



HAL
open science

La soustraction au cycle 2 - CE2 : la propriété de conservation des écarts dans l'enseignement de la technique usuelle de la soustraction

Caroline Syryn

► To cite this version:

Caroline Syryn. La soustraction au cycle 2 - CE2 : la propriété de conservation des écarts dans l'enseignement de la technique usuelle de la soustraction. Education. 2017. dumas-02430947

HAL Id: dumas-02430947

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-02430947>

Submitted on 7 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

MEMOIRE

Didactique des Mathématiques

La soustraction au cycle 2 - CE2

La propriété de conservation des écarts
dans l'enseignement de la technique
usuelle de la soustraction

Caroline SYRYN

*Master des Métiers de
l'enseignement du premier
degré, 2e année - 2017*

REMERCIEMENTS

Depuis les années collège, et plus particulièrement depuis mon passage en troisième, je me suis sentie en difficultés dans la discipline scolaire des mathématiques. Lorsque j'ai décidé de passer le concours de recrutement de professeurs des écoles, j'ai choisi l'option de didactique des mathématiques à la fois dans la volonté de compléter mes révisions et de me défier moi-même. En effet, être capable de présenter un mémoire en didactique des mathématiques était aussi pour moi une façon de me sentir beaucoup moins démunie dans son enseignement pour ma future pratique professionnelle.

Surtout, et en premier lieu, je tiens à remercier ma directrice de mémoire, Zoé Mesnil, qui a su me guider, m'accompagner, me conseiller et m'encourager pendant la rédaction de ce mémoire. Elle a fait preuve d'une grande bienveillance et de beaucoup de professionnalisme, m'offrant ainsi un suivi et un soutien rassurant tout au long des ces deux années de master.

Je remercie en second lieu l'enseignante qui a accepté de mener mon expérimentation dans sa classe de CE2, Johanna Pacheco. Elle est enseignante fonctionnaire stagiaire tout comme moi alors je ne sais que mieux à quel point il est difficile pour une débutante de prendre du recul sur ses pratiques encore hésitantes et titubantes et d'ouvrir sa classe à d'autres personnes. Merci alors à elle d'avoir effectué les enregistrements vocaux durant les séances d'expérimentation, qui sont les données de mes analyses.

J'ai parfois vécu cette rédaction comme un exercice difficile et fastidieux, surtout lors des dernières lignes, mais je peux désormais dire que je suis fière d'avoir été jusqu'au bout, le tout dans la volonté de produire un mémoire à la fois cohérent et pertinent.

Je vous souhaite alors une bonne lecture.

SOMMAIRE

Introduction : d'un questionnement naïf à un questionnement expert.....p.5

PREMIERE PARTIE : PARTIE THEORIQUE

| | |
|---|-------------|
| I. Enseignement de la soustraction à l'école élémentaire..... | p.9 |
| 1) <u>Programmes et documents d'accompagnement.....</u> | p.9 |
| 2) <u>Deux techniques enseignées au CE1.....</u> | p.11 |
| <i>a. les aspects de la numération mis en jeu dans les techniques enseignées aux CE1: aspect positionnel et aspect décimal.....</i> | p.11 |
| <i>b. la technique par emprunt.....</i> | p.13 |
| <i>c. la technique usuelle.....</i> | p.15 |
| 3) <u>Les techniques opératoires de la soustraction dans les manuels de CE1 et de CE2.....</u> | p.16 |
| II. Apprentissage d'une technique opératoire de la soustraction..... | p.18 |
| 1) <u>Le champ conceptuel des structures additives.....</u> | p.18 |
| 2) <u>Un exemple de progression pour l'apprentissage de la soustraction.....</u> | p.19 |
| 3) <u>L'approche instrumentale.....</u> | p.22 |
| 4) <u>Utilisation d'un artefact pour accéder à la signification des écarts : la règle cassée.....</u> | p.24 |
| III.Problématique : Vers une hypothèse d'expérimentation représentant la conservation des écarts par le biais d'un artefact..... | p.27 |

DEUXIEME PARTIE : PARTIE EXPERIMENTALE

| | |
|--|------|
| I. Présentation de la méthodologie | p.30 |
| 1) <u>Recueils des données</u> | p.31 |
| 2) <u>Test diagnostique</u> | p.32 |
| a. <i>Analyse a priori</i> | p.32 |
| b. <i>Résultats</i> | p.34 |
| 3) <u>Séquence d'expérimentation sur la propriété de conservation des écarts</u> | p.37 |
| a. <i>Analyse a priori des trois séances</i> | p.37 |
| b. <i>Analyse du déroulement des trois séances</i> | p.46 |
| 4) <u>Test final</u> | p.54 |
| a. <i>Analyse a priori</i> | p.54 |
| b. <i>Résultats</i> | p.55 |
| 5) <u>Analyse globale de l'expérimentation</u> | p.57 |
| <i>Conclusion</i> | p.60 |
| ANNEXES | p.62 |
| BIBLIOGRAPHIE | p.72 |

Introduction : d'un questionnement naïf à un questionnement expert

Lors de l'une des premières séances de didactique des mathématiques dispensées à l'ESPE de Bonneuil-sur-Marne, l'intervenante avait rapidement passé en revue les différentes méthodes de soustraction enseignées à l'école primaire, leurs techniques opératoires propres et sur quelles propriétés chaque technique se base. Nous avons donc énuméré ensemble à la suite: la méthode par emprunt (dénommée également la méthode anglaise), l'addition à trou et la méthode par compensation (dite également méthode de conservation des écarts ou usuelle). Je n'avais pas souvenir de m'être vue enseigner la méthode de soustraction par emprunt à l'école primaire, je me souvenais de l'addition à trou et très bien de l'application de la méthode par conservation des écarts, que j'utilisais et utilise toujours fréquemment. Toutes les techniques opératoires de ces soustractions ont été explicitées une à une et c'est à ce moment là que je me suis rendue compte que mes connaissances concernant la méthode par conservation des écarts, que je mettais en pratique depuis 15 ans, étaient très lacunaires.

Cette méthode, je l'avais très bien automatisée, grâce à la formule connue " je pose 1 ici, je retiens 1 là " faisant office de mode d'emploi. En effet, je ne savais même plus pourquoi je posais la retenue et ce qu'elle pouvait bien représenter lors des calculs de différence. L'avais-je déjà su ? Je ne crois pas.

Je pense n'avoir jamais assimilé à l'école primaire que lorsqu'on pose une soustraction en suivant la méthode par compensation, si l'on ajoute 10 unités au rang des unités du diminuende puis une dizaine au rang des dizaines du diminueur, c'est pour équilibrer la distance entre les deux termes lors de transformation soustractive. Grâce aux explications de l'intervenante, j'ai compris que cette méthode repose essentiellement sur la propriété des écarts et que la retenue est utilisée pour faciliter et visualiser le calcul mais qu'en soit, elle n'est pas une étape obligatoire par laquelle passer pour obtenir la différence. En effet, la retenue représente l'échange décimal effectué entre les unités des rangs du tableau de numération, un échange selon lequel 10 unités d'un certain rang sont égales à une unité du rang supérieur.

Je me suis alors interrogée par rapport à l'enseignement de cette méthode et penchée sur le fait qu'elle est celle majoritairement enseignée en France alors qu'elle induit plus de difficultés de compréhension que la méthode par emprunt, notamment avec la propriété des écarts, qui n'est pas mentionnée dans les programmes, et pour laquelle on peut se demander s'il y a un enseignement explicite. En poussant mes interrogations, je suis revenue à la retenue, persuadée que mon automatisme dénué de la conscience de son sens est bien loin d'être

personnel mais qu'il doit être un problème en général avec la compréhension et la maîtrise de la méthode usuelle à l'école primaire. Il semble normal qu'en automatisant une technique on oublie ce qui la justifie, mais le fait que peu d'adultes mobilisent cette propriété est un indice de sa difficulté (ce qui a été flagrant lorsque j'ai moi-même sondé mon entourage). Dans les nouveaux programmes pour l'école primaire de 2008 (MEN, 2008), j'ai distingué la soustraction et ai remarqué que sa place et l'évolution de son enseignement n'est pas vraiment modifiée dans les nouveaux programmes de 2015, cette constatation m'a aidé à cerner les enjeux de son enseignement et de présenter plus en détails l'opération au centre de mes interpellations.

La soustraction est une opération dont le sens est difficile à acquérir. C'est pourquoi il est conseillé de ne pas aborder son enseignement de façon isolée mais de mettre en place progressivement une reconnaissance de tous les types de situations nécessitant une soustraction pour les résoudre. Cela facilitera le développement des compétences des élèves dans la résolution des problèmes additifs et soustractifs. Cette mise en place progressive de situations est possible grâce aux connaissances, capacités et attitudes des élèves concernant la numération et l'addition. En se référant à la classification des problèmes additifs de Vergnaud (Vergnaud, 1989), les situations présentées à l'école primaire qu'une soustraction permet de modéliser de façon experte sont de l'ordre suivant: recherche de l'état initial dans un problème de transformation positive d'un état, recherche de l'état final dans un problème de transformation négative d'un état, recherche d'une partie dans un problème de composition d'états, recherche de la transformation dans un problème de transformation positive ou négative d'un état, recherche de l'un des deux états ou recherche de la comparaison dans un problème de comparaison d'états. C'est le rôle de l'enseignant d'amener les élèves à résoudre ces situations en utilisant une soustraction, ce qu'il fait en jouant sur les variables didactiques de ces situations, et en donnant l'outil que sont les techniques opératoires.

Les techniques opératoires relèvent du calcul posé, elles sont des algorithmes, suite d'instructions à appliquer pour aboutir au résultat recherché par la situation. Il faut néanmoins prendre garde à ne pas confondre technique opératoire et sens de l'opération, chaque technique reposant sur des propriétés différentes. L'ensemble de ces situations vont permettre une construction du sens, de la conceptualisation de la soustraction chez les élèves et lorsque les nombres mis en jeu dans ces situations seront suffisamment grands pour rendre difficile le calcul mental ou réfléchi alors la nécessité de l'apprentissage des techniques opératoires se fera ressentir et la technique de soustraction usuelle entrera en jeu. Ce qui me permet

maintenant d'en revenir désormais à la technique de la soustraction posée usuelle.

Elle est premièrement introduite au cours préparatoire, en effet, il est demandé aux élèves de savoir calculer mentalement des sommes et des différences, puis en ligne pour introduire les techniques opératoires posées de la soustraction sur les nombres inférieurs à 100. La soustraction est ensuite développée principalement au CE1 car son apprentissage est difficile et doit donc être étalé sur le temps. C'est seulement au CE2 que la méthode usuelle est abordée car, à la différence des autres méthodes, son processus est plus difficilement « visualisable » par la manipulation. C'est pourquoi les programmes ne préconisent ce passage qu'en CE2 après que la construction du sens ait bien été assurée par une progression associant technique et manipulation.

L'apprentissage d'une technique opératoire de la soustraction est plus laborieux que celui de l'addition, car il existe plusieurs techniques possibles basées sur des propriétés ne reposant pas sur les mêmes principes ni, par conséquent, sur les mêmes connaissances. De plus, les connaissances qui permettent de justifier ces techniques sont plus nombreuses et plus complexes que dans le cas de l'addition. La difficulté principale que rencontreront les élèves réside dans le cas où certains chiffres du nombre du diminuende ont moins de valeur que ceux du diminueur, la gestion de la retenue étant un concept demandant un important travail d'abstraction.

Cette multiplicité de raisons justifie largement le fait que les programmes envisagent l'apprentissage complet d'une technique opératoire seulement au cycle 3, ce qui demande un travail en amont effectué au cycle 2 grâce à du calcul mental et réfléchi. Il faudra donc justifier l'enseignement de chacune des techniques opératoires. La technique usuelle repose d'une part sur l'aspect décimal de la numération, puisqu'elle fait appel à des équivalences entre 10 unités d'un rang et 1 unité du rang d'ordre supérieur, et d'autre part sur l'invariance d'une différence par ajout simultané d'un même nombre aux deux termes de la soustraction. Cette propriété, appelée propriété des écarts, est maîtrisée tardivement par les élèves. Elle peut être formalisée par : $a - b = (a + c) - (b + c)$, cette formalisation étant complètement inadaptée aux élèves.

De plus, selon le document d'application des programmes de 2008 (MEN, 2008), il est reconnu qu'à la rentrée en 6ème, le calcul d'une soustraction posée fait difficulté pour environ un élève sur cinq ($1\ 285 - 625$ et $937 - 46$, posées en ligne). L'erreur la plus fréquente reste celle qui consiste à soustraire pour chaque chiffre, « le plus grand au plus petit ». Pour finir, selon les programmes (2015), l'enseignement du calcul mental est primordial à l'école

primaire : « automatisé ou réfléchi, le calcul mental doit occuper la place principale à l'école élémentaire et faire l'objet d'une pratique régulière dès le cycle 2 » (p.73).

Il existe donc une vraie problématique par rapport à l'enseignement de la méthode de soustraction usuelle et je choisis alors de développer un questionnaire autour de l'enseignement de cette méthode ayant pour objet principal la justification de la retenue.

Mon questionnaire s'articule autour de deux axes qui sont les suivants:

- Comment introduire chez les élèves la soustraction par méthode de conservation des écarts?
- Comment donner assez de sens à cette méthode pour que les élèves n'appliquent pas seulement «l'automatisme» des retenues lorsqu'ils l'utilisent?

PREMIERE PARTIE : PARTIE THEORIQUE

I. Enseignement de la soustraction à l'école élémentaire

1) Programmes et documents d'accompagnement

Afin de cadrer la recherche sur l'enseignement de la soustraction au cycle 2, un retour aux programmes et aux documents d'application semble primordial. En effet, quand est-ce que la soustraction entre en compte dans les programmes scolaires ? Quelles sont les exigences relatives à la soustraction mais surtout comment le choix de la technique opératoire est-il pris : est-ce le choix de l'enseignant ou une contrainte imposée par les textes officiels ?

La soustraction est introduite dès le CP pour la résolution de problèmes. Au CE1, les élèves apprennent une technique posée de la soustraction afin de consolider sa maîtrise au CE2. En lisant les programmes, je me suis rendue compte qu'ils ne définissaient pas une technique opératoire particulière pour l'apprentissage de la soustraction. Par exemple, les programmes de 2015 disent que « Les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication, division) sont étudiées à partir de problèmes qui contribuent à leur donner du sens, en particulier des problèmes portant sur des grandeurs ou sur leurs mesures », (MEN, 2015, p.73). Les progressions de 2008 (MEN, 2008) sont encore une base pouvant être exploitées pour l'enseignement de soustraction. Pour le cycle 2 (en CP et CE1), on parle d'apprentissage de la technique opératoire de la soustraction sans imposer une technique particulière. L'objectif étant d'utiliser les opérations pour calculer mentalement mais aussi pour effectuer un calcul posé relevant de l'addition, la soustraction et la multiplication dans la résolution de problèmes. Pour le cycle 3, on demande à ce que les élèves soient en mesure de maîtriser une technique opératoire pour chacune des opérations sans pour autant imposer une méthode par opération. Le choix de l'une des techniques conditionne donc des étapes dans les apprentissages des élèves, dans la mesure où les connaissances et les compétences préalables qu'ils doivent maîtriser varient d'une technique à l'autre. Les seules connaissances communes concernent les équivalences entre unités, dizaines, centaines... et une maîtrise suffisante des résultats des tables d'addition (compléments et différences). Si le choix de l'enseignant se porte sur la technique par emprunt, la mise en place peut commencer plus tôt que pour la technique usuelle qui nécessite un travail préparatoire plus important et plus complexe.

Retour sur les programmes : Progressions 2008

| Concernant explicitement la technique opératoire de la soustraction : | | Compétence en lien avec la soustraction : |
|---|---|--|
| CP | Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et commencer à utiliser celles de la soustraction (sur des nombres inférieurs à 100) | - Calcul en ligne des différences, des opérations à trous ; - Résoudre des problèmes simples à 1 opération. |
| CE1 | Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction (sur des nombres inférieurs à 1000) | - Connaître et utiliser des procédures de calcul mental pour calculer des différences ; - Calculer en ligne des suites d'opérations ; - Résoudre des problèmes relevant de l'addition, la soustraction, la multiplication. |
| CE2 | Effectuer un calcul posé : addition, soustraction et multiplication | - Calculer mentalement des différences ; - Résoudre des problèmes relevant des 4 opérations |
| CM1 | Effectuer un calcul posé : addition et soustraction de deux nombres décimaux | - Estimer mentalement un ordre de grandeur du résultat ; - Division euclidienne de deux entiers et divisions décimale de deux entiers |
| CM2 | Effectuer un calcul posé : addition, soustraction , multiplication de deux nombres entiers ou décimaux. | - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux ; - Division d'un décimal par un entier |

D'après les programmes applicables en septembre 2016 (MEN, 2015), le choix des techniques soustractives à enseigner est laissé aux équipes d'école et doit être suivi au cycle 3. Cela rejoint le document ressource pour l'école élémentaire de progressions mathématiques pour les cycles 2 et 3 d'Eduscol, (2012) et mis à disposition de l'enseignant pour faire la classe « il est essentiel de fixer une technique de calcul et de s'y tenir durablement ». En ce qui concerne la soustraction, ce document présente trois techniques : la méthode anglo-saxonne, la technique de l'addition à trous et la technique traditionnelle française.

| Paquets de dix | Tout seul | Paquets de dix | Tout seul | Paquets de dix | Tout seul | Paquets de dix | Tout seul |
|--|-----------------|--|-----------|---------------------------------|-----------|--|-----------------|
| $\overline{16}$ | $\overline{14}$ | 7 | 4 | 7 | 4 | 7 | $\overline{14}$ |
| $\underline{-3}$ | 6 | 1 | | $\underline{-1}$ | | $\underline{-3}$ | 6 |
| 3 | 8 | +3 | 6 | 3 | 6 | 1 | |
| | | 3 | 8 | 3 | 8 | 3 | 8 |
| Technique anglo-saxonne de droite à gauche (transformation du premier terme) | | Disposition intermédiaire de l'addition à trous (issue de la technique traditionnelle de l'addition) | | Technique de l'addition à trous | | Technique traditionnelle française avec retenue (différences égales) | |

Exemple de dispositions de calculs posés de la soustraction

Le document d'accompagnement (2002) sur le calcul posé à l'école élémentaire, n'impose pas non plus une technique plus qu'une autre. Le fait que la soustraction repose sur de multiples connaissances justifie que la technique par conservation des écarts soit repoussée au CE2 même si elle peut être introduite dès le CE1.

Je peux alors affirmer que **le choix de la technique revient donc à l'enseignant**. Il est cependant probable que les élèves arrivent en CE2 avec des techniques différentes, il est donc important de respecter ces techniques et de montrer qu'elles permettent d'obtenir le même résultat. Les élèves peuvent utiliser la procédure de leur choix en fonction de ce qu'ils maîtrisent mais également la procédure avec laquelle ils se sentent le plus à l'aise. Les élèves doivent également comprendre les différentes étapes du calcul posé en ayant recours par exemple à du matériel de numération qui permet d'illustrer la technique et donc de mieux à la comprendre, se représenter le problème par un schéma, passer par une addition à trou...

Nous allons maintenant voir les deux techniques de soustraction les plus enseignées en CE1 en soulignant les connaissances mises en jeu dans ces techniques opératoires.

2) Deux techniques enseignées au CE1

a. *les aspects de la numération mis en jeu dans les techniques enseignées aux CE1 : aspect positionnel et aspect décimal*

Certaines techniques opératoires de la soustraction présentées précédemment ont le point commun de se baser sur les aspects décimal et positionnel de notre système de

numération. Les programmes soulignent d'ailleurs ce rapport numération/techniques opératoires. Notre numération est régie par un système positionnel et décimal. Il est primordial de prendre en compte ces deux aspects pour la mise en œuvre de la soustraction, notamment pour la technique par conservation des écarts, reposant sur les échanges entre les rangs du tableau de numération.

- **L'aspect positionnel de la numération**

Par le biais de l'article de Frédérick Tempier sur la numération décimale au CE2 (Tempier, 2010), nous étudions la production d'un élève de CE2 en résultat à un exercice donné :

Nous remarquons que l'élève comprend par lui-même qu'il existe bien un lien entre le nombre d'unité de chaque ordre du tableau de numération (unités, dizaines, centaines) et les chiffres qui composent le nombre mais le fait qu'il écrive que 7 unités + 2 dizaines + 4 centaines = 724 montre qu'il n'a pas compris la nature de ce lien, c'est-à-dire l'aspect positionnel de notre numération.

Le système de numération décimal est positionnel, ce qui signifie que la position des chiffres dans l'écriture du nombre détermine leur valeur et ainsi, dans l'écriture d'un nombre, la valeur des chiffres dépend de leur position. L'aspect positionnel intervient aussi pour placer correctement les nombres l'un par rapport à l'autre.

Par exemple: 4356 c'est 4 milliers, 3 centaines, 5 dizaines et 6 unités, ce qui donne dans le tableau de numération suivant :

| Classe des mille | Classe des centaines | Classe des dizaines | Classe des unités |
|------------------|----------------------|---------------------|-------------------|
| 4 | 3 | 5 | 6 |

(Le 0 sert à marquer un rang quand il n'y a pas d'unités de ce rang).

- **L'aspect décimal de la numération**

Dans la suite de son article, Frédérick Tempier demande ensuite à un élève de CE2 de compléter l'énoncé suivant : "Complète 5 centaines + 12 dizaines + 3 unités = ...". Alors que cet élève semblait avoir assimilé l'aspect positionnel de la numération en ayant répondu correctement aux énoncés dont les unités de chaque rang ne dépassaient pas 9, il rencontre maintenant des problèmes et inscrit 515 en réponse, (la réponse correcte étant 623). En effet,

l'élève a été perturbé par le nombre de dizaines et n'a pas appliqué la propriété d'échange entre les unités de la numération décimale selon laquelle "10 unités d'un certain rang sont égales à une unité du rang supérieur".

Pour évoquer cette propriété avec les élèves, on parle de "groupement, de paquets de 10 et d'échanges" et on manipule avec eux du matériel de numération pour les aider à assimiler cette notion. Cette relation est loin d'être évidente pour eux car en voyant des nombres écrits, des élèves ne sont pas encore assez entraînés pour interpréter simultanément leurs aspects positionnel et décimal.

L'un des principaux enjeux dans l'apprentissage du système de numération décimal avec les élèves est donc de leur faire comprendre tout ce que « cache » l'écriture des nombres en chiffres.

L'aspect positionnel est important dans l'organisation spatiale du calcul posé, particulièrement avec le respect des rangs du tableau de numération en colonnes. Mais c'est surtout l'aspect décimal de la numération qui intervient, particulièrement dans différentes techniques opératoires : notamment les soustractions posées par emprunt et usuelle qui reposent toutes deux sur l'aspect décimal de la numération et sur les égalités entre 1 dizaine et 10 unités, 1 centaine et 10 dizaines...etc. Concernant la technique usuelle, l'aspect décimal se matérialise avec « la retenue » qui représente les échanges entre les unités des différents rangs du tableau de numération alors que la technique par emprunt, quant à elle, se matérialise par le fait de barrer pour signifier qu'on prend une unité d'un certain rang. Nous présenterons ici, plus en détails ces deux techniques opératoires de la soustraction retenues : la méthode par emprunt et la méthode par conservation des écarts

b. la technique par emprunt

La soustraction par emprunt ou méthode anglo-saxonne est une technique opératoire enseignée au CE1. Cette technique n'est pas connue de tous puisque celle qui reste dans l'usage en France est la méthode par conservation des écarts. La technique standard de la soustraction est une technique difficile à acquérir pour les élèves et nécessite des connaissances particulières sur les nombres et les propriétés qui la justifient. C'est pour cela que certains enseignants font le choix d'introduire la technique par emprunt au CE1 puis la technique par conservation des écarts en CE2.

Cette technique a pour avantage d'être facilement compréhensible dans son application et

facilement représentable par sa procédure (on emprunte une dizaine qui est également représentable avec du matériel). Prenons pour exemple 63-25. On ne peut pas effectuer 3 - 5 donc on emprunte une dizaine aux six dizaines présentes dans le premier nombre. On laisse ainsi cinq dizaines dans la colonne des dizaines. On a ainsi 13 - 5 = 8 pour la colonne des unités. On effectue ensuite les cinq dizaines restantes moins les deux on obtient ainsi trois dizaines. Le résultat est 38.

$$\begin{array}{r} 5 \ 6 \ 13 \\ - \ 2 \ 5 \\ \hline 3 \ 8 \end{array}$$

Le fait de casser une dizaine est plus facilement visualisable par les élèves, la manipulation et le sens sont plus concrets que la méthode usuelle avec les retenues : ici on emprunte une dizaine aux dizaines déjà présentes. L'inconvénient de cette méthode est cependant la présence de zéro intermédiaires dans le nombre ainsi que la taille de ce dernier. Ainsi, la technique demande une manipulation plus importante avec les nombres à trois chiffres et avec des zéros. Prenons l'exemple suivant : 1004 - 215

On ne peut pas emprunter de dizaines-: on va chercher le premier rang dont le chiffre est non nul après la dizaine. Ici il faut aller jusqu'au millier, puis compter combien il y a de dizaines (ici 100). Si on emprunte une dizaine, il en reste 99. Il faut donc écrire 9 aux centaines et un 9 aux dizaines. On a donc ici :

$$\begin{array}{r} 0 \ 1 \ 9 \ 9 \ 9 \ 1 \ 4 \\ - \ 2 \ 1 \ 5 \\ \hline 7 \ 8 \ 9 \end{array}$$

Ce raisonnement peut s'avérer complexe pour les élèves car il fait intervenir les unités de tous les rangs de la dizaine au millier alors que la technique française le sera moins puisque la procédure reste la même et ne fait intervenir que les unités éventuellement de deux rangs successifs, quels que soient les nombres en jeu.

Enfin, la représentation de la soustraction est particulière puisque des nombres barrés y sont représentés : les étapes de calculs sont denses. Il faut réfléchir à l'emprunt et donc barrer le nombre emprunté, réécrire sa valeur puis ajouter cet emprunt. Les manipulations sont nombreuses surtout lorsque le nombre comporte des zéros même si certains élèves arrivent à

faire ces manipulations de façon assez habile. De même que la méthode usuelle, avec cet emprunt, on retrouve deux chiffres dans la colonne des unités ce qui peut être difficile à expliquer aux élèves. Certains enseignants semblent privilégier cette technique pour introduire la soustraction à des élèves de CE1. Les connaissances sur le nombre sont approfondies et le principe de la soustraction assimilé par les élèves. Les enseignants qui choisissent de commencer par cette technique font sans doute l'hypothèse que cela permettra de mieux appréhender la soustraction au CE2 : la technique usuelle de la soustraction qui reste dans l'usage en France.

c. la technique usuelle

Egalement nommée technique par compensation, ou encore, technique par conservation des écarts, elle repose sur l'invariance d'une différence par ajout simultané d'un même nombre aux deux termes de la soustraction. Prenons l'exemple de $324 - 167$, les étapes de cette technique opératoire se déclinent ainsi:

Je remarque que de 4 unités, il est impossible d'en enlever 7 mais je sais qu'il est possible de les enlever à 14. J'ajoute donc 10 unités à 324 (sous la forme du chiffre 1 placé à gauche du chiffre 4). Pour compenser, conserver le même écart entre les deux termes de la soustraction et ainsi rééquilibrer mon calcul, j'ajoute également 10 au nombre 167 (sous la forme du chiffre 1 placé à droite du chiffre 6). J'obtiens $14 - 7 = 7$ puis je réitère le même processus pour le calcul de différence suivant, à savoir $2 - 6$ car 2 est plus petit que 6, tout en prenant bien en compte le fait que j'ai ajouté au préalable une unité de dizaine à 6, dans le rang des dizaines : je dois donc calculer $2 - 7$ (j'ai d'abord du ajouter la dizaine puis je me suis rendue compte que le chiffre du bas était plus grand) . J'ajoute donc de nouveau 10 dizaines à 324 (sous la forme du chiffre 1 placé à gauche du chiffre 2 des dizaines) et pour compenser, j'ajoute également 10 dizaines au nombre 167 (sous la forme du chiffre 1 placé à droite du chiffre 1 des centaines), ce qui donne : $12 - 7 = 5$. Il ne me reste plus qu'à calculer $3 - 2$ car je prends en compte la dizaine ajoutée précédemment, j'obtiens donc le résultat : 1.

$$\begin{array}{r} 3 \ 12 \ 14 \\ - 11 \ 61 \ 7 \\ \hline = 1 \ 5 \ 7 \end{array}$$

Le calcul d'origine était $324 - 167$, il est ensuite devenu $334 - 177$ puis $434 - 277$: un écart de 157 étant toujours respecté entre les deux termes de la soustraction.

Cette technique fait appel aux équivalences liées à la numération décimale, entre 10 unités et 1 dizaine, 10 dizaines et 1 centaine etc. Elle semble être la plus usuelle en France alors qu'il s'agit de la plus difficile, parce qu'elle repose sur une propriété que les élèves maîtrisent tardivement et qui peut être formalisée par: $a - b = (a + c) - (b + c)$, quels que soient les nombres a , b , et c : formulation complètement inadaptée pour des élèves de CE1 et CE2. De plus, son mécanisme matérialisé par le chiffre 1 peut être mal interprété pour les apprenants. En effet, le chiffre 1 placé devant le 4 doit être interprété comme formant avec lui le nombre 14 et celui placé derrière le 6 doit être interprété comme un élément d'une somme : on doit lire $1 + 6$ et non 61 : une même notation pour désigner deux choses différentes peut amener à une confusion, il est alors généralement conseillé de faire écrire aux élèves $+ 1$ lorsqu'ils appliquent cette méthode, afin d'éviter une méprise.

L'enseignement de cette technique opératoire présente donc de multiples enjeux didactiques.

Maintenant que ces deux techniques et les enjeux de leur enseignement ont été exposés, il est pertinent de se pencher sur l'étude de manuels CE1/CE2 qui pourraient guider les enseignants sur leurs pratiques.

3) Les techniques opératoires de la soustraction dans les manuels de CE1 et de CE2

Pour cette partie, je me suis appuyée sur le travail de Sonia Madani, avec qui j'avais collaboré sur la note de recherche rendue en première année de master. En effet, Sonia avait choisi d'étudier les partis pris par les manuels par rapport aux techniques soustractives enseignées en CE1. Elle avait remarqué que les manuels scolaires ne présentent pas tous la même méthode, et ne donnent pas de conseils sur celle à enseigner : cela confirme bien que c'est à l'enseignant de se fixer une technique opératoire de la soustraction, de s'y tenir et d'utiliser les supports adaptés à l'enseignement de cette méthode. Les manuels étudiés sont issus des niveaux CE1/CE2. Les grilles d'analyses quantitatives et qualitatives élaborées par Sonia se trouvent en annexes. Ces analyses m'ont notamment permis de notifier que les manuels ne proposent pas tous la même technique opératoire de la soustraction qui peut être par emprunt ou par conservation des écarts. De façon plus spécifique, la soustraction par

conservation des écarts est introduite par une droite graduée avec la notion d'écarts et de « a pour aller à b » en passant par l'addition à trou. Les calculs sont d'abord présentés en ligne puis en colonne sans retenues. A partir de la troisième période, les élèves commencent à rencontrer des problèmes soustractifs où l'opération nécessite la manipulation de retenues. Le manuel introduit alors la méthode « j'ajoute dix unités au nombre du haut et une dizaine en bas ». L'introduction de la technique opératoire de la soustraction se fait progressivement. L'utilisation de la droite graduée permet d'introduire le terme « moins » et la notion d'écart (pour calculer $a-b$ il faut repérer a sur la droite et reculer jusqu'à b). Par la suite, les élèves vont être amenés à se libérer de la droite graduée pour effectuer les calculs en colonne avec retenues. La soustraction va être faite en parallèle de l'addition à trou pour montrer que les deux sont liées et qu'elles aboutissent au même résultat.

Un problème est ensuite posé aux élèves avec trois solutions de réponses possibles : le calcul de tête, l'addition à trou et la soustraction posée. Chaque méthode est expliquée par l'enseignant puis les élèves doivent réappliquer ces méthodes dans une série de situations différentes.

Quant à la soustraction par emprunt, les manuels la mentionnant introduisent la soustraction avec la notion de différence et de « moins » par la correspondance terme à terme de deux collections de perles puis abordent le calcul posé sans retenue qui ne pose pas de problème aux élèves. C'est lorsqu'il s'agit de retenues que cela devient plus complexe. Ainsi, ces manuels utilisent la procédure par « cassage » ou par « démolition » de la dizaine pour pouvoir rendre le calcul possible. Le matériel de numération permet de rendre plus concret ce « cassage » de dizaine et donne du sens à la technique.

J'en tire donc la conclusion que les manuels privilégient soit la technique usuelle, soit celle par emprunt mais avec pour point commun la volonté de donner une technique simple et efficace permettant de calculer une différence avec retenue, apprentissage proposé en progression et par étapes. Ici encore, l'apprentissage de la soustraction se fait progressivement et par étapes en complexifiant les nombres des calculs.

Nous allons donc tenter de comprendre comment aborder l'enseignement d'une technique opératoire de façon générale puis de façon plus ciblée vers la technique usuelle de soustraction.

II. Apprentissage d'une technique opératoire de la soustraction

1) Le champ conceptuel des structures additives

- **Le champ conceptuel d'une opération**

Comme présenté précédemment, il existe une multiplicité de techniques opératoires pour calculer une différence. Un calcul de différence peut être envisagé de différentes façons : une recherche d'un complément, une comparaison, une recherche de reste...D'un point de vue didactique, il a été avancé que l'enseignement d'une technique opératoire est beaucoup plus efficace lorsque les élèves ont rencontré de nombreuses situations-problèmes donnant signification et fonction à un concept : ici, la soustraction. Cette théorie a été exposée par Vergnaud dans son article intitulé « Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques » (Vergnaud, 1989), elle est basée sur la notion de champ conceptuel, Vergnaud s'étant inspiré des travaux de Piaget. Selon Vergnaud, chaque situation donne un sens différent au calcul de la différence, le rôle de l'enseignant est donc d'élargir ce sens auprès des élèves en proposant des scénarii d'apprentissages mobilisant chacun des connaissances différentes.

- **La conception interactive de la formation des connaissances : le champ conceptuel**

En se basant sur la théorie des champs conceptuels, Vergnaud établit qu'il alors faut rechercher, classer et analyser aussi exhaustivement que possible toutes les situations problèmes mettant en jeu la soustraction puis y confronter les élèves afin que leurs conceptions soient façonnées par ces situations. Cette formation du savoir, à travers la confrontation à des situations-problème est avantageuse pour l'élève car elle pousse à l'exploration, aux hypothèses et aux vérifications. Pour un enfant, la soustraction est d'abord conceptualisée comme la diminution d'une quantité initiale à cause d'une consommation, une perte, une vente...il ne la conçoit pas comme un complément, l'inverse d'une augmentation, une différence entre états successifs, une relation de comparaison ou une différence entre transformations. Il faut alors aborder avec les élèves des problèmes de plus en plus difficiles à résoudre, relevant de ces différentes catégories car ils induisent une transformation plus complexe de la quantité avec des calculs implicites et les processus cognitifs à appliquer demandent plus de réflexion mais ils sont nécessaires à une conception plus complète de la soustraction. En appliquant la théorie des champs conceptuels, « la résolution du problème

est à la source et le critère du savoir opératoire » (Vergnaud, 1989, p.56) et s'envisage dans une multiplicité de situations construisant chacune une facette du sens du calcul de différence. Selon Vergnaud, « un champ conceptuel peut être défini comme un ensemble de situations, dont la maîtrise requiert une variété de concepts, de procédures et de représentations symboliques en étroite connexion » (Vergnaud, 1989, p.62).

- **Le champ conceptuel : en pratique et en théorie**

La vision des mathématiques en champs conceptuel semble être attribuée à des situations essentiellement pratiques mais ce n'est pas le cas, elle peut aussi intervenir dans des problèmes théoriques car conceptions et compétences sont généralement reliées et se développent en parallèle sur le long terme, c'est pourquoi l'apprentissage d'une technique / d'un concept isolé n'a pas de sens. Il y a donc une priorité à reconnaître les opérations de pensée nécessaires pour traiter la variété des classes de problèmes et de leurs structures pour progresser vers un apprentissage des mathématiques respectant les champs conceptuels. Pour pouvoir déterminer les relations entre différents champs conceptuels, il faut en identifier les invariants (un invariant est une propriété ou une relation conservée sur un certain ensemble de transformations). En effet, un champ conceptuel se définit par 3 ensembles : un ensemble de situation donnant du sens au concept; un ensemble des invariants constituant les différentes propriétés du concept et un ensemble des représentations symboliques pouvant être utilisées. Cette classification est nécessaire pour pouvoir arriver à des accords comportementaux de la part des élèves face à des situation problèmes.

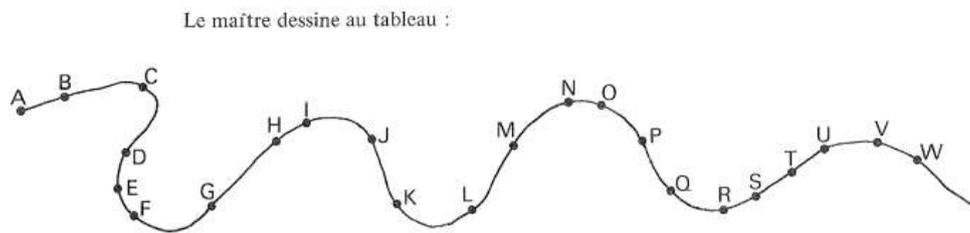
2) Un exemple de progression pour l'apprentissage de la soustraction

Après avoir présenté les différentes techniques opératoires de la soustraction, je vais désormais m'appliquer à présenter l'introduction de son enseignement en cycle 2, CE1. L'article support de cette sous-partie s'intitule « Soustraction au CE1 », il date de 1978 et l'auteure est Marie Thérèse Chabroulet. Elle propose un parcours progressant sous différents angles de la soustraction pour une introduction optimale de son enseignement en tant que concept.

- **La notion de distance entre deux nombres**

L'une des angles de l'article consiste à introduire la soustraction par un travail en amont sur la notion de distance entre deux nombres. Cette notion aidera les élèves à conceptualiser les

écarts entre les nombres puis la conservation des écarts. Il est alors conseillé d'utiliser une ficelle de nœud, un nœud représentant une unité de distance afin de matérialiser une suite quelconque.



Ficelle de nœuds schématisée dans l'article de Marie-Thérèse Chabroulet

La ficelle se présente premièrement aux élèves sous forme d'une suite de lettres dans l'ordre alphabétique, ils doivent donner le nombre de nœuds entre deux lettres, puis, de la même façon que les additions à trou ont été modélisées, on donne aux élèves une lettre : un état initial et un nombre : une distance afin qu'ils proposent des réponses pour l'état final.

Le but de cet exercice est que les élèves se rendent compte qu'il y a deux nœuds se trouvant à la même distance d'un côté ou de l'autre de la ficelle (aussi bien « vers l'avant » que « vers l'arrière »).

Après la ficelle de nœuds, il est possible de travailler sur une droite marquée d'une suite de nombres. Cette fois, il est demandé aux élèves d'effectuer les mêmes exercices qu'avec la ficelle, la ficelle aura alors servi d'entraînement avant l'entrée dans le calcul. Ils vont alors mobiliser plusieurs techniques : le comptage de 1 en 1 des intervalles entre les nombres, les opérations avec les compléments par 10, le comptage sur les doigts, le comptage de 10 en 10 et la modélisation mentale d'addition à trou (par exemple, à la question : « quelle est la distance entre 5 et 10 », ils répondent 5 car $5+5=10$).

En travaillant la notion de distance entre deux nombres avec les élèves avec des artefacts tels que la ficelle de nœuds et la droite marquée d'une suite de nombre, il sera plus aisé d'introduire la notion de conservation des écarts, indispensable à l'enseignement et à l'apprentissage de la soustraction en général et en particulier de la technique opératoire de la soustraction par conservation des écarts. Il peut également être demandé quelle est la distance entre deux nombres ayant une distance plus importante entre eux afin de stimuler les élèves à mettre en œuvre des procédés de calculs divers (le surcomptage, l'addition à trou ou le calcul mental).

- **La notion de conservation des écarts**

Les élèves ayant désormais le réflexe de compter les intervalles entre deux nombres, il est possible de mettre en place des exercices demandant plus de mentalisation. En effet, lorsqu'il leur est demandé de calculer une petite distance entre deux nombres de 3 chiffres chacun, avec des valeurs importantes, ils ne peuvent procéder en reproduisant la ficelle sur leur feuille, ce serait trop fastidieux. L'enseignant peut alors leur proposer des couples de nombres, tous ayant le même écart afin leur faire prendre conscience que l'écart entre eux ne dépend pas de leur valeur (par exemple, proposition des couples (5,10) ; (105, 110) ...).

Il est remarqué que lorsqu'il est demandé aux élèves de proposer leurs propres couples de nombres ayant la même distance, ils répondent sans difficulté mais en donnant presque systématiquement des couples de nombres dont le premier est inférieur au second et rarement l'inverse (par exemple, pour une distance donnée de 7 ils proposent (2,9) ; (5,12) ...etc mais jamais (10,3). Il est également remarqué qu'ils utilisent la conservation de la distance par translation pour trouver par eux-mêmes que la distance entre 120 et 140 est la même qu'entre 20 et 40.

Après avoir travaillé sur les notions de distance et d'écart, il est recommandé seulement à ce moment d'introduire le signe moins - auprès des élèves.

- **Introduction du signe moins**

Maintenant que le signe moins a été utilisé dans le calcul des distances, il s'agit de justifier son utilisation auprès élèves. Il est d'abord primordial de leur faire admettre que pour un calcul $a - b$: a ne peut être plus petit que b .

L'enseignant peut aussi justifier son utilisation comme un type d'écriture, par exemple 16 s'écrit également $37-21$ ou encore $6+10$. Il est important à ce moment-là de faire jouer les élèves avec les égalités et la décomposition de certains nombres en calculs additifs et, ou soustractifs, égalités qu'ils pourront ensuite représenter sous forme de schéma, plus faciles pour leur compréhension, ils pourront se rendre compte que la commutativité de l'addition ne s'applique pas à la soustraction.

Grâce aux travaux spécifiques précédemment décrits, la conservation des écarts est acquise en théorie mais pas encore dans la pratique de la soustraction avec retenue car il est nécessaire de travailler les retours en arrière avec les élèves : une distance entre deux nombres est la même, qu'elle soit comptée "vers l'avant" ou "vers l'arrière". Il faut donc exercer les élèves à proposer des distances égales entre des couples de nombres avec la contrainte de commencer par

donner une valeur puis une autre inférieure et non supérieure comme ils ont l'habitude de le faire, en effet, il est important de les entraîner à compter « vers l'arrière » pour les habituer à envisager que la distance entre deux nombres reste la même, qu'elle soit reculée ou avancée à partir du nombre initial : avoir pleinement conscience de cette réalité les aidera à envisager le calcul de différence de façon plus claire. Poser une addition à trou en ligne ou en colonne reste l'alternative la plus facile pour les élèves pour rechercher une partie inconnue d'une somme dont ils connaissent l'autre partie. Si le signe moins est enfin introduit, un travail en parallèle sur les additions reste à mener pendant le CE1 puis le CE2.

Après avoir étudié ce scénario d'enseignement de la soustraction, je vais préciser le rôle joué par la ficelle de nœuds, comment l'artefact est devenu instrument.

3) L'approche instrumentale

Dans son article "*Qu'est ce qu'un instrument?*", Pierre Rabardel décrit comment les instruments sont appropriés, conceptualisés et mis en situation dans les activités éducatives, permettant la construction du savoir chez les élèves tout en étant des variables sur lesquelles les enseignants peuvent agir pour construire des situations pédagogiques et didactiques Rabardel P. (1995).

Selon lui, ces variables peuvent être gérées de façon plus ou moins efficace par les enseignants s'ils ont conscience que les instruments ne sont pas neutres : ils influencent la construction du savoir car ils sont à la source de l'activité cognitive construisant le savoir, de par les contraintes et les ressources qu'ils offrent. Les contraintes varient également selon les types d'activité proposés que les sujets doivent identifier, comprendre et gérer : elles définissent un contrat didactique adapté.

Néanmoins, les contraintes ne sont pas les seules variables des instruments sur l'activité cognitive : les possibilités d'action sur les instruments peuvent être définies par des conditions extérieures du type d'activités, les activités sont donc aussi formatives des savoirs car les sujets vont adapter leur modalités d'organisation en fonction. Il convient donc de définir l'instrument selon deux dimensions : l'ouverture du champ des actions possibles et l'activité requise.

L'auteur explique ensuite que le sujet s'approprie un artefact en construisant des représentations relatives à sa réalité : il organise certaines actions sur des instruments qui

constituent une base stable pour son activité, il s'agit des schèmes d'utilisation. Les schèmes d'utilisation « peuvent être considérés comme des invariants représentatifs et opératifs correspondant à des classes de situations d'activités avec instrument » (Rabardel, 1995, p.63).

Les invariants peuvent prendre des aspects "représentatifs" ou "opératifs". Les aspects représentatifs sont relatifs aux types de transformation réalisables sur les artefacts, les conditions de ces transformations, leurs modalités techniques propres et les aspects opératifs prennent en compte les actions structurant les procédures orientant l'organisation, la planification et la gestion de l'action au cours de son déroulement.

Les schèmes d'utilisation font office de base stable aux différentes actions possibles sur un artefact : ils ont une dimension privée (chaque sujet s'approprie l'artefact de façon singulière) et une dimension sociale, très importante dans la perspective de transmission de savoirs.

- Artefact et instrument, comment les définir sans les confondre ?

L'artefact peut être un dispositif matériel (un outil de géométrie par exemple) ou immatériel (symbolique, comme les représentations stellaires des quantités par exemple) et c'est une fraction de l'artefact sur laquelle le sujet va exercer un moyen d'action qui va constituer une partie de l'instrument. L'instrument est composé de l'artefact matériel et/ou symbolique, des schèmes d'utilisation et des représentations du sujet (dimension privée et sociale) : cette entité mixte représente l'instrument véritable. Un instrument ne peut être donné à un sujet, c'est le sujet qui se l'approprie : l'appropriation de l'instrument se nomme la genèse instrumentale et la relation instrumentale de l'artefact à l'instrument se construit par l'association des schèmes d'utilisation privés et sociaux associés que les sujets lui attribuent. L'appropriation de l'artefact en tant qu'instrument résulte d'une genèse instrumentale permettant d'en saisir la mixité de son entité.

Il est très délicat de construire des situations d'activités avec des instruments favorisant le développement des compétences. En effet, les élèves ne sont pas toujours en mesure d'identifier de façon adéquate les contraintes et les informations des dispositifs mis à leur disposition. L'auteur propose donc d'analyser les situations d'activités créées par l'usage des instruments, il divise l'analyse en trois pôles :

- le sujet;
- l'instruments ;
- l'objet vers lequel l'action de l'instrument est dirigée.

Toutes les relations et interactions entre ces pôles sont répertoriées et schématisées ainsi par l'auteur :

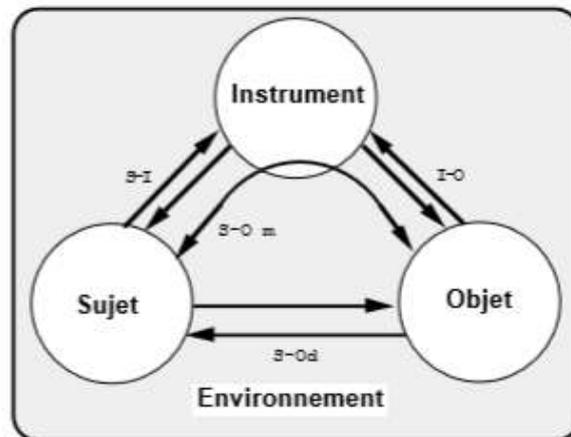


Figure 1 :
Modèle des
situations
d'activités
avec
instrument

Cette analyse peut être assimilée à une analyse a priori d'une séance utilisant un artefact : les prévisions de l'enseignant sur l'incidence de l'artefact dans la genèse instrumentale et la transmission des savoirs qu'il veut déclencher chez ses élèves.

La ficelle de nœud était un premier exemple d'artefact, je vais vous en présenter un deuxième : la règle cassée.

4) Utilisation d'un artefact pour accéder à la signification des écarts : la règle cassée

La règle cassée est un artefact utilisé par Anne-Marie Rinaldi (2013), dans son article *Mesurer avec une règle cassée pour comprendre la technique usuelle de la soustraction posée* pour donner du sens à la conservation des écarts.

Dans un premier temps, elle insiste sur l'importance des liens entre les notions de différence, d'écart et de distance pour introduire l'étude de la technique par compensation. Pour mener son expérimentation auprès des élèves, elle passe par l'introduction d'un artefact avec la translation sur une droite graduée afin de représenter la notion d'écart entre les nombres.

La différence entre a et b est définie dans le cadre numérique : c'est le nombre qui ajouté à a , donne b . La notion d'écart permet de faire un lien avec le cadre métrique : en représentant les nombres a et b sur une droite graduée, on obtient un segment dont les extrémités sont les points d'abscisse a et d'abscisse b . L'écart entre a et b correspond alors d'une part à la mesure de la longueur du segment, d'autre part à combien il y a de a à b , c'est-à-dire la différence entre a et b , soit $b-a$. Selon l'auteure : « faire le lien entre différence et écart, en proposant une

situation d'apprentissage dans le cadre de la mesure, peut permettre, dans un premier temps, d'aborder avec les élèves la propriété de conservation des écarts » (2013, p.101).

Anne-Marie Rinaldi propose alors une expérimentation pour travailler sur la mise en place de la technique par compensation et justifier sa mise en place, ses étapes de calcul. L'expérimentation a été menée dans une classe CE2 avec des élèves ayant déjà appris la technique par compensation en CE1 et puis qui l'ont revu durant la première période du CE2. Une évaluation diagnostique a permis à l'auteure de remarquer qu'une grande majorité des élèves a su poser et répondre correctement à une soustraction posée ainsi : le terme subissant la soustraction a son chiffre des dizaines et son chiffre des unités aux valeurs plus importantes que celles du diminueur (par exemple: $57 - 23$).

Cependant, un tiers des élèves a montré plus de difficultés devant un calcul plus complexe (par exemple: $43 - 18$) lorsqu'ils devaient poser des retenues pour obtenir la différence. Certains élèves n'ont pas su appliquer la méthode, d'autres ont réussi mais n'ont pas su expliquer les étapes qu'ils avaient suivies, à part répéter seulement la marche à suivre ritualisée par l'enseignant qui leur a été transmise. Ce qui prouve donc que les élèves peuvent savoir calculer les différences sur des collections sans pour autant faire le lien entre différence et écart. Les éléments de la didactique des mathématiques pour concevoir l'enseignement du calcul soustractif posé se réfèrent à un champ conceptuel très large. Anne-Marie Rinaldi cite Vergnaud, en avançant que le rapport au sens des élèves se construit dans la durée et qu'ils conceptualisent d'abord la soustraction comme une diminution d'une quantité initiale, plutôt que comme un complément ou une différence entre deux états successifs.

Pour que les élèves assimilent la propriété de conservation des d'écarts, l'auteure propose de la concrétiser par l'introduction d'un artefact pour enseigner la méthode par compensation : la règle graduée qui va permettre à l'élève de réaliser une tâche tout en s'appropriant un contenu mathématique. L'écart va donc être représenté sur un axe gradué. Pour mener cette expérimentation de scénario et pour que les élèves ne soient pas "figés" par le rapport à la graduation de l'axe, une règle cassée leur est distribuée. Lors de la présentation de la situation aux élèves, il y a volonté de l'auteure d'en arriver aux constatations suivantes : l'objet est une règle, la graduation ne commence pas par 0 sur la face en centimètres mais commence bien par 0 sur l'autre en pouces. Ils se voient ensuite distribuer une feuille avec 3 segments à mesurer avec une règle cassée en activité de groupe, pour qu'ils puissent échanger et partager

leurs techniques pour comparer leurs utilisations différentes de la même règle cassée.

Il ressort de l'expérimentation:

- Deux techniques non adaptées (utiliser le 0 de la graduation en pouces et feindre que la règle n'est pas cassée).
- Deux techniques plus pertinentes : l'une consiste par le comptage des intervalles entre les graduations de la règle cassée correspondants aux points du segment et l'autre par le calcul de $b - a$.

Les termes de vocabulaire donnés aux élèves ont aidé certains à se mettre sur la bonne voie au niveau de la technique à appliquer. L'auteure conclue sa séance d'expérimentation en avançant que celle-ci a permis de découvrir plus en profondeur la propriété de conservation des écarts par " translation " : en effet, à chaque graduation de x , le segment mesurable entre a et b a une longueur correspondant à l'écart entre ax et bx , cet écart correspondant à la différence entre bx et ax (bx étant bien sûr inférieur ax).

La notion travaillée par le biais de cette expérimentation devrait être verbalisée aux élèves sous la forme de "le fait que la différence ne change pas si l'on ajoute à chaque terme le même nombre", l'auteure recommande de donner du sens à la retenue avec les élèves en les faisant raisonner directement sur les nombres. A la suite de cette expérimentation, une autre étape d'explication, primordiale pour la construction du sens, mérite d'être menée en classe pour justifier pourquoi dans la manière usuelle de poser la soustraction, nous ajoutons 10 unités au diminuende et une dizaine au diminueur. Il doit donc y avoir une progression de séances vers une construction du signe mathématique puis de la justification de la retenue.

Concernant les premiers questionnements naïfs posés, il est maintenant établi que :

- un vocabulaire adapté donne des repères plus précis aux élèves ;
- la notion d'écart est essentielle à enseigner aux élèves pour la suite de l'enseignement de la soustraction usuelle ;
- l'artefact de la règle cassée est efficace mais la graduation de l'autre face de la règle en pouces tend à ce que les élèves contournent la contrainte de la situation problème qui leur est proposée en partant du 0 de cette face ;
- un raisonnement directement sur les nombres est à mener avec les élèves pour accroître leur aisance numérique avant de passer à l'enseignement de la soustraction usuelle.

III. Problématique : Vers une hypothèse d'expérimentation représentant la conservation des écarts par le biais d'un artefact

Cette première partie m'a permis d'exposer les enjeux de mon questionnement initial et de le mûrir en un questionnement plus expert. Le questionnement expert a bien sûr soulevé les sujets de l'enseignement de la soustraction à l'école élémentaire : en parcourant les programmes et les documents d'application, j'ai appris que le choix de la soustraction à enseigner dépend aussi de la liberté pédagogique de l'enseignant mais qu'il se doit tout de même de faire un choix entre deux possibilités : la soustraction par emprunt ou bien la soustraction usuelle. Bien que j'ai décidé d'axer ce mémoire sur l'enseignement de la technique usuelle et non de celle par emprunt, il est formateur de savoir que les enseignements de ces deux méthodes demandent un travail en amont sur les aspects décimal et positionnel de notre numération avec les élèves afin de bien s'assurer qu'ils soient familiers et à l'aise par rapport à la propriété d'échange régissant les rangs du tableau de numération.

Je me suis également intéressée à l'enseignement d'une opération en général et suis désormais consciente, grâce à l'article de Vergnaud, que confronter les élèves à différentes situations problèmes donnant chacune un sens nouveau à une opération permet de les aider à construire le champ conceptuel de l'opération. La construction d'un champ conceptuel autour de la soustraction pourra permettre aux élèves d'envisager leur calcul de différences de différentes façons, comme une recherche de complément, de reste, comme une comparaison. Il s'agit d'élargir leur vision de la soustraction au delà d'une simple diminution de quantité.

La construction du champ conceptuel est notamment efficace lorsque l'enseignant utilise des artefacts l'aidant à matérialiser et à conceptualiser certaines notions mathématiques pour les élèves. L'article de Marie Thérèse Chabroulet m'a permis de constater une progression de l'enseignement de la soustraction par l'utilisation d'un artefact (la ficelle de nœuds) permettant de travailler avec les élèves sur la notion de distance entre deux nombres et la conservation de cette distance.

Je me suis ensuite renseignée sur l'approche instrumentale de l'enseignement général d'une notion mathématique et l'article de Pierre Rabardel m'a éclairée sur le sujet. En effet, cet auteur explique comment les élèves s'approprient les instruments, le déroulement de la genèse instrumentale avec des schèmes d'utilisation privés et sociaux propres aux instruments. Ces

schèmes sont des invariants permettant à l'enseignant de créer un contrat didactique avec ses élèves.

Anne-Marie Rinaldi a su créé ce contrat en proposant à des élèves de CE2 l'artefact suivant : une règle cassée pour aborder la notion de conservation des écarts. Cet artefact est devenu instrument lorsque les élèves se le sont approprié pour mesurer des segments donnés, en comptant les intervalles entre les graduations ou bien en passant directement par une soustraction.

La problématique s'axe donc progressivement sur l'importance et l'efficacité d'un artefact pour un enseignement, ici, celui de la conservation des écarts permettant ensuite de justifier les retenues de la soustraction usuelle, sans simplement appliquer un automatisme de calcul : quel artefact utiliser et pourquoi ? En effet, **l'utilisation d'un artefact permet-il d'accéder à la compréhension de la propriété de conservation des écarts sur laquelle est basée la technique opératoire usuelle de la soustraction ?**

L'artefact est un outil didactique efficace, souvent utilisé dans l'enseignement des mathématiques afin de matérialiser auprès des élèves des concepts qu'ils ne peuvent assimiler qu'avec une forte capacité d'abstraction : c'est une véritable ressource pour le professeur des écoles.

Alors que Marie Thérèse Chabroulet utilise une ficelle de nœuds lettrés pour représenter une suite quelconque afin de travailler avec des élèves de CE1 sur la conception de distance et d'écart dans la soustraction vers l'aboutissement de la technique opératoire de la soustraction, Anne-Marie Rinaldi utilise une règle cassée à double face pour concrétiser de façon non figée les écarts entre les nombres afin d'aboutir à l'enseignement du calcul posé de la soustraction usuelle.

La ficelle de nœuds est un artefact efficient dans le sens où elle permet aux élèves de concevoir les unités de distance entre chaque nombre et le fait que le comptage est réversible, en effet, il peut aussi bien s'effectuer « vers l'arrière » que « vers l'avant ». Je pense donc qu'il est préférable de l'introduire et de l'utiliser dans un objectif de préparation à l'enseignement de la technique usuelle de la soustraction. La règle cassée, quant à elle, a montré son efficacité également mais il n'est pas forcément utile de garder la face graduée en pouces car elle provoque de la confusion et des mobilisations de procédures inadaptées des élèves. La mise en place d'activités autour de ces deux artefacts avec l'introduction de la

ficelle de nœuds dans un premier temps puis de la règle dans un second me semble être une bonne alternative mais néanmoins, incomplète. En effet, mon questionnement initial porte sur le sens donné à la retenue aux élèves dans l'application de la technique usuelle, il serait donc pertinent désormais de proposer un artefact matérialisant et concrétisant la conservation des écarts.

Je me demande désormais, lequel serait le plus adapté et dans quel contexte didactique ?

La règle cassée a présenté des avantages car elle a permis aux élèves de comprendre par translation mais elle demande une certaine capacité d'abstraction aux élèves pour les calculs de mesures qui leur sont demandés. Selon moi, il serait préférable d'introduire auprès des élèves une règle comme l'a fait Anne-Marie Rinaldi mais pour proposer une alternative au scénario d'enseignement de Marie-Thérèse Chabroulet, en restant concentrée sur la conservation des écarts. C'est donc une expérimentation à mener avec des élèves de CE1 - CE2, il s'agira, de déterminer le déroulement et les variables pour aboutir à la matérialisation de la propriété de conservation des écarts afin que les élèves soient capables de justifier eux-mêmes les étapes de calcul de la technique usuelle et l'utilisation de la retenue, à plus long terme.

DEUXIEME PARTIE : PARTIE EXPERIMENTALE

I. Présentation de la méthodologie

Les lectures et les analyses des articles ayant étoffé mon questionnement ont muri une expérimentation qui a été basée sur la manipulation d'un artefact. Selon les résultats de mes recherches, un artefact permet la concrétisation d'une notion ou d'un concept mathématique et la technique usuelle de la soustraction dépend d'une propriété trop complexe pour être expliquée telle quelle à des élèves de cycle 2. En effet, je peux supposer que si cette propriété est abordée dans une progression de manipulation d'un artefact la représentant alors elle pourra être plus accessible aux élèves. La séquence d'expérimentation que j'ai élaborée a donc pour objectif principal de concrétiser la notion de conservation des écarts chez les élèves par le biais d'un artefact afin qu'ils puissent maîtriser la technique usuelle de la soustraction.

Effectuant mon année d'étudiante fonctionnaire stagiaire dans une classe de petite et moyenne section, j'ai dû trouver une collègue, enseignante en CE2 qui voulait bien mener la séquence. J'ai alors mené mon expérimentation dans sa classe, composée de 20 élèves. Bien qu'il avait été déjà prévu en amont de décliner l'expérimentation en une séquence de 3 séances, il était indispensable pour la construction approfondie de la séquence d'évaluer le niveau des élèves dans leurs pratiques soustractives : quelle(s) technique(s) utilisent-ils et dans quel cas, leur habilité à les utiliser et le sens qu'ils mettent derrière la technique usuelle de la soustraction. La méthode à suivre dans ce cas là, était donc de faire passer aux élèves un test diagnostique.

Avant d'élaborer le test, un entretien préliminaire avec l'enseignante m'a permise d'ajuster mes attentes quant au niveau des élèves afin de proposer un test plus adapté.

Elle m'a alors certifié que depuis la période 3, ses élèves ont d'abord eu à résoudre des soustractions sans retenue puis avec retenue. Elle leur a demandé de résoudre avec la méthode de leur choix, celle(s) qu'ils connaissaient, certains les ont résolues par conservation des écarts, d'autres en cassant des dizaines. Puis, elle a ensuite travaillé les deux méthodes en les ciblant avec ses élèves : le groupe qui maîtrisait celle par emprunt mais pas celle par conservation des écarts a travaillé celle par conservation des écarts, le groupe qui maîtrisait celle par conservation des écarts mais pas celle par emprunt a travaillé celle par emprunt, le groupe d'élèves réussissant bien les deux méthodes a eu des soustractions plus complexes à résoudre et pour finir, le groupe des élèves en difficultés dans les deux techniques

soustractives a travaillé avec l'enseignante. A la suite de cette séance, l'enseignante a donné des exercices d'entraînement puis a mené une évaluation.

De son évaluation, elle a pu remarqué que globalement, ses élèves ne maîtrisaient pas la technique usuelle de la soustraction. J'ai alors construit la séquence d'expérimentation pour ces élèves en visant l'objectif de les faire progresser dans l'utilisation de cette technique tout en étant conscients des enjeux mathématiques implicites et sans effectuer un simple automatisme calculatoire. Suite aux résultats du test diagnostique, j'ai alors donné encore plus un rôle d'étayage à cette séquence, étayage dans l'enseignement de la technique usuelle de la soustraction et sa compréhension.

Et pour finir, afin de pouvoir évaluer au mieux son impact sur les apprentissages des élèves, un test diagnostique final a également été effectué par les élèves.

1) Recueils des données

Les séances de la séquence ont été longues et riches en informations. L'expérimentation étant effectuée dans une classe de 20 élèves, et menée seulement par une seule personne : l'enseignante, il lui était très difficile de relever les procédures de chaque binôme d'élèves. Par ailleurs, elle ne souhaitait pas être filmée alors que je ne pouvais pas venir l'observer, cependant, elle a accepté l'enregistrement vocal. Ces difficultés qui m'ont parues particulièrement problématiques dans un premier temps, n'ont fait que mieux cibler le recueil des données pour la suite. Mon expérimentation reposant essentiellement sur la manipulation d'un artefact, je devais prévoir les procédures de résolution des élèves en le manipulant moi même en situation d'exercice. Cette manipulation m'a alors aidée à dresser des grilles d'observation à remplir par l'enseignante, qui compléteraient bien les enregistrements vocaux. Afin de mener les séances comme je l'attendais et de trouver le bon moment pour remplir les grilles, je lui ai réalisé des fiches de préparation très détaillées, consultables en annexes.

J'ai donc pu recueillir les données des trois séances en écoutant les enregistrements vocaux, et en consultant les grilles d'observation. Les grilles n'ont pas été toujours faciles à remplir pour l'enseignante qui tentait de passer voir tous les binômes travailler tout en donnant des remédiations aux élèves en difficultés devant la tâche demandée, les enregistrements complètent donc aussi les grilles.

Pour la première séance et la seconde séance, les données à recueillir étaient les procédures utilisées, pour la troisième, elles ont été plus délicates à déterminer car il s'agit d'une séance d'institutionnalisation, j'ai donc écouté les enregistrements vocaux afin de jauger la compréhension globale des élèves.

Pour finir, j'ai dû élaborer des tableaux afin de rendre plus lisibles les résultats des tests diagnostiques, aussi bien l'initial que le final. En effet, il y avait beaucoup d'informations à recueillir, le test faisant office d'enquête quantitative sur le taux d'utilisation de la technique usuelle de soustraction. Néanmoins, il était tout de même indispensable de relever en plus certaines traces des procédures des élèves car quelques unes d'entre elles étaient parfois indéterminables !

2) Test diagnostique

a. *Analyse a priori*

Pour proposer une expérimentation plus adaptée aux élèves, j'ai voulu leur soumettre un test diagnostique m'indiquant des données précises par rapport à leur niveau plutôt que de m'appuyer seulement sur ce que l'enseignante m'avait dit d'eux. L'objectif de ce test était de mieux appréhender leur maîtrise de la soustraction et de ses techniques opératoires. Le test se compose d'une dizaine de soustractions proposées en ligne : les élèves n'avaient pas de consigne particulière quant à la procédure à appliquer pour trouver le résultat. Ils disposaient d'assez de place pour répondre aux soustractions en les posant ou non et en utilisant la technique opératoire qui leur convenait.

- Voici les calculs soustractifs proposés dans le test :

| | | |
|----------------|----------------|----------------|
| $7 - 3$ (4) | $18 - 5$ (13) | $12 - 7$ (5) |
| $19 - 11$ (8) | $26 - 10$ (16) | $48 - 25$ (23) |
| $87 - 23$ (64) | $75 - 40$ (35) | $34 - 18$ (16) |
| | $63 - 27$ (36) | |

Ces soustractions présentent toutes des variables de calcul et une difficulté croissante à les résoudre. La première ($7-3$) est une soustraction simple entre deux nombres inférieurs à 10, la deuxième ($18 - 5$) met en jeu un nombre supérieur à 10, mais le calcul soustractif peut

s'effectuer seulement entre les unités du diminuende et du diminueur. La troisième soustraction (12-7) peut aussi s'effectuer facilement mentalement pour les élèves mais le calcul ne peut pas s'effectuer seulement sur les unités, comme la quatrième soustraction mais qui implique cette fois deux nombres à deux chiffres (19-11). La cinquième soustraction proposée (26-10) est un simple retrait de dizaine avant des soustractions plus difficiles. En effet, les suivantes sont difficiles à calculer de tête pour des élèves de CE2, sauf pour les élèves les plus à l'aise. L'augmentation de la valeur des nombres et de la différence pour la septième soustraction (87 - 23) vise à amener des élèves ayant effectué le sixième calcul (48 - 25) de tête à poser la suivante, même si, comme cela n'est pas explicitement demandé, un calcul de tête reste toujours possible. Ces soustractions induisent le fait d'être posées pour être résolues mais ne provoquent pas la pose de retenue. La huitième soustraction (75 - 40) présente le même enjeu que la cinquième mais avec un retrait de dizaine plus important. Toutes les difficultés de ces soustractions et leur procédure de résolution mènent logiquement aux deux dernières (34-18 / 63-27) qui demandent aux élèves de les poser et d'utiliser les techniques soustractives qu'ils préfèrent utiliser pour trouver les résultats. S'ils utilisent la technique usuelle et parviennent à l'appliquer, ils auront ces calculs :

$$\begin{array}{r} 3 \ 14 \\ - 1 \ 8 \\ \hline = 1 \ 6 \end{array}$$

(14-8 = 6 et 3-2 =1)

$$\begin{array}{r} 6 \ 13 \\ - 2 \ 7 \\ \hline = 3 \ 6 \end{array}$$

(13-7=6 et 6-3=3)

Le test a été passé le 7 Mars 2017, quelque temps avant la mise en place effective de l'expérimentation en classe. La consigne était simple « Trouve le résultat de ces soustractions ». Pour les élèves en difficultés, l'enseignante les a encouragés à passer le test en proposant un étayage type manipulation de cubes de numération, repérage sur la droite graduée de la classe ou encore schématisation. Voilà pourquoi ces procédures vont apparaître dans le tableau des résultats de ce test.

b. Résultats

| <i>Test diagnostique du 07/03/17</i> | <i>Procédures non déterminables / soustractions laissées sans réponses</i> | <i>Calcul mental</i> | <i>Soustractions posées</i> | | | <i>Schématisation</i> | <i>Utilisation de matériel</i> | | <i>Total et Taux de réussite</i> |
|---|--|-------------------------------------|---|--|---|-------------------------|--|--|--|
| | | | <i>Technique par emprunt</i> | <i>Technique par conservation des écarts</i> | <i>Posée sans technique apparente</i> | | <i>Manipulation de cubes</i> | <i>Utilisation de la bande numérique</i> | |
| 7-3=4 | - | 18 | - | - | - | 2 | - | - | 20/20 100% |
| 18-5=13 | 1 | 15 | - | - | 2 | 2 | - | - | 14/20 70% |
| 12-7=5 | 1 | 13 | 1 | 1 | - | 3 | 1 | - | 19/20 95% |
| 19-11=8 | 1 | 15 | - | - | 1 | 2 | 1 | - | 15/20 75% |
| 26-10=16 | 1 | 15 | 1 | - | 1 | 1 | 1 | - | 15/20 75% |
| 48-25=23 | 7 | 3 | - | - | 8 | - | 1 | 1 | 18/20 90% |
| 87-23=64 | 9 | 1 | 1 | - | 7 | - | 1 | 1 | 17/20 85% |
| 75-40=35 | 8 | 3 | 1 | - | 5 | - | 2 | 1 | 13/20 65% |
| 34-18=16 | 10 | - | 5 | 1 | 1 | - | 2 | 1 | 9/20 45% |
| 63-27=36 | 7 | - | 4 | 3 | 3 | - | 2 | 1 | 10/20 50% |
| Synthèse : les soustractions ont été.. | (45 procédures de résolution non apparentes) | 83 fois calculées mentalement | 13 fois posées avec technique par emprunt | 5 fois posées avec technique usuelle | 28 fois posées sans retenue ni cassage de dizaine | 10 fois schématisées | 11 fois calculées par la manipulation | 5 fois calculées sur une bande numérique | 75% de réussite moyenne |

Les deux soustractions ayant besoin d'être posées et exigeant une pose de retenue si elles sont résolues avec la méthode par conservation des écarts (34-18 et 63-27) sont celles qui ont le moins bon taux de réussite.

- Synthèse analytique du tableau

La première colonne du tableau, intitulée « Procédures non déterminables / soustractions laissées sans réponses » reprend toutes les soustractions qui ont été laissées sans réponse par les élèves ou celles auxquelles les élèves ont répondu en raturant, en effaçant leur procédure et en laissant des résultats incorrects. Lorsqu'il n'y avait pas de traces de procédures et que le résultat était correct, j'ai comptabilisé les résultats dans la colonne « calcul mental ».

Je peux distinguer par le biais de ces tests diagnostiques plusieurs points :

Les calculs soustractifs simples tels que $12-7$ ou ceux qui sont facilement calculables en colonne dizaines / unités ($48-25$ et $87-23$) montrent des taux de réussite très satisfaisants. De plus, quelques élèves ont eu le réflexe de poser des soustractions qui pouvaient être résolues mentalement, sûrement pour structurer leurs calculs et mieux visualiser et différencier les dizaines des unités : ce sont les soustractions qui apparaissent dans le tableau à la colonne « posées mais sans technique apparentes ».

Les élèves utilisent un peu plus la méthode de soustraction par emprunt que la méthode par conservation des écarts, celle par emprunt étant actuellement de plus en plus enseignée, cela peut être interprété comme une suite logique dans leur pratique du calcul.

Certains d'entre eux ont également « cassé des dizaines » lorsque ce n'était pas forcément utile (les chiffres des dizaines et des unités du diminueur ayant une valeur inférieure à celui du diminuende).

Les calculs qui demandaient la soustraction d'un nombre entier de dizaine ($26-10$ et $75-40$) ont un taux de réussite satisfaisant.

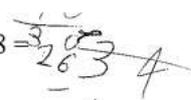
L'étude de la schématisation et de l'utilisation de matériel tel que la bande numérique ou les cubes n'était pas prévue, c'est l'enseignante qui a pris l'initiative de laisser ses élèves en difficultés manipuler pour leur donner les mêmes chances de participer au test.

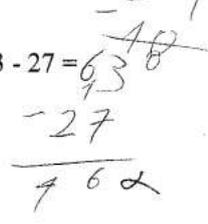
Le taux de réussite pour les soustractions ne nécessitant pas d'être posées avec une retenue est très satisfaisant, par contre, les deux soustractions ayant besoin d'être posées et exigeant une pose de retenue si elles sont résolues par la méthode de conservation des écarts ($34-18$ et $63-27$), sont celles qui ont le moins bon taux de réussite.

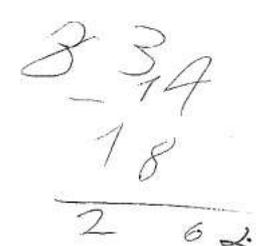
Le fait que seulement la moitié des élèves ont réussi à résoudre les soustractions $34-18$ et $63-$

27 n'est pas un hasard. En effet j'en avais conscience lors de l'élaboration du test diagnostique et voulais le vérifier par son biais : seulement 3 à 4 élèves de la classe savent utiliser la technique usuelle de la soustraction et certains qui tentent de l'utiliser, font des erreurs dans son application, sûrement car ils ne connaissent pas le sens de la propriété des écarts qui justifie cette méthode soustractive.

Voici les procédures des élèves qui ont utilisé la méthode par conservation des écarts:

• $34 - 18 = 26$ 

• $63 - 27 = 46$ 

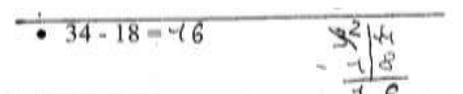


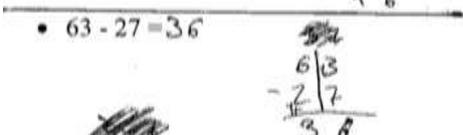
Pour résoudre ces soustractions, on peut constater que cet élève a tenté d'utiliser la technique usuelle en posant une retenue à 4 pour le terme 34 de la soustraction 34-18 et à 3 du terme 63 de la soustraction 63-27. Néanmoins, il n'a pas eu le réflexe de poser la retenue aux termes du bas et n'a donc pas conservé l'écart

ajouté de 10. C'est pourquoi il a trouvé la différence 26 au lieu de 16 pour 34-18 et 46 au lieu de 36 pour 63-27.

• $63 - 27 =$ 

Pour calculer 63-27 en posant la soustraction, on peut supposer que cet élève a du mélanger les deux méthodes de soustraction qu'il connaît : la technique usuelle et celle par écart. En effet, il casse la dizaine de 63 : il n'y a plus que 5 dizaines et 13 unités. Cela aurait suffi à résoudre la soustraction mais l'élève a posé une retenue en bas, comme pour conserver un écart. Cependant, étant donné qu'il a cassé une dizaine en la décomposant ($63=50+13$) au lieu d'ajouter une dizaine à 3, il n'a pas besoin de poser de retenue au terme du bas. C'est pourquoi son résultat est incorrect d'une dizaine en plus.

• $34 - 18 = 16$ 

• $63 - 27 = 36$ 

Cette élève a eu la particularité d'utiliser systématiquement la technique de soustraction par emprunt pour résoudre toutes les soustractions du test et elle la maîtrise très bien. Pourtant, elle utilise aussi la technique usuelle pour résoudre la dernière et

l'applique parfaitement, même s'il m'est impossible d'avancer que c'est parce qu'elle comprend le sens derrière cette technique.

Les réponses des élèves aux tests parlent d'elles-mêmes :

Peu voire très peu d'entre eux utilisent la technique usuelle et seulement une élève réussit à l'utiliser correctement alors qu'elle ne sait peut être pas pourquoi elle ajoute des retenues.

En ciblant l'enseignement de la technique usuelle, en travaillant son sens grâce à la manipulation d'un artefact, on peut permettre aux élèves de mieux appréhender la propriété des écarts jouant dans l'utilisation de cette technique. Je fais l'hypothèse que grâce à la séquence d'expérimentation, ils seront plus à l'aise avec cette technique et pourront l'utiliser pour résoudre des soustractions ou pour infirmer / confirmer des résultats trouvés grâce à la technique par emprunt.

3) Séquence d'expérimentation sur la propriété de conservation des écarts

a. *Analyse a priori des trois séances*

- Première séance

La première séance a eu pour objectif **d'associer calcul de la soustraction à l'écart entre les nombres mesuré à l'aide de la bande marquée.**

Pour arriver à cet objectif, la séance s'est déclinée en 4 phases. La première phase de lancement où l'enseignante montrait l'utilisation de l'artefact aux élèves afin qu'ils puissent au mieux manipuler et s'approprier le matériel pour la suite de la séance.

Durant cette phase, les modalités de travail sont classiques, l'enseignante se trouve au tableau et les élèves sont assis à leur place et sont amenés à être attentifs. L'artefact de la droite graduée jusque 80 cm est affichée au tableau et sur base de cette droite et de 4 bandes plastifiées et annotées de la valeur de leur écart (des bandes 7,8 et des bandes 22,23), l'enseignante peut résoudre des soustractions. Elle commence par proposer la soustraction 15-8 et montre qu'on peut placer **la bande de longueur 7** (après avoir proposé la bande 8) entre les graduations 15 et 8 et donc **associer résultat du calcul de la différence et l'écart mesuré avec la bande** dans le sens du calcul. Une fois l'écart mesuré avec la bande, l'enseignante déplace la bande pour trouver avec les élèves d'autres calculs soustractifs dont le résultat est 7 : elle utilise le sens de l'écart mesuré avec la bande 7 pour aller vers les résultats des calculs. En encourageant les élèves à proposer plusieurs soustractions ayant le

même résultat, elle va leur faire rendre compte qu'on peut trouver plusieurs couples de nombres ayant le même écart : la disposition des bandes entre les termes des soustractions concrétise cette notion : c'est l'introduction de la notion d'écart entre deux nombres. La bande de longueur 7 valide les propositions des élèves.

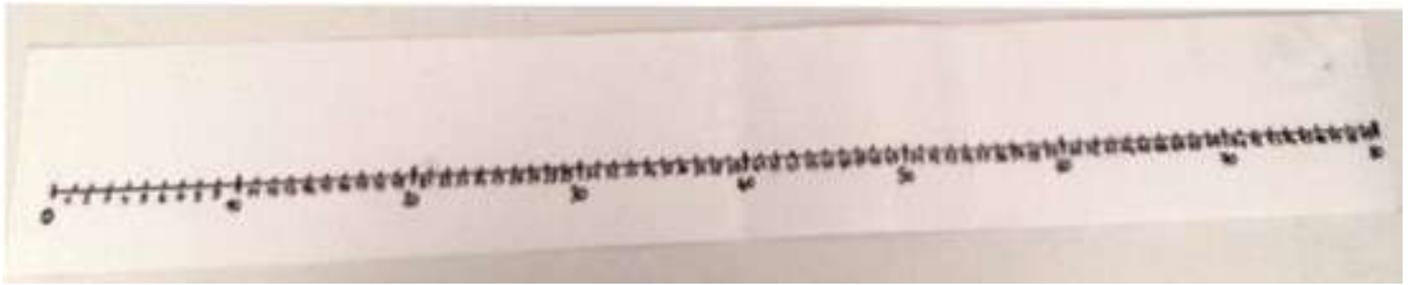
Après cette première étape de la phase de lancement, elle donne un calcul soustractif plus complexe tel que 46-24. Si un élève trouve le résultat mentalement (22), elle propose la vérification avec **les bandes de longueur 22 et 23**, valide la bonne bande et retire l'autre puis demande aux élèves de chercher à leur tour d'autres calculs avec le même résultat. Elle propose un étayage en suggérant des calculs de soustractions avec des dizaines entières (52-30, 32-10...etc).

C'est aussi l'occasion de faire émerger des soustractions comprenant l'un des termes avec une dizaine entière, par exemple 52-30 qui est facile à calculer et qui encourage les élèves à utiliser les bandes dans le cas d'une nouvelle utilisation : partir du sens du calcul pour aller vers l'écart mesuré avec la bande. L'enseignante reformule clairement « *en déplaçant la bande, on peut trouver facilement des nouveaux calculs* ».

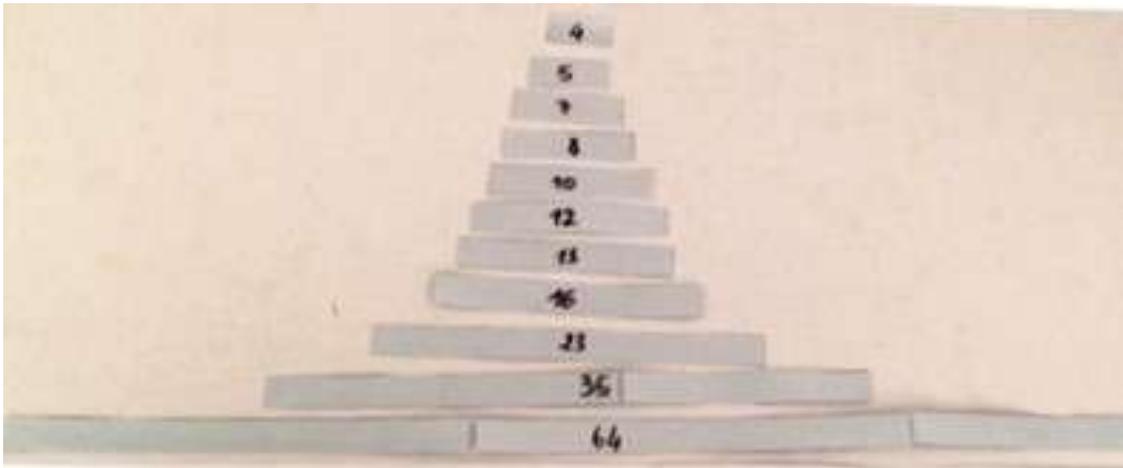
Pendant cette deuxième étape de la phase de lancement, les élèves seront, bien entendu, invités à intervenir, poser des questions et faire des propositions, l'enseignante réglera les interventions en les confrontant ou en les validant.

Après ce temps, les élèves seront mis en situation problème dans la modalité suivante : par binôme. En effet, selon moi, c'est une modalité qui convient particulièrement à la découverte et à la manipulation d'un nouveau matériel et qui permet de faire émerger plus clairement les procédures des élèves qui justifient entre eux leurs réponses.

La mise en situation problème se déroulera en deux étapes également. Lors de la première étape, les élèves auront la consigne de résoudre des soustractions affichées au tableau (notamment celles qui ont posé problème lors du test diagnostique) grâce au matériel distribué par binôme. En effet, les élèves recevront le matériel après les consignes afin d'être bien attentifs durant la passation. L'enseignante précisera les modalités de travail et demandera aux élèves de ne surtout pas poser les soustractions, de simplement utiliser leur matériel d'écriture pour noter les résultats.



Photographie de l'artefact construit pour l'expérimentation : la droite graduée jusque 80



*Photographie de l'artefact construit pour l'expérimentation :
les bandes marquées de 4 à 64*

L'artefact distribué par binôme se compose donc d'une droite graduée jusque 80 cm et de plusieurs bandes plastifiées et marquées avec la valeur de leur écart indiquée dessus (10 bandes au total : 4, 5, 8, 10, 12, 13, 16, 23, 35, 64). Les élèves, durant cette phase de recherche, vont expérimenter une nouvelle façon de calculer des soustractions : en mesurant les écarts entre leurs deux termes.

Les soustractions qu'ils devront résoudre sont les suivantes :

- $7 - 3 =$ (bande 4)
- $12 - 7 =$ (bande 5)
- $19 - 11 =$ (bande 8)
- $18 - 5 =$ (bande 13)

- $26 - 10 =$ (bande 10)
- $48 - 25 =$ (bande 23)
- $77 - 13 =$ (bande 64)
- $61 - 49 =$ (bande 12)
- $75 - 40 =$ (bande 35)
- $34 - 18 =$ (bande 16)

Si les élèves acceptent le contrat didactique, les procédures attendues pour cette étape sont simples, ils vont :

- **Procédure 1** : soit calculer mentalement puis utiliser la bande correspondante au résultat trouvé et l'utiliser pour le vérifier ($12-7$ avec la bande 5, $19-11$ avec la bande 8, $18-5$ avec la bande 13, $26-10$ avec la bande 10) ;
- **Procédure 2** : soit estimer le résultat de façon intuitive et sélectionner dans les bandes proposées celles qui se rapprochent le plus de leur résultat et les tester les unes après les autres afin de les placer entre les deux termes de la soustraction et sélectionner la bonne ;
- **Procédure 3** : soit estimer de façon perceptive la longueur de la portion de la droite graduée comprise entre les 2 termes de la soustraction ;
- **Procédure 4** : soit tester une à une les bandes jusqu'à trouver la bonne (pour toutes les bandes et les soustractions).

Les élèves, suite à cette étape, sont supposés comprendre que «*Le résultat de la soustraction correspond à la longueur de la bande que je peux placer entre les deux termes de la soustraction* »

S'ils n'arrivent pas à cette conclusion, l'enseignante pourra leur préciser après cette première étape de mise en situation de recherche et noter la phrase au tableau (possible remédiation pour les élèves en difficultés et pour ceux qui n'ont pas tout compris durant la phase de lancement).

Après cette première étape de recherche, les élèves sont familiers avec l'utilisation et avec la manipulation de l'artefact alors l'enseignante peut passer à la seconde étape et leur donner une nouvelle consigne, en logique avec sa démonstration de la phase de lancement : la recherche de soustractions ayant le même résultat par le biais des bandes.

Le but de cette étape est que les élèves translatent les bandes sur la droite pour donner

d'autres nombres entre lesquels il y a l'écart de la bande. Les élèves peuvent trouver d'autres soustractions ayant le même résultat. Et notamment, des soustractions dans lesquelles le diminuende est une dizaine entière, plus facile à calculer.

C'est pendant la phase de mise en commun que les élèves pourront, tour à tour, exposer leur procédure. En effet, l'enseignante en passant dans les rangs pendant la phase de recherche, va pouvoir sélectionner des procédures différentes et interroger les élèves en fonction. Les binômes interrogés pourront venir au tableau pour proposer des soustractions ayant le même écart et montrer comment ils les ont trouvées, en translatant les bandes sur la droite graduée et en comptant les écarts. C'est le moment pour l'enseignante de faire émerger l'expression d'« écart » entre les nombres.

Après cette émergence, il est indispensable d'institutionnaliser le savoir appris lors de la séance avec la présentation d'une affiche qui sera ensuite collée sur le mur et qui reprend la règle « Il est possible de calculer le résultat d'une soustraction en utilisant une bande qui marque l'écart entre les deux nombres ». Les bandes sont alors devenues des instruments de calcul. Suite à la présentation de cette affiche, l'enseignante pourra vérifier la bonne compréhension des élèves en leur demandant de reformuler avec leurs propres mots.

Dans une progression logique de ma première séance, lors de la seconde séance, je proposerais aussi des bandes plastifiées, mais vierges afin d'amener les élèves à translater d'eux-mêmes les bandes sur la droite graduée pour qu'ils se facilitent les calculs soustractifs demandés. Cette séance a pour objectif d'amener les élèves à comprendre que l'écart entre 11 et 26 c'est comme l'écart entre 30 et 45 ou 38 et 53 : c'est 15.

- Deuxième séance

Cette séance a pour objectif de **conceptualiser la notion d'écart entre les nombres chez les élèves**. Elle a été effectuée le lendemain. Les élèves s'étant approprié les codes d'utilisation de l'artefact lors de la première séance, il m'a semblé plus logique de les faire travailler sur les droites graduées tant que la séance de la veille était encore fraîche dans leur esprit. La deuxième séance se décline en 4 phases, tout comme la première.

Une première phase de lancement tenant le rôle de transition entre la séance n°1 et la n°2 en

accord avec le principe de progression dans les apprentissages permet aux élèves de se mettre en confiance pour la suite. L'enseignante rappelle le contenu de la première séance en faisant reformuler ses élèves, en les encourageant à mentionner leurs procédures dans la résolution des soustractions.

L'enseignante met en valeur le fait que les déplacements des bandes effectués lors de la première séance ne se faisaient que par « sauts » : elle manipule la bande 7 entre différentes graduations pour souligner les sauts « *Nous avons trouvé le résultat de 15-8 *en plaçant la bande 7 entre 15 et 8* puis entre 27 - 20 *en plaçant la bande 7 entre 20 et 27*...etc*

Puis une phase de **mise en situation problème** suit la phase de lancement, l'enseignante demande aux élèves de « *résoudre les soustractions écrites au tableau* » en binômes en utilisant presque le même matériel que la veille.

Pour se faire, elle distribue par binôme : une droite graduée et des bandes plastifiées **vierges** de différentes longueurs (13, 16, 23, 35, 64). Elle demande aux élèves de trouver un moyen d'utiliser les bandes pour résoudre les soustractions sans compter les graduations et rappelle l'interdiction de poser les soustractions pour trouver les résultats. Elle propose 5 soustractions au tableau :

- $52 - 29 =$ (bande 23)
- $58 - 45 =$ (bande 13)
- $79 - 44 =$ (bande 35)
- $77 - 13 =$ (bande 64)
- $37 - 21 =$ (bande 16)

Ces soustractions sont complexes. Elles ne permettent pas de calcul mental en niveau CE2 et ont été conçues dans le but de pousser les élèves à poser les bandes entre les termes des soustractions puis de les glisser à la dizaine supérieure ou inférieure afin de connaître la valeur de la bande et donc de la soustraction. Tout cela dans le but de faire comprendre aux élèves qu'ils peuvent ajouter ou supprimer une valeur aux termes d'une soustraction, cela ne changera pas son résultat (la valeur ajoutée ou supprimée aux deux termes est la même grâce à la manipulation des bandes qui ne peuvent pas être étirées).

Les procédures de tâtonnement attendues chez élèves sont les suivantes :

- **Procédure n°1** : Le retour au 0 (l'élève pose une extrémité de la bande sur le 0 pour mesurer la bande).
- **Procédure n°2** : Le glissement vers la dizaine supérieure (l'élève pose la bande entre les deux termes de la soustraction puis va la glisser vers la dizaine supérieure, par exemple : entre 58 et 45, la glisser vers 60).
- **Procédure n°3** : Le glissement vers la dizaine inférieure (l'élève pose la bande entre les deux termes de la soustraction puis va la glisser vers la dizaine supérieure, par exemple : entre 52 et 29, la glisser vers 50)
- **Procédure n°4** : le glissement jusque 10 (pour lire la graduation 10 + la valeur de la bande).

Une grille d'observation sur les procédures utilisées est remplie à ce moment là par l'enseignante qui peut ensuite procéder à la **phase de mise en commun**.

Lors de cette phase, l'enseignante va interroger les binômes au tableau qui vont présenter et confronter les procédures utilisées en devant se justifier des résultats trouvés, et montrer comment ils ont manipulé le matériel.

C'est à ce moment que l'enseignante peut amener les élèves à comprendre qu'en faisant glisser les bandes pour trouver les valeurs des bandes qui sont les résultats des soustractions, ils ont ajouté / retiré la même valeur aux deux termes soustrayant : ils ont conservé les écarts.

Par exemple : « *En glissant la bande 23 (52-29) vers entre 30 et 53 vous avez trouvé plus facilement la valeur de la bande car $52 - 29$ c'est comme $53 - 30$ c'est 23, vous avez conservé l'écart.* »

Il est alors temps de clôturer la séance avec une **phase d'institutionnalisation** en faisant formuler aux élèves « *Lorsqu'on ajoute ou supprime la même valeur aux deux termes de la soustraction, on conserve l'écart entre les deux : le résultat reste le même* ».

Cette phrase récapitulative peut être affichée par la suite dans la classe avec des exemples trouvés lors de l'expérimentation : par exemple : si les élèves ont trouvé le résultat de 58-45 en glissant la bande entre 60 et 47 (glissement vers dizaine supérieure) : leur dire « 58-45 c'est comme 60-47, le résultat est 13 ».

- Troisième séance

Cette dernière séance d'expérimentation a pour objectif spécifique d'institutionnaliser la propriété de conservation des écarts chez les élèves en la mettant en rapport direct avec la technique usuelle de la soustraction.

Durant la première phase de lancement qui fait également office de transition avec la séance précédente, l'enseignante rappelle aux élèves leur manipulation des bandes sur la droite pour introduire l'objet de la séance : la soustraction.

Elle commence par se référer à l'affiche récapitulative (voir en annexes) qu'elle vient d'accrocher en l'explicitant aux élèves grâce à son matériel de classe (une bande de 13 cm qu'elle aura préparée avant et la droite graduée affichée de façon permanente au fond de la classe). Les élèves sont ensuite invités à reformuler avec leurs propres mots. L'affiche reprend l'institutionnalisation de la séance n°2 « Lorsqu'on ajoute la même valeur aux deux termes d'une soustraction, on garde l'écart entre les deux : le résultat de la soustraction reste le même. » et un exemple de la conservation des écarts pouvant être illustré grâce à la bande 13 de l'enseignante. Elle peut alors lire les soustractions de l'exemple (53-40 et 59-46) et valider la conservation de l'écart entre les termes grâce à la bande et en oralisant « *Je peux poser la bande 13 entre 40 et 53 et je peux aussi la poser entre 46 et 59. Je vérifie donc avec la bande que 53-40 c'est comme 59-46, c'est 13. Le résultat est le même car j'ai ajouté 6 à 53 et 6 à 40 pour obtenir 59 et 46.* »

En ayant présenté l'affiche comme support référent de la propriété des écarts, les élèves peuvent être mis en situation de recherche avec un exercice qui leur est proposé de façon individuelle. Il s'agit de remplir des textes à trous reprenant la même trame que l'affiche. Compléter ces phrases va permettre aux élèves de s'approprier la propriété. En effet, cette propriété est particulièrement complexe à comprendre par des élèves de CE2, même résumée en une seule phrase explicative, la répétition de la même trame dans plusieurs situations différentes de conservations d'écarts étaye leur compréhension. Voici l'énoncé avec ses corrections qui a été transmis à l'enseignante :

- L'écart entre 67 et 14, c'est comme l'écart entre 69 et ... (correction : 16).
On a ajouté la valeur ... (2) à chaque terme.
- L'écart entre 85 et 52, c'est comme l'écart entre 95 et ... (correction : 62).
On a ajouté la valeur ... (10) à chaque terme.

- L'écart entre 35 et 23, c'est comme l'écart entre 49 et ... (correction :37)
On a ajouté la valeur ... (14) à chaque terme.

Après un temps de recherche individuelle, la correction est collective durant une phase de mise en commun : les élèves sont libres de faire des propositions et l'enseignante propose une correction qui est toujours vérifiée pour être validée par l'ensemble de la classe.

- On peut vérifier les résultats en résolvant les soustractions. $67-14 = 53$ et $69-16=53$
- On peut vérifier les résultats en résolvant les soustractions. $35-23 = 12$ et $49-37 = 12$
- On peut vérifier les résultats en résolvant les soustractions $85-52 =33$ et $95-62=33$

L'enseignante peut rebondir sur une proposition de complément de couple ou de valeur ajoutée fausse pour la calculer et montrer aux élèves que les résultats des deux soustractions ne sont pas les mêmes lorsque que l'écart n'est pas gardé et donc invalider les propositions incorrectes.

Après la correction, l'enseignante pose une soustraction au tableau et la résout avec les élèves en utilisant la technique usuelle :

$$\begin{array}{r} 8 \ 14 \\ - 15 \ 6 \\ \hline = 2 \ 8 \end{array}$$

« *Ou dois-je poser les retenues dans cette soustraction posée ? Je dois poser la première à 4 et calcule 14-6 pour obtenir 8 puis je pose la seconde à 5 et calcule 8-6 pour obtenir 2. 84-56 a donc pour résultat 28* »

C'est alors le bon moment pour questionner directement les élèves sur le sens des retenues et ce qu'elles représentent selon eux. «*Pourquoi devoir obligatoirement en poser une deuxième ?*». L'enseignante doit réguler les réponses et les reformuler et conclure par le fait que les retenues représentent une dizaine chacune, mais que pour le nombre du haut, elle a été mise avec les unités, pour le nombre du bas avec les dizaines, et que résoudre 84-56 en posant la soustraction avec la méthode usuelle revient à calculer 94-66.

L'institutionnalisation finale qui, au choix de l'enseignante peut être sous forme d'affiche ou écrite dans les cahiers de leçon est la suivante : Quand je pose une soustraction et que j'utilise la méthode de la retenue pour la résoudre, j'ajoute la valeur 10 aux deux termes de la soustraction pour garder l'écart. L'écart entre 84 et 56, c'est comme l'écart entre 94 et 66. 84-56 et 94-66 ont le même résultat car on a ajouté la valeur 10 à chaque terme.

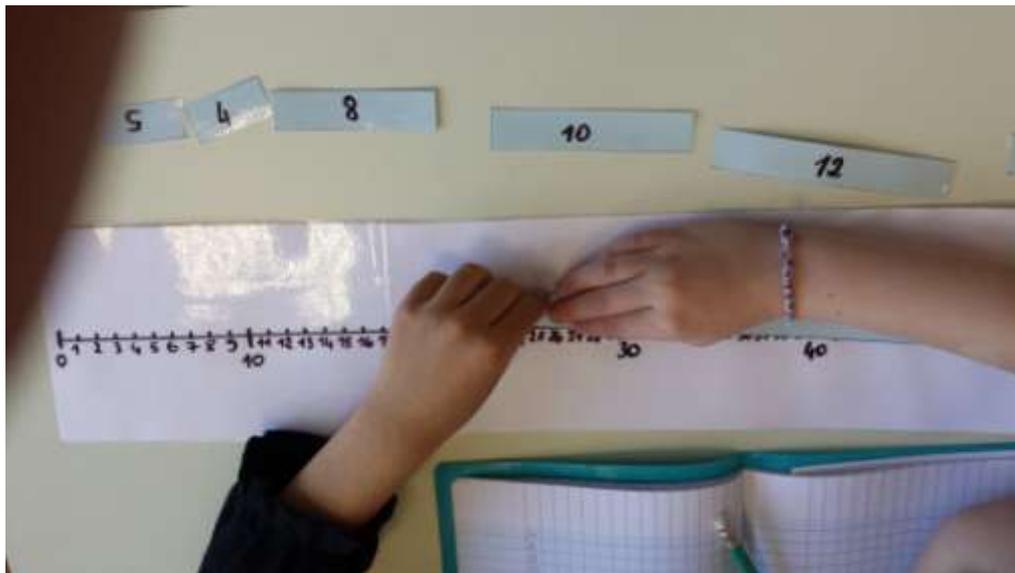
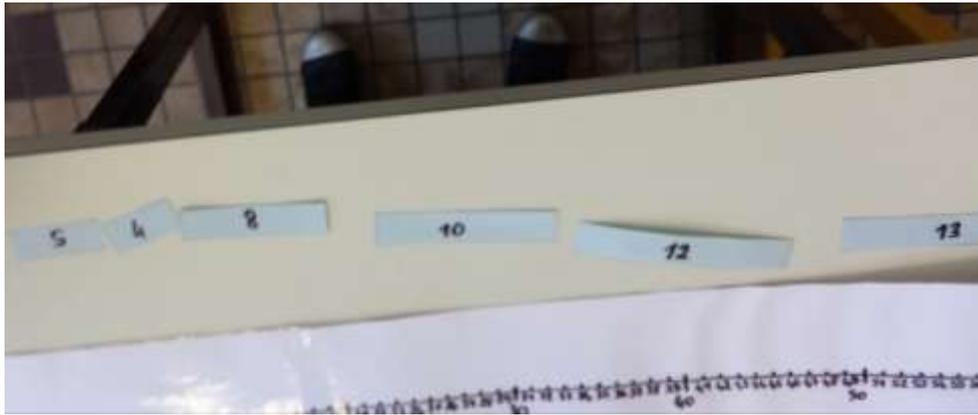
Afin d'évaluer l'impact de la séquence sur les élèves, un test diagnostique final leur est soumis, deux jours après cette institutionnalisation.

b. Analyse du déroulement des trois séances

- Première séance

La grille d'observation a été remplie par l'enseignante qui a suivi trois binômes (d'où le code couleur mis en place pour rendre le tableau plus lisible : un binôme rouge, un bleu, un jaune). Il a été difficile pour elle de pouvoir rassembler toutes les données dans la grilles alors j'ai complété son observation par les enregistrements vocaux.

| Binôme : R - B - J | | Grille d'observation des procédures utilisées | | | | | | | | | | | |
|-----------------------|--|---|-----|--|-----|-----|---|-----|-----|---|-----|-----|----------|
| Soustractions | Procédure 1 : Calcul mental et utilisation de la bande pour valider | | | Procédure 2 : Estimation intuitive et tests des bandes ayant des valeurs proximales | | | Procédure 3 : Estimation perceptive et tests des bandes ayant des valeurs proximales | | | Procédure 4 : Tests des bandes de façon aléatoire, sans estimation | | | Autres |
| 12-7 | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | X | X | / |
| 48-25 | X | --- | --- | --- | X | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | / |
| 61-49 | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | Comptage |



Photographies du matériel en manipulation

Lorsque l'enseignante est passé dans les rangs pour remplir la grille d'observation, **voici les procédures des élèves qu'elle a pu relever, illustrées par des propos d'élèves notés en italique :**

- Certains élèves ont estimé **intuitivement ou perceptivement** les résultats des soustractions pour tester des bandes à valeur proximale :
 - «*Pour $12-7$, on essaye de prendre le résultat, on le prend, on le met sur le 7 et si la bande va jusque 12, c'est le bon résultat, c'est 5. »*
 - « *Pour $48-25$, on a essayé de chercher dans notre tête et on a vérifié avec la 8, c'était pas ça, avec la 10, c'était pas ça, avec la 16 non plus et on a vérifié avec la 23 et c'est ça. »*

- Certains ont **calculé mentalement** et utilisé la bande pour valider leur résultat :
 - « *On a fait 7-3, on le savait déjà alors on a mis 4.* »
 - « *Pour 34-18, j'ai calculé dans ma tête, j'ai cherché le résultat et j'ai vérifié avec la bande 16 et c'était bon.* »
- Certains ont **testé les bandes de façon aléatoire**, sans estimation :
 - « *Pour 12-7, on a pris des bandes au hasard même si c'était pas ça et on a trouvé 5.* »
 - « *Pour 75-40, j'ai testé toutes les bandes.* »

Les manipulations inattendues lors de mon analyse a priori sont les suivantes :

- Certains élèves n'ont pas bien compris la consigne d'utilisation des bandes et les plaçaient sur le 0 de la droite graduée.
- Certains élèves ont confondu entre la valeur de l'écart et la valeur de l'un des termes de la soustraction : « *Pour 12-5, on prend la bande 12 et on la place sur le 7 et on arrive à 19, donc ce n'est pas ça.* »
- Certains élèves ont compté les graduations entre les deux termes de la soustraction : « *Pour 61-49, j'ai compté les graduations entre 61 et 49 : c'est 12 alors j'ai vérifié avec la bande 12 et c'est le bon résultat.* »
- Certains élèves n'ont pas bien compris la manipulation du matériel et ont eu besoin d'une remédiation de l'enseignante : « *Pour 48-25, je cherche le résultat, je compte le résultat dans ma tête et je vérifie après avec les bandes. Je sais que ça fait 23 mais je ne sais pas comment faire avec la bande.* »

Globalement, cette séance a été bien reçue par les élèves qui ont su comment utiliser les bandes. Le travail en binôme a porté ses fruits : lors des écoutes de enregistrements, j'ai pu entendre les élèves expliquer leurs procédures les uns et aux autres. Bien que l'enseignante ait interdit le comptage des graduations en début de séance, certains élèves s'y sont adonnés. Après remédiation et correction collective, les élèves étaient assez à l'aise avec les bandes pour la manipulation prévue en deuxième séance.

- Deuxième séance

Je peux ici présenter cette grille d'observation en faisant la même remarque que pour la première : il a été difficile pour l'enseignante de pouvoir rassembler toutes les données dans la grilles alors j'ai complété son observation par les enregistrements vocaux.

| Binôme : R - B - J | | Grille d'observation des procédures utilisées | | | | | | | | | | | |
|-----------------------|---------------|---|-----|------------------------------------|-----|-----|------------------------------------|-----|-----|--------------------|-----|-----|---|
| Soustractions | Procédure 1 : | | | Procédure 2 : | | | Procédure 3 : | | | Procédure 4 : | | | Autres |
| | Retour à 0 | | | Glissement à la dizaine supérieure | | | Glissement à la dizaine inférieure | | | Glissement vers 10 | | | |
| 52-29 | X | X | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | Rappel des valeurs des bandes utilisées la veille |
| 58-45 | X | X | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | Comptage graduations |
| 79-44 | X | X | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | Comptage graduations |
| 77-13 | X | X | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | Comptage graduations |
| 37-21 | X | X | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | Comptage graduations |

Lorsque l'enseignante est passé dans les rangs pour remplir la grille d'observation, **voici les procédures des élève qu'elle a pu relever :**

- La majorité des élèves ont posé la bande sur le 0 de la droite graduée pour trouver la valeur de la bande :
 - En ayant retenu les valeurs des bandes de la vieille : « *Moi j'ai retenu tous les nombres de la dernière fois et j'ai placé les bandes sur 0 pour trouver leur valeur puis on a cherché ce qu'on pouvait calculer avec les bandes* ».
 - En ayant calculé mentalement avant : « *J'ai fait de tête certains calculs, j'ai trouvé 77-13 et j'ai trouvé la bande 64 et pour vérifier sa valeur, on l'a mise sur le 0* » et « *On a testé les bandes entre 52 et 29, on savait que c'était une bande plus grande alors on mettait une plus grande et quand on trouvé, on la mettait sur 0 pour connaître sa valeur et on a trouvé 23* » et

« On a essayé de calculer $52-29$ dans la tête et après on a vérifié en prenant des bandes au hasard et en les positionnant sur 29. La bande qui va jusque 52 on sait que c'est la bonne alors on la met sur le 0 pour trouver 23 ».

- En posant simplement la bande : « On a mis la bande sur le 0 et on regarde où elle s'arrête : 23 » et « Pour $58-45$, on a pris une bande au hasard puis une autre et on a mesuré celle qui allait de 45 à 58 en la mettant sur le 0 ».

« Pour $79-44$, on est parti de 44 et on est arrivé à 67 alors ce n'était pas la bonne bande, on a essayé une autre bande en partant de 44 qui arrive jusque 79 alors c'est la bonne bande. On est parti de 0 pour trouver la valeur de la bande ».

- Certains élèves ont posé les bandes sur la droite puis compté les graduations :

- « On a compté sur les graduations à chaque fois ».

- Un binôme a notamment estimé avant les valeurs des bandes de façon proximale : « Pour $77-13$, de 13 à 77, on savait qu'on devait prendre la plus longue bande, on l'a placée entre 13 et 77, elle n'a pas dépassé et pour connaître sa mesure, on a compté les graduations entre 13 et 77 ».

- Certains élèves ont testé de façon aléatoire les bandes entre les deux termes des soustractions :

- « On a trouvé la réponse en essayant les bandes chacune leur tour, on a trouvé les bandes qui allaient entre chaque soustraction et on a ensuite calculé de tête pour connaître leur valeur ».

Durant la mise en commun, d'autres procédures ont émergé, surtout celle du glissement à la dizaine entière supérieure :

- Pour calculer $77-13$, un élève propose de faire glisser la bande jusque 80 mais n'a pas su expliquer pourquoi.

- Pour calculer $37-21$, une élève qui a manipulé la bande 13, a dit : « On part d'un chiffre comme 50 par exemple, on arrive à une petite unité et ça donne 63. De 50 à 60 on a 10 et $10 + 3$ ça fait 13 », ce à quoi un autre élève ajoute « Pas forcément à 50 mais partir de nombres de à 0, les nombres ronds ».

Pour le cas de cette séance, les élèves ont majoritairement utilisé la même procédure : celle du retour à 0. C'est une procédure correcte et judicieuse mais qui ne met pas en valeur la propriété de conservation des écarts de la même façon qu'un glissement de la bande vers la dizaine supérieure ou inférieure l'aurait fait. Je pense avec ce recul, qu'il aurait été plus judicieux de faire comme Anne-Marie Rinaldi dans son article « *Mesurer avec une règle cassée* » et donc, découper un morceau des droite graduées d'une certaine valeur à partir de 0 pour les empêcher de procéder au retour au 0. Les élèves auraient ensuite du reporter cette valeur pour conserver l'écart.

- Troisième séance

Cette séance a été effectuée 3 semaines après les deux autres. Contrairement aux deux autres qui ont été construites ensemble et dans une progression de manipulation du matériel, j'étais dans l'attente des résultats de leur expérimentation en classe pour élaborer la troisième en fonction car elle institutionnalise les notions abordées au cours des deux séances précédentes.

Pour diverses raisons, cette séance n'a pas été très concluante. L'une des premières raisons à mon sens, est le fait qu'elle ait été effectuée bien plus tard que les autres, pour cause de vacances scolaires. Même si les élèves s'étaient bien approprié l'utilisation de l'artefact, le terme d'écart n'a été introduit puis utilisé que par l'enseignante seulement, pas par les élèves et à la fin de la première séance. Cela peut se vérifier pendant le lancement de la séance, lorsque l'enseignante a expliqué en traçant une droite au tableau que $53-40$ et $59-46$ sont égales à 13 car chaque terme s'est vu ajouté la valeur de 6, le mot écart a émergé une fois grâce à l'intervention d'un seul élève qui a dit « *c'est toujours le même écart* ».

L'enseignante, dans la volonté pédagogique de vouloir faire participer tous les élèves a passé beaucoup plus de temps que prévu à tenter d'expliquer la conservation des écarts aux élèves en difficultés, ce qui a rendu le moment de passation de consigne particulièrement long.

Après présentation et lecture de l'affiche, les élèves semblent avoir plus d'outils de compréhension et réagissent après explicitation de l'enseignante, un élève se risque même à donner un exemple : « *si tu retires 5 à 40 et 5 à 53, tu auras toujours le même résultat.* »

Les élèves reçoivent l'énoncé à compléter et recherchent seuls, l'enseignante passe beaucoup de temps à leur expliquer les phrases à compléter, elle se base sur l'exemple de l'affiche. Pendant ces temps d'explications, les énoncés sont distribués et les élèves performants commencent l'exercice.

Une des autres raisons qui ont rendu cette séance peu concluante était le manque d'accessibilité de l'énoncé pour les élèves. En effet, à la réception des exercices, les élèves ont demandé toujours plus d'explications. Je pense que la structure de l'énoncé présentait une situation problème trop globale qui bloquaient les élèves à formuler des étapes de résolution. Il aurait été sûrement judicieux de les faire chercher la valeur ajoutée aux termes proposés avant de chercher le terme manquant.

Pour finir, la difficulté majeure de cet énoncé résidait dans le fait qu'il existait plusieurs écarts : l'écart entre les termes pour chacune des deux soustractions, et l'écart entre les deux termes soustrayant et les deux termes soustraits. De plus, l'écart entre les termes pour chacune des deux soustractions est associé au résultat des soustractions, alors que l'écart entre les deux termes soustrayant et les deux termes soustraits est associé à la recherche d'un ajout. Il y a effectivement de quoi perdre certains élèves en difficulté.

Ensuite est venue la correction durant la mise en commun pour les élèves qui avaient pu terminer et c'est encore le même élève performant, ayant participé au début de la séance, qui a répondu « 16 » à la première phrase de l'énoncé à compléter en se justifiant « *moi j'ai fait tout simplement 67 plus combien est égal à 69, donc 14 c'est 16* ».

L'enseignante a ensuite demandé plus de justifications, un élève répond : « *On veut savoir si c'est le même résultat, tout simplement 67-14, ce qui fait 53 puis je dois poser 69-16 ce qui fait 53, on a le même résultat* ». Cet élève a eu une bonne technique pour vérifier ses réponses : calculer les soustractions et valider ses résultats lorsqu'elles ont la même différence. L'enseignante a également validé son résultat en ajoutant « *il y a le même écart entre les deux, c'est pour ça qu'on a le même résultat.* »

Les élèves ont eu plus de facilité en général à trouver l'écart entre 85 et 95, comme entre 52 et 62 car il s'agit d'une dizaine entière, plus facile à calculer mentalement.

J'ai pu notamment entendre deux élèves discuter de leur procédure : « *Il y a un 5 ici et il y a un 5 ici et le 8 est devenu un 9, il y a 1 de plus alors c'est combien ? 6 donc 62. On a ajouté 10 à 52 et 52 plus 10, c'est une dizaine en plus.* »

Après la mise en commun, l'enseignante a continué la séance en posant la soustraction 84-56 au tableau : « *Je dois poser un, à quoi cela correspond-il ?* », l'un des élèves répond qu'il faut rajouter une dizaine car 4-6 est impossible à calculer. Elle a alors ensuite questionné les élèves sur la nécessité de placer une dizaine au terme du bas également. Un élève a répondu « *car sinon ça ferait 814-56* » alors l'enseignante lui a expliqué que la retenue ne représentait pas une centaine mais une dizaine, ce à quoi un élève a réagi « *ça fait 94-56 alors que nous on veut 84-56* » puis un autre « *il faut rendre la dizaine sinon c'est comme la première méthode mais pas barrée* ».

La séance s'est ensuite terminée sur la compréhension des deux retenues : elles reposent sur la conservation des écarts, l'enseignante a terminé la séance par « *on ajoute dix en haut et dix en bas pour garder l'écart, calculer 84-56 revient à calculer 94-66* ».

Cette séance était donc trop complexe pour des élèves de CE2, elle a amené trop de confusion entre écart entre les nombres, valeur ajoutée aux termes puis valeur conservée. De plus, même si un élève comprend qu'il faut « rendre la dizaine » avec la seconde retenue et donc conserver l'écart, il fait référence à la première méthode qui lui a été enseignée : la méthode par emprunt. Il aurait sûrement été préférable de continuer la séquence dans une progression de situations problèmes sur base de manipulation de l'artefact afin de consolider la notion d'écart chez les élèves.

4) Test final

a. *Analyse a priori*

Ce test a pour objectif d'évaluer le niveau d'aisance et d'utilisation de la technique usuelle lorsque les élèves sont confrontés à la résolution de soustractions complexes, demandant à être posées pour être résolues. Par le biais de ce test, il s'agit donc de mesurer l'impact de l'expérimentation sur leur résolution de soustractions. Le test a été effectué par 18 élèves (deux élèves étaient absents ce jour) quelques jours après la troisième séance de l'expérimentation, elle-même effectuée deux semaines après les deux premières, à cause des vacances de Pâques.

Il est composé de 5 soustractions, proposées de façon classique : en ligne et dans un ordre de difficulté croissante, sa seule consigne est « résous ces soustractions ». Je les ai disposées en ligne et avec l'espace nécessaire entre chacune d'entre elles pour les poser afin que les élèves aient pleinement le choix sur la procédure à utiliser. Les deux premières soustractions 15-8 et 21-14 peuvent être résolues facilement mentalement pour un élève de niveau CE2 mais comme les trois suivantes 45-36, 52-17 et 76-68, elles posent les mêmes difficultés si un élève souhaite les poser (il « casse une dizaine » s'il utilise la technique par emprunt ou pose les retenues s'il utilise celle par conservation des écarts). De plus, 15-8 et 21-14 ont la même valeur de différence : 7. Pour calculer les différences de 21-14 puis 45-36, il suffit de passer à la dizaine inférieure, les différences ne sont pas de valeur importante et plus faciles à estimer alors qu'entre 52 et 17 puis 76 et 38, il y a plusieurs dizaines d'écart, ce qui complexifie la tâche.

Tous les résultats et procédures sont à prendre en compte mais une attention toute particulière est retenue sur les procédures de résolution utilisées pour les deux dernières soustractions du test.

b. Résultats

| Test diagnostique final Soustractions Proposées | Pas de réponse | Calcul mental | Soustractions posées | | | Schématisation | Utilisation de matériel Manipulation de Cubes | Total et Taux de réussite |
|--|-------------------------------|---------------------------------|---|---------------------------------------|--|----------------------|--|---------------------------|
| | | | Technique par emprunt | Technique par conservation des écarts | Posée sans technique apparente | | | |
| 15-8 | - | 9 | 3 | 1 | 2 | 3 | - | 16 88,9% |
| 21-14 | - | 7 | 5 | 2 | 2 | 2 | - | 14 77,8% |
| 45-36 | 2 | 6 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 | 9 50% |
| 52-17 | 1 | 6 | 7 | 1 | - | 2 | 1 | 13 72,2% |
| 76-38 | 2 | 6 | 7 | 2 | - | 2 | 1 | 10 55,6% |
| Synthèse : les soustractions ont été.. | 5 fois laissées sans réponse. | 34 fois calculées mentale ment. | 25 fois posées avec la technique par emprunt. | 9 fois posées avec technique usuelle | 5 fois posées sans retenue ni cassage de dizaine | 11 fois schématisés. | 3 fois calculées par la manipulation de cubes. | 68,9% de réussite moyenne |

Voici les calculs de différence ou les élèves ont utilisé la méthode de conservation des écarts :

• 15-8=7

$$\begin{array}{r} 15 \\ - 8 \\ \hline 07 \end{array}$$

• 21-14=17

$$\begin{array}{r} 21 \\ - 14 \\ \hline 17 \end{array}$$

• 45-36=20

$$\begin{array}{r} 45 \\ - 36 \\ \hline 20 \end{array}$$

• 52-17=45

$$\begin{array}{r} 52 \\ - 17 \\ \hline 45 \end{array}$$

• 76-38=48

$$\begin{array}{r} 76 \\ - 38 \\ \hline 48 \end{array}$$

Pour résoudre ces soustractions, cet élève a utilisé plusieurs fois la technique usuelle de soustraction. Dans le cas de 15-8, la méthode est correctement appliquée. Par contre, dans le cas de 21-14, l'élève a pensé à poser la première retenue mais pas la seconde, l'écart n'est pas conservé alors la différence se voit ajoutée d'une dizaine (17 au lieu de 7). Pour la soustraction 45-36, je ne parviens pas à déterminer s'il s'agit vraiment d'un oubli de retenue car l'élève n'a pas su trouver la différence entre 15 et 6. Quoiqu'il en soit, il semble qu'il y ait une grande confusion pour cet/cette élève dans l'utilisation des retenues, il/elle semble mélanger leur rôle dans différentes techniques opératoires de différentes opérations.

Pour 52-17 et 76-38, l'élève a également oublié de conserver l'écart de 10 en ne posant pas la seconde retenue en bas, ses résultats 45 et 48 sont donc incorrects d'une dizaine supplémentaire chacun.

• 21-14=7

$$\begin{array}{r} 21 \\ - 14 \\ \hline 07 \end{array}$$

Dans le cas de cette procédure d'élève, on peut constater que la technique usuelle de soustraction est bien appliquée mais les ratures montrent un possible problème de compréhension de cette technique.

• $45-36=9$

$$\begin{array}{r} 45 \\ -36 \\ \hline 09 \end{array}$$

Ici, cet élève a bien utilisé la technique usuelle de la soustraction pour les soustractions 45-36 et 76-38. Nous pouvons également constater qu'il jongle très bien avec les deux techniques car elles doivent sûrement faire sens toutes les deux.

• $52-17=35$

$$\begin{array}{r} 52 \\ -17 \\ \hline 35 \end{array}$$

• $76-38=38$

$$\begin{array}{r} 76 \\ -38 \\ \hline 38 \end{array}$$

• $45-36=9$

$$\begin{array}{r} 45 \\ -36 \\ \hline 09 \end{array}$$

Cet élève aussi jongle très bien avec les deux techniques, il les utilise toutes les deux et obtient les bons résultats des calculs soustractifs.

• $52-17=35$

$$\begin{array}{r} 52 \\ -17 \\ \hline 35 \end{array}$$

• $21-14=7$

$$\begin{array}{l} 21-14 = 21-10+4 \\ 21-14 = 11-4 \\ 21-4 = 7 \end{array}$$

Pour finir, cette production d'élève est intéressante car c'est la seule décomposition que j'ai notifié lors de la réception des deux tests diagnostiques effectués par les élèves.

L'élève a décomposé 14 pour retirer une dizaine à 21 puis a calculé 11-4 pour obtenir 7.

Je remarque donc que les élèves ont un peu plus utilisé la technique usuelle de soustraction pour résoudre les soustractions du test diagnostique final. L'oubli de la seconde retenue est une erreur néanmoins assez récurrente alors que la notion de conservation des écarts a été travaillée en amont.

5) Analyse globale de l'expérimentation

En comparant le test diagnostique initial au test diagnostique final, nous pouvons constater que l'expérimentation n'a pas vraiment fait évoluer les pratiques soustractives des élèves de cette classe de CE2. En effet, bien qu'ils soient un peu plus à utiliser la méthode par conservation des écarts, certains d'entre eux semblent encore perdus devant la gestion des retenues et leur signification.

C'est surtout la troisième séance, à laquelle j'avais donné l'objectif de faire le lien entre l'écart et sa propriété de conservation puis de l'institutionnaliser dans le cas de la soustraction à retenue qui n'a pas été efficace. Elle a été effectuée trop tôt dans la progression de la séquence et présentait la propriété de façon trop complexe.

Comme je l'ai mentionné précédemment, il aurait sûrement encore été préférable pour les élèves, de continuer à travailler la notion d'écart en utilisant l'artefact construit pour l'expérimentation, dans une progression de situations problèmes dans le but de consolider la notion d'écart encore naissante chez eux. Néanmoins, par contrainte de temps et aussi pour pouvoir vérifier ma problématique initiale qui était la suivante : « *l'utilisation d'un artefact permet-elle d'accéder à la compréhension de la propriété de conservation des écarts sur laquelle est basée la technique opératoire usuelle de la soustraction ?* », j'ai voulu conclure l'expérimentation par une institutionnalisation permettant une évaluation avec le test diagnostique final.

J'aurais pu, notamment, m'inspirer des travaux de Marie-Thérèse Chabroulet et d'Anne-Marie Rinaldi dans leur articles *La Soustraction au CE1* et *Mesurer avec une règle cassée pour comprendre la technique usuelle de la soustraction posée*, afin d'offrir plus de situations didactiques de manipulation aux élèves.

La situation proposée par Marie-Thérèse Chabroulet au début de son article, avec la ficelle de nœuds, aurait pu faire office de lancement en première séance sauf qu'à la place de la ficelle, ils auraient eu la droite à manipuler. En effet, au lieu de donner une droite graduée de chiffres, elle aurait pu être graduée de lettres dans l'ordre alphabétique afin de les habituer à proposer des couples de lettres ayant le même écart. Ainsi, les élèves se seraient habitués à manipuler la droite afin d'acquérir la notion de distance entre deux points en comptant les intervalles et ils

auraient pu plus facilement aussi bien proposer des couples aussi bien en allant « vers l'avant » ou « vers l'arrière », chose qui leur est plus difficile à faire avec des chiffres (une gymnastique pertinente pour la propriété de conservation des écarts dans le cas de la technique usuelle de la soustraction).

Ce qui aurait également pu être proposé aux élèves, dans progression prenant en compte les travaux de Marie-Thérèse Chabroulet et l'artefact construit pour ma séquence, aurait été de leur soumettre un exercice plus approfondi sur des couples de nombres ayant le même écart à suggérer, soit en donnant un couple de base, soit la valeur de l'écart. Ainsi, les élèves auraient sûrement été plus équipés pour la seconde phase de recherche de la première séance, lorsque leur enseignante leur a demandé de trouver des soustractions grâce aux bandes marquées et à la droite graduée. En effet, c'est une phase qui a été un peu « bâclée » car la séance était déjà longue pour les élèves et certains d'entre eux se trouvaient déjà en surcharge cognitive à la suite de la première phase de recherche.

Suite à ces diverses mises en situation, j'aurais également pu m'inspirer du travail d' Anne-Marie Rinaldi qui expose dans ses travaux, une expérimentation pour travailler sur la mise en place de la technique usuelle et justifier sa mise en place et ses étapes de calcul. En effet, comme je l'ai mentionné lors de la conclusion des résultats de procédure de la deuxième séance, il aurait été plus judicieux d'amener les élèves à glisser leurs bandes non marquées vers la dizaine supérieure ou inférieure entre les couples de termes donnés en coupant les droites graduées de quelques graduations. Ainsi, pour trouver les valeurs des bandes, ils n'auraient pas pu effectuer de retour à zéro et auraient été contraints de les faire glisser aux dizaines supérieures ou inférieures ou de les placer sur la graduation laissée sur l'axe de découpe en origine de la droite et de soustraire sa valeur aux bandes afin de conserver leur écart.

En revanche, l'expérimentation a été une réussite sur certains points. Moi qui souhaitais concrétiser la notion de conservation des écarts par la manipulation d'un artefact, j'ai été satisfaite par son efficacité auprès de la classe. En effet, si je reprends quelques éléments de l'article de Pierre Rabardel, "*Qu'est ce qu'un instrument?*", je peux avancer que les élèves ont pu construire certains concepts mathématiques grâce à l'artefact de la droite graduée manipulé avec les bandes.

Cette construction cognitive est rendue possible par les contraintes que l'instrument soumet aux élèves. De plus, la droite graduée est loin d'être un instrument neutre pour des élèves de CE2 qui l'utilisent principalement comme un outil de mesure et de repère. Dans l'expérimentation proposée aux élèves, la droite devient une base de calcul et les bandes marquées puis non marquées, les outils de calcul. Ce sont les contraintes de l'artefact et les consignes données par les enseignants qui vont construire la genèse instrumentale et donner aux élèves des schèmes d'utilisation propres à l'instrument.

Lors de la deuxième séance, les élèves ont pour la plupart bien compris le principe des bandes comme instrument de calcul, puisqu'ils adoptent la démarche de chercher la longueur de la bande pour trouver le résultat d'une soustraction. Je peux alors avancer qu'ils ont accepté les contraintes de l'artefact des bandes non marquées et construit des schèmes d'utilisation en les manipulant afin de les utiliser comme instrument de calcul.

La genèse instrumentale autour de l'artefact de la droite et des bandes a donc permis l'élaboration d'un instrument permettant de concrétiser la notion d'écart chez les élèves

Mon expérimentation présente alors différents aspects qui rendent ses résultats mitigés. Alors que sa mise en place n'a pas eu de réelle incidence sur les pratiques soustractives des élèves et sur leur utilisation de la soustraction par conservation des écarts, une genèse instrumentale a bien été effective et l'artefact de la droite et des bandes est devenu instrument pour les élèves.

Ces résultats tendent alors vers la constatation que la notion de conservation des écarts peut bien être concrétisée par la manipulation d'un artefact. Il aurait fallu néanmoins plus d'activités et de mises en situations permettant aux élèves de construire leur savoir et cela est possible lorsque l'enseignant agit sur les variables des instruments en proposant une diversité de situations pédagogiques et didactiques.

Conclusion

Ce mémoire ayant pour thème l'enseignement de la soustraction en CE2, et surtout, comment aborder la propriété de la conservation des écarts pour donner plus de sens à l'enseignement de la technique usuelle de la soustraction, a soulevé beaucoup de problématiques. La première, et pas des moindres, celle du choix de la méthode à enseigner : la méthode par emprunt ? La méthode par conservation des écarts ? Celle qui fait sens plus facilement pour des élèves de cycle 2 est la méthode par emprunt, plus utilisée par les élèves de la classe où a été menée mon expérimentation. Il semble délicat pour eux d'utiliser une autre méthode, plus difficile à comprendre et qui leur a été enseignée sans travail sur la conservation des écarts en amont. La majorité ne la mobilisent pas et ceux qui le font, ne savent généralement pas gérer correctement les retenues car ils ne savent pas vraiment ce qu'elles représentent.

Même si la méthode par conservation des écarts est de moins en moins enseignée et plus difficile à comprendre, il est toujours de tradition de l'enseigner dans les écoles françaises. C'est alors aux enseignants de profiter de leur liberté pédagogique et didactique afin de choisir la méthode de soustraction à enseigner et ils enseignent parfois les deux en parallèle. Cependant, après avoir mené cette expérimentation, je serais d'avis que cet enseignement soit un peu plus cadré par les programmes, ou que les enseignants soient au moins plus avertis sur les conséquences de leurs choix pédagogiques, de la confusion que les enseignements des deux soustractions peuvent apporter. En effet, il est rare pour un professeur des écoles d'enseigner plusieurs années à la même classe et de suivre son évolution de cycles en cycles, de niveaux en niveaux. Un enseignant en CE1 va peut être faire le choix d'enseigner une méthode puis son collègue en CE2 une autre. Dans ce type de scénario, la notion d'écart est très peu expliquée et travaillée en amont alors qu'elle est la base même de compréhension de la méthode par conservation des écarts de la soustraction.

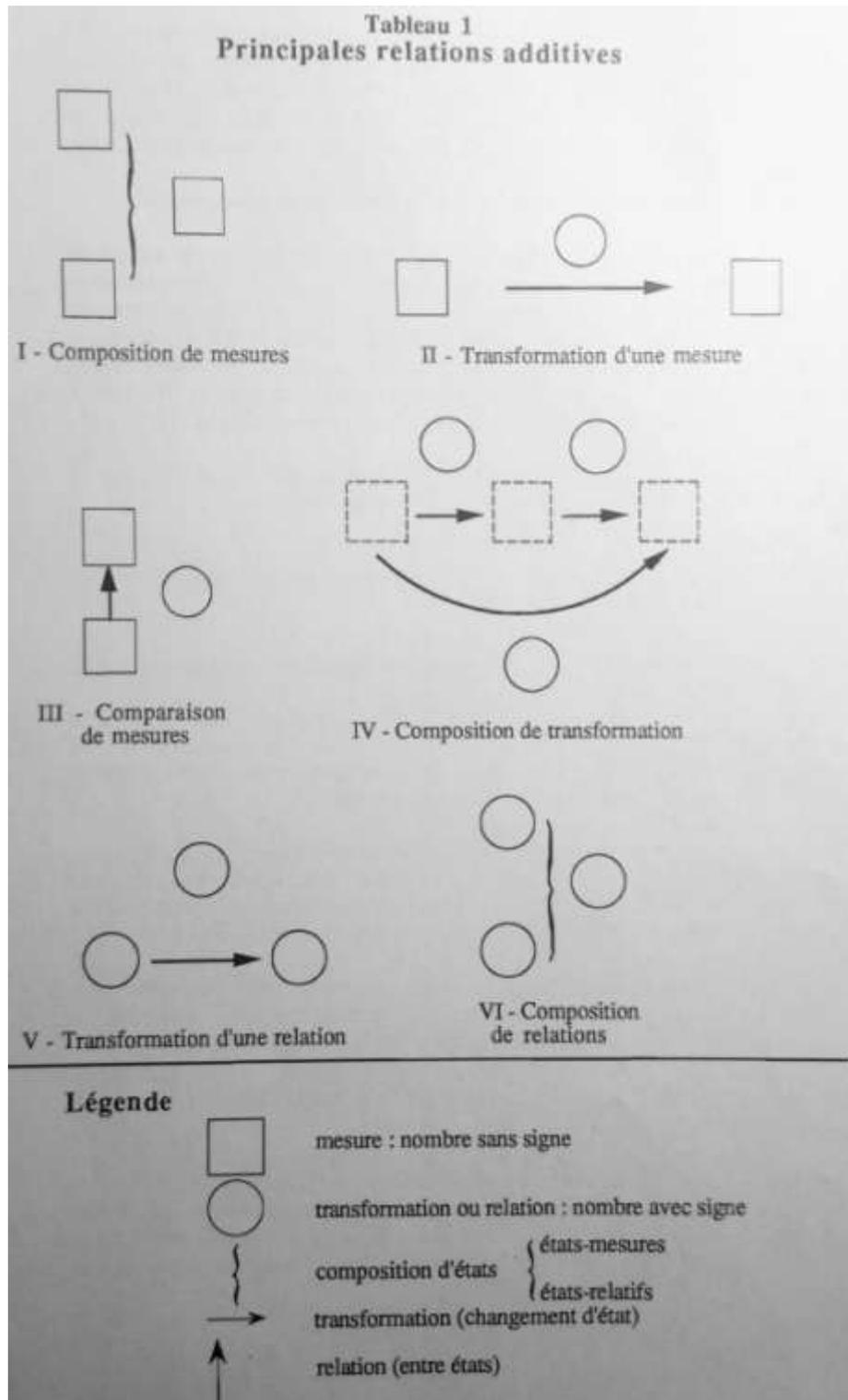
Après avoir mené cette expérimentation, je suis alors d'avis de clarifier l'enseignement de la soustraction au cycle 2 et d'encourager les enseignants à travailler avec les élèves la notion d'écart en leur proposant plusieurs situations didactiques leur permettant de construire et de conceptualiser la notion d'écart, le tout dans un objectif de leur enseigner après la méthode

par conservation des écarts ou pas. En effet, un travail de gymnastique intellectuelle sur les nombres permettra à long terme d'entraîner les élèves à réfléchir de façon logique à leurs résultats sans tomber dans un automatisme pur et dur du calcul. Il est préférable d'exercer les élèves à prendre du recul sur leurs procédures et à raisonner sur leurs résultats afin qu'ils aient plus conscience des propriétés mathématiques sous-jacentes aux calculs.

Je soutiens que la manipulation d'artefact et la genèse instrumentale est à privilégier dans l'enseignement de la soustraction par conservation des écarts au cycle 2 car elle permet aux élèves de vivre les situations didactiques où les conservations des écarts sont en jeu.

Bien que mon expérimentation n'ait pas eu de fort impact sur l'utilisation des techniques soustractives des élèves, elle m'a confortée dans l'importance d'offrir aux élèves des situations variées et solides où ils peuvent manipuler, s'approprier un artefact et le transformer en un instrument de compréhension afin de s'approprier une propriété mathématique. Pour finir, je dirais qu'elle m'a aussi confortée dans l'idée de remettre en cause constamment les ressources et les supports mis à disposition des enseignants afin que nous construisions nous-mêmes des supports d'apprentissage à la fois plus adaptés aux difficultés de leurs élèves, aux apprentissages visés et en accord avec notre pédagogie.

ANNEXES



Grille d'analyse de manuels de CE1 et livre du maître

| | Technique et justification mathématique | Travail en ligne | Calcul mental | Progression |
|-----------------|---|-------------------------|--------------------------------------|--|
| Manuel 1 | Méthode usuelle: conservation des écarts + notion d'échange 10 contre 1 | Oui | Calcul réfléchi | Calcul de différence en ligne puis en colonne en passant d'abord par l'addition à trou sur des nombres jusqu'à 999. Calcul de soustraction posé avec retenue ensuite. L'utilisation du boulier et du compteur matérialisent l'échange 10 contre 1. |
| Manuel 2 | Méthode par emprunt | Oui | Calcul réfléchi | Stabiliser les connaissances en numération: le groupement et les échanges, travail le système positionnel des chiffres. Calcul d'une soustraction posée avec emprunt sur des nombres jusqu'à 100. Les perles et la monnaie permettent de matérialiser cet emprunt. |
| Manuel 3 | Méthode russe ¹ + méthode usuelle | Oui | Calcul réfléchi et calcul automatisé | Calcul de différence en ligne puis en colonne sur des nombres jusqu'à 999. Le calcul de soustraction est d'abord présenté par sauts puis avec l'addition à trou puis calcul de soustraction posé avec retenues. |
| | Technique et justification mathématique | Travail en ligne | Calcul mental | Progression |

| | | | | |
|------------------|---------------------|-----|--------------------------|--|
| Manuel 4 | Méthode par emprunt | Oui | Calcul réfléchi | Calcul de différence en ligne puis posé sans retenue sur des nombres allant jusqu'à 999. Pour introduire la technique, le manuel utilise comme matériel des billes. |
| Manuel 5 | Méthode par emprunt | Oui | Calcul réfléchi | Calcul d'une soustraction d'abord en ligne puis posée avec emprunt sur des nombres jusqu'à 100 utilisant le passage par l'addition à trou. Utilisation de boîte à billes et de monnaie pour matérialiser l'échange. |
| Manuel 6 | Méthode usuelle | Oui | Calcul réfléchi | Calcul d'une soustraction posée sans puis avec retenues sur des nombres jusqu'à 999. |
| Manuel 7 | Méthode par emprunt | Oui | Réfléchi mental ou écrit | Introduction progressive avec d'abord le calcul d'une soustraction posée sans retenues sur des nombres jusqu'à 999 puis institutionnalisation de la technique de la soustraction par emprunt. Les emprunts sont matérialisés par des jetons unités, dizaines, centaines. |
| Manuel 8 | Méthode par emprunt | Oui | Réfléchi | Calcul d'une soustraction posée simple puis avec emprunt sur des nombres jusqu'à 999. |
| Manuel 9 | Méthode par emprunt | Oui | Réfléchi | Introduction progressive de la technique avec l'utilisation des billes de Picbille pour matérialiser l'emprunt. Le calcul d'une soustraction posée avec emprunt se fait sur des nombres jusqu'à 999. |
| Manuel 10 | Méthode par emprunt | Oui | Réfléchi | Calcul de différence sur des nombres à deux puis trois chiffres allant jusqu'à 999. Le calcul de soustraction posé se fait avec emprunt et le matériel utilisé permet de matérialiser cet emprunt. |

- *Fiches de préparations des séances*
(*supports de l'enseignante ayant mené l'expérimentation*)

| Cycle 2 - CE2 (20 élèves) Domaine : Mathématiques Sous-domaine : Les techniques opératoires - la soustraction | | | Titre : L'écart entre les deux termes d'une soustraction | Séance n° 1 Semaine 13 - Période 4 28/03/17 | |
|--|---|---|---|---|---|
| Compétence : B.O | | | | | |
| Objectif de séquence : <ul style="list-style-type: none"> • Conceptualiser la notion d'écart entre les nombres chez les élèves | | | | | |
| Objectif spécifique de la séance : Associer calcul de la soustraction par comptage sur la droite graduée (en avant ou en arrière) et écart entre les nombres mesuré à l'aide de la bande marquée et appropriation de l'artefact | | | | | |
| Durée | Déroulement | Modalités de travail | Activités des élèves | Rôles de l'enseignante (Consignes) | Matériel L'artefact |
| 15 min | Phase de lancement Résolution de soustractions par l'enseignante grâce à l'artefact | Enseignante au tableau, élèves assis à leur place | Ecoute et participation (propositions, échanges, questions si non compréhension de l'utilisation de l'artefact) | <p>1ère étape : Affichage du matériel au tableau et description du matériel « Vous avez devant vous, une droite graduée des 4 bandes de différentes longueurs : 7,8,22,23 ». Elle écrit la soustraction en ligne 15-8 et demande aux élèves s'ils connaissent la réponse : propositions « Nous allons vérifier le résultat avec les bandes, bande 23 ? 22 ? 8 ? » (placement des 3 bandes : réponses fausses) puis placement de la 7 : validation. « On vérifie le résultat grâce à la bande de longueur 7 que l'on peut placer entre 15 et 8 ».</p> <p>2ème étape : Soustraction plus complexe L'enseignante donne un calcul plus complexe : 46-24. Elle demande aux élèves « quelle bande il faut placer entre 46 et 24 pour connaître le résultat ? » : Propositions des élèves et vérification avec les bandes « Est-ce que je vérifie le résultat avec la bande 7 ? 8 ? 23 ? » (placement des 3 bandes : réponses fausses) puis placement de la 22 : validation. « On vérifie le résultat grâce à la bande de longueur 22 que l'on peut placer entre 46 et 24 ».</p> <p>« Maintenant, proposez-moi des soustractions dont le résultat est 22 ».</p> <p>Noter les propositions des élèves et vérifier/ valider à chaque fois en déplaçant la bande 22 entre les termes de la soustraction.</p> <p>➤ Faire émerger les soustractions avec dizaines</p> | Affichées au tableau : - la droite graduée - Les bandes 7,8,22,23 |

| | | | | | |
|--------|---|---|--|--|---|
| | | | | <p>entières, plus faciles à trouver, proposer 52-30, 32-10 par exemple</p> <p>Possible remédiation : Si les élèves ne répondent pas spontanément, déplacer la bande 22 sur la droite et montrer qu'il est possible de trouver en lisant les termes aux extrémités.</p> | |
| 15 min | <p>Phase de mise en situation problème</p> <p>Recherche des élèves</p> | <p>Par binôme de niveau hétérogène (Appropriation plus efficace du matériel et temps de recherche optimisé)</p> | <p>Recherche Emergence des procédures mises en commun par binôme</p> <p>Procédures attendues (grille d'observation à l'attention de l'enseignante qui doit la remplir)</p> | <p>1ère étape : Rappel des modalités de travail</p> <p>« Vous allez travailler avec votre voisin de classe, vous allez résoudre les soustractions que je vais vous donner SEULEMENT avec le matériel que je vais distribuer, vous n'avez pas le droit de les poser. »</p> <p>Distribution du matériel</p> <p>Ecriture des soustractions au tableau</p> <ul style="list-style-type: none"> •7 - 3 = (bande 4) •12 - 7 = (bande 5) •19 - 11 = (bande 8) •18 - 5 = (bande 13) •26 - 10 = (bande 10) •48 - 25 = (bande 23) •77 - 13 = (bande 64) •61 - 49 = (bande 12) •75 - 40 = (bande 35) •34 - 18 = (bande 16) <p>Passage dans les rangs pendant 5-7 min</p> <p>Concentration sur 4 binômes : Remplir la grille d'observation avec les 3 soustractions données</p> <p>Les élèves, suite à cette étape, sont supposés comprendre que «<i>Le résultat de la soustraction correspond à la longueur de la bande que je peux placer entre les deux termes de la soustraction</i> »</p> <p>S'ils n'arrivent pas à cette conclusion, l'enseignante pourra leur préciser et l'écrire au tableau puis transition vers la :</p> <p>2ème étape : Recherche de soustractions ayant le même résultat par le biais des bandes</p> <p>« Vous allez maintenant rechercher et proposer des soustractions qui ont le même écart que les bandes que vous avez ».</p> | <p>Une grande bande numérique (graduée de 0 à 80) par binôme</p> <p>10 bandes marquées par binôme : 4, 5, 8, 10, 12, 13, 16, 23, 35, 64</p> |

| | | | | | |
|----------|--|--|---|--|---|
| | | | | Passage dans les rangs pour récolter les différentes procédures | |
| 10 min | Phase de mise en commun Comparaison des procédures Emergence du mot écart | Enseignante au tableau ou au fond de la classe (pour réguler les réponses), les élèves assis à leur bureau et les binômes qui passent au tableau | Ecoute et participation (échange, justifications) | Interrogation de quelques binômes aux procédures différentes qui passent au tableau pour proposer leur soustraction et manipuler leur artefact. L'enseignante valide ou non et peut faire émerger l'expression d'écart pour l'institutionnalisation. En validant plusieurs soustractions du même écart, elle précise par exemple « <i>Oui, le résultat de 12-7 est le même que (par exemple, proposition du binôme : 15-10). L'écart entre 12 et 7 est donc le même entre 15 et 10.</i> » | |
| 5-10 min | Phase d'institutionnalisation Présentation d'un affichage avec la règle des écarts | Enseignante revient au tableau et présente son affiche | Réactions et questions, reformulation avec leurs mots | Présentation d'une affiche « Il est possible de calculer le résultat d'une soustraction en utilisant une bande qui marque l'écart entre les deux nombres ». | Faire reformuler les élèves avec leurs mots |

| Cycle 2 - CE2 (20 élèves) Domaine : Mathématiques Sous-domaine : Les techniques opératoires - la soustraction | | Titre : La valeur de l'écart entre deux nombres | | Séance n° 2 Semaine 13 - Période 4 29/03/17 | |
|---|--|---|--|---|---|
| Compétence : B.O | | | | | |
| Objectif de séquence : <ul style="list-style-type: none"> Conceptualiser la notion d'écart entre les nombres chez les élèves | | | | | |
| Objectif spécifique de la séance : Trouver la valeur des bandes en les plaçant sur la droite et en les faisant glisser à la dizaine supérieure ou inférieure | | | | | |
| Durée | Déroulement | Modalités de travail | Activités des élèves | Rôles de l'enseignante (Consignes) | Matériel L'artefact |
| 5-10 min | Phase de lancement | Enseignante au tableau, élèves assis à leur place | Ecoute et participation | 1ère étape : Transition- Rappel de séance n°1 <i>« Nous allons continuer à manipuler des bandes plastifiées et la droite graduée . Rappelez-vous, qu'avions-nous fait ? »</i> Réponses attendues : Nous avons déplacé les bandes sur la droite pour résoudre les soustractions, nous avons trouvé d'autres soustractions grâce aux bandes...etc L'enseignante doit mettre en valeur le fait que les déplacements de la bande ne se sont faits que par « sauts » (en manipulant la bande 7 par exemple : <i>Nous avons trouvé le résultat de 15-8 *en plaçant la bande 7 entre 15 et 8* puis entre 27 - 20 *en plaçant la bande 7 entre 20 et 27*...etc)</i> | Affichées au tableau : - la droite graduée - la bande marquée de longueur 7 |
| 10-15 min | Phase de mise en situation problème | Par binômes | Procédures attendues Tâtonnement de déplacements de la bande : - Procédure n°1 : Retour au 0 (l'élève pose une extrémité de la bande sur le 0 pour mesurer la bande) - Procédure n°2 : glissement vers la dizaine supérieure (l'élève pose la bande entre les deux termes de la soustractions puis va la glisser vers la dizaine supérieure, par exemple : entre 58 et 45, la glisser | <ul style="list-style-type: none"> Passation de consigne et précision des modalités de travail : <i>« Vous allez vous mettre avec votre voisin de classe pour résoudre les soustractions écrites au tableau. Comme lors de la première séance, vous n'avez pas le droit de poser la soustraction. Vous devez trouver un moyen d'utiliser les bandes pour résoudre les soustractions sans compter les graduations »</i> Ecriture de 5 soustractions au tableau <ul style="list-style-type: none"> 52 - 29 = (bande 23) 58 - 45 = (bande 13) 79 - 44 = (bande 35) 77 - 13 = (bande 64) 37 - 21 = (bande 16) Passage dans les rangs et observation : Remplir la grille d'évaluation prévue à cet effet pour récolter les procédures | Par binôme : - une droite graduée - Des bandes plastifiées vierges de différentes longueurs (13, 16, 23, 35, 64) |

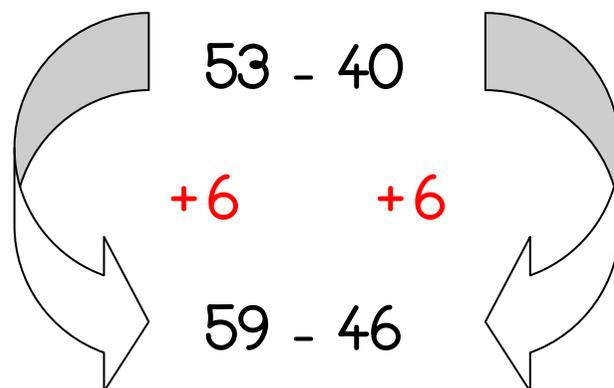
| | | | | | |
|--|--------------------------------------|---|---|--|--|
| | | | <p>vers 60) - Procédure n°3 : glissement vers la dizaine inférieure (l'élève pose la bande entre les deux termes de la soustractions puis va la glisser vers la dizaine supérieure, par exemple : entre 52 et 29, la glisser vers 50) - Procédure n°4 glissement jusque 10 (pour lire la graduation 10 + la valeur de la bande)</p> | | |
| | Phase de mise en commun | Binôme interrogé au tableau et les autres élèves à leur place | Présentation et confrontations des procédures utilisées | <p>Faire venir les binômes au tableau avec leur matériel et leur demander de justifier les résultats trouvés, de montrer comment ils ont manipulé le matériel :</p> <p>Amener les élèves à comprendre qu'en faisant glisser les bandes pour trouver les valeurs des bandes qui sont les résultats des soustractions, ils ont ajouté / retiré la même valeur aux deux termes soustrayant : ils ont conservé les écarts.</p> <p>Par exemple : « <i>En glissant la bande 23 (52-29) vers entre 30 et 53 vous avez trouvé plus facilement la valeur de la bande car 52 - 29 c'est comme 53 - 30 c'est 23, vous avez conservé l'écart.</i> »</p> | |
| | Phase d'institutionnalisation | | | <p>« Lorsqu'on ajoute ou supprime la même valeur aux deux termes de la soustraction, on conserve l'écart entre les deux : le résultat reste le même ».</p> <ul style="list-style-type: none"> Donner des exemples trouvés lors de l'expérimentation sur l'affichage <p>Par exemple : si les élèves ont trouvé le résultat de 58-45 en glissant la bande entre 60 et 47 (glissement vers dizaine supérieure) : leur dire « 58-45 c'est comme 60-47, le résultat est 13 ».</p> | |

| Cycle 2 - CE2 (20 élèves) Domaine : Mathématiques Sous-domaine : Les techniques opératoires - la soustraction | | Titre : De la notion de conservation des écarts à la technique usuelle de soustraction usuelle | | Séance n° 3 Semaine - Période 5 Date : 24/04/17 | |
|---|--|---|--|--|--|
| Compétence : B.O | | | | | |
| Objectif de séquence : <ul style="list-style-type: none"> Conceptualiser la notion d'écart entre les nombres chez les élèves | | | | | |
| Objectif spécifique de la séance : Institutionnaliser la propriété de conservation des écarts et la mettre en rapport direct avec la technique usuelle de soustraction | | | | | |
| Durée | Déroulement | Modalités de travail | Activités des élèves | Rôles de l'enseignante (Consignes) | Matériel |
| 10 min | Phase de lancement ; transition avec la séance précédente | Elèves à leur bureau et enseignant au tableau | Attentifs | <p>« Avant les vacances, nous avons résolu ensemble des soustractions avec des bandes sur des droites graduées. Nous allons continuer à travailler sur les soustractions mais sans le matériel ».</p> <p>L'affiche en format A3 est collée au tableau. L'enseignante lit la phrase de l'affiche puis l'exemple donné Elle demande aux élèves s'ils ont bien compris, leur demander de reformuler puis elle illustre l'exemple à l'aide de la droite graduée de la classe et une bande de 13 cm : « Je peux poser la bande 13 entre 40 et 53 et je peux aussi la poser entre 46 et 59. Je vérifie donc avec la bande que 53-40 c'est comme 59-46, c'est 13. Le résultat est le même car j'ai ajouté 6 à 53 et 6 à 40 pour obtenir 59 et 46.</p> | <p>Affiche préparée pour l'enseignante</p> <p>Droite graduée affichée dans la classe</p> <p>Bande de 13 unités de longueur adaptée à la droite de la classe)</p> |
| 10 min | Phase de mise en situation de recherche | Travail individuel pendant un temps imparti | Recherche des compléments des pairs de couples et des valeurs ajoutées | <p>L'enseignante propose un exercice sous la même forme que la phrase de l'affichage, en reprenant la trame de l'exemple avec des trous à compléter. « Vous allez écrire ces phrases dans votre cahier et les compléter ».</p> <ul style="list-style-type: none"> L'écart entre 67 et 14, c'est comme l'écart entre 69 et ... (correction : 16) On a ajouté la valeur ... (2) à chaque terme. L'écart entre 35 et 23, c'est comme l'écart entre 49 et ... (correction : 37) On a ajouté la valeur ... (14) à chaque terme. L'écart entre 85 et 52, c'est comme l'écart entre 95 et ... (correction : 62) On a ajouté la valeur ... (10) à chaque terme. | Matériel d'écriture de l'élève |

| | | | | | |
|--------|---|---|--|--|--|
| 10 min | Phase de mise en commun | Correction collective | Ecoute et proposition de réponses | <p>«Nous allons corriger maintenant, je vais écouter vos propositions et nous allons les vérifier en calculant les termes sous forme de soustractions ».</p> <ul style="list-style-type: none"> On peut vérifier les résultats en résolvant les soustractions. $67-14 = 53$ et $69-16=53$ On peut vérifier les résultats en résolvant les soustractions. $35-23 = 12$ et $49-37 = 12$ On peut vérifier les résultats en résolvant les soustractions $85-52 =33$ et $95-62=33$ <p>L'enseignante peut rendre une proposition de complément de couple ou de valeur ajoutée fausse pour la calculer et démontrer aux élèves que les résultats des deux soustractions ne sont pas les mêmes alors que l'écart n'est pas gardé.</p> | |
| 10 min | Phase d'institutionnalisation : Etablir le lien avec la technique usuelle | Elèves à leur bureau et enseignant au tableau | Attentifs et réactifs puis prise de note de la soustraction et de l'institutionnalisation finale | <p>L'enseignante écrit une soustraction au tableau et la résout avec les élèves en utilisant la technique usuelle.</p> $\begin{array}{r} 8 \ 14 \\ - 15 \ 6 \\ \hline 2 \ 8 \end{array}$ <p>« Ou dois-je poser les retenues dans cette soustraction posée ? <i>Je dois poser la première à 4 et calcule 14-6 pour obtenir 8 puis je pose la seconde à 5 et calcule 8-6 pour obtenir 2. 84-56 a donc pour résultat 28 »</i></p> <p>Questionner alors directement les élèves sur le sens des retenues et ce qu'elles représentent selon eux. <i>« Pourquoi devoir obligatoirement en poser une deuxième ? »</i></p> <p>Réguler les réponses et les reformuler Conclure par le fait que les retenues représentent une dizaine chacune et que résoudre 84-56 en posant la soustraction avec la méthode usuelle revient à calculer 94-66.</p> <p>Institutionnalisation finale : Quand je pose une soustraction et que j'utilise la méthode de la retenue pour la résoudre, j'ajoute la valeur 10 aux deux termes de la soustraction pour garder l'écart.</p> <ul style="list-style-type: none"> L'écart entre 84 et 56, c'est comme l'écart entre 94 et 66. 84-56 et 94-66 ont le même résultat car on a ajouté la valeur 10 à chaque terme. | |

Lorsqu'on ajoute la même valeur aux deux termes d'une soustraction, on garde l'écart entre les deux : le résultat de la soustraction reste le même.

- Par exemple, le résultat de $53-40$ c'est comme $59-46$, c'est 13.



On a ajouté la valeur **6** aux deux termes 53 et 40 pour garder l'écart.

BIBLIOGRAPHIE

Articles de recherches :

- CHABROULER M.T. (1978), *La Soustraction au CE1*, Grand N, Numéro 16
- RINALDI A.M. (2013), *Mesurer avec une règle cassée pour comprendre la technique usuelle de la soustraction posée*, Grand N, Numéro 91, p.93-119
- TEMPIER F. (2010), *La Numération décimale au CE2*, Grand N, Numéro 86
- VERGNAUD G. (1990), *Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques, un exemple : les structures additives*, Petit x, Numéro 22
- Rabardel P. (1995) *Qu'est ce qu'un instrument ? Appropriation, conceptualisation, mises en situation. Les dossiers de l'ingénierie éducative*, Vol. 19, p. 61-65. CNDP

Textes officiels

- MEN (2008) *Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire*. BO hors-série n°3 du 19 juin 2008
- MEN (2015) *Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4)*. BO spécial n°11 du 26 Novembre 2015
- MEN (2012a) *Progressions pour le cours préparatoire et le cours élémentaire première année. Mathématiques*. Éduscol
- MEN (2012b) *Progressions le cours élémentaire deuxième année et le cours moyen. Mathématiques*. Éduscol
- MEN (2006) *le Socle Commun des Compétences et des Connaissances : les principaux éléments de Mathématiques et la culture scientifique et technologique* Eduscol
- MEN (2002) *Document d'accompagnement, Le calcul posé à l'école élémentaire*, Eduscol