, IREM de Brest
- BROUSSEAU, G. (1976). *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre de la C.I.E.A.E.M., Louvain la neuve, pp.101-117.
- DUROUX, A. (1982). *La valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure*. Publications de l'IREM de Bordeaux.
- COMITI, C. & NEYRET R. (1979), *À propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de cours moyen, Grand N* 18, 5-20.
- CHEVALLARD, Y. (1991) *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*, Recherches en Didactique des Mathématiques, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble
- CHEVALLARD, Y (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : L'approche anthropologique*, RDM Vol. 19/2
- *Le nombre au cycle 3 – Apprentissages numériques* (sept. 2012), Ministère Éducation Nationale - CNDP, collection « Ressources pour faire la classe » - Partie 6 : *Les nombres décimaux et les fractions*, Partie 7 : *Les fractions* et Partie 8 : *Les nombres décimaux*, pages 75 à 106, B.Barilly et G.Le Poche

Les manuels scolaires de mathématiques :

- Brissiaud R, Clerc P, Lelièvre F, Ouzoulias A, 2010, *J'apprends les maths CM1*, Paris, éditions Retz, ISBN : 9782725629407, 160 pages
- Brissiaud R, Clerc P, Lelièvre F, Ouzoulias A, 2010, *J'apprends les maths CM1 : livre du maître*, Paris, éditions Retz, ISBN : 9782725629506, 207 pages
- Demagny C, Demagny J-P, Dias T, Deplay J-P, 2009, *La tribu des maths CM1*, Paris, éditions Magnard, ISBN : 9782210556041, 175 pages
- Demagny C, Demagny J-P, Dias T, Deplay J-P, 2009, *La tribu des maths CM1 : guide du maître*, Paris, éditions Magnard, ISBN : 9782210556065, 303 pages
- Peltier M-L, Briand J, Ngono B, Vergnes D, 2009, *Euro Maths CM1*, Paris, éditions Hatier, ISBN : 9782218936227, 207 pages
- Peltier M-L, Briand J, Ngono B, Vergnes D, 2009, *Euro Maths CM1 : livre du professeur*, Paris, éditions Hatier, ISBN : 9782218936234, 287 pages

- Petit-Jean I, Rousseau M, Carle S, 2011, *Outils pour les maths CM1*, Paris, éditions Magnard, ISBN : 9782210558021, 175 pages
- Petit-Jean I, Rousseau M, Carle S, 2011, *Outils pour les maths CM1 : guide du maître*, Paris, éditions Magnard, ISBN : 9782210558090, 160 pages

Annexes

Annexe 1 : Phase de recherche proposée sur la double-page « Lire, écrire et représenter des fractions simples » du manuel *Outils pour les maths*.

● Lire, écrire et représenter des fractions simples



Moi, je voudrais une demi-pizza.

Et moi un quart!

Et moi j'en voudrais un tiers.

Reine

Margherita

4 fromages

René

FATOU

LEO

Cherchons

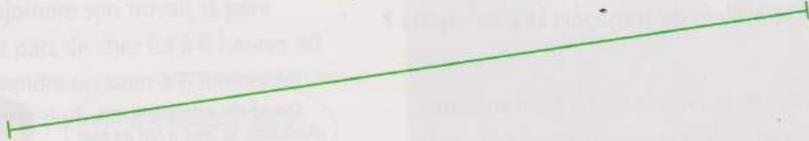
- En combien de parts a été partagée chaque pizza ?
- Quelle pizza chaque enfant va-t-il choisir ?
- « Un demi » s'écrit $\frac{1}{2}$. Comment écrirais-tu « un quart » et « un tiers » ?

Annexe 2 : Situation de recherche de la séquence 23 : « Les fractions (1) » du manuel *La tribu des maths*.

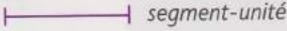
Recherche

Pas d'accord !

Jordane et Mattéo veulent mesurer ce segment, mais ils n'ont pas de règle graduée :



Ils se sont mis d'accord sur un segment-unité pour comparer leurs mesures :



Jordane donne la réponse suivante : 6 unités + $\frac{1}{2}$ unité.

Mattéo dit : « Je ne suis pas d'accord ! Je trouve : 6 unités + $\frac{1}{4}$ d'unité + $\frac{1}{4}$ d'unité. »

Qui a raison ?

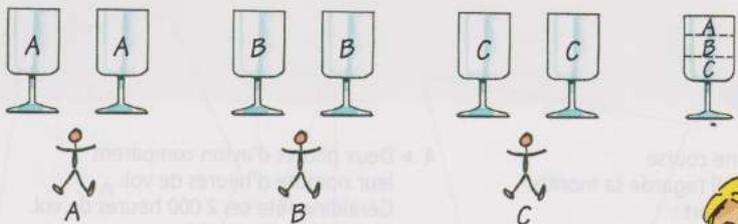
Annexe 3 : Situation « Je découvre » de la séquence 58 : « Une nouvelle division et de nouveaux nombres » du manuel *J'apprends les maths*.

Je découvre

1 Tu vas apprendre une nouvelle division, celle où l'on partage le reste.

Problème : 7 verres de jus d'orange sont à partager entre 3 enfants.
Quelle sera la part de chaque enfant ?

C'est 7 divisé par 3. Mais attention, ici, il faut partager le reste !

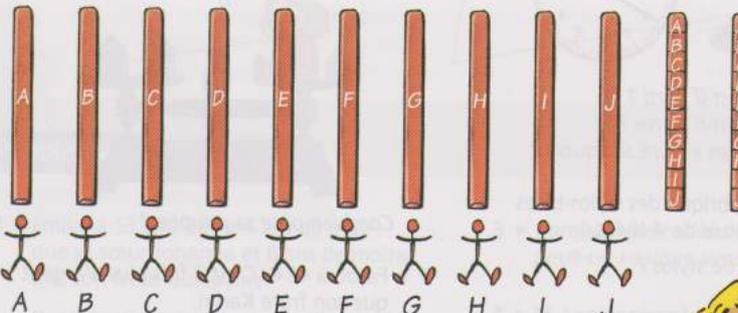


7 divisé par 3, c'est égal à 2 ... plus le reste 1, divisé par 3.
On écrit $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

Et s'il fallait partager 10 verres entre 3 enfants ? Écris l'égalité correspondante.

2 **Problème** : 12 barres de chocolat sont à partager entre 10 enfants.
Quelle sera la part de chaque enfant ?

C'est 12 divisé par 10. Mais attention, là aussi ...



12 divisé par 10, c'est égal à 1 ... plus le reste 2, divisé par 10.
On écrit $\frac{12}{10} = 1 + \frac{2}{10}$

Et s'il fallait partager 24 barres de chocolat entre 10 enfants ? Écris l'égalité correspondante.
Et s'il fallait partager 123 barres de chocolat entre 10 enfants ? Écris l'égalité correspondante.

Annexe 4 : « Activité préparatoire de découverte » de l'étape 54 : « Fractions et partages de longueurs » du manuel *Euro Maths*.

« ACTIVITÉ PRÉPARATOIRE DE DÉCOUVERTE : chaque élève trace un segment sur une feuille. Distribuer une bande unité. Chaque élève doit écrire un message qui permettra à un autre élève de construire un segment de même longueur sans le mesurer. Échanger les messages. »

Annexe 5 : Double-page : « Passer de l'écriture fractionnaire aux nombres décimaux » du manuel *Outils pour les maths*.

Page 48 :

Passer de l'écriture fractionnaire aux nombres décimaux

On a placé sur une droite graduée les records en saut en longueur de trois athlètes.

Athlète	Record
Godfrey Mokoena (Sud-Africain)	8,5 m
Mike Powell (Américain)	8,95 m
Robert Emmiyan (Arménien)	

Cherchons

- Sur la droite, sous quelle forme sont écrites les performances des athlètes ? Sont-elles écrites de la même manière dans le tableau ?
- Repère les performances des trois athlètes sur la droite. Comment écrirais-tu celle de Robert Emmiyan dans le tableau ?

► On peut écrire une **fraction décimale** sous la forme d'un nombre à virgule : c'est un **nombre décimal**.

$$\frac{12}{10} = \frac{10}{10} + \frac{2}{10} = 1 + \frac{2}{10} = 1,2 \quad \frac{128}{100} = \frac{100}{100} + \frac{20}{100} + \frac{8}{100} = 1 + \frac{20}{100} + \frac{8}{100} = 1,28$$

Fraction décimale	Partie entière		Partie décimale		Nombre décimal
	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	
$\frac{12}{10}$		1	2		1,2
$\frac{128}{100}$		1	2	8	1,28

La virgule sépare la partie entière et la partie décimale du nombre.

► À l'inverse, on peut écrire une fraction décimale à partir d'un nombre décimal.
 Ex. : $8,37 = 8 + 0,3 + 0,07 = 8 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} = \frac{837}{100}$

Placer des fractions et des nombres décimaux sur une droite

1 * a. Associe ces fractions aux lettres sur la droite :

$\frac{17}{10}$

$\frac{23}{10}$

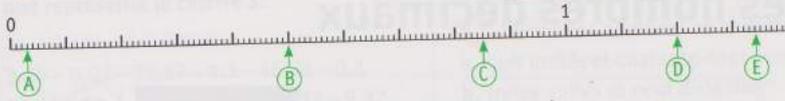
$\frac{5}{10}$

$\frac{11}{10}$

$\frac{28}{10}$

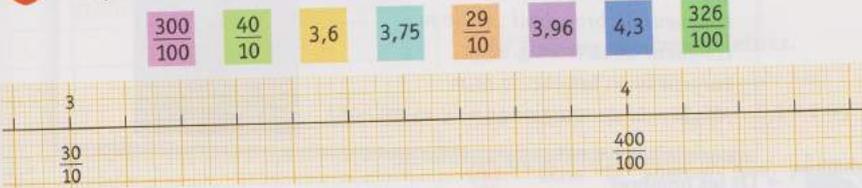
b. Écris ces fractions sous la forme d'un nombre décimal.

2 * a. Associe ces fractions aux lettres sur la droite :



b. Écris chaque fraction sous la forme d'un nombre décimal.

3 ** Reproduis cette droite sur du papier millimétré et place :



Écrire un nombre décimal à partir d'une fraction décimale

4 * Décompose pour trouver le nombre décimal correspondant.

Ex. : $\frac{25}{10} = \frac{20}{10} + \frac{5}{10} = 2 + \frac{5}{10} = 2,5$

$\frac{56}{10}$ $\frac{13}{10}$ $\frac{28}{10}$ $\frac{104}{10}$ $\frac{21}{10}$ $\frac{239}{10}$

5 * Recopie et écris chaque somme sous la forme d'un nombre décimal.

Ex. : $2 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} = 2,73$

- a. $7 + \frac{3}{10} + \frac{8}{100}$
- b. $88 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100}$
- c. $48 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100}$
- d. $32 + \frac{5}{10}$
- e. $327 + \frac{1}{10}$
- f. $2 + \frac{8}{10} + \frac{6}{100}$

6 ** Reproduis le tableau de la leçon, complète-le avec ces fractions et écris les nombres décimaux correspondants.

$\frac{135}{10}$ $\frac{167}{100}$ $\frac{898}{10}$ $\frac{429}{100}$ $\frac{66}{10}$

7 *** Reproduis et complète ce tableau. La première ligne sert d'exemple.

$\frac{58}{10}$	$5 + \frac{8}{10}$	5,8
		3,74
	$1 + \frac{92}{100}$	
		4,4
$\frac{814}{100}$		
	$15 + \frac{4}{10}$	
$\frac{223}{100}$		

Défi Les géants du monde animal !

Écris la taille de ces animaux sous la forme d'un nombre décimal.

un crocodile de 86 dixièmes de mètre



une autruche de 275 centièmes de mètre

Annexe 6 : Deux doubles-pages consacrées aux « fractions et nombres décimaux » du manuel *La tribu des maths*.

- **Annexe 6.a** : Double-page 41 « Fractions et nombres décimaux (1) ».

Page 102 :

41 Fractions et nombres décimaux (1)

Je découvre de nouveaux nombres

Avant de commencer

Par quelles opérations a-t-on pu obtenir le point A ?

$1 + \frac{2}{10}$ $\frac{1}{2} + \frac{2}{10}$ $5 + 2$ $\frac{5}{10} + \frac{2}{10}$

Recherche

Trois équipes participent à une course de relais. Voici les résultats :

	Coureur 1	Coureur 2	Coureur 3	Coureur 4
Équipe A	$13\text{ s } \frac{7}{10}$	$13\text{ s } \frac{65}{100}$	$13\text{ s } \frac{90}{100}$	$14\text{ s } \frac{1}{10}$
Équipe B	$13\text{ s } \frac{85}{100}$	$14\text{ s } \frac{15}{100}$	$14\text{ s } \frac{37}{100}$	$13\text{ s } \frac{63}{100}$
Équipe C	$13\text{ s } \frac{75}{100}$	$13\text{ s } \frac{8}{10}$	$14\text{ s } \frac{3}{10}$	$13\text{ s } \frac{99}{100}$

a) Qui a réalisé le temps le plus proche de 14 secondes ?
 Quel coureur a fait le moins bon temps ?

b) Une équipe a fini le relais en 56 secondes. Laquelle ?

Comment comparer ces nombres ?

Application

Gwenaëlle et Géraldine partent étudier pendant un an en Chine. Elles prévoient d'expédier leurs malles et leurs valises par le biais d'un transporteur et de prendre l'avion avec leurs sacs à dos. La compagnie aérienne facture un supplément pour les bagages lorsque le poids dépasse 32 kg.

a) En t'inspirant du tableau dans la Recherche, transforme tous les nombres décimaux en utilisant des fractions décimales.

b) Calcule la masse totale des sacs à dos et dis si les deux étudiantes devront payer un supplément.

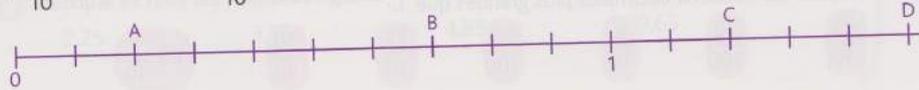
Par exemple : $14,1\text{ kg} = 14\text{ kg} + \frac{1}{10}\text{ de kg}$

102 cent deux

Entraînement

1 Complète.

A: $\frac{1}{10} + \dots$ B: $\frac{4}{10} + \dots$ C: $1 + \dots$ D: $\dots + \frac{5}{10}$



2 Anna veut payer un CD à 18 euros 50 centimes (18,50 €) avec des pièces de 1 euro.

- Combien lui faudra-t-il de pièces ? Combien lui rendra-t-on ?
- Combien lui faudrait-il de pièces de 10 centimes d'euro pour payer cette somme ?

3 Complète le tableau.

Pour payer...	Nombre de pièces de 1 euro	On me rend (en centimes)	Nombre de pièces de 10 centimes	On me rend (en centimes)
27,85 euros
12,55 euros
8,76 euros
0,94 euros

4 Parmi ces nombres décimaux, quels sont ceux qui contiennent :

- sept centièmes ?
 - quatre-vingt-quatorze centièmes ?
 - quarante-neuf centièmes ?
 - sept dixièmes ?
- 2,49 5,07 7,70 13,94

5 Cinq enfants se sont mesurés, mais n'ont pas noté leur taille de la même façon :

- Lounès : 1 mètre et 37 centièmes de mètre ;
- Antoine : 1 mètre et 33 centimètres ;
- Gabin : 1 m 38 cm ;
- Clarisse : 1 mètre et 29 centièmes de mètre ;
- Massoud : 1 m et 4 dixièmes de mètre.



- Écris toutes ces tailles sous la forme de nombres décimaux.
- Classe ensuite les enfants, du plus petit au plus grand.

Labo Maths

Fatou a trouvé cet abaque dans un vieux livre appelé *Numération décimale*. Il manque l'indication des rangs (unité, dizaines, dixièmes...).

2	4	7	8	1	5

Aidez-la à écrire tous les nombres possibles.



- **Annexe 6.b** : Double-page 42 « Fractions et nombres décimaux (2) »

Page 104 :

42 Fractions et nombres décimaux (2)

Je sais transformer des fractions décimales en nombres décimaux

Avant de commencer
Relève les fractions décimales plus grandes que 1.

$\frac{21}{10}$ $\frac{10}{100}$ $\frac{8}{10}$ $\frac{99}{100}$ $\frac{11}{10}$ $\frac{10}{10}$ $1 + \frac{1}{10}$

Recherche

A Reproduis exactement ce segment avec ta règle graduée et place les points.

B : $\frac{8}{10}$ C : $4 + \frac{6}{10}$ D : 6 E : $3 + \frac{9}{10}$ F : $1 + \frac{17}{10}$

Écris ensuite, comme sur le dessin, les longueurs des segments OB, OC, OD, OE et OF.

B Reproduis à nouveau ce dessin et place : 2,3 $\frac{15}{10}$ $\frac{225}{100}$ $\frac{40}{10}$ et 2,0.

Comment passer d'une écriture en fraction décimale à un nombre à virgule ?

Application

a) Écris en fractions décimales les nombres décimaux.

2,9 61,3 20 6,18 0,8

b) Écris en nombres décimaux les fractions décimales.

$\frac{5}{10}$ $\frac{21}{10}$ $\frac{45}{100}$

Entraînement

1 a) Avec ta calculatrice, effectue les opérations et note les résultats.
189 : 100 24 : 100 472 : 10 3 728 : 100

b) Que peut-on taper sur la calculatrice pour obtenir les résultats suivants ?

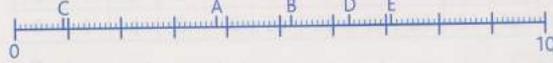
0,75 2,7 134,09 0,03 59

104 cent quatre

CALCUL MENTAL :

Trouver le dividende en connaissant le diviseur, le quotient et le reste

2 À quels points du segment correspondent les nombres suivants ?



$\frac{9}{10}$ $3 + \frac{8}{10}$ $6 + \frac{3}{10}$ $6 + \frac{11}{10}$
 6,3 5,2

3 Recopie et relie les nombres égaux.

$2,25$ $3,75$ $4,85$ $9,65$ 10
 $9 + \frac{65}{100}$ $2 + \frac{25}{100}$ $4 + \frac{85}{100}$ $9 + \frac{10}{10}$ $3 + \frac{75}{100}$

4 Complète le tableau.

	Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes	Centièmes
....			4	0	9
....,35		7	6		
125,08	1	2	5	0	8
10,01					
....	0	3	2	0	1
0,50					
540,...					3

5 Construis le même tableau que dans l'exercice 4, puis place ces nombres.

Aide-toi de l'exemple.

$\frac{7}{10}$ 0,07 $\frac{427}{100}$ 125,0 $5 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100}$ $945 + \frac{95}{100}$

	Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes	Centièmes
23,5		2	3	5	

Labo Maths



Max dit : « Quand je divise 118 par 25, je peux dire que $\frac{118}{25}$ est compris entre 4 et 5. »

Aidez Max à trouver entre quels nombres est comprise la fraction $\frac{549}{15}$.



Annexe 7 : Séquences 93/94 : « Écritures décimales : les dixièmes » et 95/96 : « Écritures décimales : les centièmes » du manuel *J'apprends les maths*.

4^e
période

Nombres et calcul : les écritures décimales : dixièmes et centièmes ; +, - et x sur les décimaux ; la proportionnalité (suite) ; les graphiques...

Géométrie : classer les figures géométriques.

SÉQUENCES
93/94 **Écritures décimales : les dixièmes**

Je découvre

1 Cette activité va te permettre de comprendre certains nombres affichés par la calculette, ceux qui ont un chiffre après le point (par exemple : 3.7 ou 14.1).

a. Recopie et complète ce tableau :

	$\frac{46}{10}$	$\frac{32}{4}$	$\frac{157}{10}$	$\frac{108}{10}$	$\frac{14}{10}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$
Tes calculs	$4 + \frac{6}{10}$	8						
Affichage de la calculette								

b. Compare les résultats obtenus.

J'ai appris

13,6 signifie $13 + \frac{6}{10}$ ou $\frac{136}{10}$.

Sur les machines, la virgule est souvent remplacée par un point.
Ce nombre s'appelle un nombre **décimal**.
Le chiffre à droite de la virgule désigne les dixièmes.
13,6 se dit « **treize virgule six dixièmes** ».

2 Calcule ces divisions-fractions. Écris le résultat en utilisant le système de la virgule, puis vérifie avec ta calculette.

$\frac{14}{10}$ $\frac{136}{10}$ $\frac{9}{2}$ $\frac{49}{10}$ $\frac{23}{10}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{597}{10}$ $\frac{48}{6}$

3 Prends ta règle n° 1, graduée en stylo et $\frac{1}{10}$ de stylo, et trace les segments qui ont ces longueurs :
 [AB] : 1,3 stylo [CD] : 1,9 stylo [EF] : 0,5 stylo [GH] : 0,9 stylo

4 Écris le nombre correspondant à la partie colorée en utilisant le système de la virgule.

A

B

C

5 Range ces nombres du plus petit au plus grand.

6 5,8 5 5,1 3,7 | 13 12,8 19 11,9 12 12,3

6

Quel est le nombre le plus proche de 3 ? 2,9 ou 3,2	Quel est le nombre le plus proche de 8 ? 7,4 ou 8,5	Quel est le nombre le plus proche de 12 ? 11,8 ou 12,3
--	--	---

1 à 3 Dans la sq n° 90, l'usage de la calculette pour un calcul tel que $74/10$ aura permis d'observer dans le résultat 7.4 que le chiffre 7 représente le quotient de cette division. Il s'agit ici de comprendre que l'écriture 7.4 est un abrégé de l'écriture, familière aux élèves, $7 + 4/10$. Il est fondamental de dire 7,4 sous la forme

Écritures décimales : dixièmes et centièmes

Calculs proposés oralement

Sq n° 95 : *idem* sq n° 93, avec $n/10$, $n/2$, $n/100$ et $n/4$.

Le résultat est écrit : $a + b/10$, $a + b/2$, $a + b/100$, ...

Sq n° 96 : *idem* sq n° 94, mais le résultat est écrit avec une virgule, par ex. 2,75 pour « onze quarts ».

Je découvre

- 1 a. Recopie et complète ce tableau :

	$\frac{35}{7}$	$\frac{432}{100}$	$\frac{56}{100}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{307}{100}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{240}{100}$	$\frac{1}{4}$
Tes calculs	5	$4 + \frac{32}{100}$						
Affichage de la calcullette								

- b. Compare les résultats obtenus.

J'ai appris

23,67 signifie $23 + \frac{6}{10} + \frac{7}{100}$ ou $23 + \frac{67}{100}$ ou $\frac{2367}{100}$

Le premier chiffre après la virgule désigne les dixièmes.
Le second chiffre après la virgule désigne les centièmes.

- 23,67 se dit « vingt-trois virgule six dixièmes et sept centièmes » ou « vingt-trois virgule soixante-sept centièmes ».
- 3,07 se dit « trois virgule sept centièmes ».

- 2 Calcule ces divisions-fractions.
Écris le résultat en utilisant le système de la virgule, puis vérifie avec ta calcullette.

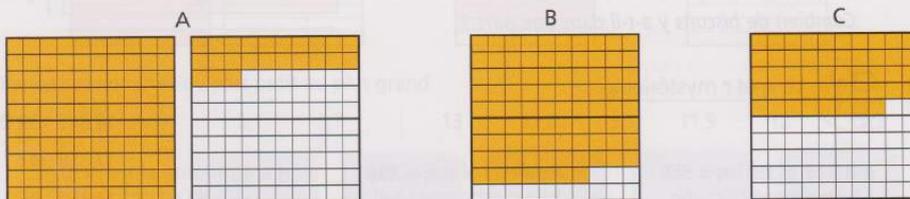
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{59}{100}$	$\frac{60}{100}$	$\frac{99}{100}$	$\frac{100}{100}$
$\frac{107}{100}$	$\frac{110}{100}$	$\frac{143}{100}$	$\frac{150}{100}$	$\frac{200}{100}$	$\frac{201}{100}$

- 3 Même activité.

$\frac{137}{100}$	$\frac{209}{100}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{73}{100}$	$\frac{23}{4}$	$\frac{48}{6}$	$\frac{2674}{100}$	$\frac{380}{100}$
-------------------	-------------------	---------------	------------------	----------------	----------------	--------------------	-------------------

- 4 Prends ta règle n° 3 graduée en stylo et $\frac{1}{100}$ de stylo, et trace les segments qui ont ces longueurs :
[AB] : 1,23 stylo [CD] : 1,09 stylo [EF] : 0,76 stylo [GH] : 0,80 stylo [IJ] : 1,40 stylo

- 5 Écris le nombre correspondant à la partie colorée en utilisant le système de la virgule.



1 à 10 Cette séquence a la même structure que la séquence n° 93, consacrée aux seuls dixièmes (voir note de cette sq). Une écriture du type 7,48 est donc interprétée comme synonyme de $7 + 4/10 + 8/100$ et de $7 + 48/100$. Là encore, il est fondamental de lire 7,48 ainsi : « 7 virgule 4 dixièmes et 8 centièmes », ou « 7 virgule

Suite des séquences 95/96 (page 131) :

6 Range ces nombres du plus petit au plus grand.

7	6,08	7,18	6	6,3	13	13,2	19	13,09	14	13,17
2	1,8	2,45	0,92	3	23,7	24	23	23,61	9,85	23,09

7 Compare ces nombres en utilisant les signes $>$, $<$ ou $=$.

$2 + \frac{6}{10} \dots 2,6$ $3 + \frac{4}{10} \dots 3,04$ $5 + \frac{9}{10} \dots 5,90$ $12 + \frac{1}{2} \dots 12,05$

8 Compare ces nombres en utilisant les signes $>$, $<$ ou $=$.

$3,6 \dots 3,60$ $5,68 \dots 5,7$ $19,3 \dots 19,25$ $26,09 \dots 26,14$

9

Quel est le nombre le plus proche de 5 ?	Quel est le nombre le plus proche de 9 ?	Quel est le nombre le plus proche de 15 ?
4,91 ou 5,1	8,86 ou 9,16	14,8 ou 15,17

10 Problèmes

- 1 ▶ Si on partage 130 tablettes de chocolat en 100 parts égales, quelle est la valeur d'une part ?
- 2 ▶ Si on répartit équitablement 11 litres de liquide entre 4 récipients, combien y aura-t-il de litres de liquide dans chaque récipient ?
- 3 ▶ Si on partage équitablement 5 pizzas entre 2 personnes, quelle est la part de chaque personne ?

67

CALCUL MENTAL

Le professeur énonce une fraction simple ou décimale. Les élèves donnent sa partie entière et son rompu. Un élève place ensuite la fraction sur la droite graduée.

Fractions décimales et nombres décimaux

Objectif : se familiariser avec la convention d'écriture des nombres décimaux.

➔ DÉCOUVERTE

Il y a de cela plusieurs siècles, le mathématicien Stevin de Bruges (1548-1620), voyant les commerçants bien ennuyés pour calculer avec les fractions, proposa d'utiliser les fractions décimales et de les écrire plus simplement. Par exemple :

- pour $\frac{23}{10}$, c'est-à-dire $2 + \frac{3}{10}$, il proposa : 2,3

- pour $\frac{352}{100}$, c'est-à-dire $3 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100}$, il proposa : 3,52



C'est ainsi que les nombres décimaux sont nés. Dans l'écriture décimale, une virgule ou un point sépare la partie entière (à gauche) et la partie décimale (à droite).

1 Donne les écritures décimales des fractions : $\frac{34}{10}$, $\frac{23}{100}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{675}{100}$, $\frac{457}{10}$.

2 Es-tu d'accord avec Leïla ?

Explique ta réponse.

À ton tour, trouve l'écriture décimale de $\frac{1}{5}$.

$\frac{1}{2}$ c'est $\frac{5}{10}$, on peut l'écrire 0,5.

$\frac{1}{4}$ c'est $\frac{25}{100}$, c'est donc 0,25.



➔ EXERCICES

1 Pour t'entraîner à ce changement d'écriture, complète le tableau suivant.

	centaines 100	dizaines 10	unités 1	dixièmes $\frac{1}{10}$	centièmes $\frac{1}{100}$
35,4					
		4	0	2	3
12,05					
	1	0	2	0	3

2 Pour chaque fraction, trouve une fraction décimale égale, puis son écriture décimale.

$\frac{3}{2}$

$\frac{9}{2}$

$\frac{25}{2}$

$\frac{3}{5}$

$\frac{21}{5}$

$\frac{3}{4}$

$\frac{7}{4}$

Annexe 9 : Encadré de leçon présent sur la double-page « Passer de l'écriture fractionnaire aux nombres décimaux » du manuel *Outils pour les maths*.

► On peut écrire une **fraction décimale** sous la forme d'un nombre à virgule : c'est un **nombre décimal**.

$\frac{12}{10} = \frac{10}{10} + \frac{2}{10} = 1 + \frac{2}{10} = 1,2$ $\frac{128}{100} = \frac{100}{100} + \frac{20}{100} + \frac{8}{100} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{8}{100} = 1,28$

Fraction décimale	Partie entière		Partie décimale		Nombre décimal
	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	
$\frac{12}{10}$		1	2		1,2
$\frac{128}{100}$		1	2	8	1,28

La virgule sépare la partie entière et la partie décimale du nombre.

► À l'inverse, on peut écrire une fraction décimale à partir d'un nombre décimal.
 Ex. : $8,37 = 8 + 0,3 + 0,07 = 8 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} = \frac{837}{100}$

Annexe 10 : Encadrés de leçon des séquences 93/94 et 95/96 du manuel *J'apprends les maths*.

→ Séquences 93/94 : « Écritures décimales : les dixièmes »

J'ai appris 13,6 signifie $13 + \frac{6}{10}$ ou $\frac{136}{10}$.

Sur les machines, la virgule est souvent remplacée par un point.
Ce nombre s'appelle un nombre **décimal**.
Le chiffre à droite de la virgule désigne les dixièmes.
13,6 se dit « **treize virgule six dixièmes** ».

→ Séquences 95/96 : « Écritures décimales : dixièmes et centièmes »

J'ai appris 23,67 signifie $23 + \frac{6}{10} + \frac{7}{100}$ ou $23 + \frac{67}{100}$ ou $\frac{2367}{100}$.

Le premier chiffre après la virgule désigne les dixièmes.
Le second chiffre après la virgule désigne les centièmes.

- 23,67 se dit « **vingt-trois virgule six dixièmes et sept centièmes** »
ou « **vingt-trois virgule soixante-sept centièmes** ».
- 3,07 se dit « **trois virgule sept centièmes** ».

Annexe 11 : Pages 156 et 167 du mémento du manuel *La tribu des maths*.

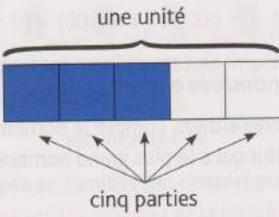
Les éléments évoqués dans l'analyse en lien avec ces deux pages du mémento sont encadrés en rouge ci-dessous :

Nombres et calcul

2 Connaître et utiliser les nombres décimaux et les fractions

Présentation des fractions

- Cette unité est partagée en cinq parties égales :



une unité

cinq parties

On en choisit trois (celles qui sont coloriées). Pour traduire ce dessin sous forme de fraction, il faut écrire :

$$\frac{\text{nombre de parties choisies}}{\text{nombre total de parties}} \text{ soit } \frac{3}{5}$$

- Pour lire une fraction, commence par le **numérateur** (le nombre au-dessus de la barre de fraction), puis lis le **dénominateur** (nombre en dessous de la barre de fraction).

$\frac{3}{5}$ se lit « 3 sur 5 ».

On peut aussi lire « trois cinquièmes », car il existe des mots particuliers pour désigner certains nombres quand ils sont au dénominateur.

Nombre au dénominateur	Se lit ou se prononce
2	demi
3	tiers
4	quart
5	cinquième
6	sixième
7	septième
8	huitième
9	neuvième
10	dixième
100	centième



Les fractions dont le dénominateur est 10, 100 ou 1 000 s'appellent des **fractions décimales**.

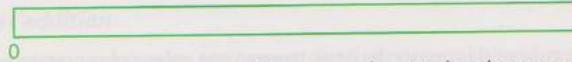
- Le numérateur peut être plus grand que le dénominateur, comme $\frac{5}{3}$ (qui se lit « cinq tiers »).

Dire et écrire des nombres décimaux

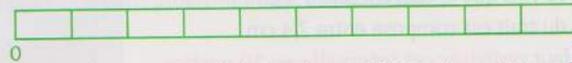
- Il existe plusieurs sortes de nombres : les **nombres entiers**, les **fractions**, les **nombres décimaux** (ou nombres à virgule).

156 cent cinquante-six

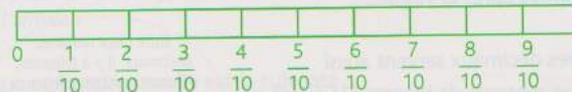
- Supposons que tu veuilles partager cette bande de papier en 10 parties égales :



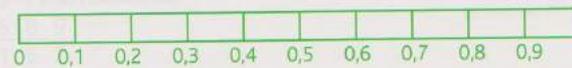
Si tu veux maintenant mesurer un petit morceau de cette bande, tu ne peux pas utiliser les nombres entiers, car la longueur sera comprise entre 0 et 1.



Mais tu peux dire qu'un morceau de la bande est 10 fois plus petit que la bande complète et utiliser les fractions :



Grâce aux nombres décimaux, tu peux écrire la mesure d'un morceau de bande en utilisant des nombres à virgules :



- Pour bien comprendre la valeur de chaque chiffre dans un nombre décimal, tu peux utiliser un tableau comme celui-ci (c'est un abaque décimal) :

Milliers (1 000)	Centaines (100)	Dizaines (10)	Unités (1)	Dixièmes (1/10)	Centièmes (1/100)	Millièmes (1/1 000)
2	1	5	7	8	3	4

Le nombre écrit dans ce tableau se lit « 2 mille 157 virgule 834 ».

On l'écrit **en chiffres** : 2 157,834.

On l'écrit **en lettres** : deux mille cent cinquante-sept virgule huit cent trente-quatre.

8 représente le chiffre des dixièmes (premier chiffre après la virgule).

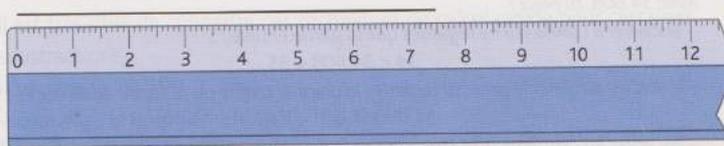
3 représente le chiffre des centièmes (deuxième chiffre après la virgule).

4 représente le chiffre des millièmes (troisième chiffre après la virgule).

- Un nombre décimal est constitué de deux parties (15,67) :
 - une partie entière (ici, c'est 15) ;
 - une partie décimale (ici, c'est 67).

Utiliser un nombre décimal pour mesurer

- Lorsque tu utilises ta règle graduée pour mesurer, il arrive que tu ne trouves pas un nombre entier.



Ici, tu vois que le trait mesure entre 7 cm et 8 cm.

■ Fractions décimales et nombres décimaux

- On peut écrire les fractions décimales sous la forme de nombres décimaux.

100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\ 000}$
centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
		4	,	8	6

$$\frac{486}{100} = 4 + \frac{86}{100} = 4 + \frac{8}{10} + \frac{6}{100} = 4,86$$

Dans 4,86 : 4 est la partie entière ; 0,86 est la partie décimale (c'est le rompu).

- **On lit** : « quatre unités et quatre-vingt-six centièmes »
ou : « quatre virgule quatre-vingt-six centièmes ».

La **virgule** sépare les unités des dixièmes.

N'oublie pas que : $\frac{1}{10}$ c'est 0,1 et $\frac{1}{100}$ c'est 0,01

- On peut écrire un nombre décimal de différentes façons.

Exemple :

$$65,27 = \frac{6\ 527}{100} = 65 + \frac{2}{10} + \frac{7}{100} = 65 + 0,2 + 0,07 = (6 \times 10) + (5 \times 1) + (2 \times 0,1) + (7 \times 0,01)$$

- **Entre deux nombres décimaux, on peut toujours en trouver un troisième...**

et même beaucoup plus !

Exemple : entre 3,5 et 3,6 on peut trouver 3,51 ; on peut trouver aussi 3,524 ; etc.